DTU Bibliotek

Denne fil er downloadet fra

Danmarks Tekniske Kulturarv

www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på *www.tekniskkulturarv.dk/about*

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

~~13~~

~~517~~

Denne Bog
tilhörer
Industriforeningen
i
Kjöbenhavn

~~517~~

TB Gl.
517 Boh
1915 Afsn. 1

Lærebog

i

Matematisk Analyse

1ste Afsnit

Af

Harald Bohr og Johannes Mollerup

København
1915

Lærebog

i

Matematisk Analyse

(En foreløbig Udarbejdelse til Brug ved Forelæsninger paa Polyteknisk Læreanstalt)

af

Harald Bohr og Johannes Mollerup

København
1915.

1ste Afsnit.

Elementær-algebraiske Undersøgelser med Anvendelse paa den analytiske Plangeometri og Rumgeometri.

Indledning.

Det foreliggende første Afsnit af vor Lærebog i „Matematisk-Analyse" er i det hele og store af elementær-algebraisk Natur, d. v. s. de Opgaver, der behandles, er i det væsentlige saadanne, der løses ved de fire elementære Regneoperationer: Addition, Subtraktion, Multiplikation og Division. Først i næste Afsnit, der behandler den almindelige Funktionslære og Infinitesimalregningens Begyndelsesgrunde, vil den fra de elementære Regneoperationer væsensforskellige Operation: Grænseovergang, der er karakteristisk for den „højere" eller „ikke elementære" Analyse, naa frem til systematisk Behandling.

Inden vi begynder vor Gennemgang af selve Stoffet skal vi her i Indledningen indføre nogle Betegnelser og gøre Rede for nogle Udtryksmaader, der faar en saa udstrakt Anvendelse overalt i det følgende, at det vil være paa sin Plads allerede her at drage dem frem. Tillige skal vi af og til minde Læseren om nogle simple velkendte Sætninger, der er af fundamental Betydning for det foreliggende Afsnit.

1. <u>Konstant og Variabel.</u> Lad os for det første bemærke, at det Talområde, hvori vi i dette Afsnit opererer, helt igennem er de <u>reelle</u> Tal; vi undtager herfra blot nogle enkelte Bemærkninger om algebraiske Kurver og Flader i Slutningen af Afsnittet.

Ved Ordet „Tal" forstaar vi derfor overalt „reelt Tal". Et reelt Tal er enten rationalt eller irrationalt; set fra et andet Synspunkt er et reelt Tal enten positivt eller Nul eller negativt. Ved Undersøgelser af almindelig Karakter, hvor vi opererer med Tallene uden paa Forhaand at ville binde os til noget specielt Valg af dem, betegner vi disse Tal ved Bogstaver; vi bevarer da Frihed til ved senere Opgaver og specielle Eksempler at kunne tillægge de indgaaende Tal specielle Værdier. Vi skelner ved enhver Undersøgelse mellem de Bogstaver, der udtrykker Konstanter og dem, der udtrykker Variable. En Konstant er vel i og for sig vilkaarlig eller dog kun underkastet visse indskrænkende Betingelser, men den forbliver i Modsætning til en Variabel uforandret under hele Undersøgelsens Forløb. Naar man for en Variabel har Frihed til at indsætte et hvilketsomhelst Tal, kaldes den en ubegrænset Variabel; ofte vil imidlertid en indgaaende Variabel være underkastet indskrænkende Betingelser, f. Eks den kun at kunne antage positive Værdier, kun at kunne antage Værdier mellem 0 og 1, at kunne antage samtlige Værdier undtagen Nul eller lignende. Man benytter sædvanligvis at betegne Konstanter med Alfabetets første Bogstaver: $a, b, c \ldots$ eller $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ medens man derimod betegner de Variable med de sidste Bogstaver: $x, y, z \ldots$ eller de tilsvarende græske Bogstaver: ξ, η, ζ (Af Bogstaverne $x, y, z \ldots$ vil vi dog ogsaa ofte gøre anden Brug, nemlig til at betegne Ubekendte, d. v. s. Tal, der skal findes ud fra visse opgivne Betingelser, som de er underkastet). Lad os tilføje den Bemærkning, at Ordene „konstant" og „variabel" ogsaa benyttes om andre Begreber end netop Tal; taler man saaledes om rette Linier i Planen, da kan Udtrykket „en konstant ret Linie" betyde

en i og for sig vilkaarlig valgt, men gennem hele Undersøgelsen fastholdt ret Linie, medens en variabel ret Linie er en ret Linie, der under selve Undersøgelsen tænkes at indtage forskellige Stillinger i Planen.

2. Polynomium i een Variabel. Ved et Polynomium $P(x)$ i den variable x forstaas et Udtryk af Formen

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_m x^m \ ,$$

hvor $a_0, a_1, \ldots\ldots a_m$ er Konstanter, medens x er en uindskrænket Variabel. Er samtlige Konstanter $a_0, a_1 \ldots\ldots a_m$ (Polynomiets Koefficienter) lig med Nul, kaldes Polynomiet et Nulpolynomium, i modsat Fald et egentligt Polynomium. Idet vi kun tager Hensyn til de af Polynomiets Led $a_p x^p$, hvori Koefficienten a_p er $\neq 0$ (læs: forskellig fra 0), forstaar vi ved Graden af et egentligt Polynomium det (hele, ikke negative) Tal, der angiver Eksponenten til x i det „højeste" Led; er (1) et egentligt Polynomium og er $a_m \neq 0$, har (1) saaledes Graden m. Er $P_1(x)$ et Polynomium, da er $-P_1(x)$ ligeledes et Polynomium; er $P_1(x)$ og $P_2(x)$ to Polynomier i samme Variable x, da vil $P_1(x) + P_2(x)$ og $P_1(x) \cdot P_2(x)$ ijensynlig atter gennem formel Udregning kunne skrives som Polynomier. Vi siger om to Polynomier, at de er identiske (ens), hvis de enten begge er Nulpolynomier, eller begge det samme egentlige Polynomium, idet herved menes, at de har samme Grad m, og at tilsvarende Koefficienter (d.v.s. Koefficienterne til samme Potens x^r ($r = 0, 1, 2 \ldots\ldots m$)) er ligestore. At to Polynomier er identiske kan ijensynlig ogsaa udtrykkes ved at sige, at deres (formelt dannede) Differens er et Nulpolynomium. Et egentligt Polynomium af nte Grad kan aabenbart karakteriseres ved, at man opgiver $m+1$ Konstanter: $a_0, a_1 \ldots a_m$ (Polynomiets Koefficienter), af hvilke $a_m \neq 0$. Undertiden karakteriserer man imidlertid Polynomiet paa anden Maade end ved at

opgive dets Koefficienter, for Eks. derved at man opgiver de Værdier, det antager for visse Værdier af den variable x; i saadanne Tilfælde føres man til den Opgave at bestemme $m+1$ Tal: $a_0, a_1, \ldots . a_m$, Polynomiets Koefficienter, der er underkastet visse Betingelser, og det maa da i de forskellige Tilfælde nærmere undersøges, hvorledes disse Betingelser skal være beskaffne (f. Eks. hvor mange Betingelser man maa opgive), for at Polynomiet, d. v. s. $a_0, a_1 \ldots . a_m$, derved skal være entydig bestemt.

Man siger om et Tal α, at det er et <u>Nulpunkt</u> eller en <u>Rod</u> i Polynomiet (1), hvis det indsat for den Variable x gør Polynomiet til Nul, altsaa hvis det er en Rod i (en Løsning til) den <u>algebraiske</u> Ligning

$$a_0 + a_1 x + \ldots . a_m x^m = 0,$$

hvor x betegner en Ubekendt. Et Nulpolynomium har <u>ethvert</u> Tal til Rod; et Polynomium af 0te Grad (altsaa en Konstant $a_0 \neq 0$) har <u>ingensomhelst</u> Rod. Der gælder som bekendt den Sætning, at hvis α er en Rod i et egentligt Polynomium (1), da kan dette skrives paa Formen

$$(x-\alpha)(b_0 + b_1 x + \ldots . b_{m-1} x^{m-1}),$$

hvor $b_0, b_1 \ldots . b_{m-1}$ er Konstanter, $b_{m-1} = a_m$. Er det nye Polynomium $b_0 + b_1 x + \ldots . b_{m-1} x^{m-1}$ ikke atter deleligt med $x-\alpha$, d. v. s. er α ikke Rod i dette sidste Polynomium, siges α at være <u>enkelt</u> Rod i Polynomiet (1), i modsat Fald derimod at være <u>Rod flere Gange i (1)</u>, nøjagtigere: er (1) deleligt med $(x-\alpha)^p$ (hvor p er et helt Tal >1), men ikke med $(x-\alpha)^{p+1}$, siges α at være

netop en p-dobbelt Rod i (1). Ud fra det foregaaende udleder man som bekendt umiddelbart, at et egentligt Polynomium af nte Grad højst har n Rødder (d. v. s. enten slet ingen, 1, 2. . . . . eller n Rødder), og at denne Sætning forbliver gyldig, naar en p-dobbelt Rod tælles for p Rødder. Et egentligt Polynomium af nte Grad: $a_0 + a_1 x + \ldots\ldots a_n x^n$ med de n reelle Rødder $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$, hvor vi har skrevet en p-dobbelt Rod op p Gange, kan skrives paa Formen

$$a_n (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots\ldots (x-\alpha_n).$$

Idet saaledes et egentligt Polynomium i hvert Fald kun kan antage Værdien Nul for et endeligt Antal Værdier, nemlig højst for n Værdier, hvis Polynomiet er af nte Grad, maa et Polynomium, hvorom vi ved, at det antager Værdien Nul for uendelig mange Værdier af x, nødvendigvis være et Nulpolynomium. Heraf følger atter, at to Polynomier i x, der er ligestore (d. v. s. antager samme Talværdi) for uendelig mange Værdier af den Variable x, maa være identiske; thi det Polynomium, der fremkommer ved at subtrahere det ene af de to Polynomier fra det andet, antager jo Værdien 0 for uendelig mange Værdier af x og er følgelig et Nulpolynomium. Specielt gælder altsaa den fundamentale Sætning: To Polynomier er da og kun da ligestore for enhver Værdi af x, naar de er identiske.

3. Polynomium i flere Variable. Begrebet: Polynomium i een Variabel udvides paa naturlig Maade til Begrebet: Polynomium i et vilkaarligt Antal Variable gennem følgende Definition: Ved et Polynomium $P(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$ i de n indskrænkede Variable $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ forstaas en Sum af Led, hvoraf hvert

enkelt Led har Formen $a x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots\ldots x_n^{p_n}$, hvor a er en Konstant, medens $p_1, p_2 \ldots\ldots p_n$ er hele, ikke negative Tal. I det vi tænker os saadanne Led i Polynomiet $P(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$, for hvilke Faktoren $x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots\ldots x_n^{p_n}$ er den samme, sammentrukket til eet Led, siger vi om Polynomiet, at det er et Nulpolynomium, hvis alle Koefficienterne a er Nul; i modsat Fald kaldes Polynomiet et egentligt Polynomium. Ved Graden af et Led $a x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots\ldots x_n^{p_n}$, $a \neq 0$, forstaas det (hele, ikke negative) Tal: $p_1 + p_2 \ldots\ldots p_n$, der angiver Summen af Eksponenterne, og ved Graden af et egentligt Polynomium forstaas, i det vi kun tager Hensyn til de Led, for hvilke Koefficienten a er $\neq 0$, Graden af det eller de Led, der er af højst Grad. Saaledes er f. Eks. Polynomiet $7x_1^3 + \sqrt{5} \cdot x_1^2 x_2 - \frac{1}{2} x_2^2 + 6$ et egentligt Polynomium af tredje Grad i de to Variable x_1 og x_2. Et Polynomium af første Grad kaldes ogsaa et lineært Polynomium i, eller simpelthen en lineær Funktion af de indgaaende Variable. To Polynomier i de Variable $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ siges at være identiske, hvis deres (formelt dannede) Differens er et Nulpolynomium.

Man siger om et Sæt af n Tal $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n)$, at det er et Rodsæt i Polynomiet $P(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$, hvis Polynomiet antager Værdien Nul, naar man for x_1 indsætter α_1, for x_2 indsætter $\alpha_2 \ldots\ldots$ for x_n indsætter α_n. Man siger i dette Tilfælde ogsaa at, Talsættet $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n)$ er en Løsning i den algebraiske Ligning $P(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) = 0$. Et Nulpolynomium har naturligvis alle mulige Rodsæt $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n)$; er Polynomiet egentligt, kan det ske, at det slet intet Rodsæt har, at det hvi et endeligt Antal Rodsæt, eller at det har uendelig mange Rodsæt; saaledes har f. Eks Polynomiet $x_1^2 + 2x_2^2 + 1$ intet Rodsæt, Polynomiet $x_1^2 + 2x_2^2$ et og kun et Rodsæt, nemlig $(0,0)$, medens Polynomiet $2x_1 - x_2$ har uendelig mange Rodsæt, nemlig

Talsættet (4, 24) for enhver Værdi af t. I det et egentligt Polynomium i flere Variable — i Modsætning til hvad der fandt Sted, da Talen var om et egentligt Polynomium i kun een Variabel — kan have uendelig mange Rodsæt, gælder her ikke den Sætning, at et Polynomium med uendelig mange Rodsæt nødvendigvis er et Nulpolynomium; man kan altsaa ikke slutte, at to Polynomier er identiske, fordi de antager samme Værdi for uendelig mange Talsæt. Derimod gælder der, som vi skal vise, den fundamentale Sætning, at to Polynomier $P_1(x_1, x_2 \ldots . x_m)$ og $P_2(x_1, x_2 \ldots . x_m)$ da og kun da antager samme Værdi for ethvert for de Variable indsat Talsæt, hvis de er identiske eller, hvad der øjensynlig udtrykker det samme, at et Polynomium $P(x_1, x_2 \ldots . x_m)$, der antager Værdien Nul, hvilke Værdier man end indsætter for de Variable, nødvendigvis er et Nulpolynomium. Rigtigheden af denne Sætning bevises ved Induktion: Vi ved, at Sætningen er rigtig for $n = 1$ (2, Sluttningen); vi skal da vise, at naar Sætningen antages rigtig for $n = m$, da følger af denne Antagelse, at Sætningen ligeledes er rigtig for $n = m+1$. Lad der da være forelagt et Polynomium i de $m+1$ Variable $x_1, x_2 \ldots . x_{m+1}$, hvorom det er givet, at det antager Værdien Nul, hvilke $m+1$ Tal vi end indsætter for de Variable; vi skal vise, at dette Polynomium er et Nulpolynomium. I dette Øjemed ordner vi Polynomiet efter Potenser af een af de Variable f. Eks. x_{m+1}, d. v. s. vi skriver Polynomiet paa Formen

$$(2) \quad A_0 + A_1 x_{m+1} + A_2 x_{m+1}^2 + \ldots . + A_r x_{m+1}^r ,$$

hvori $A_0, A_1 \ldots . A_r$ er Polynomier i de m andre Variable $x_1, x_2 \ldots . x_m$. Vi tænker os nu disse sidste Variable erstattet med vilkaarlig valgte faste Tal; derved bliver (2) et Polyno-

minus i den ene Variable x_{m+1} med Koefficienterne $A_0, A_1 \ldots A_n$; dette sidste Polynominum antager imidlertid Værdien Nul for enhver Værdi af x_{m+1} (i det jo det oprindelige Polynominum antog Værdien Nul, hvilke Værdier man end indsatte for de $m+1$ Variable); heraf følger imidlertid, at Polynomiet i den ene Variable x_{m+1}, er et Nulpolynominum, d. v. s. at alle Koefficienterne $A_0, A_1 \ldots A_n$ er lig med Nul. Vi har hermed vist, at Polynomierne $A_0, A_1 \ldots A_n$ i de m Variable $x_1, x_2 \ldots x_m$ antager Værdien Nul, hvilke Værdier vi end indsætter for de Variable; heraf følger imidlertid ud fra den gjorte Forudsætning om Polynomier i kun m Variable, at disse Polynomier $A_0, A_1 \ldots A_n$ alle er Nulpolynomier, d. v. s at deres Koefficienter alle er Nul. Men da Mængden af samtlige Koefficienter i det oprindelig forelagte Polynominum er den samme som Mængden af samtlige Koefficienter i $A_0, A_1 \ldots A_n$, maa dette Polynominum ligeledes være et Nulpolynominum, saaledes som vi skulde vise.

Et Polynominum af m^{te} Grad kaldes et <u>homogent</u> Polynominum af m^{te} Grad, hvis samtlige Led, hvis Koefficienter er $\neq 0$, er af m^{te} Grad; saaledes er f. Eks. Polynomiet $5x_1^3 - 7x_1^2x_2 + x_1x_2^2 - 3x_2^3$ et homogent Polynominum af 3^{dje} Grad i de to Variable x_1 og x_2. Multipliceres man i et homogent Polynominum af m^{te} Grad enhver af de Variable med et og samme Tal k, bliver derved hele Polynomiet øjensynlig multipliceret med k^m. Et <u>lineært homogent</u> Polynominum i de n Variable $x_1, x_2 \ldots x_n$ (en lineær homogen Funktion af de n Variable $x_1, x_2 \ldots x_n$) har øjensynlig Formen $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n$, hvor ikke samtlige n Koefficienter $a_1, a_2 \ldots a_n$ er lig med Nul.

4 Løsning til et System af algebraiske Ligninger. Lad der være givet et System af algebraiske Ligninger, d. v. s. af Ligninger

$$P_1(x_1 \ldots . x_n) = 0 \,,\; P_2(x_1 \ldots . x_n) = 0 \ldots . P_m(x_1 \ldots . x_n) = 0 \,,$$

hvor $P_1, P_2 \ldots . P_m$ er Polynomier i de n Variable $x_1, x_2 \ldots . x_n$ eller, som vi her hellere vil sige, i de n Ubekendte $x_1, x_2 \ldots . x_n$, og hvor Antallet m af Ligninger ikke netop behøver at være det samme som Antallet n af Ubekendte. Ved en Løsning til dette System af Ligninger forstaas et saadant Talsæt $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots . \alpha_n)$, at samtlige m Ligninger tilfredsstilles, naar vi for x_1 indsætter α_1, for x_2 indsætter $\alpha_2 \ldots .$, for x_n indsætter α_n. Et System af algebraiske Ligninger kan have ingen Løsning, et endeligt Antal Løsninger eller uendelig mange Løsninger. I saadanne Tilfælde, hvor Systemet har uendelig mange Løsninger, søger man i Almindelighed en Parameterfremstilling, d. v. s. man søger at skrive Løsningerne paa Formen: $x_1 = X_1 \,,\; x_2 = X_2 \ldots . x_n = X_n$ eller kortere $(X_1, X_2 \ldots . X_n)$, hvor $X_1, X_2 \ldots . X_n$ indeholder een eller flere Variable (Parametre), saaledes at naar vi lader denne eller disse Parametre variere, $(X_1, X_2 \ldots . X_n)$ derved efterhaanden gennemløber samtlige Løsninger til det givne Ligningssystem. Betragter vi f. Eks Ligningen $2x_1 - x_2 = 0$, kan Løsningen skrives paa Formen $x_1 = t \,,\; x_2 = 2t$, hvori t er en uindskrænket Variabel; thi lader vi t efterhaanden gennemløbe samtlige Tal, vil Talsættet $(t, 2t)$ derved gennemløbe samtlige Løsninger til den givne Ligning (hver kun een Gang) og ingen andre Talsæt. Betragter vi som et andet Eksempel Ligningen $x_1^2 + x_2^2 = 1$, vil Løsningerne i Parameterfremstilling kunne udtrykkes ved $x_1 = \cos t \,,\; x_2 = \sin t$ eller $(\cos t, \sin t)$, thi lader vi t variere, vil Talsættet $(\cos t, \sin t)$ efterhaanden gennemløbe samtlige Løsninger

til den givne Ligning og ingen andre Talsæt; lader vi i det sidste Eksempel Parameteren t være en indskrænket Variabel, faar vi paa denne Maade enhver Løsning med, ikke een men uendelig mange Gange; ønsker vi, at $(\cos t, \sin t)$ skal give os samtlige Løsninger, hver kun een Gang, maa t underkastes en indskrænkende Betingelse, f. Eks den kun at maatte antage Værdier mellem 0 (incl.) og 2π (excl.). Lad os tilføje den Bemærkning, at Ordet Løsning benyttes paa ganske tilsvarende Maade, naar Talen er om et System af n ikke algebraiske Ligninger med n Ubekendte.

5. Elimination. Som en Art omvendt Operation til den Operation at udtrykke Løsningerne til et givet System af Ligninger ved Hjælp af en Parameterfremstilling, svarer den Operation, der kaldes at eliminere (bortskaffe) et vist Antal Parametre mellem Ligningerne i et givet System. Tænker vi os forelagt et System af Ligninger, (der ikke netop behøver at være algebraiske) hvori der indgaar f. Eks. 5 Ubekendte x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, forstaar vi ved at eliminere de to Ubekendte t_1 og t_2 (Parametrene) at danne et nyt System af Ligninger mellem x_1, x_2 og x_3, hvori t_1 og t_2 ikke mere indgaar, saaledes at det Baand, der af de fundne Ligninger paalægges x_1, x_2, x_3, er fuldkommen ensgyldigt med det Baand, som det oprindelig givne System af Ligninger paalægger x_1, x_2, x_3; hermed menes, nøjagtig udtrykt, at Mangden af Løsninger til det nye Ligningssystem stemmer overens med de Talsæt $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, der dannes af Løsningerne $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2)$ til det givne Ligningssystem ved at se bort fra Værdierne β_1 og β_2 for de Ubekendte t_1 og t_2 eller, hvad der er det samme, ved at slette de Tal β_1 og β_2 ud, der staar paa de sidste to Pladser. Betragter vi f. Eks. de to Ligninger $x_1 = t$, $x_2 = 2t$, finder vi ved Elimination af t Ligningen $2x_1 - x_2 = 0$; Løsningen til det givne System har Parameterfremstillingen $(u, 2u, u)$, Løsningen til den nye Ligning har Parameterfremstillingen $(u, 2u)$; betragter vi

som et andet Eksempel Ligningerne $x_1 = \cos t$, $x_2 = \sin t$, finder vi ved Elimination af t Ligningen $x_1^2 + x_2^2 = 1$

Vi er nu færdige med de forberedende Bemærkninger, som vi ønskede at forudskikke for Behandlingen af selve Stoffet, og skal afslutte Indledningen med nogle faa orienterende Ord om Indholdet af det følgende. Til at begynde med skal vi beskæftige os med de saakaldte lineære Problemer, d. v. s. med lineære Funktioner og navnlig med Løsningen af lineære Ligninger (første Grads Ligninger) og derfor allerførst med det Hjælpemiddel, Determinanttheorien, som Behandlingen af de lineære Ligninger kræver. Derefter skal vi, om end paa langt mindre indgaaende Maade, beskæftige os med Polynomier af højere Grad, væsentlig dog kun med Polynomier af 2den Grad. Endelig skal vi i de sidste Kapitler anvende de forudgaaende Undersøgelser vedrørende to og tre, til Dels ogsaa fire Variable til en Behandling af Grundtrækkene af den analytiske Plangeometri og den analytiske Rumgeometri; herved vil vi tillige opnaa en smuk Illustration til de tidligere fundne Resultater gennem den geometriske Fortolkning, de bliver Genstand for.

Kapitel I

Determinanterne og deres Anvendelse.

Determinanter.

6. Indledende Bemærkninger. Begrebet Determinant er oprindelig indført til Brug ved Løsning af lineære Ligninger med flere Ubekendte. Vi vil indlede Fremstillingen af Determinanternes Theori med nogle faa orienterende Bemærkninger om den Rolle, Determinanterne spiller for Løsningen af et System af saadanne Ligninger.

Lad os først betragte det specielle simple Tilfælde, hvor der er forelagt to lineære Ligninger

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

til Bestemmelse af de to Ubekendte x og y. For at finde x elimi-

merer man som bekendt den anden Ubekendte y ved at multiplicere den øverste Ligning med b_2, den nederste med $-b_2$ og derefter lægge de to nye Ligninger sammen; herved faas

$$x(a_1 b_2 - a_2 b_1) = c_1 b_2 - c_2 b_1 ,$$

altsaa, idet $a_1 b_2 - a_2 b_1$ antages $\neq 0$,

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} .$$

Paa tilsvarende Maade (eller ved simpelthen i det fundne Udtryk for x at ombytte Bogstaverne a og b) findes for den anden Ubekendte y Udtrykket

$$y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1} .$$

Vender vi os herfra til det Tilfælde, hvor der, idet n betegner et større positivt helt Tal, er givet n lineære Ligninger til Bestemmelse af n Ubekendte, vil man paa tilsvarende Maade kunne eliminere samtlige Ubekendte paa een Gang ved at bortskaffe dem een for een, og man vil derved, ligesom i det ovenfor betragtede Tilfælde $n=2$, finde enhver af de Ubekendte udtrykt ved en Brøk, hvis Tæller og Nævner er flerleddede Størrelser, hvori de enkelte Led er Produkter dannede af Ligningernes Koefficienter. Medens imidlertid for $n=2$ Eliminationen af den ene Ubekendte foregik umiddelbart, og de fundne Udtryk for de Ubekendte var overmaade simple, vil allerede for lidt højere Værdier af n den Regning, der skal udføres

for at bortskaffe $n-1$ af de Ubekendte være meget vidtløftig og noverskuelig, ligesom Udtrykkene for de Ubekendte vil være overmaade sammensatte og tilsyneladende overordentlig indviklede (saaledes vil de i Tæller og Nævner forekommende flerleddede Størrelser allerede for $n=5$ indeholde over 100 Led).

For i det almindelige Tilfælde, hvor n er et vilkaarligt positivt helt Tal, at kunne naa til en simpel Behandling af Eliminationen og navnlig for at kunne skrive Udtrykkene for de Ubekendte paa enkel og overskuelig Maade, indfører man Begrebet Determinant, som i sig ikke er andet end en afkortet Betegnelse for de i Løsningernes Tællere og Nævnere optrædende flerleddede Størrelser.

Ved den følgende systematiske Fremstilling af Determinanternes Theori vil vi imidlertid ikke tage vort Udgangspunkt i et System af lineære Ligninger, d. v. s. vi vil ikke indføre Determinanterne i umiddelbar Tilknytning til Løsningen af et saadant System; det vil være mere hensigtsmæssigt at gaa den omvendte Vej, at indføre Begrebet Determinant og udtrykke de simple og vigtige Sætninger, som gælder for Udregning af og Regning med Determinanter, direkte, uafhængigt af Ligningernes Theori, og saa først bagefter som en Anvendelse af Determinanternes Theori vise deres fundamentale Betydning for Behandlingen af de lineære Ligninger.

7. <u>Permutationer af Tallene 1, 2 . . . n.</u> Inden vi opstiller Definitionen paa Begrebet Determinant, vil vi forudskikke nogle simple Betragtninger over <u>Permutationer</u>. Som bekendt kan de n første Tal i Talrækken 1, 2, 3 . . . n ordnes paa i alt $n! = 1.2.3 \ldots n$ forskellige Maader. Blandt disse $n!$ Permutationer udmærker Permutationen

$$1, 2, 3 \ldots n$$

sig ved, at Tallene er skrevet i deres naturlige Rækkefølge; naar vi betragter 2 vilkaarlige af Tallene i denne Permutation, gaar stedse det mindre foran (staar til venstre for) det større. Af en vilkaarlig af de øvrige $n!-1$ Permutationer

$$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$$

kan vi udtage et Talpar α_r, α_s saaledes, at det større Tal gaar forud for det mindre, d. v. s. saaledes at $r<s$; men $\alpha_r > \alpha_s$. Man siger i dette Tilfælde, at Talparret α_r, α_s danner en Inversion indenfor den betragtede Permution. For at bestemme det samlede Antal Inversioner indenfor Permutationen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, hvilket Antal vi i det følgende vil betegne med $\mathfrak{F}(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$, kan man gaa saaledes frem: man ser først efter, hvormange Tal mindre end α_1, der følger efter α_1, dernæst hvormange Tal mindre end α_2, der følger efter α_2 o. s. v.; Summen af de fundne Tal giver da øjensynlig det søgte Antal. Er det samlede Antal Inversioner $\mathfrak{F}(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ et lige Tal, kaldes Permutationen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ en lige Permutation, er $\mathfrak{F}(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ et ulige Tal, kaldes $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ en ulige Permutation. Herved deles samtlige $n!$ Permutationer i to Klasser, idet man i den ene Klasse anbringer alle de lige, i den anden alle de ulige Permutationer

Eks. For $n=3$ har vi de 6 Permutationer

1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2
1, 3, 2; 2, 1, 3; 3, 2, 1 .

Indenfor disse 6 Permutationer er det samlede Antal Inversioner henholdsvis

0 ; 2 ; 2 ;

1 ; 1 ; 3 .

De tre øverste Permutationer er saaledes lige, de tre nederste ulige Permutationer.

Lad os betragte to Permutationer

. . . . . r, s . . . . . og . . . . . s, r . . . . . ,

hvor den sidste Permutation er fremkommet af den første ved en Ombytning af de to paa hinanden følgende Elementer i Permutationen r og s. I det en saadan Ombytning ikke berører de n − 2 fra r og s forskellige Elementer, ligesom den ogsaa lader ethvert af de to Elementer r og s bevare sin Rækkefølge uforandret i Forhold til de nævnte n − 2 Elementer, behøver man for at undersøge den Forandring i det samlede Antal Inversioner, som den betragtede Ombytning medfører, kun at se paa selve Talparret r, s; man indser da umiddelbart, at Antallet af Inversioner forøges med 1, hvis r < s (i det r, s da ingen Inversion danner, medens s, r danner en Inversion) og formindskes med 1, hvis r > s. Hvis altsaa Permutationen før Ombytningen var lige (ulige), bliver den efter Ombytningen ulige (lige), saa at Permutationen ved Ombytning af to paa hinanden følgende Elementer vil skifte Klasse. Vi vil bevise følgende almindelige Sætning: <u>En Permutation vil ved Ombytning af to vilkaarlige af dens Elementer skifte Klasse.</u> Lad os antage, at der mellem de to Elementer r og s, der skal ombyttes, findes i alt k Elementer (dersom r og s er to paa hinanden følgende Elementer, er Sætningen jo allerede bevist ovenfor) og lad os betegne Permutationen før Ombytningen med

$$\ldots r, z_1, z_2 \ldots z_k, s \ldots$$

efter Ombytningen med

$$\ldots s, z_1, z_2 \ldots z_k, r \ldots$$

For at komme fra den første af disse to Permutationer til den sidste behøver man øjensynlig blot en Række Gange efter hinanden at foretage en Ombytning af to Elementer, der staar ved Siden af hinanden, nemlig først at ombytte r og z_1, dernæst r og $z_2 \ldots$, r og z_k, og r og s, og saa derefter for at føre s i tilbagegaaende Retning hen til den Plads, hvorpaa r oprindelig stod, at ombytte z_k og s, z_{k-1} og s, $\ldots$ z_1 og s. Vi har saaledes udført den forønskede Ombytning af r og s ved at udføre ialt $2k+1$ (altsaa et ulige Antal) Ombytninger af to paa hinanden følgende Elementer. I det enhver af disse $2k+1$ Ombytninger forandrer Permutationens Klasse, vil den Permutation, vi begyndte med, og den, vi endte med, tilhøre hver sin Klasse.

Af denne Sætning følger umiddelbart, at for et vilkaarligt $n \geq 2$ er Antallet af lige og af ulige Permutationer det samme, altsaa at der er ligemange Permutationer i hver Klasse. (Smlg. Eksemplet $n=3$, hvor vi fandt 3 lige og 3 ulige Permutationer). Lad os nemlig tænke os alle $n!$ Permutationer opskrevne, og lad os i enhver af disse Permutationer ombytte Tallene 1 og 2; ved denne Ombytning vil enhver af de $n!$ Permutationer forandre sin Klasse, d. v. s. de lige Permutationer bliver ulige, de ulige bliver lige; i det imidlertid de $n!$ Permutationer efter Ombytningen atter udgør samtlige $n!$ Permutationer (blot opskrevne i en anden Orden), maa Antallet af lige og Antallet af ulige Permutationer

øjensynlig være det samme.

Vi slutter vore Betragtninger over Permutationer med følgende Bemærkning. I det $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ betegner en vilkaarlig Permutation af Tallene $1, 2 \ldots n$, kan man altid komme over fra Permutationen $1, 2, \ldots n$ til Permutationen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ ved en Række Gange at foretage en Ombytning af to Elementer (f. Eks. kan man først ved en saadan Ombytning bringe α_1 paa første Plads, hvis da ikke $\alpha_1 = 1$, dernæst bringe α_2 hen paa anden Plads, hvis det da ikke allerede staar der, o. s. v.). Lad os antage Overgangen fra $1, 2 \ldots n$ til $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ udført ved i alt q saadanne Ombytninger. Da vil for een og samme Permutation $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ dette Tal q, uafhængigt af hvorledes Overgangen fra $1, 2 \ldots n$ til $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ end er udført, enten altid være et lige Tal eller altid være et ulige Tal; vi kan nemlig bevise: q vil altid være et lige eller et ulige Tal, eftersom $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ er en lige eller en ulige Permutation. Dette fremgaar umiddelbart deraf, at Udgangspermutationen $1, 2 \ldots n$ er en lige Permutation (i det Antallet af Inversioner her er 0), og af at en Ombytning af to Elementer i en Permutation forandrer Permutationens Klasse; heraf følger nemlig, at q Ombytninger ud fra Permutationen $1, 2 \ldots n$ vil føre til en lige eller ulige Permutation, eftersom q er lige eller ulige.

8. Definition af en Determinant. Efter de foregaaende indledende Bemærkninger skal vi nu gaa over til at definere Begrebet Determinant. Lad der være givet et kvadratformet Skema bestaaende af n^2 Elementer (Tal) ordnede i n Rækker og n Søjler. Lad os betegne dette Skema med

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{matrix},$$

i det vi har karakteriseret de enkelte Elementer ved to Mærketal, af hvilke det første angiver Elementets Række, det andet Elementets Søjle, med andre Ord, hvor vi med a_{rs} har betegnet det Element, der staar i r^{te} Række og i s^{te} Søjle. Lad os af dette Skema udtage n Elementer, saaledes at der blandt disse Elementer findes <u>et og kun et af hver Række og et og kun et af hver Søjle</u>, d. v. s. saaledes at ethvert af Tallene $1, 2 \ldots n$ findes netop een Gang som første Mærketal til et Element og netop een Gang som andet Mærketal til et Element. Lad os danne Produktet af disse n Elementer, ordnet, som man siger, efter Rækker, d. v. s. saaledes at vi som første Faktor skriver det af de n Elementer, der hører til Skemaets første Række, som anden Faktor det Element, der hører til Skemaets anden Række o. s. v. Produktet har da følgende Udseende

$$a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}$$

hvor Søjlenummerene $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ danner en Permutation af Tallene $1, 2 \ldots n$. Af saadanne Produkter findes der aabenbart i alt $n!$, som fremkommer ved i Produktet $a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}$ at lade den variable Permutation $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ efterhaanden gennemløbe alle $n!$ Permutationer af $1, 2 \ldots n$. Vi inddeler disse $n!$ Produkter i to Klasser (indeholdende for $n \geqq 2$ hver $\frac{n!}{2}$ Produkter), saaledes at vi i den første Klasse anbringer alle de Produkter $a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}$, for hvilke $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ er en

lige Permutation, medens vi i den anden Klasse anbringer alle de Produkter $a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n}$, for hvilke $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ er en ulige Permutation.

Ved den til ovenstaaende kvadratiske Skema hörende Determinant, forstaas den flerleddede Størrelse, der fremkommer ved fra Summen af alle de Produkter $a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n}$, for hvilke $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ er en lige Permutation at subtrahere alle de Produkter $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n}$, for hvilke $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ er en ulige Permutation. Denne Determinant betegnes ved

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Angiver $\mathcal{J}(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$, ligesom ovenfor, det samlede Antal Inversioner i Permutationen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, saaledes at $(-1)^{\mathcal{J}(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)}$ er henholdsvis lig med $+1$ eller -1 eftersom $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ er en lige eller en ulige Permutation, udsiger Definitionen altsaa, at den til det betragtede kvadratiske Skema hörende Determinant er lig med Udtrykket

$$\sum (-1)^{\mathcal{J}(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n},$$

hvor den ved Tegnet $\sum$ angivne Summation skal udstrækkes over samtlige $n!$ Permutationer $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$.

Ved en Determinants Orden forstaas Antallet af dens Rækker (eller, hvad der er det samme, af dens Søjler). Blandt de $n!$ Produkter, der indgaar som Led i en Determinant af n^{te} Orden, kaldes Produktet $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ Determinantens

Diagonalled: i det $1, 2 \ldots n$ er en lige Permutation, skal Diagonalleddet tages med Fortegnet plus. Opfatter vi Determinantens n^2 Elementer $a_{11} \ldots a_{nn}$ ikke som Konstanter, men som Variable, bliver Determinanten aabenbart et homogent Polynomium af n^{te} Grad i de n^2 Elementer.

Eks. For $n=1$, faas

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

For $n=2$ findes der to Produkter $a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2}$, nemlig

$$a_{11} \cdot a_{22} \text{ og } a_{12} \cdot a_{21};$$

i det $1, 2$ er en lige, $2, 1$ en ulige Permutation faas

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

eller med andre Betegnelser

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

For $n=3$ har vi 6 Produkter $a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot a_{3\alpha_3}$, svarende til at vi for $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ kan sætte enhver af de 6 Permutationer

$$\begin{array}{lll} 1,2;3 & 2,3,1 & 3,1,2 \\ 1,3,2 & 2,1,3 & 3,2,1 \end{array};$$

i det de 3 øverste Permutationer er lige, de 3 nederste

ntige, faas

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} \\ -a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} \,. \end{matrix}$$

Af Definitionen følger umiddelbart:
En Determinant er lig med Nul, hvis den har to Søjler ens.
Thi betegner p og q to indbyrdes forskellige af Tallene 1, 2 ... n og parrer vi de n! Led i Determinanten to og to, saaledes at vi samtidig med Leddet $a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots a_{n\alpha_n}$ betragter det Led, der faas ved at ombytte de bageste Mærketal (d. v. s. Søjlenumrene) p og q, da faar disse to Led i Determinanten hver sit Fortegn, i det de to tilsvarende Permutationer af Søjlenumre tilhører hver sin Klasse. Er nu den p^{ende} og den q^{ende} Søjle i Determinanten ens, vil derfor de to omtalte Led gaa ud mod hinanden, og samtlige Determinantens Led hæver paa denne Maade hinanden to og to.

9. Forandring af Rækker til Søjler og Søjler til Rækker. I Definitionen paa en Determinant af n^{te} Orden hersker der til en vis Grad Symmetri med Hensyn til den Maade, hvorpaa Rækker og Søjler indgaar, i det den Betingelse, der karakteriserer Udvælgelsen af de i Determinanten indgaaende n! Produkter (nemlig, at hvert Produkt skal indeholde et og kun et Element af hver Række og et og kun et af hver Søjle) er fuldkommen symmetrisk i Ordene „Række" og „Søjle", d. v. s. ikke forandres, naar man ombytte disse to Ord med hinanden. Derimod er den Maade, hvorpaa vi gaar frem for at bestemme Fortegnet for de enkelte Produkter ikke symmetrisk med Hensyn til Rækker og Søjler, i det vi jo først ordner Faktorerne

efter Rækker og derefter bestemmer Antallet af Inversioner efter Søjler. Vi skal imidlertid vise, at en Determinant i Realiteten er fuldstændig symmetrisk i Rækker og Søjler (at det altsaa kun skyldes Definitionens Form, at denne Symmetri til at begynde med ikke træder fuldstændig frem), med andre Ord vi skal bevise følgende Sætning:
<u>En Determinant forbliver uforandret, naar man ombytter Rækker og Søjler</u>, d. v. s.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} ,$$

hvor i den første Determinant Størrelsen a_{rs} staar i r^{te} Række og s^{te} Søjle, medens den i den anden Determinant staar i s^{te} Række og r^{te} Søjle.

Alt de $n!$ Produkter, dannede saaledes, at der i hvert Produkt indgaar et og kun et Element af hver Række og et og kun et Element af hver Søjle, er de samme for begge Determinanters Vedkommende, er en umiddelbar Følge af den ovenfor berørte Symmetri; vi skal vise, at ogsaa Fortegnet for ethvert af disse $n!$ Produkter er det samme, uafhængig af, hvilken af de to Determinanter, Talen er om. Lad os da betragte et vilkaarligt af disse $n!$ Produkter. I det, for enhver af de to Determinanters Vedkommende, det Fortegn, hvormed det betragtede Produkt indgaar i Determinanten, bestemmes ved først at ordne Faktorerne efter Rækker og derefter tælle Inversionerne efter Søjler, skal vi for at bestemme Produktets Fortegn i Determinanten paa venstre Side af Lighedstegnet

ordne Produktet paa Formen

$$a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n}$$

og derefter talle Antallet af Inversioner $\mathcal{F}(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$, i det jo for denne Determinants Vedkommende første Mærketal angiver Rækkens, andet Mærketal angiver Søjlens Nummer; derimod skal vi, naar det drejer sig om at bestemme det Fortegn, hvormed det samme Produkt indgaar i Determinanten til højre for Ligheds-tegnet, omordne det paa Formen

$$a_{\beta_1 1} \cdot a_{\beta_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{\beta_n n}$$

og derefter bestemme Antallet af Inversioner $\mathcal{F}(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n)$, i det jo her andet Mærketal angiver Rækkens, første Mærketal Søjlens Nummer. Opgaven er da at vise, at $(-1)^{\mathcal{F}(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)} = (-1)^{\mathcal{F}(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n)}$; som vi skal se, gælder endog den skarpere Ligning $\mathcal{F}(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) = \mathcal{F}(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n)$. For at indse Rigtigheden heraf betragter vi to vil-kaarlige af Faktorerne i det omtalte Produkt: $a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n} = a_{\beta_1 1} \cdot a_{\beta_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{\beta_n n}$, f. Eks. $a_{p_1 q_1}$ og $a_{p_2 q_2}$; Betingelsen for at disse to Elementer, opfattede som Faktorer i Produktet $a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n}$, ikke (tagne som Elementpar) giver Anledning til en Inversion, er øjensynlig den, at det af de to Elementer, hvis første Mærke-tal er mindst (og som derfor er det af de to Elementer, der staar længst tilvenstre i Produktet $a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n}$) ogsaa har det an-det Mærketal mindst, altsaa at hvis $p_1 < p_2$ ogsaa $q_1 < q_2$; paa tils-svarende Maade er Betingelsen for, at de to Elementer $a_{p_1 q_1}$ og $a_{p_2 q_2}$, opfattede som Faktorer i Produktet skrevet paa den anden Form $a_{\beta_1 1} \cdot a_{\beta_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{\beta_n n}$, ikke giver Anledning til en Inversion, den at det af de to Elementer, hvis andet Mærketal er mindst

(og som altsaa her staar længst tilvenstre) ogsaa har sit første Mærketal mindst. I det saaledes Betingelsen for, at Elementparret $a_{p_1 q_1}$ og $a_{p_2 q_2}$ ikke giver Anledning til en Inversion, er den samme, hvad enten vi betragter Elementerne i den ene eller den anden Form for Produktet (nemlig den, at et af de to Elementer har begge sine Mærketal mindre end de tilsvarende Mærketal i det andet Element) vil dette Elementpar enten give Anledning til en Inversion i begge Produkter eller i intet af dem. Da dette gælder for ethvert Par Elementer undtagne blandt de n Faktorer i det betragtede Produkt, vil det samlede Antal Inversioner $\mathcal{I}(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ øjensynlig være lig det samlede Antal Inversioner $\mathcal{I}(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n)$. Hermed er Sætningen bevist.

Som en øjeblikkelig Anvendelse heraf nævner vi, at vi i den tidligere beviste Sætning: En Determinant er lig med Nul, hvis den har to Søjler ens, kan forandre Ordet Søjler til Rækker, saa at: <u>En Determinant er lig med Nul, hvis den har to Rækker ens.</u>

10. <u>Komplementer; Determinantens Afhængighed af Elementerne i en Række.</u> Lad os betragte en Determinant af n^{te} Orden

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\mathcal{I}(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)} a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n},$$

og lad os i den flerleddede Størrelse paa højre Side af Ligheds-tegnet samle alle de Led, som indeholder Bogstavet a_{rs} som Faktor. I det vi sætter a_{rs} udenfor en Parentes, kan disse Led udtrykkes ved $a_{rs} \cdot A_{rs}$, hvor A_{rs}, som man kalder

Komplementet til a_{rs}, er en flerleddet Størrelse, hvis enkelte Led er Produkter bestaaende af $n-1$ Faktorer. I det ethvert Led i Determinanten A indeholder et og kun et Element af den r^{te} Række og et og kun et Element af den s^{te} Søjle, vil A_{rs} øjensynlig ikke indeholde noget Bogstav med første Mærketal r eller noget Bogstav med andet Mærketal s, med andre Ord: Komplementet A_{rs} er uafhængig af Elementerne i den r^{te} Række og af Elementerne i den s^{te} Søjle d. v. s. paavirkes ikke af en Forandring af disse Elementer. Til ethvert af de n^2 Elementer a_{rs} svarer der paa denne Maade et Komplement A_{rs}.

I det ethvert af de $n!$ Produkter i Determinanten A indeholder et og kun et af Elementerne i r^{te} Række: $a_{r1}, a_{r2} \ldots a_{rn}$, indses umiddelbart, at

$$a_{r1} A_{r1} + a_{r2} A_{r2} + \ldots a_{rn} A_{rn} = A .$$

d. v. s. Multipliceres man ethvert af Elementerne i en Række med Elementets Komplement, vil Summen af disse Produkter være lig med selve Determinanten. (Heraf følger specielt, at hvis alle Elementerne $a_{r1} \ldots a_{rn}$ i en Række er lig med Nul, er Determinanten selv lig med Nul.)

I det Komplementet til et Element, som ovenfor fremhævet, er uafhængigt af Elementerne i den Række (ligesom ogsaa af Elementerne i den Søjle), hvori Elementet staar, vil de n Komplementer $A_{r1}, A_{r2} \ldots A_{rn}$ alle være uafhængige af Elementerne i den r^{te} Række, d. v. s. disse n Komplementer vil blive uforandret, naar man i Determinanten A ombytter Tallene i r^{te} Række med vilkaarlige andre Tal. Den for udledte Ligning

$$a_{r1} A_{r1} + a_{r2} A_{r2} + \ldots a_{rn} A_{rn} = A$$

viser os da, at naar vi opfatter Elementerne i den r^{te} Række som variable, men alle de andre $n^2 - n$ Elementer som Konstanter, da er Determinanten en lineær homogen Funktion af Elementerne i den betragtede Række.

Heraf følger for det første, at en Determinant multipliceres med en Konstant k, naar alle Elementerne i en Række multipliceres med k. Endvidere indses ud fra den fundne Sætning, at der for $r \neq s$ gælder Ligningen:

$$a_{s1} A_{r1} + a_{s2} A_{r2} + \ldots a_{sn} A_{rn} = 0 ;$$

thi venstre Side af denne Ligning angiver jo Værdien af den Determinant, der fremkommer, naar man for de variable Elementer i r^{te} Række indsætter Elementerne $a_{s1}, a_{s2} \ldots a_{sn}$, hvorved Determinanten jo faar to Rækker ens. Altsaa:

Multiplicerer man ethvert af Elementerne i en Række med Komplementet til det tilsvarende Element i en anden Række, er Summen af disse Produkter lig med Nul.

Der gælder altsaa Ligningen

$$a_{s1} A_{r1} + a_{s2} A_{r2} + \ldots a_{sn} A_{rn} = \begin{cases} 0 & \text{for } s \neq r \\ A & \text{for } s = r \end{cases} .$$

Som en tredje Anvendelse af den nævnte Sætning sætter vi

$$a_{r1} = x_1 + y_1 , \quad a_{r2} = x_2 + y_2 \ldots a_{rn} = x_n + y_n ;$$

vi finder her

$$\Delta = a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \ldots a_{rn}A_{rn} = (x_1+y_1)A_{r1} + (x_2+y_2)A_{r2} + \ldots (x_n+y_n)A_{rn}$$

$$= (x_1A_{r1} + x_2A_{r2} + \ldots x_nA_{rn}) + (y_1A_{r1} + y_2A_{r2} + \ldots y_nA_{rn}),$$

d. v. s. Er i en Determinant ethvert af Leddene i den r^{te} Række en toleddet Størrelse, kan Determinanten skrives som en Sum af to andre Determinanter, hvoraf den ene fremkommer ved overalt i den r^{te} Række at lade det første af de to Led blive staaende og slette det andet, medens den anden fremkommer ved i den r^{te} Række kun at lade det andet af de to Led blive staaende.

Den sidste Sætning kan umiddelbart (enten ved at kaste et Blik paa den Maade, hvorpaa den blev udledt eller ved at anvende Sætningen et vist Antal Gange efter hinanden) udvides til at omfatte det almindeligere Tilfælde, hvor alle Leddene i den r^{te} Række er vilkaarlige flerleddede Størrelser, indeholdende hver det samme Antal Led. Som en Anvendelse af denne sidste Sætning betragter vi, idet vi gaar ud fra en foreLagt Determinant $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$, den nye Determinant med Værdien Nul, der fremkommer af Δ ved at erstatte Elementerne saavel i den r^{te} Række som i den s^{te} Række med Størrelserne

$$a_{r1} + a_{s1}\ ,\ a_{r2} + a_{s2}\ ,\ \ldots\ a_{rn} + a_{sn}\ ;$$

denne nye Determinant kan efter Sætningen skrives som en Sum af fire Determinanter, hvoraf de to imidlertid er Nul, nemlig de to, hvori den r^{te} Række og den s^{te} Række enten begge er $a_{r1}, a_{r2}, \ldots a_{rn}$ eller begge $a_{s1}, a_{s2}, \ldots a_{sn}$. De to tilbageblevne Determinanter maa altsaa være ligestore med modsat Fortegn; af disse to er den ene imidlertid Determinanten Δ, medens den anden er den Determinant, der fremkommer af

A ved Ombytning af den r^{te} og den s^{te} Række, altsaa: Ombyttes to vilkaarlige Rækker i en Determinant, da skifter Determinanten Fortegn, d. v. s. den nye Determinant, der fremkommer ved Ombytningen, har samme numeriske Værdi som den oprindelige men modsat Fortegn. Lad os til Orientering tilføje den Bemærkning, at den beviste Sætning: en Determinant A, hvis Elementer er givne Tal, gaar ved Ombytning af to Rækker over til en ny Determinant A^1, der har Værdien $-A$, i Virkeligheden er ensbetydende med følgende (ved første Øjekast almindeligere) Sætning: Opfatter vi Elementerne i Determinanten A som Variable, vil Polynomiet A være identisk med Polynomiet $-A^1$, hvor A^1 er den ved Ombytning af den r^{te} og den s^{te} Række i A fremkomne Determinant. Thi er to Polynomier (her A og $-A^1$) ligestore, hvilke Værdier vi end indsætter for de Variable (her Elementerne a_{rs}) er de to Polynomier identiske.

Som en anden Anvendelse udleder vi følgende Sætning, der, som vi nedenfor skal se, spiller en vigtig Rolle ved den praktiske Udregning af en forelagt Determinant:
Adderer man i en Determinant til Elementerne i en Række (f. Eks. den r^{te} Række) de tilsvarende Elementer i en anden Række (f. Eks. den s^{te} Række) efter først at have multipliceret disse sidste med en vilkaarlig Faktor k forbliver Determinanten uforandret.

Den udkomne Determinant, der til Elementer i r^{te} Række har Størrelserne $a_{r1}+k.a_{s1}$, $a_{r2}+k.a_{s2}$, . . . $a_{rn}+k.a_{sn}$, kan nemlig først skrives som en Sum af to Determinanter, hvoraf den ene er den oprindelige Determinant A, medens den anden fremgaar af A ved i r^{te} Række at erstatte Størrelserne a_{r1}, a_{r2} . . . a_{rn} med Størrelserne $k.a_{s1}$, $k.a_{s2}$, . . . $k.a_{sn}$; den sidste Determinant er imidlertid lig med Nul, da den er

lig med kA^1, hvor A^1 er en Determinant med to Rækker ens. Vi bemærker, at man ved at gøre Brug af den i 9 paaviste Symmetri med Hensyn til Rækker og Søjler, udfra enhver af de foregaaende Sætninger, gældende for Rækker, umiddelbart kan udlede den tilsvarende Sætning gældende for Søjler. Eksempelvis finder vi derved Ligningen

$$a_{1s}A_{1r} + a_{2s}A_{2r} + \ldots a_{ns}A_{nr} = \begin{cases} 0 & \text{for } s \neq r \\ A & \text{for } s = r \end{cases}.$$

Sluttelig vil vi almindeliggøre Sætningen om, at en Determinant skifter Fortegn, naar man ombytter to af dens Søjler (Rækker), til følgende Sætning:
Betegner $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ en vilkaarlig Permutation af Tallene $1, 2 \ldots n$, er

$$\begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} \ldots a_{1\alpha_n} \\ a_{2\alpha_1} & a_{2\alpha_2} \ldots a_{2\alpha_n} \\ \vdots & \\ a_{n\alpha_1} & a_{n\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n} \end{vmatrix} = (-1)^{F(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Antager vi nemlig, at vi ved at udføre q Ombytninger af to Elementer kan komme over fra Permutationen $1, 2 \ldots n$ til Permutationen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, kan vi øjensynlig ved at udføre de tilsvarende q Ombytninger af to Søjler komme over fra Determinanten paa højre Side af Lighedstegnet til Determinanten paa venstre Side af Lighedstegnet, saaledes at den ene af de to Determinanter er lig med den anden multipliceret med Faktoren $(-1)^q$. I det imidlertid (smlg. Sætningen af 7) Antallet af Ombytninger q er lige eller ulige, eftersom $F(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ er lige eller ulige, er $(-1)^q = (-1)^{F(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)}$, hvorved Sæt-

ningen er bevist.

11. Komplementer udtrykt ved Underdeterminanter. Vi skal nu gaa over til at vise, hvorledes Komplementet til et Element i en Determinant af n^{te} Orden (hvilket Komplement, som vi ovenfor har set, er lig en flerleddet Størrelse, hvis enkelte Led er Produkter med $n-1$ Faktorer i hver) kan udtrykkes ved en Determinant af $(n-1)^{te}$ Orden, som paa overmaade simpel Maade dannes udfra den oprindelige Determinant. Inden vi opstiller den herom gældende Sætning, maa vi imidlertid forudskikke følgende Bemærkning, der tjener til at indføre Begrebet Underdeterminant til en given Determinant. Lad

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

være en given Determinant af n^{te} Orden ($n \geqq 2$). Ved den til A hørende Underdeterminant $D_{r,s}$, hvor hvert af de to Mærketal r og s er et vilkaarligt af Tallene $1, 2 \ldots n$, forstaas da den Determinant af $(n-1)^{te}$ Orden, som fremkommer af Determinanten A ved at slette den r^{te} Række og den s^{te} Søjle. Der findes saaledes ialt n^2 til A hørende Underdeterminanter $D_{r,s}$ svarende til de n^2 forskellige Talpar r, s. Der gælder da følgende Sætning: Komplementet til det Element i Determinanten, der staar i r^{te} Række og s^{te} Søjle er lig med Underdeterminanten $D_{r,s}$ multipliceret med Faktoren $(-1)^{r+s}$, altsaa, med de ovenfor benyttede Betegnelser,

$$A_{r,s} = (-1)^{r+s} \cdot D_{r,s}$$

Lad os først bevise denne Sætning i det specielle Tilfælde $r = s = 1$, d. v. s. i det Tilfælde, hvor Talen er om Komplementet A_{11} til det Element i Determinanten, der staar i første Række og i første Søjle. Idet $(-1)^{1+1} = +1$, gælder det her om at vise, at Komplementet A_{11} er lig den Determinant D_{11}, der fremkommer af A ved at slette første Række og første Søjle, d. v. s. at A_{11} er lig med Determinanten

$$D_{11} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots b_{1\,n-1} \\ b_{21} & b_{22} \cdots b_{2\,n-1} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ b_{n-1\,1} & b_{n-1\,2} \cdots b_{n-1\,n-1} \end{vmatrix},$$

hvor vi til Afkortning har betegnet $a_{r+1,\,s+1}$ med $b_{r,s}$. For at bestemme Komplementet A_{11} samler vi først de Led i Determinanten $A = \sum (-1)^{F(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)} \cdot a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}$, der indeholder Faktoren a_{11}. Den af disse Led dannede flerleddede Størrelse kan øjensynlig skrives

$$\sum (-1)^{F(1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots \alpha_n)} \cdot a_{11} \cdot a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \cdots a_{n\alpha_n},$$

hvor Summationstegnet angiver, at der skal summeres over alle de forskellige $(n-1)!$ Permutationer $\alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$, der kan dannes af Tallene $2, 3 \ldots n$. Sætter vi Bogstavet a_{11} udenfor Parentes i denne sidste flerleddede Størrelse, finder vi Komplementet A_{11} udtrykt ved

$$A_{11} = \sum (-1)^{F(1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots \alpha_n)} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot a_{3\alpha_3} \cdot \cdots \cdot a_{n\alpha_n}$$

Nu er imidlertid Antallet af Inversioner $\mathcal{I}(1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n)$ i Permutationen $1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ øjensynlig det samme som Antallet af Inversioner $\mathcal{I}(\alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n)$ i Permutationen $\alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$; thi da Tallet 1 er det mindste af alle Tallene i Permutationen $1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ og staar længst til venstre, giver dette Tal ikke Anledning til nogensomhelst Inversion og kan derfor ved Bestemmelsen af Inversionernes Antal uden videre udelades. dette sidste Antal $\mathcal{I}(\alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n)$ er imidlertid atter lig med Antallet af Inversioner $\mathcal{I}(\alpha_2-1, \alpha_3-1 \ldots \alpha_n-1)$ i Permutationen $\alpha_2-1, \alpha_3-1 \ldots \alpha_n-1$, idet Antallet af Inversioner i en Permutation ikke forandres derved, at man fra alle Elementerne i Permutationen subtraherer et og samme Tal; altsaa er

$$\mathcal{I}(1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n) = \mathcal{I}(\alpha_2-1, \alpha_3-1 \ldots \alpha_n-1).$$

I det endvidere

$$a_{2\alpha_2} \cdot a_{3\alpha_3} \cdot \ldots a_{n\alpha_n} = b_{1,\alpha_2-1}\, b_{2,\alpha_3-1} \ldots b_{n-1,\alpha_n-1}$$

kan det ovenfor fundne Udtryk for Komplementet A_{11} skrives paa Formen

$$A_{11} = \sum(-1)^{\mathcal{I}(\alpha_2-1, \alpha_3-1 \ldots \alpha_n-1)} \cdot b_{1,\alpha_2-1} \cdot b_{2,\alpha_3-1} \cdot \ldots b_{n-1,\alpha_n-1},$$

hvor ligesom ovenfor $\alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ gennemløber alle $(n-1)!$ Permutationer af Tallene $2, 3 \ldots n$, d. v. s. hvor $\alpha_2-1, \alpha_3-1 \ldots \alpha_n-1$ gennemløber alle $(n-1)!$ Permutationer af Tallene $1, 2 \ldots n-1$. Det sidst fundne Udtryk for Komplementet A_{11} er imidlertid netop Determinanten D_{11}. Efterat vi hermed har bevist Rigtigheden af Ligningen $A_{11} = D_{11}$, kan vi uden Vanskelighed

derudfra udlede den almindelige Ligning

$$A_{rs} = (-1)^{r+s} \cdot D_{rs}.$$

Vi behöver blot för Bestemmelsen af Komplementet A_{rs} til Elementet a_{rs} at bringe dette Element hen paa den Plads, der findes i förste Række og förste Söjle; dette vil vi göre paa en saadan Maade, at vi derved hverken forandrer den indbyrdes Rækkefölge for de fra den r^{te} Række forskellige Rækker eller for de fra den s^{te} Söjle forskellige Söjler. Vi ombytter nemlig först den r^{te} Række med den $(r-1)^{te}$, dernæst med den $(r-2)^{te}$ o. s. v. indtil den til Slut er löftet op paa förste Rækkes Plads; og derefter ombytter vi den s^{te} Söjle med den $(s-1)^{te}$, dernæst med den $(s-2)^{te}$ o. s. v. indtil den til Slut staar som förste Söjle. Idet vi derved ialt har foretaget $r-1$ Ombytninger af to Rækker og $s-1$ Ombytninger af to Söjler, vil, som det fremgaar af 10, den flerleddede Störrelse, der udtrykker Determinanten efter disse Ombytninger, være lig den flerleddede Störrelse, der udtrykker Determinanten för Ombytningerne, blot multiplicieret med Faktoren $(-1)^{r-1} \cdot (-1)^{s-1} = (-1)^{r+s}$. Følgelig vil den sögte Faktor (Komplementet A_{rs}) til Bogstavet a_{rs} i den oprindelige Determinant A være lig Faktoren til Bogstavet a_{rs} i Determinanten efter Ombytningerne, multiplicieret med $(-1)^{r+s}$. Idet imidlertid i denne sidste Determinant Bogstavet a_{rs} staar i förste Række og förste Söjle, vil Faktoren til a_{rs} her være lig den Determinant af $n-1^{te}$ Orden D^1, der fremkommer ved at slette förste Række og förste Söjle. Denne Determinant af $n-1^{te}$ Orden D^1 er imidlertid öjensynlig den samme som den Determinant, der fremkommer af den oprindelige Determinant A ved i denne at slette den r^{te} Række og den s^{te} Söjle, d. v. s. D^1 er netop Underdeterminanten D_{rs} til den oprindelige Determinant A.

Hermed er Sætningen

$$\mathfrak{A}_{rs} = (-1)^{r+s} \cdot \mathfrak{D}_{rs}$$

bevist.

12. Eksempel paa Beregning af en Determinant. Inden vi fortsætter Fremstillingen af Determinanternes Theori, skal vi gennem et Eksempel vise, hvorledes man i Praksis bærer sig ad med at udregne en forelagt Determinant, d. v. s. en Determinant, hvis Elementer er opgivne Tal. Medens man paa en Determinant af 2^{den} Orden umiddelbart kan anvende Definitionen $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, altsaa f. Eks $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 14 = -8$, vilde det allerede for Determinanter af 3^{dje} Orden, men navnlig for Determinanter af højere Orden, paa Grund af de mange Led, der indgaar i den flerleddede Størrelse, være ret store Regninger, man skulde udføre, hvis man direkte vilde beregne Determinanten ud fra Definitionen. Man foretrækker derfor at begynde med ved en Omformning at bringe Determinanten paa en simplere Skikkelse, nemlig at omforme den saaledes, at alle Elementer i en af Rækkerne (eller Søjlerne) bliver Nul paa et nær; det sker ved et passende Antal Gange at benytte Sætningen om, at en Determinant ikke forandres, naar man til en Søjle (Række) adderer de tilsvarende Elementer i en anden Søjle (Række), multipliceret med en vilkaarlig Konstant. Er dette opnaaet, „opløses" Determinanten efter den paagældende Række (Søjle), d. v. s. Determinanten skrives som en Produktsum af Elementerne i Rækken (Søjlen) og de tilsvarende Komplementer. I det kun det Element, der er $\neq 0$, giver et Bidrag, bliver herved Bestemmelsen af Determinanten henført til Bestemmelsen af en Determinant, hvis Orden er

en Enhed lavere. Denne Proces gentages indtil Determinantens Orden er reduceret til 2.

Eks.

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} .$$

For at skaffe Nul overalt i første Søjle undtagen paa første Plads, multipliceres første Række med -2 og adderes til anden Række; derved faas

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} ;$$

derefter multipliceres første Række med -1 og adderes til 3dje Række, herved faas

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} ;$$

sluttelig multipliceres første Række med -2 og adderes til 4de, hvilket giver

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \end{vmatrix} .$$

De her foretagne Reduktioner udfører man i Reglen paa een Gang, d. v. s. man gaar umiddelbart, uden at opskrive Mellemregninger, over fra den opgivne til den sidst opskrevne Determinant. Opløses nu Determinanten efter første Søjle, vil kun det øverste Element give noget Bidrag, og vi faar

$$\mathfrak{D} = 1.(-1)^2 \begin{vmatrix} -3 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -4 \end{vmatrix} .$$

Her kan vi f. Eks skaffe Nul overalt i 2^{den} Række undtagen paa første Plads ved først at multiplicere første Søjle med -1 og lægge den til 2^{den} Søjle, og dernæst at multiplicere første Søjle med 2 og lægge den til 3^{dje} Søjle. Idet vi udfører disse to Regninger paa en Gang, faas

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -11 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -10 \end{vmatrix} .$$

Opløses her efter 2^{den} Række, faas

$$\mathfrak{D} = 1\,(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -11 \\ 4 & -10 \end{vmatrix} = -(-20+44) = -24.$$

Lad os tilføje den Bemærkning, at det ofte kan være bekvemt, hvis der undervejs i Udregningen af en Determinant optræder en fælles Faktor i alle Elementer tilhørende en og samme Række (Søjle) at sætte denne Faktor udenfor Determinanten.

Som et andet Øvelseseksempel, af almindeligere Karakter, vil vil vi bevise følgende Sætning, som vi senere vil faa Brug for. Er n et vilkaarligt helt Tal $\geqq 2$, og betegner $x_1, x_2 \ldots x_n$ vilkaarlige Tal, er Determinanten af n^{te} Orden

$$\mathfrak{D}(x_1, x_2 \ldots x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

lig Produktet af Differenserne

$$\begin{matrix} x_2-x_1, & x_3-x_1, & x_4-x_1 & \ldots & x_n-x_1 \\ & x_3-x_2, & x_4-x_2 & \ldots & x_n-x_2 \\ & & x_4-x_3 & \ldots & x_n-x_3 \\ & & \ldots & \ldots & \\ & & & & x_n-x_{n-1}, \end{matrix}$$

d. v. s lig Produktet af de $\frac{n(n-1)}{2}$ Faktorer (x_r-x_s) for hvilke r og s er to vilkaarlige indbyrdes forskellige af Tallene $1, 2 \ldots n$, underkastet den Betingelse, at $r>s$. Heraf følger specielt, at Determinanten $\mathfrak{D}(x_1, x_2 \ldots x_n)$ da og kun da er Nul, naar to af Tallene $x_1, x_2 \ldots x_n$ er ligestore.

Rigtigheden af denne Sætning kunde vi bevise ved at udregne den givne Determinant $\mathfrak{D}(x_1, x_2 \ldots x_n)$ efter den sædvanlige Metode, vi ovenfor benyttede til Udregning af det specielle Taleksempel. Elegantere er det imidlertid at føre Beviset gennem følgende Betragtning, hvorved saa at sige al Regning undgaas. For $n=2$ er Sætningen øjensynlig rigtig, idet jo $\mathfrak{D}(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)$; vi antager Sætningen rigtig

for en Determinant af n^{te} Orden $\mathfrak{D}(x_1, x_2 \ldots x_n)$ og vil herud= fra bevise Rigtigheden for en Determinant af $n+1^{te}$ Orden $\mathfrak{D}(x_1, x_2 \ldots x_{n+1})$. Opfatter vi nu i Determinanten

$$\mathfrak{D}(x_1, x_2 \ldots x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \ldots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

de n første Bogstaver $x_1, x_2 \ldots x_n$ som Konstanter, det sidste Bogstav x_{n+1} derimod som en Variabel, da kan vi, idet vi ta= ger den givne Antagelse til Hjælp, bevise Ligningen

$$\mathfrak{D}(x_1, x_2 \ldots x_{n+1}) = \mathfrak{D}(x_1, x_2 \ldots x_n)(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2) \ldots (x_{n+1}-x_n),$$

der netop udsiger, hvad der skal bevises. Er to af Konstanter= ne $x_1, x_2 \ldots x_n$ ligestore, er den ovenstaaende Ligning øjensyn= lig rigtig, thi i dette Tilfælde har begge Determinanter $\mathfrak{D}(x_1 \ldots x_n)$ og $\mathfrak{D}(x_1 \ldots x_{n+1})$ to Rækker ens og er altsaa begge Nul. Vi har derfor Lov til ved Beviset for Ligningens Rigtighed at antage, at ikke to af Konstanterne $x_1, x_2 \ldots x_n$ er ligestore, hvilket i Følge den givne Antagelse medfører, at $\mathfrak{D}(x_2, x_2 \ldots x_n) \neq 0$. I dette Tilfælde er den Paastand, der udtrykkes gennem den om= talte Ligning, aabenbart identisk med følgende Paastand: $\mathfrak{D}(x_1, x_2 \ldots x_{n+1})$ er et egentligt Polynomium i x_{n+1} af n^{te} Grad, som til Koefficient til x_{n+1}^n har Tallet $\mathfrak{D}(x_1, x_2 \ldots x_n)$, og som har n reelle Rødder $x_1, x_2 \ldots x_n$. At denne sidste Paastand virkelig er rigtig, indses umiddelbart saaledes: For det første er $\mathfrak{D}(x_1, x_2 \ldots x_{n+1})$ et Polynomium af n^{te} Grad med-

$D(x_1, x_2 \ldots x_n)$ som Koefficient til $x_{n+1}^{\,n}$; thi opløses Determinanten $D(x_1, x_2 \ldots x_{n+1})$ efter sidste Række, faas umiddelbart $D(x_1, x_2 \ldots x_{n+1}) = a_0 + a_1 x_{n+1} + a_2 x_{n+1}^{\,2} + \ldots a_n x_{n+1}^{\,n}$, hvor a_n (Komplementet til Elementet i sidste Række og sidste Søjle) jo netop er lig med $D(x_1, x_2 \ldots x_n)$; og at dette Polynomium har de n Rødder $x_1, x_2 \ldots x_n$ er klart, da jo Determinanten $D(x_1, x_2 \ldots x_{n+1})$, naar man for den Variable x_{n+1} indsætter et af Tallene $x_1, x_2 \ldots x_n$ faar to Rækker ens og følgelig antager Værdien Nul.

13. Multiplikation af to Determinanter. Lad der være givet to Determinanter af n^{te} Orden

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \ldots b_{2n} \\ \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots b_{nn} \end{vmatrix} .$$

Vi skal nu vise, at Produktet af disse to Determinanter A og B atter kan udtrykkes ved en Determinant af n^{te} Orden, nemlig ved Determinanten

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \ldots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \ldots c_{2n} \\ \\ c_{n1} & c_{n2} \ldots c_{nn} \end{vmatrix} ,$$

hvori det almindelige Element c_{rs}, d. v. s. det Element, der staar i r^{te} Række og s^{te} Søjle, bestemmes udfra Elementerne i de givne Determinanter A og B ved følgende simple Fremgangsmaade: man opskriver Elementerne i den r^{te} Række

i Determinanten A

$$a_{r1}\ a_{r2}\ .\ .\ .\ a_{rn}$$

og Elementerne i den s^{te} Række i B

$$b_{s1}\ b_{s2}\ .\ .\ .\ b_{sn}\ ;$$

det søgte Element c_{rs} findes da ved først at multiplicere tilsvarende Elementer i de to betragtede Rækker og derefter danne Summen af de udkomne n Produkter, d. v. s. Elementet c_{rs} bestemmes ved Ligningen

$$c_{rs} = a_{r1}b_{s1} + a_{r2}b_{s2} + \ .\ .\ .\ a_{rn}b_{sn}.$$

(Eks.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} & a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix})$$

For at bevise at Produktet af Determinanterne A og B er lig den Determinant C, hvis almindelige Led c_{rs} bestemmes ved Ligningen $c_{rs} = a_{r1}b_{s1} + a_{r2}b_{s2} + \ .\ .\ .\ a_{rn}b_{sn}$, er det det simpleste at gaa ud fra den sidstnævnte Determinant C og vise, hvorledes man ved at omforme denne Determinant paa passende Maade kan komme over til Produktet A. B. Lad os da begynde med i første Søjle af Determinanten C for Elementerne $c_{11}, c_{21}\ .\ .\ .\ c_{n1}$ at indføre deres Udtryk ved Elementerne i A og B; herved faas

$$\mathfrak{C} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + \ldots a_{1n}b_{1n} & c_{12} \ldots c_{1n} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} + \ldots a_{2n}b_{1n} & c_{22} \ldots c_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{12} + \ldots a_{nn}b_{1n} & c_{n2} \ldots c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Denne Determinant, hvori Elementerne i første Søjle er flerleddede Størrelser med samme Antal, n, Led hver, kan i Følge en Sætning i 10 skrives som en Sum af n Determinanter, nemlig de n Determinanter, som fremgaar af Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{1\alpha_1}b_{1\alpha_1} & c_{12} \ldots c_{1n} \\ a_{2\alpha_1}b_{1\alpha_1} & c_{22} \ldots c_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n\alpha_1}b_{1\alpha_1} & c_{n2} \ldots c_{nn} \end{vmatrix}$$

ved i denne efterhaanden at tillægge α_1 Værdierne $1, 2 \ldots n$. Vi har saaledes fundet

$$\mathfrak{C} = \sum_{\alpha_1=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1}b_{1\alpha_1} & c_{12} \ldots c_{1n} \\ a_{2\alpha_1}b_{1\alpha_1} & c_{22} \ldots c_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n\alpha_1}b_{1\alpha_1} & c_{n2} \ldots c_{nn} \end{vmatrix}$$

Udfører vi nu i hver af de paa højre Side af Ligheds-tegnet staaende n Determinanter for 2^{den} Søjles Elementer deres Udtryk ved Elementerne i A og B, kan enhver af disse n Determinanter gennem Anvendelse af den samme Bemærkning som ovenfor, igen skrives som en Sum af n Determinanter, idet vi sætter

$$\begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} b_{1\alpha_1} & c_{12} \cdot \cdot \cdot c_{1n} \\ a_{2\alpha_1} b_{1\alpha_1} & c_{22} \cdot \cdot \cdot c_{2n} \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_{n\alpha_1} b_{1\alpha_1} & c_{n2} \cdot \cdot \cdot c_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha_2=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} b_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} b_{2\alpha_2} & c_{13} \cdot \cdot \cdot c_{1n} \\ a_{2\alpha_1} b_{1\alpha_1} & a_{2\alpha_2} b_{2\alpha_2} & c_{23} \cdot \cdot \cdot c_{2n} \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_{n\alpha_1} b_{1\alpha_1} & a_{n\alpha_2} b_{2\alpha_2} & c_{n3} \cdot \cdot \cdot c_{nn} \end{vmatrix}$$

Vi faar saaledes C skrevet som en Sum af ialt n^2 Determinanter, nemlig alle de Determinanter, der fremkommer af Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} b_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} b_{2\alpha_2} & c_{13} \cdot \cdot \cdot c_{1n} \\ a_{2\alpha_1} b_{1\alpha_1} & a_{2\alpha_2} b_{2\alpha_2} & c_{23} \cdot \cdot \cdot c_{2n} \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_{n\alpha_1} b_{1\alpha_1} & a_{n\alpha_2} b_{2\alpha_2} & c_{n3} \cdot \cdot \cdot c_{nn} \end{vmatrix}$$

ved i denne at lade α_1 og α_2 uafhængigt af hinanden gennemløbe alle Tallene $1, 2 \ldots n$. Ved at fortsætte paa denne Maade, d. v. s. ved n i hver af de fundne n^2 Determinanter at indføre Udtrykkene for $c_{13} \cdot \cdot \cdot c_{n3}$ og derefter opløse enhver af disse n^2 Determinanter i en Sum af n Determinanter, o. s. v., vil man aabenbart til Slut faa C skrevet som en Sum af ialt n^n Determinanter, nemlig alle de Determinanter, der frembaar af Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} b_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} b_{2\alpha_2} \cdot \cdot \cdot & a_{1\alpha_n} b_{n\alpha_n} \\ a_{2\alpha_1} b_{1\alpha_1} & a_{2\alpha_2} b_{2\alpha_2} \cdot \cdot \cdot & a_{2\alpha_n} b_{n\alpha_n} \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_{n\alpha_1} b_{1\alpha_1} & a_{n\alpha_2} b_{2\alpha_2} \cdot \cdot \cdot & a_{n\alpha_n} b_{n\alpha_n} \end{vmatrix}$$

ved i denne at lade de n Tal $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ uafhængig af hin-

anden gennemløbe alle Tallene $1, 2 \ldots n$. Den sidst opskrevne Determinant, hvis Elementer i første Søjle alle indeholder Faktoren $b_{1\alpha_1}$, i anden Søjle Faktoren $b_{2\alpha_2}$ . . . i n^{te} Søjle Faktoren $b_{n\alpha_n}$, kan, idet disse Faktorer sættes udenfor Determinanten, skrives paa Formen

$$b_{1\alpha_1} \cdot b_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot b_{n\alpha_n} \cdot \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} & \ldots & a_{1\alpha_n} \\ a_{2\alpha_1} & a_{2\alpha_2} & \ldots & a_{2\alpha_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\alpha_1} & a_{n\alpha_2} & \ldots & a_{n\alpha_n} \end{vmatrix}$$

Heraf ses for det første, at hvis de n Tal $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ ikke alle er indbyrdes forskellige, vil den omhandlede Determinant være lig med Nul, idet jo i dette Tilfælde Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} & \ldots & a_{1\alpha_n} \\ a_{2\alpha_1} & a_{2\alpha_2} & \ldots & a_{2\alpha_n} \\ \vdots & & & \\ a_{n\alpha_1} & a_{n\alpha_2} & \ldots & a_{n\alpha_n} \end{vmatrix} \cdot$$

har to Søjler ens. Blandt de n^n Determinanter, hvori vi har opløst Determinanten C, behøver vi derfor kun at tage Hensyn til de Determinanter, for hvilke Mærketallene $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ alle er forskellige d. v. s. til de $n!$ Determinanter, for hvilke $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ danner en Permutation af Tallene $1, 2 \ldots n$. I det vi imidlertid i Slutningen af 10 har vist, at

$$\begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} & \ldots & a_{1\alpha_n} \\ a_{2\alpha_1} & a_{2\alpha_2} & \ldots & a_{2\alpha_n} \\ \vdots & & & \\ a_{n\alpha_1} & a_{n\alpha_2} & \ldots & a_{n\alpha_n} \end{vmatrix} = (-1)^{\mathcal{F}(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\mathcal{F}(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)} \cdot \Delta,$$

finder vi sluttelig Determinanten C udtrykt ved

$$C = A \cdot \sum (-1)^{\mathfrak{F}(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)} \cdot b_{1\alpha_1} \cdot b_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot b_{n\alpha_n},$$

hvor Summationen skal udstrækkes over alle de $n!$ Permutationer $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, der kan dannes af Tallene $1, 2 \ldots n$. Idet Faktoren til A paa høire Side af Lighedstegnet netop er Determinanten B, er Rigtigheden af Ligningen $C = AB$ hermed bevist.

Lad os forinden vi forlader Spørgsmaalet om Multiplikation af to Determinanter af n^{te} Orden A og B endnu bemærke, at man udfra den ovenfor angivne Methode til Dannelse af en Determinant af n^{te} Orden, der fremstiller Produktet AB, foruden Determinanten C, hvis almindelige Led c_{rs} er bestemt ved Udtrykket $c_{rs} = a_{r1} b_{s1} + a_{r2} b_{s2} + \ldots + a_{rn} b_{sn}$, umiddelbart kan udlede tre andre tilsvarende Determinanter af n^{te} Orden C_1, C_2 og C_3, som ligeledes er lig med $A \cdot B$. Man behøver hertil blot, for man anvender den angivne Methode, at ombytte Rækker og Søjler enten i Determinanten A eller i Determinanten B eller i begge disse to Determinanter. Ombytter man f. Eks for Multiplikationen Rækker og Søjler i Determinanten B, medens man lader A staa uforandret, finder man Produktet AB udtrykt ved en Determinant af n^{te} Orden, hvori det Element, der staar i r^{te} Række og s^{te} Søjle er bestemt ved Udtrykket $a_{r1} b_{1s} + a_{r2} b_{2s} + \ldots + a_{rn} b_{ns}$, d. v. s. hvor dette Element fremkommer, naar man multiplicerer Elementerne i den r^{te} Række i A med de tilsvarende Elementer i den s^{te} Søjle i B og derefter adderer disse n Produkter. Foruden de nævnte 4 Determinanter C, C_1, C_2, C_3, der fremstiller Produktet AB, kan vi endnu danne 4 andre til

de 4 øvrige svarende Determinanter C', C_1', C_2', C_3', der ligeledes er lig med $A \cdot B$, nemlig ved for Multiplikationen at ombytte de to Determinanter A og B; disse 4 nye Determinanter C', C_1', C_2', C_3' dannes dog umiddelbart af de 4 førstnævnte C, C_1, C_2, C_3 ved blot i disse sidste at ombytte Rækker og Søjler. Naar vi i det følgende siger om en Determinant C, at den er fremkommen som Produktet $A \cdot B$ af to givne Determinanter af samme Orden, A og B, vil vi imidlertid altid tænke os denne Determinant dannet efter den først angivne Methode (d. v. s. saaledes at det almindelige Element c_{rs} i C fremkommer ved at „kombinere" r^{te} Række i den første Determinant A med s^{te} Række i den anden Determinant B), idet vi om fornødent allerede før Opskrivningen af Determinanterne A og B foretager de ønskede Ombytninger af Rækker og Søjler, samt skriver de to Determinanter A og B i den ønskede Rækkefølge. Som et Øvelseseksempel vil vi bevise følgende Sætning (hvor vi kun for at lette Opskrivningen indskrænker os til at betragte en Determinant af tredje Orden): Sætter vi efter Multiplikationsreglen

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix},$$

gælder der for Komplementerne i de to Determinanter Ligningerne

$$\begin{aligned} C_{11} &= A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2 \\ C_{22} &= A_{21}^2 + A_{22}^2 + A_{23}^2 \\ C_{33} &= A_{31}^2 + A_{32}^2 + A_{33}^2 . \end{aligned}$$

For at vise Rigtigheden af den første af disse Ligninger betrag-

ter vi Determinanten

$$C_{11} = \begin{vmatrix} c_{22} & c_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} \\ a_{31}a_{21} + a_{32}a_{22} + a_{33}a_{23} & a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 \end{vmatrix};$$

naar denne Determinant ved den stadig anvendte Sætning i 10 opløses i 9 Determinanter, da forsvinder de 3, i det hver af dem paa en Faktor nær er en Determinant med to Søjler ens. Betragter vi paa den anden Side Udtrykket

$$A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}^2 =$$

$$\begin{vmatrix} a_{22}^2 + a_{23}^2 & a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} \\ a_{32}a_{22} + a_{33}a_{23} & a_{32}^2 + a_{33}^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21}^2 + a_{23}^2 & a_{21}a_{31} + a_{23}a_{33} \\ a_{31}a_{21} + a_{33}a_{23} & a_{31}^2 + a_{33}^2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{21}^2 + a_{22}^2 & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} \\ a_{31}a_{21} + a_{32}a_{22} & a_{31}^2 + a_{32}^2 \end{vmatrix},$$

og opløser vi efter samme Sætning enhver af de sidste 3 Determinanter i 4 andre, da forsvinder af disse 4 hver Gang 2, og der bliver saaledes ogsaa her 6 Determinanter tilbage; i det imidlertid disse 6 Determinanter er de samme som de 6 Determinanter, vi fandt ovenfor, er Rigtigheden af Ligningen $C_{11} = A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2$ hermed godtgjort. Paa fuldkommen tilsvarende Maade (eller ved simpelthen at anvende det forrige Resultat paa den Determinant, der fremkommer af A ved Ombytning af to Rækker) bevises de to andre Ligninger.

14. Symmetrisk Determinant. En Determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

siges at være symmetrisk, hvis den opfylder Betingelsen $a_{rs} = a_{sr}$, idet r og s er to hvilkesomhelst af Tallene $1, 2 \ldots n$, eller, anderledes udtrykt, hvis den nye Determinant, der frem-kommer af den givne ved i denne at ombytte Rækker og Søjler, er fuldkommen ens med den oprindelige, d. v. s har samme Tal paa tilsvarende Pladser. Vi vil som endnu et Øvelseseksempel i Multiplikation af Determinanter bevise følgende Sætning, som vi senere vil faa Brug for: En

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

en symmetrisk Determinant, og er

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots b_{2n} \\ & \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots b_{nn} \end{vmatrix}$$

en vilkaarlig Determinant af samme Orden, vil Determinanten

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \cdots c_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} \cdots c_{nn} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots b_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots b_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} \right) \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots b_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots b_{nn} \end{vmatrix},$$

hvor Multiplikationen skal udføres efter den i 13 angivne Methode og (som angivet ved Parentesen) fra venstre til højre, altså er en symmetrisk Determinant, d. v. s. der vil gælde Ligningen $c_{rs} = c_{sr}$. Dette indses gennem følgende Betragtning:

For at bestemme Elementet c_{rs} (r ≠ s) i Determinanten paa venstre Side af Lighedstegnet, faar vi Brug for Elementerne i den r^{te} Række i den Determinant, der fremkommer ved at udføre Multiplikationen indenfor Parentesen paa højre Side af Lighedstegnet; disse Elementer er

$$b_{r1}a_{11} + b_{r2}a_{12} + \ldots b_{rn}a_{1n}; \ldots b_{q1}a_{q1} + b_{r2}a_{q2} + \ldots b_{rn}a_{qn} \ldots b_{r1}a_{n1} + b_{r2}a_{n2} + \ldots b_{rn}a_{nn}.$$

For derefter at finde c_{rs} skal vi multiplicere disse n Størrelser henholdsvis med

$$b_{s1} \ldots \ldots b_{sq} \ldots \ldots b_{sn}$$

og derefter danne Summen af disse Produkter. I den ved Udmultiplikation fremkomne Sum af n^2 Led vil Koefficienten til $b_{rp}\, b_{sq}$, hvor p og q er to vilkaarlige (ens eller forskellige) af Tallene 1, 2 . . . n, være a_{qp}. Ved Ombytning af Bogstaverne r og s ser vi, at c_{sr} er en flerleddet Størrelse med n^2 Led, hvori Koefficienten til $b_{sp} \cdot b_{rq}$ er a_{qp} og Koefficienten til $b_{sq} \cdot b_{rp}$ altsaa a_{pq}. I det imidlertid i Følge Antagelse $a_{qp} = a_{pq}$, optræder enhver af de n^2 Størrelser $b_{rp} \cdot b_{sq}$ altsaa med samme Koefficient $a_{pq} = a_{qp}$ i de to flerleddede Størrelser, der udtrykker henholdsvis c_{rs} og c_{sr}. Følgelig er $c_{rs} = c_{sr}$, saaledes som vi skulde vise.

15. Rangen af en Determinant med Værdien Nul. Ved Behandlingen af lineære Ligninger og derigennem ved Behandlingen af talrige af de Problemer, for hvilke Determinanttheorien danner det naturlige Hjælpemiddel, spiller Determinanter med Værdien Nul en særlig Rolle. Vi skal afslutte vor Gennemgang af Determinanternes Theori med for saadanne Determinanter at indføre Begrebet: Determinantens Rang, en Størrelse, der ved talrige Undersøgelser, hvor man faar at gøre med en Determinant med Værdien Nul, giver Udtryk for den Egenskab ved Determinanten, hvorpaa det i første Linie kommer an. Inden vi imidlertid kan gaa over til at definere, hvad der skal forstaas ved Rangen af en Determinant med Værdien Nul, maa vi forudskikke en Bemærkning om Underdeterminanter til en given Determinant. Hvor vi ovenfor, i Tilknytning til Bestemmelsen af Komplementerne til Elementerne i en Determinant af n^{te} Orden, indførte Begrebet Underdeterminant, forstod vi ved Underdeterminanten D_{rs} den Determinant af $n-1^{te}$ Orden, der fremkom ved i den oprindelige Determinant at slette den r^{te} Række og den s^{te} Søjle. Det er imidlertid hensigtsmæssigt ikke blot at tale om Underdeterminanter af $n-1^{te}$ Orden, men almindeligere med Navnet Underdeterminant af r^{te} Orden, hvor r er et vilkaarligt af Tallene $1, 2 \ldots n-1$, at betegne enhver Determinant af r^{te} Orden, der fremkommer af den givne Determinant ved i denne at slette $n-r$ Rækker og $n-r$ Søjler.

Lad os betragte en Determinant af n^{te} Orden, som vi vil antage har Værdien Nul uden at dog samtlige n^2 Elementer er lig med Nul. Ved Rangen R af denne Determinant forstaas da det af Tallene $1, 2 \ldots n-1$, der angiver

Ordenen for den eller de Underdeterminanter, der blandt samtlige fra Nul forskellige Underdeterminanter er af højst Ordenen, med andre Ord: findes der blot een Underdeterminant af $n-1^{te}$ Orden der er $\neq 0$, er Rangen $R = n-1$; er samtlige n^2 Underdeterminanter af $n-1^{te}$ Orden lig med Nul, men findes der mindst een Underdeterminant af $n-2^{te}$ Orden, der er $\neq 0$, er Rangen $n-2$, o. s. v. Determinanten

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 & 9 \\ 2 & 8 & 1 & 6 \\ 1 & -4 & 6 & 3 \\ 5 & 12 & 8 & 15 \end{vmatrix}$$

har saaledes Rangen 2, idet den er Nul og samtlige Underdeterminanter af 3^{dje} Orden er Nul, medens f. Eks $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$ er $\neq$ Nul.

Som et andet og mere almindeligt Eksempel paa Bestemmelsen af Rangen betragter vi Determinanten

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-s & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-s \end{vmatrix}$$

$$= -s^3 + A_1 s^2 + A_2 s + A_3 .$$

Skal $\Delta(s)$ være en Determinant med Værdien 0, maa s være Rod i den algebraiske Ligning af 3^{dje} Grad $\Delta(s) = 0$. Vi antager nu, at $\Delta(s)$ er en symmetrisk Determinant, d. v. s. at $a_{rs} = a_{sr}$, og vil da bevise, at hvis s_0 er en enkelt Rod i $\Delta(s)$ da har Determinanten $\Delta(s_0)$ Rangen 2; er s_0 dobbelt Rod i $\Delta(s)$, da har $\Delta(s_0)$ Rangen 1; er endelig s_0 tredobbelt Rod i $\Delta(s)$, da er samt-

<u>lige Elementer i $\Delta(s_0)$ lig med Nul</u> (eller, som man undertiden ogsaa siger, da har $\Delta(s_0)$ Rangen 0). Lad os for at bevise denne Sætning først bemærke, at vi aabenbart kan nøjes med at føre Beviset for det Tilfælde, hvor Roden s_0 har Værdien 0. Thi er $s_0 \neq 0$, og sætter vi $s = s_0 + \mathfrak{S}$, hvor $\mathfrak{S}$ er en ny Variabel, gaar Determinanten $\Delta(s)$ jo derved over til en ny symmetrisk Determinant af samme Form, nemlig

$$\bar{\Delta}(\mathfrak{S}) = \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} - \mathfrak{S} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \bar{a}_{22} - \mathfrak{S} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \bar{a}_{33} - \mathfrak{S} \end{vmatrix},$$

hvor vi til Afkortning har betegnet $a_{11} - s_0$, $a_{22} - s_0$, $a_{33} - s_0$ med $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{22}$, $\bar{a}_{33}$, og denne nye Determinant $\bar{\Delta}(\mathfrak{S})$, der for $\mathfrak{S} = 0$ er den samme som den i Sætningen omhandlede Determinant $\Delta(s_0)$, er aabenbart delelig med $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}^2$ eller $\mathfrak{S}^3$, alteftersom den oprindelige Determinant $\Delta(s)$ er delelig med $(s - s_0)$, $(s - s_0)^2$ eller $(s - s_0)^3$, d. v. s. Determinanten $\bar{\Delta}(\mathfrak{S})$ har Tallet 0 til enkelt, dobbelt eller tredobbelt Rod, alteftersom s_0 er enkelt, dobbelt eller tredobbelt Rod i $\Delta(s)$. Efter at Paastanden om, at vi uden at indskrænke Bevisets Almengyldighed kan antage $s_0 = 0$, hermed er godtgjort, betragter vi (under den nævnte Antagelse: $s_0 = 0$) sammen med Determinanten $\Delta(s)$ Determinanten

$$\Delta(-s) = \begin{vmatrix} a_{11} + s & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + s & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + s \end{vmatrix}.$$

Danner vi Produktet $\Delta(s) \cdot \Delta(-s)$ finder vi ved Udregning (idet vi gør Brug af, at $a_{rs} = a_{sr}$)

$$\Delta(s)\cdot\Delta(-s)=\begin{vmatrix} c_{11}-s^2 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22}-s^2 & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33}-s^2 \end{vmatrix},$$

hvor Størrelserne c_{rs} er bestemte som Elementer i Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}.$$

Udregner vi Produktdeterminanten $\Delta(s)\cdot\Delta(-s)$ finder vi et Polynomium af 6te Grad i s af Formen

$$\Delta(s)\,\Delta(-s) = -s^6 + B_1 s^4 + B_2 s^2 + B_3 .$$

Her er $B_3 = 0$, da jo i Følge Forudsætning 0 er Rod i $\Delta(s)$ (og altsaa ogsaa i $\Delta(s)\,\Delta(-s)$), medens Koefficienterne B_2 og B_1 er bestemte ved Ligningen

$$B_2 = -\left(\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{13} \\ c_{31} & c_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{22} & c_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}\right), \quad B_1 = c_{11}+c_{22}+c_{33},$$

altsaa (idet vi gør Brug af Øvelseseksemplet i 13.) ved Ligningerne

$$B_2 = -\sum A_{rs}^2, \qquad B_1 = \sum a_{rs}^2,$$

hvor Summationen skal udstrækkes henholdsvis over alle 9 Underdeterminanter af 2den Orden A_{rs} og over alle 9 Elementer a_{rs} i Determinanten

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

Er nu 0 enkelt Rod i $\Delta(s)$, er 0 aabenbart ligeledes enkelt Rod i $\Delta(-s)$ og altsaa dobbelt Rod i $\Delta(s)\,\Delta(-s)$, saaledes at Koefficienten $B_2 \neq 0$; men idet $B_2 = -\Sigma A_{rs}^2$, følger heraf, at ikke alle 9 Underdeterminanter af 2^den Orden A_{rs} er lig med Nul, d. v. s. at Determinanten $\Delta(0)$ har Rangen 2, saaledes som vi skulde vise. Er 0 dobbelt Rod i $\Delta(s)$, altsaa ogsaa dobbelt Rod i $\Delta(-s)$ og følgelig firdobbelt Rod i $\Delta(s)\,\Delta(-s)$, er $B_2 = 0$, $B_1 \neq 0$; idet imidlertid $B_2 = -\Sigma A_{rs}^2$, $B_1 = \Sigma a_{rs}^2$, følger heraf, at alle 9 Underdeterminanter af 2^den Orden A_{rs} er lig med Nul, uden at dog samtlige Elementer a_{rs} er Nul; Determinanten $\Delta(0)$ har altsaa her Rangen 1. Er endelig 0 tredobbelt Rod i $\Delta(s)$, altsaa seksdobbelt Rod i $\Delta(s)\,\Delta(-s)$, er $B_1 = B_2 = 0$; heraf følger, idet $B_1 = \Sigma a_{rs}^2$, at samtlige Elementer a_{rs} i $\Delta(0)$ er lig med Nul. Hermed er da den opstillede Sætning fuldstændig bevist.

Opg. 1 Udregn Determinanterne

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{og} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} .$$

Opg. 2 Find Rødderne i

$$\begin{vmatrix} x^2+x-6 & 4x-8 & 14 \\ x^2-3 & 3x-5 & 7 \\ x-3 & x-3 & 6 \end{vmatrix} .$$

Opg. 3. Idet $(a_1, a_2 \ldots a_n)$ og $(b_1, b_2 \ldots b_n)$ er to „egentlige" Talsæt, d. v. s ingen af dem bestaar af lutter Nuller, siges de at være proportionale, naar det ene Sæt frembaar af det andet ved at multiplicere Tallene i det sidste med en og samme (aabenbart fra Nul forskellige) Konstant, (d. v. s. $a_1 = kb_1$, $a_2 = kb_2 \ldots a_n = kb_n$). Bevis, idet $(a_1 \ldots a_n)$ og $(b_1 \ldots b_n)$ er to egentlige Talsæt, at de to Betingelser:

1) $(a_1, a_2 \ldots a_n)$ og $(b_1, b_2 \ldots b_n)$ er proportionale
2) de $\frac{n(n-1)}{2}$ Determinanter $\begin{vmatrix} a_p & a_q \\ b_p & b_q \end{vmatrix}$, hvor p og q er to hvilkesomhelst indbyrdes forskellige af Tallene $1, 2 \ldots n$, saaledes at $p < q$, er alle Nul

er faldkommen ensgyldige, altsaa at de enten begge to er opfyldt eller ingen af dem.

Opg. 4 Bestem (efter den i 13 givne Regel) Produktet $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ og kontroller Resultatet ved direkte at udregne de to givne og den ved Multiplikationen fremkomne Determinant.

Opg. 5 Bevis (ved Multiplikation af Determinanterne A og B), at hvis Determinanten

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

er $\neq 0$, vil den af Komplementerne A_{rs} til Determinanten A dannede Determinant

$$B = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \dots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \dots A_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} \dots A_{nn} \end{vmatrix}$$

have Værdien A^{n-1}. (Vi skal senere se, at Sætningen $B = A^{n-1}$ ogsaa gælder naar $A = 0$)

Opg. 6 I det der er givet to rektangulære Talskemaer

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{matrix} \quad \text{og} \quad \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} \dots b_{mn} \end{matrix},$$

hvor $m \geq n$, skal det bevises, at Determinanten

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \dots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \dots c_{2n} \\ \vdots & \\ c_{n1} & c_{n2} \dots c_{nn} \end{vmatrix},$$

hvis almindelige Led c_{rs} bestemmes ved $c_{rs} = a_{r1}b_{s1} + a_{r2}b_{s2} + \ldots + a_{rn}b_{sn}$, er lig med Nul

Opg. 7. Vis, at hvis samtlige Underdeterminanter af r^{te} Orden til en Determinant af n^{te} Orden er Nul, gælder det samme for alle Underdeterminanter af $r+1^{te}$, $r+2^{te}$ . . . $n-1^{te}$ Orden, og at selve Determinanten er lig med Nul.

Opg. 8. Find Rangen af Determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

Opg. 9. Bestem Antallet af Underdeterminanter af r^{te} Orden til en Determinant af n^{te} Orden.

Opg. 10. En Determinant kaldes skævsymmetrisk, hvis der, idet r og s er to vilkaarlige (ens eller forskellige) af Tallene 1, 2 . . . n, gælder Ligningen $a_{rs} = -a_{sr}$ (heri er specielt indeholdt, at $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 0$). Bevis, at en skævsymmetrisk Determinant af ulige Orden har Værdien Nul.

De lineære Ligninger.

16. Indledende Bemærkninger. Lad der være givet et System af m lineære Ligninger med n Ubekendte

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned},$$

hvor $x_1, x_2 \ldots x_n$ betegner de Ubekendte, medens saavel Størrelserne a_{rs} (Koefficienterne til de Ubekendte) som Leddene paa højre Side af Lighedstegnene $b_1, b_2 \ldots b_m$ er Konstanter. Ved en til det betragtede System af Ligninger hørende Løsning $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ forstaas som navnt i Indledningen et Sæt af n Tal, $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, saaledes beskaffne, at samtlige m Ligninger er tilfredsstillet, naar man for x_1 indsætter α_1, for x_2 indsætter α_2 . . . for x_n indsætter α_n. En saadan Løsning vil vi undertiden kortere betegne ved Symbolet (α); denne sidste afkortede Skrivemaade for Løsningen $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ vil ved visse Undersøgelser i det følgende være hensigtsmæssig, idet den gør det muligt at udtrykke forskellige Regninger med Løsningerne paa væsentlig overskueligere Maade.

Opløsningen af et System af lineære Ligninger er en Opgave, man ofte møder, ikke blot ved talrige matematiske Undersøgelser, som f. Eks. naar man i den analytiske Geometri søger Skæring mellem rette Linier eller Planer, men ogsaa ved Undersøgelser, der direkte er knyttet til Anven-

delserne, f. Eks ved Beregningen af Strømstyrkerne i de enkelte Dele af et forgrenet Ledningsnet, eller for at nævne et almindeligere Omraade, ved Undersøgelser, hvor det drejer sig om Udjævning af Resultater, der er fundet ved Iagttagelse.

Ved den følgende ret indgaaende Behandling af et System af lineære Ligninger vil den i forrige Afsnit udviklede Theori for Determinanter være et Hjælpemiddel af gennemgribende Betydning; derved, at vi har Resultaterne af denne Theori til vor Raadighed, vil det være muligt paa simpel og overskuelig Maade at naa frem til og at kunne formulere de almindelige og vigtige Sætninger, der gælder for Opløsningen af et saadant System.

17. Ligningernes Determinant forskellig fra Nul. Vi skal væsentlig indskrænke os til at betragte det Hovedtilfælde, hvor Antallet m af Ligninger er det samme som Antallet n af Ubekendte (som vi senere skal se, kan det almindelige Tilfælde i Virkeligheden henføres hertil), hvor der altsaa er givet et System af Ligninger paa Formen

$$(2)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \,. \end{aligned}$$

Ved Ligningernes Determinant forstaas her den til det kvadratiske Koefficientskema paa venstre Side af Lighedstegnene hørende Determinant

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Vi begynder med at bevise følgende Hovedsætning: Er Ligningernes Determinant $\neq 0$, har det givne System (2) een og kun een Løsning.

For at løse overstaaende Ligninger (2) ligger det nær, ligesom for $n = 2$, at prøve paa at eliminere alle de Ubekendte paa een nær, derved at man søger at finde n Faktorer, saaledes at naar man multiplicerer de n Ligninger hver med sin af disse Faktorer og dernæst adderer de fremkomne Ligninger, da bliver Koefficienterne til alle de Ubekendte Nul paa een nær. Faktorer med denne Egenskab kan vi imidlertid umiddelbart finde ved Hjælp af Læren om Determinanter. Vi behøver blot for paa den omtalte Maade at eliminere alle de Ubekendte paa x_r nær til de n Faktorer at vælge Komplementerne $A_{1r}, A_{2r} \ldots A_{nr}$ til Elementerne i r^{te} Søjle i Ligningernes Determinant A. Multiplicerer vi nemlig den første Ligning med A_{1r}, den anden med $A_{2r} \ldots$ den n^{te} med A_{nr} og lægger de fremkomne Ligninger sammen, vil som en Følge af Ligningen

$$a_{1s}A_{1r} + a_{2s}A_{2r} + \ldots a_{ns}A_{nr} = \begin{cases} 0 & \text{for } s \neq r \\ A & \text{for } s = r \end{cases}$$

Koefficienten til enhver af de Ubekendte x_s, hvis Mærketal er $\neq r$, bliver lig med Nul, medens Koefficienten til x_r bliver Ligningernes Determinant A. Vi finder saaledes

$$A \cdot x_r = b_1 A_{1r} + b_2 A_{2r} + \ldots b_n A_{nr},$$

hvor højre Side aabenbart er den Determinant B_r, der fremkommer af A, naar man erstatter Elementerne i den r^{te} Søjle med Tallene $b_1, b_2 \ldots b_n$. Lader vi i Ligningen

$A \cdot x_r = B_r$ Tallet r gennemløbe Værdierne 1, 2 . . . n, finder vi derigennem de n Ligninger

$$A \cdot x_1 = B_1, \quad A \cdot x_2 = B_2 \ldots A \cdot x_n = B_n .$$

I det dette sidste System af n Ligninger er udledt ud fra det oprindelig givne System (2), følger umiddelbart, at enhver eventuel Løsning til det oprindelige System ogsaa maa være en Løsning til det nye System. Dette sidste System har imidlertid (da A er forudsat $\neq 0$) øjensynlig een og kun een Løsning, nemlig $\left(\frac{B_1}{A}, \frac{B_2}{A} \ldots \frac{B_n}{A}\right)$. Hvis derfor det oprindelige System overhovedet har en Løsning, maa det være denne, d. v. s. enten har det oprindelige System slet ingen Løsning, eller det har den ene Løsning $\left(\frac{B_1}{A}, \frac{B_2}{A} \ldots \frac{B_n}{A}\right)$. — For at afgøre, hvorvidt $\left(\frac{B_1}{A}, \frac{B_2}{A} \ldots \frac{B_n}{A}\right)$ virkelig er en Løsning til det givne System af Ligninger eller ikke, maa vi gøre en Prøve, d. v. s. for x_1 indsætte Tallet $\frac{B_1}{A}$, for x_2 Tallet $\frac{B_2}{A}$ . . . for x_n Tallet $\frac{B_n}{A}$, og undersøge, om samtlige n Ligninger derved tilfredsstilles. Indsætter vi i venstre Side af en vilkaarlig af de givne Ligninger, f. Eks. den s^{te}, finder vi

$$\frac{1}{A}(a_{s1}B_1 + a_{s2}B_2 + \ldots a_{sn}B_n) = \frac{1}{A}\Big[a_{s1}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots b_nA_{n1}) + a_{s2}(b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots b_nA_{n2}) \ldots + a_{sn}(b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \ldots b_nA_{nn})\Big]$$

$$= \frac{1}{A}\Big[b_1(a_{s1}A_{11} + a_{s2}A_{12} + \ldots a_{sn}A_{1n}) + b_2(a_{s1}A_{21} + a_{s2}A_{22} + \ldots a_{sn}A_{2n}) + \ldots b_n(a_{s1}A_{n1} + a_{s2}A_{n2} + \ldots a_{sn}A_{nn})\Big].$$

Koefficienten til b_r ($r = 1, 2 \ldots n$) indenfor Parenthesen er her lig med

$$a_{s1}A_{r1} + a_{s2}A_{r2} + \ldots a_{sn}A_{rn} = \begin{cases} 0 & \text{for } r \neq s \\ A & \text{for } r = s \end{cases};$$

sluttelig finder vi altsaa, at venstre Side af den s^{te} Ligning efter Indsættelsen er lig med $\frac{1}{A}(b_s A) = b_s$; Ligningen er saaledes tilfredsstillet for de indsatte Værdier. Da dette gælder for enhver af de n Ligninger, er $\left(\frac{B_1}{A}, \frac{B_2}{A} \ldots \frac{B_n}{A}\right)$ altsaa virkelig en Løsning til det givne System og, som det fremgaar af det foregaaende, den eneste Løsning. Hermed er den ovenstaaende Sætning bevist. Den fundne eneste Løsning kan karakteriseres derigennem, at enhver af de Ubekendte er lig med en Brøk, hvis Nævner er Ligningernes Determinant, medens Telleren er den Determinant, som fremgaar af Ligningernes Determinant ved at erstatte den Søjle, som dannes af Koefficienterne til vedkommende Ubekendte, med Størrelserne paa højre Side af Lighedstegnene.

Eks.

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 2x - y + 3z &= 9 \\ -3y + z &= -3 . \end{aligned}$$

Ligningernes Determinant er

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 12$$

Idet A er $\neq 0$, har Ligningerne een og kun een Løsning; for at finde denne beregnes Determinanterne

$$\mathfrak{B}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 9 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 12, \quad \mathfrak{B}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 24, \quad \mathfrak{B}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 36.$$

Vi finder herigennem $x = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{A}} = 1$, $y = \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{A}} = 2$, $z = \frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{A}} = 3$.

18. Lagranges og Newtons Interpolationsformler. Lad der være givet n indbyrdes forskellige Tal $x_1, x_2 \ldots x_n$ samt n vilkaarlige Tal $y_1, y_2 \ldots y_n$. Vi skal da som en Anvendelse af det i 17 fundne Resultat bevise følgende Sætning: Der findes et og kun et Sæt af n Konstanter $a_0, a_1 \ldots a_{n-1}$ saaledes at Polynomiet $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_{n-1} x^{n-1}$ for Værdierne $x_1, x_2 \ldots x_n$ antager henholdsvis Værdierne $y_1, y_2 \ldots y_n$. Denne Sætning udtrykkes ogsaa ofte saaledes: Der findes et og kun et Polynomium af højst $n-1^{te}$ Grad, som for n opgivne Værdier af den Variable antager n opgivne Værdier (idet man ved et Polynomium af højst $n-1^{te}$ Grad" forstaar et Polynomium, der enten er et "Nulpolynomium eller et egentligt Polynomium, hvis Grad er $\leqq n-1$).

Rigtigheden af denne Sætning indses umiddelbart saaledes: At Polynomiet $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_{n-1} x^{n-1}$ for Værdierne $x_1, x_2 \ldots x_n$ skal antage Værdierne $y_1, y_2 \ldots y_n$ er ensbetydende med, at de n Koefficienter $a_0, a_1 \ldots a_{n-1}$ skal tilfredsstille de n Ligninger

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots a_{n-1} x_1^{n-1} &= y_1 \\
a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots a_{n-1} x_2^{n-1} &= y_2 \\
\ldots\ldots\ldots

For dette System af n Ligninger med de n Ubekendte $a_0, a_1 \ldots a_{n-1}$ er Ligningernes Determinant lig med

$$\mathfrak{D}(x_1, x_2 \ldots x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} ;$$

i det denne Determinant er $\neq 0$ (smlg. 12), da jo ikke to af Tallene $x_1, x_2 \ldots x_n$ er ligestore, har det betragtede System af Ligninger een og kun een Løsning $(a_0, a_1 \ldots a_{n-1})$, saaledes som det var Opgaven at vise. Resultaterne i 17 viser ikke blot, at de betragtede Ligninger har een og kun een Løsning, men tillader os ogsaa direkte at angive Udtryk for de Ubekendte (d. v. s. for Koefficienterne $a_0, a_1 \ldots a_{n-1}$ i det søgte Polynomium), nemlig Brøker, hvori saavel Tæller som Nævner er Determinanter af n^{te} Orden. En bekvemmere Maade at skrive Polynomiet paa kommer vi imidlertid til gennem følgende Betragtning. Lad $P_1(x), P_2(x) \ldots P_n(x)$ betegne de Polynomier af højst $n-1^{te}$ Grad, som for de opgivne Værdier $x_1, x_2 \ldots x_n$ for den Variable x antager henholdsvis Værdierne

$$1, 0, 0 \ldots 0 ; \quad 0, 1, 0 \ldots 0 ; \quad \ldots \quad 0, 0, 0 \ldots 1 ;$$

da vil det søgte Polynomium $P(x)$, som for $x = x_1, x_2 \ldots x_n$ antager Værdierne $y_1, y_2 \ldots y_n$, øjensynlig kunne skrives paa Formen

$$P(x) = y_1 \cdot P_1(x) + y_2 \cdot P_2(x) + \ldots y_n \cdot P_n(x).$$

Det gælder derfor blot om at bestemme de n af $y_1, y_2 \ldots y_n$ uafhængige, d. v. s kun af $x_1, x_2 \ldots x_n$ afhængige Polynomier $P_1(x), P_2(x) \ldots P_n(x)$. For at bestemme $P_1(x)$ bemærker vi først, at $P_1(x)$ ikke er et Nulpolynomium, da det jo for $x = x_1$ antager en Værdi forskellig fra Nul, nemlig Værdien 1. $P_1(x)$ er følgelig et egentligt Polynomium (af højst $n-1^{te}$ Grad); i det det imidlertid er givet, at $P_1(x)$ bliver Nul for Værdierne $x_2, x_3 \ldots x_n$, altsaa har de $n-1$ Rødder $x_2, x_3 \ldots x_n$, kan det ikke være af lavere end $n-1^{te}$ Grad, d. v. s. det maa være netop af $n-1^{te}$ Grad og have Formen $k(x-x_2)(x-x_3) \ldots (x-x_n)$, hvor k er en fra Nul forskellig Konstant. Bestemmer vi sluttelig k saaledes at $P_1(x)$ for $x = x_1$ antager Værdien 1, finder vi

$$P_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3) \ldots (x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3) \ldots (x_1-x_n)}.$$

Paa tilsvarende Maade (eller ved simpelthen i Udtrykket for $P_1(x)$ at ombytte henholdsvis x_1 og x_2, x_1 og $x_3 \ldots x_1$ og x_n) faas

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3) \ldots (x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3) \ldots (x_2-x_n)}, \ldots P_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2) \ldots (x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2) \ldots (x_n-x_{n-1})}.$$

Den søgte Formel

$$P(x) = y_1 \cdot P_1(x) + y_2 P_2(x) + \ldots y_n P_n(x),$$

hvor $P_1(x), P_2(x) \ldots P_n(x)$ er de ovenfor angivne Polynomier af $n-1^{te}$ Grad, kaldes <u>Lagrange's Interpolationsformel</u> (Til Forklaring af Ordet Interpolationsformel bemærker vi, at man ved Udtrykket „at interpolere" forstaar at bestemme

en Funktion af opgiven Type – i det betragtede Tilfælde et Polynomium af højst $n-1^{te}$ Grad –, der for visse opgivne Værdier af den (eller de) Variable antager opgivne Værdier.

En anden, og ved Behandlingen af Taleksempler ofte bekvem, Methode til Bestemmelse af det omhandlede Polynomium af højst $n-1^{te}$ Grad, $P(x)$, der for $x = x_1, x_2 \ldots x_n$ antager henholdsvis Værdierne $y_1, y_2 \ldots y_n$, er angivet af Newton og bestaar i følgende:
Man sætter

$$P(x) = c_0 + c_1(x-x_1) + c_2(x-x_1)(x-x_2) + \ldots c_{n-1}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})$$

og bestemmer først c_0, saaledes at $P(x_1) = y_1$, hvorved man finder $c_0 = y_1$; derefter bestemmes c_1 saaledes at $P(x_2) = y_2$, d. v. s. saaledes at $y_2 = c_0 + c_1(x_2-x_1)$; herved faas $c_1 = \frac{y_2-c_0}{x_2-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$; derefter bestemmes c_2, saaledes at $P(x_3) = y_3$, o. s. v.; sluttelig bestemmes c_{n-1} saaledes at $P(x_n) = y_n$. Det er klart, at denne successive Bestemmelse altid er gennemførlig og forløber paa entydig Maade, og at det Polynomium $P(x)$, man derved kommer til, netop er det søgte.

Eks. Skal $P(x)$ bestemmes, højst af 2^{den} Grad, saaledes, at det for Værdierne $-1, 0, 1$ antager henholdsvis Værdierne $3, 2, 3$, sætter man

$$P(x) = c_0 + c_1(x+1) + c_2(x+1).x .$$

Man bestemmer c_0 saaledes, at $P(-1) = 3$, d. v. s. $c_0 = 3$, derefter c_1 saaledes at $P(0) = 2$, d. v. s. $c_1 = \frac{2-3}{1} = -1$, og sluttelig c_2 saaledes at $P(1) = 3$, d. v. s. $c_2 = \frac{3-3-(-1).2}{2.1} = 1$. Altsaa faas $P(x) = 3 - (x+1) + (x+1).x = x^2+2$.

19. Homogene Ligninger. Inden vi gaar over til at behandle et vilkaarligt System (2) af ikke homogene (eller som man siger: inhomogene) Ligninger — d. v. s. et System, hvor ikke alle Tallene $b_1, b_2 \ldots b_n$ paa höjre Side er lig med Nul — i det Tilfælde hvor Ligningernes Determinant er lig med Nul, vil vi forudskikke en ret fuldstændig Behandling af de homogene Ligningers Theori. Vi sætter derfor i (2) $b_1 = b_2 = \ldots b_n = 0$ og betragter altsaa det homogene System

$$(3)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n &= 0 \,. \end{aligned}$$

Vi begynder med at fremsætte nogle almindelige Bemærkninger om Løsningernes Karakter. Lad os først gøre opmærksom paa den iöjnefaldende Ejendommelighed, at ethvert System af homogene Ligninger (3) har Løsningen $(0, 0 \ldots 0)$; denne Løsning betegner vi i det følgende med (0) og kalder den Nulløsningen, medens vi kalder en Løsning $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$, hvor ikke alle Tallene $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ er lig med Nul, en egentlig Løsning. Endvidere indser man umiddelbart ved Fundsættelse, at hvis $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ er en Løsning, vil $k \cdot (\alpha) = (k\alpha_1, k\alpha_2 \ldots k\alpha_n)$, hvor k betegner en vilkaarlig Konstant, atter være en Løsning; heraf følger, at hvis (3) har egentlige Løsninger, vil det nödvendigvis have uendelig mange Løsninger; thi er $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ en egentlig Løsning og $k_1 \neq k_2$, da er Løsningerne $k_1(\alpha)$ og $k_2(\alpha)$ indbyrdes forskellige. Endelig indser man ligeledes umiddelbart ved Fundsættelse, at hvis $(\alpha') = (\alpha'_1, \alpha'_2 \ldots \alpha'_n)$ og $(\alpha'') = (\alpha''_1, \alpha''_2 \ldots \alpha''_n)$ er to Løsninger,

da er $(\alpha') + (\alpha'') = (\alpha_1' + \alpha_1'', \alpha_2' + \alpha_2'' \ldots \alpha_n' + \alpha_n'')$ atter en Løsning. Ved at kombinere de to nævnte Sætninger udleder vi, at hvis $(\alpha'), (\alpha'') \ldots (\alpha^{(m)})$ er m vilkaarlige Løsninger og $k', k'' \ldots k^{(m)}$ m vilkaarlige Tal, vil

$$k'(\alpha') + k''(\alpha'') + \ldots k^{(m)}(\alpha^{(m)})$$

atter være en Løsning til det givne homogene System.

20. Fuldstændig Løsning af et homogent System. Ved den følgende Opløsning af et System af n homogene Ligninger med n Ubekendte, vil vi skelne mellem tre forskellige Tilfælde.

1) Er Ligningernes Determinant $\neq 0$, har Systemet (3) ingen egentlige Løsninger, d. v. s. kun Nulløsningen (0). Dette følger umiddelbart udfra den i 17. beviste Sætning om, at det vilkaarlige (homogene eller inhomogene) System (2) har een og kun een Løsning, naar Ligningernes Determinant er $\neq 0$. (At denne ene Løsning her netop maa være Løsningen (0), følger naturligvis umiddelbart deraf, at vi jo ved, at (0) er Løsning til ethvert homogent System (3), men indses ogsaa straks udfra den i 17. givne Form for Løsningen, nemlig $\left(\frac{B_1}{A}, \frac{B_2}{A}, \ldots \frac{B_n}{A}\right)$, hvori Determinanterne $B_1, B_2 \ldots B_n$ jo her alle er Nul, da enhver af dem har alle Elementerne i en Søjle lig med Nul.)

2) Er samtlige Koefficienter $a_{rs} = 0$, har Systemet (3) enhver Løsning overhovedet, i det Ligningerne i (3) jo da er tilfredsstillet, hvilke Værdier vi end indsætter for de Ubekendte.

3) Lad os endelig betragte Hovedtilfældet, hvor Ligningernes Determinant A er lig med Nul, uden at dog samtlige Koefficienter a_{rs} er Nul, og lad os for et saadant System (3) betegne Rangen af Ligningernes Determinant A med R, hvor

R jo da er et af Tallene $1, 2 \ldots n-1$. Udfra Definitionen paa en Determinants Rang følger, at ligesom Determinanten A selv er lig med Nul, saaledes er ogsaa samtlige Underdeterminanter af højere end R^{te} Orden (hvis der da findes saadanne, d. v. s. hvis $R < n-1$) lig med Nul, medens der blandt Underdeterminanterne af R^{te} Orden findes mindst een, der er forskellig fra Nul. Vi vil antage, at netop den Underdeterminant af R^{te} Orden

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1R} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2R} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{R1} & a_{R2} \ldots & a_{RR} \end{vmatrix},$$

der fremkommer af A ved at slette de nederste $n-R$ Rækker og de længst tilhøjre staaende $n-R$ Søjler, er $\neq 0$. Naar vi antager, at blandt Underdeterminanterne af R^{te} Orden netop denne Underdeterminant er $\neq 0$, da betyder dette øjensynlig ingen Indskrænkning af Undersøgelsens Almindelighed, idet det altid kan opnaas ved om fornødent at omordne Ligningerne og omnumerere de Ubekendte paa passende Maade. Vi vil begynde med at vise, <u>at i dette Tilfælde kan enhver af de $n-R$ sidste Ligninger, d. v. s. enhver af Ligningerne</u>

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots a_{sn}x_n = 0,$$

<u>hvor $s > R$, udledes udfra de R første Ligninger ved at multiplicere disse R Ligninger med passende valgte Konstanter og derefter lægge dem sammen</u>. For at indse dette, forsy-

mer vi, idet s betegner et vilkaarligt af Tallene $R+1 \ldots n$, den forøvrige Determinant Δ med en Ramme bestaaende af de første R Elementer af den s^{te} Række i Ligningernes Determinant A og en variabel Søjle: $u_1, u_2 \ldots u_{R+1}$. Den nye Determinant U er da

$$U = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1R} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2R} & u_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{R1} & a_{R2} \ldots & a_{RR} & u_R \\ a_{s1} & a_{s2} \ldots & a_{sR} & u_{R+1} \end{vmatrix} .$$

Vi betegner de konstante Komplementer til Elementerne i den variable Søjle med henholdsvis $U_1, U_2 \ldots U_{R+1}$, hvor U_{R+1} netop er den forøvrigt talte Determinant Δ, altsaa $\neq 0$. Den betragtede Determinant U bliver øjensynlig lig med Nul, naar vi for de variable Elementer i sidste Søjle indsætter Tallene $a_{1p}, a_{2p} \ldots a_{Rp}, a_{sp}$, hvor p er et vilkaarligt af Tallene $1, 2 \ldots n$; thi enten er $p \leqq R$, og da faar Determinanten U to Søjler ens, eller ogsaa er $p > R$, og da er Determinanten U en Underdeterminant af $R+1^{te}$ Orden til Ligningernes Determinant A (eller, for $R = n-1$, selve Ligningernes Determinant A) og derfor lig med Nul. Altsaa gælder for ethvert af Tallene $p = 1, 2 \ldots n$ Ligningen

$$a_{1p} U_1 + a_{2p} U_2 + \ldots a_{Rp} U_R + a_{sp} U_{R+1} = 0,$$

hvoraf følger, idet $U_{R+1} = \Delta \neq 0$,

$$a_{sp} = -\frac{U_1}{\Delta} a_{1p} - \frac{U_2}{\Delta} a_{2p} \ldots - \frac{U_R}{\Delta} a_{Rp} ;$$

men denne sidste Ligning (gældende for $p = 1, 2 \ldots n$) udsiger jo netop, at den s^{te} Ligning kan udledes af de R første ved at multiplicere den første af disse med $-\frac{U_1}{\Delta}$, den anden med $-\frac{U_2}{\Delta}$ . . . den R^{te} med $-\frac{U_R}{\Delta}$ og derefter lægge dem sammen. Ved Løsningen af det givne System kan vi derfor simpelthen slette de $n-R$ sidste Ligninger, d. v. s. nøjes med at tage Hensyn til de R første Ligninger

$$(4)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{R1}x_1 + a_{R2}x_2 + \ldots a_{Rn}x_n &= 0 \quad ; \end{aligned}$$

thi dersom $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ er en Løsning til disse Ligninger, vil Tallene $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ indsat for de Ubekendte af sig selv tilfredsstille de øvrige $n-R$ Ligninger, der jo kan udledes af de R første; med andre Ord: det givne System (3) af n Ligninger og det nye System (4), der kun indeholder de R første af disse n Ligninger, har nøjagtigt de samme Løsninger $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$. — I det nye System (4) kan vi ijensynlig opfatte de $n-R$ Ubekendte $x_{R+1}, x_{R+2} \ldots x_n$ som Parametre og derefter paa eentydig Maade udtrykke de resterende R Ubekendte ved Parametrene; thi tillægger vi $x_{R+1}, x_{R+2} \ldots x_n$ vilkaarlige Værdier, og opfatter vi derefter $x_1, x_2 \ldots x_R$ som de Ubekendte, har vi et System af R Ligninger med R Ubekendte, hvis Determinant Δ er $\neq 0$, og som derfor har een og kun een Løsning; denne Determinant Δ er nemlig intet andet end den ovenfor betragtede Underdeterminant af R^{te} Orden til Determinanten A

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1R} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2R} \\ & & & \\ a_{R1} & a_{R2} & & a_{RR} \end{vmatrix} .$$

Sammenfatter vi de fundne Resultater, har vi for et System af n homogene Ligninger med n Ubekendte, for hvilket Ligningernes Determinant Δ er Nul og har Rangen R, bevist følgende Sætning: Systemet har uendelig mange Løsninger; antages det, at den Underdeterminant af R^{te} Orden til Δ, der er bestemt ved det kvadratiske Skema bestaaende af R^2 Koefficienter, der staar længst oppe til venstre, er forskellig fra Nul, kan vi opfatte de n-R sidste Ubekendte som indbyrdes uafhængige, uindskrænkede Parametre, medens $x_1, x_2 \ldots x_R$ er „Funktioner" af dem, og (som det umiddelbart fremgaar, naar man opskriver Udtrykkene for $x_1, x_2 \ldots x_R$ paa den i 17. angivne Determinantform) netop er lineære homogene Funktioner af dem, har vi altsaa fastlagt Værdierne for Parametrene, d. v. s. for de n-R sidste Ubekendte, er derved Værdierne for de R første Ubekendte fuldstændig bestemt, og disse R Værdier kan findes ved at løse de R første Ligninger uden at tage Hensyn til de n-R andre. Heraf følger f. Eks., at hvis man om to Løsninger (α') og (α'') ved, at de n-R sidste Tal i Løsningerne stemmer to og to overens, maa nødvendigvis ogsaa de R første Tal i de to Løsninger (α') og (α'') være parvis ligestore, d. v. s. de to Løsninger er een og samme Løsning.

Kaster vi et Blik paa Resultaterne i de tre forskellige Tilfælde, hvori vi har inddelt Undersøgelsen af et System af n homogene Ligninger med n Ubekendte, ses specielt,

at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for at Systemet har egentlige Løsninger bestaar deri, at Ligningernes Determinant er lig med Nul.

21. Et fuldstændigt Sæt af uafhængige Løsninger. Er $(\alpha') = (\alpha_1', \alpha_2' \ldots \alpha_n')$, (α''), $\ldots$ $(\alpha^{(m)})$ m Løsninger til et System af n homogene Ligninger med n Ubekendte, siger man om disse Løsninger, at de er indbyrdes uafhængige, hvis Løsningen $k'(\alpha') + k''(\alpha'') + \ldots k^{(m)}(\alpha^{(m)})$ stedse er en egentlig Løsning (altsaa ikke Nulløsningen), saalænge ikke alle m Tal $k', k'' \ldots k^{(m)}$ er lig med Nul, d. v. s. hvis Ligningen

$$k'(\alpha') + k''(\alpha'') + \ldots k^{(m)}(\alpha^{(m)}) = (0)$$

kun er tilfredsstillet for $k' = k'' = \ldots = k^{(m)} = 0$. Er de m Løsninger (α'), (α'') $\ldots$ $(\alpha^{(m)})$ indbyrdes uafhængige, kan ijensynligt ingen af dem være Løsningen (0), ligesom ingen af dem kan udtrykkes lineært ved de andre, d. v. s. ingen af disse Løsninger kan faas frem ved at multiplicere de øvrige $m-1$ med konstante Faktorer og lægge dem sammen. Som Eksempel paa indbyrdes uafhængige Løsninger kan, idet vi antager, at Ligningernes Determinant Δ er lig med Nul og har Rangen R, samt ligesom ovenfor antager, at Determinanten af R^{te} Orden længst oppe til venstre er $\neq 0$, nævnes de $n-R$ Løsninger

$$\begin{aligned}(\alpha') &= (\alpha_1', \alpha_2' \ldots \alpha_R', 1, 0, 0 \ldots 0)\\ (\alpha'') &= (\alpha_1'', \alpha_2'' \ldots \alpha_R'', 0, 1, 0 \ldots 0)\end{aligned} \tag{5}$$

$$(\alpha^{(n-R)}) = (\alpha_1^{(n-R)}, \alpha_2^{(n-R)} \ldots \alpha_R^{(n-R)}, 0, 0, 0 \ldots 1),$$

som fremkommer ved efterhaanden at tillægge enhver af de $n-R$ sidste Ubekendte Værdien 1, samtidig med at de øvrige $n-R-1$ af disse Ubekendte tillægges Værdien 0, og hver Gang bestemme de tilsvarende Værdier af de R første Ubekendte. Idet nemlig enhver af disse $n-R$ Løsninger har Tallet 1 paa en Plads, hvorpaa alle de andre Løsninger har Tallet 0, indses umiddelbart, at Løsningen $k'(\alpha') + k''(\alpha'') + \ldots k^{(n-R)}(\alpha^{(n-R)})$ kun da er Løsningen (0), naar alle Tallene $k', k'' \ldots k^{(n-R)}$ er lig med Nul.

Om et Sæt af indbyrdes uafhængige Løsninger $(\alpha'), (\alpha'') \ldots (\alpha^{(m)})$ siger man, at de danner et <u>fuldstændigt Sæt af uafhængige Løsninger</u> eller kortere: et <u>fuldstændigt Sæt Løsninger</u>, hvis de er saadan beskaffne, at en vilkaarlig Løsning $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ til det givne Ligningssystem kan udtrykkes lineært ved dem, d. v. s. <u>hvis enhver Løsning (α) kan skrives paa Formen $k'(\alpha') + k''(\alpha'') + \ldots k^{(m)}(\alpha^{(m)})$ for et passende Valg af Tallene</u> $k', k'' \ldots k^{(m)}$. Som man umiddelbart indser, kan Definitionen paa, at $(\alpha'), (\alpha'') \ldots (\alpha^{(m)})$ danner et fuldstændigt Sæt Løsninger, ogsaa udtrykkes saaledes: Lader vi i Løsningen $(\alpha) = k'(\alpha') + k''(\alpha'') + \ldots k^{(m)}(\alpha^{(m)})$ de m Tal $k', k'' \ldots k^{(m)}$ gennemløbe alle mulige Sæt af m Tal, faar vi paa denne Maade <u>enhver</u> Løsning (α) til Systemet med, og hver <u>kun een Gang</u>; thi det at Løsningerne $(\alpha'), (\alpha'') \ldots (\alpha^{(m)})$ er indbyrdes uafhængige, d. v. s. at Løsningen $k'(\alpha') + k''(\alpha'') + \ldots k^{(m)}(\alpha^{(m)})$ kun da er Løsningen (0), naar alle Tallene $k', k'' \ldots k^{(m)}$ er lig med Nul, er aabenbart ensbetydende med, at to Løsninger $k_1'(\alpha') + k_1''(\alpha'') + \ldots k_1^{(m)}(\alpha^{(m)})$ og $k_2'(\alpha') + k_2''(\alpha'') + \ldots k_2^{(m)}(\alpha^{(m)})$ kun da er den samme Løsning, naar $k_1' = k_2'$, $k_1'' = k_2'' \ldots k_1^{(m)} = k_2^{(m)}$. De ovenfor betragtede indbyrdes uafhængige Løsninger (5) danner øjensynligt et fuldstændigt Sæt Løsninger; en vilkaarlig Løsning $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ kan

nemlig fremstilles paa Formen $k'(\alpha') + k''(\alpha'') + \ldots k^{(n-R)}(\alpha^{(n-R)})$, i det man tillægger Tallene $k', k'' \ldots k^{(n-R)}$ Værdierne $\alpha_{R+1}, \alpha_{R+2} \ldots \alpha_n$; thi den derved fremkomne Løsning har sine $n-R$ sidste Tal henholdsvis lig med $\alpha_{R+1}, \alpha_{R+2} \ldots \alpha_n$, altsaa lig med de $n-R$ sidste Tal i den givne Løsning (α) og maa derfor i Følge en tidligere Bemærkning netop være denne Løsning (α), da der ikke findes to forskellige Løsninger med de samme Tal paa de $n-R$ sidste Pladser.

Vi vil bevise følgende Sætning: <u>Danner de m Løsninger $(\alpha'), (\alpha'') \ldots (\alpha^{(m)})$ et fuldstændigt Sæt af indbyrdes uafhængige Løsninger, vil hvilkesomhelst m indbyrdes uafhængige Løsninger $(\beta'), (\beta'') \ldots (\beta^{(m)})$ ligeledes danne et fuldstændigt Sæt</u>. I det $(\alpha'), (\alpha'') \ldots (\alpha^{(m)})$ danner et fuldstændigt Sæt Løsninger, kan enhver af Løsningerne $(\beta'), (\beta'') \ldots (\beta^{(m)})$ udtrykkes lineært ved dem, d. v. s. disse Løsninger kan skrives paa Formen

$$
\begin{aligned}
(\beta') &= k_{11}(\alpha') + k_{12}(\alpha'') + \ldots k_{1m}(\alpha^{(m)}) \\
(\beta'') &= k_{21}(\alpha') + k_{22}(\alpha'') + \ldots k_{2m}(\alpha^{(m)}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(\beta^{(m)}) &= k_{m1}(\alpha') + k_{m2}(\alpha'') + \ldots k_{mm}(\alpha^{(m)}) \,.
\end{aligned} \tag{6}
$$

I det de m Løsninger $(\beta'), (\beta'') \ldots (\beta^{(m)})$ i Følge Forudsætning er indbyrdes uafhængige, er Løsningen $K'(\beta') + K''(\beta'') + \ldots K^{(m)}(\beta^{(m)})$ kun en Nulløsning, naar $K' = K'' = \ldots = K^{(m)} = 0$. Nu er imidlertid, som man umiddelbart ser ved at indsætte de ovenstaaende Udtryk for $(\beta'), (\beta'') \ldots (\beta^{(m)})$, Løsningen $K'(\beta') + K''(\beta'') + \ldots K^{(m)}(\beta^{(m)})$ da sikkert Løsningen (0), naar $K', K'' \ldots K^{(m)}$ tilfredsstiller Ligningerne

$$k_{11}\mathfrak{K}' + k_{21}\mathfrak{K}'' + \ldots k_{m1}\mathfrak{K}^{(m)} = 0$$
$$k_{12}\mathfrak{K}' + k_{22}\mathfrak{K}'' + \ldots k_{m2}\mathfrak{K}^{(m)} = 0$$

$$k_{1m}\mathfrak{K}' + k_{2m}\mathfrak{K}'' + \ldots k_{mm}\mathfrak{K}^{(m)} = 0 \quad ;$$

følgelig har disse sidste m Ligninger, naar vi opfatter dem som et (homogent) System af Ligninger med de m Ubekendte $\mathfrak{K}', \mathfrak{K}'' \ldots \mathfrak{K}^{(m)}$, ikke andre Løsninger end Nulløsningen (0), d. v. s. de har ingen egentlige Løsninger; men for at dette skal være Tilfældet, maa, efter hvad vi i **20.** har bevist, Determinanten

$$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{21} \ldots & k_{m1} \\ k_{12} & k_{22} \ldots & k_{m2} \\ \vdots & & \\ k_{1m} & k_{2m} \ldots & k_{mm} \end{vmatrix}$$

være $\neq 0$. Efter at vi har vist, at denne Determinant er $\neq 0$, er det umiddelbart at indse, at man udfra de ovenstaaende Ligninger (6), som udtrykker Løsningerne $(\beta'), (\beta'') \ldots (\beta^{(m)})$ lineært ved Løsningerne $(\alpha'), (\alpha'') \ldots (\alpha^{(m)})$, omvendt kan finde $(\alpha'), (\alpha'') \ldots (\alpha^{(m)})$ udtrykt lineært ved $(\beta'), (\beta'') \ldots (\beta^{(m)})$. For at finde $(\alpha^{(r)})$ $(r = 1, 2 \ldots m)$ udtrykt paa Formen

$$(\alpha^{(r)}) = c_1 \cdot (\beta') + c_2 \cdot (\beta'') + \ldots c_m \cdot (\beta^{(m)})$$

behøver vi nemlig blot (i fuldkommen Analogi med den Maade, hvorpaa vi gik frem for at løse et System af Ligninger, hvis Determinant var $\neq 0$) at multiplicere de nævnte m Ligninger (6) med Komplementerne til den r^{te} Søjle i Determinanten

$$K = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \cdot \cdot \cdot & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} \cdot \cdot \cdot & k_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{m1} & k_{m2} \cdot \cdot \cdot & k_{mm} \end{vmatrix} ,$$

derefter addere dem og sluttelig dividere paa begge Sider af Ligheds-tegnet med K. — Efterat vi hermed har bevist, at enhver af Løsningerne (α'), (α'') . . . $(\alpha^{(m)})$ kan udtrykkes lineært ved (β'), (β'') . . . $(\beta^{(m)})$, kan vi nu umiddelbart fuldføre Beviset for, at (β'), (β'') . . . $(\beta^{(m)})$ danner et fuldstændigt Sæt Løsninger, d. v. s. Beviset for at en vilkaarlig Løsning (α) til det givne Ligningssystem kan udtrykkes lineært ved Løsningerne (β'), (β') . . . $(\beta^{(m)})$. For at finde et saadant Udtryk for (α) behøver vi nemlig blot først at udtrykke (α) lineært ved (α'), (α'') . . . $(\alpha^{(m)})$, hvad der er muligt, fordi (α'), (α'') . . . $(\alpha^{(m)})$ jo i Følge Antagelse danner et fuldstændigt Sæt Løsninger, og derefter i det fundne Udtryk for (α) at indføre de ovenfor omtalte lineære Udtryk for Løsningerne (α'), (α'') . . . $(\alpha^{(m)})$ ved Løsningerne (β'), (β'') . . . $(\beta^{(m)})$.

En speciel Følge af den beviste Sætning er, at to hvilkesomhelst fuldstændige Sæt Løsninger indeholder <u>det samme Antal</u> Løsninger; thi dersom vi havde to fuldstændige Sæt Løsninger, af hvilke det ene indeholdt m_1 Løsninger og det andet m_2 Løsninger, hvor $m_2 > m_1$, vilde jo efter Sætningen allerede m_1 af de omtalte m_2 Løsninger danne et fuldstændigt Sæt, saaledes at de resterende $m_2 - m_1$ Løsninger kunde udtrykkes lineært ved dem; men dette strider mod, at de m_2 Løsninger skulde være indbyrdes uafhængige.

For et System af n homogene Ligninger med n Ubekendte, for hvilket Ligningernes Determinant Δ er lig med Nul

og har Rangen R, har vi ovenfor direkte paavist Eksistensen af et fuldstændigt Sæt indbyrdes uafhængige Løsninger paa i alt $n-R$ Løsninger, nemlig Løsningerne (5). Heraf følger da ved Hjælp af den ovenfor beviste Sætning, at for et System af n homogene Ligninger med n Ubekendte, hvor Ligningernes Determinant har Rangen R, vil hvilkensomhelst $n-R$ indbyrdes uafhængige Løsninger danne et fuldstændigt Sæt Løsninger. Opløsningen af et saadant System af Ligninger kan derfor i Virkeligheden betragtes som ensbetydende med den Opgave at finde $m = n-R$ vilkaarlige, indbyrdes uafhængige Løsninger $(a_1', a_2' \ldots a_n'), (a_1'', a_2'' \ldots a_n'') \ldots (a_1^{(m)}, a_2^{(m)} \ldots a_n^{(m)})$; thi kender vi et saadant Sæt Løsninger kan vi umiddelbart fremstille den „almindelige" Løsning $(a_1, a_2 \ldots a_n)$ paa Parameterform, nemlig ved Ligningerne

$$a_1 = a_1' t_1 + a_1'' t_2 + \ldots a_1^{(m)} t_m, \; a_2 = a_2' t_1 + a_2'' t_2 + \ldots a_2^{(m)} t_m \ldots a_n = a_n' t_1 + a_n'' t_2 + \ldots a_n^{(m)} t_m,$$

hvor Parametrene $t_1, t_2 \ldots t_m$ er indbyrdes uafhængige, uindskrænkede Variable. Lad os et Øjeblik dvale ved det specielle, særlig vigtige Tilfælde, hvor Ligningernes Determinant A har Rangen $R = n-1$; idet her $n-R = 1$, vil enhver egentlig d. v. s. fra (0) forskellig Løsning danne et fuldstændigt Sæt, d. v. s. er (a) en vilkaarlig egentlig Løsning, vil $k \cdot (a)$ fremstille samtlige Løsninger, i det k er en vilkaarlig Konstant. Bemærker vi fremdeles, saaledes som man umiddelbart ser ved Indsættelse i de givne Ligninger, at $(A_{n1}, A_{n2} \ldots A_{nn})$ er en Løsning, naar Størrelserne indenfor Parenthesen betegner Komplementerne til Elementerne i en vilkaarlig Række i Ligningernes Determinant A, samt endvidere, at det altid er muligt at vælge Mærketallet x saaledes, at denne Løs-

ning ikke er Løsningen (0), idet det jo er givet, at ikke samtlige Underdeterminanter af $n-1^{te}$ Orden er lig med Nul, har vi fundet følgende Sætning: Har Determinanten Δ til et System af n homogene Ligninger med n Ubekendte Rangen $n-1$, kan Løsningerne paa Parameterform fremstilles ved $t\cdot(A_{n1}, A_{n2} \ldots A_{nn})$, hvor Størrelserne indenfor Parenthesen er Komplementerne til en vilkaarlig, saadan Række i Δ, at disse Komplementer ikke alle er Nul, medens Parameteren t er en uindskranket Variabel. Man udtrykker undertiden dette Resultat ved at skrive den almindelige Løsning paa Formen

$$\frac{x_1}{A_{n1}} = \frac{x_2}{A_{n2}} = \cdots = \frac{x_n}{A_{nn}} ;$$

benyttes denne Skrivemaade endog i det Tilfælde hvor een eller flere af Nævnerne er Nul, maa det erindres, at den i Virkeligheden staar som Udtryk for den altid nøjagtige Skrivemaade

$$x_1 = t\cdot A_{n1}, \; x_2 = t\cdot A_{n2} \cdots x_n = t\cdot A_{nn} .$$

22. *m homogene Ligninger med n Ubekendte.* Den foregaaende almindelige Theori for Løsningen af et Antal homogene Ligninger med ligesaa mange Ubekendte, giver os ogsaa Midler til at behandle den Opgave at løse et System af homogene Ligninger, hvor Antallet m af Ligninger ikke er det samme som Antallet n af Ubekendte:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n &= 0 .
\end{aligned}$$

Vi behøver blot, forinden vi anvender Resultaterne af den foregaaende Theori, at benytte et simpelt Kunstgreb, der bestaar i paa en nedenfor nærmere angiven Maade at supplere enten Antallet af Ligninger eller Antallet af Ubekendte, saaledes at der bliver lige mange Ligninger og Ubekendte. Ved den følgende Behandling af et System af m Ligninger med n Ubekendte tænker vi os først $m < n$ og senere $m > n$.

1) Antallet m af Ligninger mindre end Antallet n af Ubekendte. Vi supplerer her Antallet af Ligninger ved $n-m$ Gange at tilføje den saakaldte Nulligning, d.v.s Ligningen

$$0x_1 + 0x_2 \ldots 0x_n = 0 ;$$

i det denne Nulligning er tilfredsstillet, hvilke Værdier man end indsætter for de Ubekendte, har det oprindelige System bestaaende af m Ligninger og det nye System bestaaende af n Ligninger nøjagtig de samme Løsninger. Opløsningen af det oprindelig forelagte System er saaledes henført til Opløsningen af et System, hvor Antallet af Ligninger og Antallet af Ubekendte er det samme, nemlig n. For dette nye System er Ligningernes Determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \\ 0 & 0 \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \ldots & 0 \end{vmatrix} ,$$

hvor de øverste m Rækker er dannet af Koefficienterne i de givne m Ligninger, medens de nederste $n-m$ Rækker indeholder lutter Nuller. Idet denne Determinant har Værdien Nul, har det nye, og følgelig ogsaa det foreliggende, System uendelig mange Løsninger, altsaa: <u>et System af homogene Ligninger, hvori Antallet af Ligninger er mindre end Antallet af Ubekendte har altid uendelig mange Løsninger</u>. Nøjagtigere følger (i det vi ser bort fra det Tilfælde, hvor <u>alle</u> Koefficienterne er Nul, og Systemet altsaa har samtlige Løsninger overhovedet), at Antallet af Løsninger i et fuldstændigt Sæt af indbyrdes uafhængige Løsninger er lig med $n-R$, hvor R er Rangen af den ovenstaaende Determinant A. Da enhver Underdeterminant af højere end m^{te} Orden indeholder mindst een Række, hvis Elementer alle er Nul, er $R \leqq m$, altsaa $n-R \geqq n-m$; heraf følger (udfra 21), <u>at Antallet af indbyrdes uafhængige Løsninger, der skal til for at danne et fuldstændigt Sæt er større end eller lig med $n-m$.</u>

Lad os betragte et Par Eksempler af almindelig Karakter, som vi senere vil faa Brug for.

<u>Eks. 1</u>. Lad der være givet <u>kun een Ligning</u> med n Ubekendte

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdot\ \cdot\ \cdot a_n x_n = 0,$$

hvor vi antager, at ikke alle Koefficienter $a_1, a_2 \cdot\ \cdot\ \cdot a_n$ er lig med Nul. Tilføjer vi $n-1$ Gange Nulligningen $0x_1 + 0x_2 + \cdot\ \cdot\ \cdot 0x_n = 0$, vil det derved fremkomne System af n homogene Ligninger med n Ubekendte have Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \cdots a_n \\ 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 \cdots 0 \end{vmatrix},$$

der har Rangen 1. Følgelig indeholder et fuldstændigt Sæt Løsninger $n-1$ indbyrdes uafhængige Løsninger, og den almindelige Løsning kan paa Parameterform skrives

$$x_1 = \alpha_1' t_1 + \alpha_1'' t_2 \ldots \alpha_1^{(n-1)} t_{n-1}\,,\quad x_2 = \alpha_2' t_1 + \alpha_2'' t_2 + \ldots \alpha_2^{(n-1)} t_{n-1}\,,\quad \ldots\quad x_n = \alpha_n' t_1 + \alpha_n'' t_2 + \ldots \alpha_n^{(n-1)} t_{n-1}\,,$$

hvor $(\alpha_1', \alpha_2' \ldots \alpha_n')$, $(\alpha_1'', \alpha_2'' \ldots \alpha_n'')$, $\ldots$ $(\alpha_1^{(n-1)}, \alpha_2^{(n-1)} \ldots \alpha_n^{(n-1)})$ er $n-1$ vilkaarlige indbyrdes uafhængige Løsninger, og Parametrene $t_1, t_2 \ldots t_{n-1}$ er $n-1$ indbyrdes uafhængige vindskrænkede Variable. Til de $n-1$ indbyrdes uafhængige Løsninger kan vi f. Eks., i det vi antager $a_1 \neq 0$, vælge Løsningerne

$$(\alpha') = \left(-\frac{a_2}{a_1}, 1, 0 \ldots 0\right), (\alpha'') = \left(-\frac{a_3}{a_1}, 0, 1, 0 \ldots 0\right), \ldots (\alpha^{(n-1)}) = \left(-\frac{a_n}{a_1}, 0, 0 \ldots 1\right).$$

Da bliver den almindelige Løsning paa Parameterform

$$x_1 = -\frac{a_2 t_1 + a_3 t_2 \ldots a_n t_{n-1}}{a_1}\,,\quad x_2 = t_1\,,\quad x_3 = t_2 \ldots x_n = t_{n-1}\,;$$

vi kan altsaa, hvilket ogsaa er klart paa Forhaand, vælge Værdierne af $x_2, x_3 \ldots x_n$ vilkaarligt og derefter udtrykke x_1 ved dem.

Eks. 2. Lad der være givet to Ligninger med n Ubekendte ($n>2$):

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots a_n x_n &= 0 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots b_n x_n &= 0\,, \end{aligned}$$

hvor vi vil antage, at ingen af de to Ligninger har alle sine Koefficienter lig med Nul, og at den ene Ligning ikke fremgaar af den anden ved Multiplikation med en Konstant, med andre Ord: vi vil antage, at ikke alle $\frac{n(n-1)}{2}$ Determi-

manter $\begin{vmatrix} a_p & a_q \\ b_p & b_q \end{vmatrix}$ $(p<q)$ er lig med Nul (smlg. Opg 3). Tilføjer vi $n-2$ Gange Nulligningen $0x_1+0x_2 \ldots 0x_n=0$, vil det derved fremkomne System af n Ligninger med n Ubekendte have Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix},$$

der i Følge den gjorte Antagelse har Rangen 2. Et fuldstændigt Sat Løsninger indeholder derfor her $n-2$ indbyrdes uafhængige Løsninger, og den almindelige Løsning kan paa Parameterform skrives

$$x_1=\alpha_1' t_1+\alpha_1'' t_2+\ldots\alpha_1^{(n-2)} t_{n-2},\ x_2=\alpha_2' t_1+\alpha_2'' t_2+\ldots\alpha_2^{(n-2)} t_{n-2} \ldots x_n=\alpha_n' t_1+\alpha_n'' t_2 \ldots \alpha_n^{(n-2)} t_{n-2},$$

hvor $(\alpha_1', \alpha_2' \ldots \alpha_n')$, $(\alpha_1'', \alpha_2'' \ldots \alpha_n'') \ldots (\alpha_1^{(n-2)}, \alpha_2^{(n-2)} \ldots \alpha_n^{(n-2)})$ er $n-2$ vilkaarlige indbyrdes uafhængige Løsninger, og Parametrene $t_1, t_2 \ldots t_{n-2}$ er $n-2$ uindskrænkede Variable. Antager vi f. Eks. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, kan vi til de $n-2$ indbyrdes uafhængige Parametre $t_1, t_2 \ldots t_{n-2}$ vælge netop de $n-2$ sidste Ubekendte $x_3, x_4 \ldots x_n$ og derefter ud fra de to givne Ligninger finde de første to Ubekendte x_1 og x_2 som lineære homogene Funktioner af Parametrene.

Eks. 3. Lad os endelig som et Eksempel paa et System, hvor der er een Ubekendt flere end Ligninger betragte de to Ligninger med tre Ubekendte

$$a_1x+b_1y+c_1z=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=0.$$

(Dette Eksempel er forøvrigt et specielt Tilfælde af det foregaaende, nemlig svarende til $n=3$). Vi tilføjer Ligningen $0x+0y+0z=0$. Det nye System har Ligningernes Determinant lig med

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Lad os antage, at denne Determinant har Rangen 2, eller, hvad der aabenbart udsiger det samme, at ikke alle tre Komplementer U_1, U_2, U_3 til Elementerne i sidste Række er lig med Nul. Da vil i Følge det sidste Resultat i 21 den almindelige Løsning være $t(U_1, U_2, U_3)$ eller, anderledes skrevet

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},$$

hvor de tre Nævnerdeterminanter fremgaar af hinanden ved en saakaldt Kredsforskydning af Bogstaverne a, b, c.

2) <u>Antallet m af Ligninger større end Antallet n af Ubekendte</u>. Her supplerer vi Antallet af Ubekendte med $m-n$ nye Ubekendte $x_{n+1}, x_{n+2} \ldots x_m$ og tilføjer paa venstre Side af hver af de m Ligninger Leddene $0x_{n+1}+0x_{n+2}+\ldots 0x_m$. Herved faas et System af m Ligninger med m Ubekendte, for hvilket Ligningernes Determinant er

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} & 0 \ldots 0 \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} & 0 \ldots 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} & 0 \ldots 0 \end{vmatrix} .$$

Lad R. være Rangen af denne Determinant. Da er $R \leqq n$, i det enhver Underdeterminant af højere end n^{te} Orden indeholder mindst een Søjle, hvis Elementer alle er lig med Nul. Lad os antage, hvad der øjensynlig ikke indskrænker Undersøgelsens Almindelighed, at blandt Underdeterminanterne af R^{te} Orden er netop Underdeterminanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1R} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2R} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{R1} & a_{R2} \ldots a_{RR} \end{vmatrix}$$

$\neq 0$. Da kan man i Følge en i 20 bevist Sætning udfra de R første Ligninger udlede enhver af de øvrige $m-R$ Ligninger. Gyldigheden af dette Resultat bestaar naturligvis, som man jo umiddelbart indser, uafhængigt af om man i samtlige Ligninger opskriver Leddene $0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots 0x_m$ eller ej; vi ser fra nu af helt bort fra disse Led, hvis Fradførelse har gjort sin Nytte, d. v. s vi opfatter atter Ligningerne som de oprindelige Ligninger, der kun indeholder de n Ubekendte $x_1, x_2 \ldots x_n$. I det de $m-R$ sidste Ligninger kan udledes af de R første, behøver vi i det følgende kun at tage Hensyn til disse R Ligninger og kan simpelthen bortkaste de

øvrige. Herigennem finder vi da følgende Resultater: Er Rangen R af Determinanten Δ lig med n, har det givne System af Ligninger ingen egentlig Løsning, altsaa kun Løsningen (0); thi i dette Tilfælde danner efter Bortkastningen af de n−R Ligninger de tilbageblevne Ligninger et System af n homogene Ligninger med n Ubekendte, for hvilket Ligningernes Determinant er ≠ 0. Er derimod Rangen R af Determinanten Δ mindre end n, har Systemet uendelig mange Løsninger, i det jo Antallet R af tilbageblevne Ligninger her er mindre end Antallet n af Ubekendte; i de tilbageblevne R Ligninger kan vi vælge Værdierne af de n−R Ubekendte $x_{R+1}, x_{R+2} \ldots x_n$ vilkaarligt og derefter paa entydig Maade bestemme Værdierne af de første R Ubekendte $x_1, x_2 \ldots x_R$, eller vi kan som sædvanlig udtrykke de n Ubekendte paa Parameterform ved ialt n−R indbyrdes uafhængige Parametre $t_1, t_2 \ldots t_{n-R}$.

Eks. Lad der være givet 3 Ligninger med 2 Ubekendte

$$a_1 x + b_1 y = 0$$
$$a_2 x + b_2 y = 0$$
$$a_3 x + b_3 y = 0 .$$

Den Determinant, vi ovenfor betegnede med Δ, har her Formen

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} .$$

Idet n her er lig med 2, er Betingelsen for, at Ligningerne har egentlige Løsninger, at Rangen er mindre end 2, d.v.s.

at de tre Determinanter $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ og $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ alle er lig med Nul. Antages dette at være Tilfældet, samt antages at f. Eks $a_1 \neq 0$, kan de 2 nederste Ligninger bortkastes, og vi finder Løsningen

$$\frac{x}{-b_1} = \frac{y}{a_1},$$

eller korrektere (for det Tilfælde at $b_1 = 0$) Løsningen $t(-b_1, a_1)$, hvor Parameteren t er en uindskrænket Variabel.

23. Elimination. Ved flere Undersøgelser, f. Eks. indenfor den analytiske Geometri, træffer man paa følgende Opgave: Der er givet n Ligninger, der udtrykker de n Variable $x_1, x_2 \ldots x_n$ som lineære, homogene Funktioner af et vist Antal m ($\leq n$) uindskrænkede Parametre $t_1, t_2 \ldots t_m$; man ønsker at <u>eliminere</u> disse Parametre, d. v. s at danne et nyt System af Ligninger, som kun indeholder de Variable $x_1, x_2 \ldots x_n$ og saaledes, at det Baand, der er paalagt de n Variable derved, at de skal tilfredsstille dette nye System, er det samme som det Baand, der er paalagt dem ved de oprindelige Ligninger, eller med andre Ord saaledes, at de oprindelige n Ligninger netop giver en Parameterfremstilling af den almindelige Løsning til de nye Ligninger, naar vi i disse sidste opfatter $x_1, x_2 \ldots x_n$ som Ubekendte. (smlg. Indledningen 5). Vi skal her nøjes med at betragte det særlig vigtige Tilfælde, <u>hvor de n Variable $x_1, x_2 \ldots x_n$ udtrykkes ved $n-1$ Parametre $t_1, t_2 \ldots t_{n-1}$ gennem Ligninger af Formen</u>

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1' t_1 + \alpha_1'' t_2 + \ldots \alpha_1^{(n-1)} t_{n-1} \\ x_2 &= \alpha_2' t_1 + \alpha_2'' t_2 + \ldots \alpha_2^{(n-1)} t_{n-1} \\ &\vdots \\ x_n &= \alpha_n' t_1 + \alpha_n'' t_2 + \ldots \alpha_n^{(n-1)} t_{n-1}, \end{aligned}$$

og hvor vi vil antage, at Determinanten af n^{te} Orden

$$\begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_1'' & \dots & \alpha_1^{(n-1)} & 0 \\ \alpha_2' & \alpha_2'' & \dots & \alpha_2^{(n-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_n' & \alpha_n'' & \dots & \alpha_n^{(n-1)} & 0 \end{vmatrix}$$

har Rangen $n-1$, d. v. s. at ikke alle Underdeterminanter til Elementerne i sidste Søjle er Nul. Vi vil vise, at Resultatet af Eliminationen kan udtrykkes ved den ene Ligning i de Ubekendte $x_1, x_2 \dots x_n$, der dannes, naar man i ovenstaaende Determinants sidste Søjle erstatter Nullerne med $x_1, x_2 \dots x_n$ og sætter denne nye Determinant lig med Nul, altsaa ved Ligningen

$$\begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_1'' & \dots & \alpha_1^{(n-1)} x_1 \\ \alpha_2' & \alpha_2'' & \dots & \alpha_2^{(n-1)} x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n' & \alpha_n'' & \dots & \alpha_n^{(n-1)} x_n \end{vmatrix} = 0.$$

Hertil bemærker vi for det første, at i denne sidste homogene Ligning i $x_1, x_2 \dots x_n$ er ikke alle Koefficienter til de Ubekendte (Variable) lig med Nul; thi i Følge Antagelse er jo ikke alle Underdeterminanter til Elementerne i sidste Søjle lig med Nul. Følgelig ved vi (smlg. Eks 1, 22), at Løsningerne kan udtrykkes paa Parameterform ved ialt $n-1$ uafhængige Parametre. For at vise at netop de givne n Ligninger giver en Parameterfremstilling af Løsningerne, har vi i Følge det foregaaende blot at eftervise, at Koefficientsættene $(\alpha_1', \alpha_2' \dots \alpha_n')$, $(\alpha_1'', \alpha_2'' \dots \alpha_n'')$ $\dots$ $(\alpha_1^{(n-1)}, \alpha_2^{(n-1)} \dots \alpha_n^{(n-1)})$ danner et fuldstændigt Sæt Løsninger

til ovenstaaende homogene Ligning, d. v. s (da vi jo ved, at et fuldstændigt Sæt Løsninger indeholder netop $n-1$ Løsninger) vi skal vise[1] at $(\alpha_1', \alpha_2' \ldots \alpha_n')$, $(\alpha_1'', \alpha_2'' \ldots \alpha_n'')$ $\ldots$ $(\alpha_1^{(n-1)}, \alpha_2^{(n-1)} \ldots \alpha_n^{(n-1)})$ er Løsninger til den homogene Ligning og[2] at disse $n-1$ Løsninger er indbyrdes uafhængige. At de nævnte Talsæt er Løsninger, ser vi umiddelbart; thi ved Indsættelse af et af Talsættene faar Determinanten paa venstre Side af Lighedstegnet to Søjler ens og er derfor lig med Nul. For at vise at de nævnte $n-1$ Løsninger er indbyrdes uafhængige, danner vi Ligningerne

$$k_1\alpha_1' + k_2\alpha_1'' + \ldots + k_{n-1}\alpha_1^{(n-1)} = 0$$
$$k_1\alpha_2' + k_2\alpha_2'' + \ldots + k_{n-1}\alpha_2^{(n-1)} = 0$$

$$k_1\alpha_n' + k_2\alpha_n'' + \ldots + k_{n-1}\alpha_n^{(n-1)} = 0\,,$$

og vi skal da vise, at dette System af n homogene Ligninger med de $n-1$ Ubekendte $k_1, k_2 \ldots k_{n-1}$ kun tilfredsstilles af Løsningen $(0, 0 \ldots 0)$; men dette følger umiddelbart (smlg. 22) af den gjorte Forudsætning om at Determinanten

$$\begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_1'' & \ldots & \alpha_1^{(n-1)} & 0 \\ \alpha_2' & \alpha_2'' & \ldots & \alpha_2^{(n-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_n' & \alpha_n'' & \ldots & \alpha_n^{(n-1)} & 0 \end{vmatrix}$$

har Rangen $n-1$. Hermed er den opstillede Paastand fuldstændig bevist.

Tænker vi os eksempelvis givet 3 Ligninger $x = at + bs$, $y = ct + ds$, $z = et + fs$, hvor Determinanten

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{vmatrix}$$

har Rangen 2, d. v. s. hvor intet af Talsættene (a,c,e) og (b,d,f) bestaar af lutter Nuller og hvor de to Talsæt ikke er proportionale, kommer vi ved Elimination af Parametrene t og s til Ligningen

$$\begin{vmatrix} a & b & x \\ c & d & y \\ e & f & z \end{vmatrix} = 0.$$

24. <u>Inhomogene Ligninger med Ligningernes Determinant lig med Nul.</u> Lad os atter vende tilbage til Betragtningen af et System af n vilkaarlige Ligninger med n Ubekendte

$$(2) \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} .$$

For det Tilfælde, hvor Ligningernes Determinant Δ er $\neq 0$, har vi i 17. fuldstændig gennemført Undersøgelsen med det Resultat, at Ligningerne da havde een og kun een Løsning. Vi vil i det følgende antage, at Ligningernes Determinant er lig med Nul og vil da bevise, at i dette Tilfælde har Ligningerne <u>enten slet ingen Løsning eller uendelig mange Løsninger.</u>

(Eks. Af de to Systemer $0x_1 + x_2 = 1$, $0x_1 + 2x_2 = 2$ og $0x_1 + x_2 = 1$, $0x_1 + 2x_2 = 1$ har det første uendelig mange Løsninger, nemlig $(t, 1)$, hvort er en vilkaarlig Parameter, det andet slet ingen Løsninger.).

Vi skal med andre Ord vise, at hvis der overhovedet findes en Løsning $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$, findes der uendelig mange Løsninger. For at vise dette vil vi begynde med at vise, hvorledes man, hvis man kender blot een Løsning til det givne System, ved at udføre en simpel Substitution i de Ubekendte (d. v. s. ved i Stedet for de oprindelige Ubekendte at indføre visse nye Ubekendte) umiddelbart kan henføre Løsningen af det forelagte System til Løsningen af et homogent System. Vi behøver hertil blot, hvis $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ er en Løsning i det givne System (2) at sætte

$$x_1 = \alpha_1 + y_1 \,, \quad x_2 = \alpha_2 + y_2 \ldots \quad x_n = \alpha_n + y_n \,,$$

hvor $y_1, y_2 \ldots y_n$ er nye Ubekendte. Indsættes nemlig disse Udtryk for $x_1, x_2 \ldots x_n$ i de givne Ligninger, vil de konstante Led paa høire Side af Lighedstegnene aabenbart falde bort, og vi faar Ligningerne

$$\begin{aligned}
a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots a_{1n} y_n &= 0 \\
a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots a_{2n} y_n &= 0 \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \

lader man $(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n)$ efterhaanden gennemløbe alle Løsninger i det homogene System, vil man paa denne Maade faa alle Løsninger i det oprindelige System med. I det imidlertid Ligningernes Determinant for det homogene System, der jo er den samme som Ligningernes Determinant for det oprindelige System, i Følge Forudsætning er lig med Nul, har de homogene Ligninger og derfor i Følge det foregaaende ogsaa de oprindelige Ligninger uendelig mange Løsninger, saaledes som vi skulde vise.

Vil man nu for det inhomogene System af Ligninger gennemføre en fuldstændig Undersøgelse af, naar det Tilfælde indtræffer, at Ligningerne ingen Løsning har, og naar det Tilfælde indtræffer, hvor Ligningerne har uendelig mange Løsninger, kan ogsaa dette ske ved at føre Spørgsmaalet tilbage til Undersøgelsen af et System af <u>homogene</u> Ligninger, nemlig af de n Ligninger med $n+1$ Ubekendte, der fremkommer ved i de givne Ligninger at indføre endnu en Ubekendt x_{n+1}, der overalt skrives som Faktor til det konstante Led paa højre Side af Lighedstegnet, d. v. s. af Ligningerne

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n - b_1 x_{n+1} = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n - b_2 x_{n+1} = 0$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n - b_n x_{n+1} = 0 .$$

I det Antallet n af Ligninger i dette homogene System er mindre end Antallet $n+1$ af Ubekendte, har Systemet altid egentlige Løsninger. Eksisterer der blandt disse Løsninger en saadan Løsning $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n+1})$, hvori $\alpha_{n+1} = 1$ (og dette vil altid være Tilfældet, hvis der blot eksisterer en Løsning $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n+1})$,

hvor α_{n+1} er $\neq 0$, i det vi jo da blot behøver at dividere alle Tallene indenfor Parenthesen med α_{n+1}), vil der eksistere Løsninger til det oprindelige inhomogene System; thi er $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n, 1)$ en Løsning til ovennævnte homogene System, er øjensynlig $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ en Løsning til det oprindelige System. Har derimod alle Løsninger $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n+1})$ til det homogene System Tallet Nul paa sidste Plads, vil det oprindelige System ingen Løsning have. Vi skal ikke her gaa nærmere ind paa denne Undersøgelse, men skal nøjes med at have givet en Læser, der kunde ønske at uddybe Spørgsmaalet mere, Midlerne til at gennemføre en fuldstændig Diskussion.

Vi skal afslutte vor Undersøgelse af et System af inhomogene Ligninger, hvis Determinant er lig med Nul, med at nævne et specielt, ret vigtigt Tilfælde, hvor man umiddelbart kan indse, <u>at Ligningerne ingen Løsning har</u>, nemlig det Tilfælde, hvor de Determinanter $B_1, B_2 \ldots B_n$, der fremkommer af Ligningernes Determinant ved i denne at erstatte henholdsvis den 1ste, $2^{den} \ldots n^{te}$ Søjle med Leddene paa højre Side af Lighedstegnene $b_1, b_2 \ldots b_n$ <u>ikke alle er Nul.</u> Af de givne Ligninger kan nemlig, som vist i 17., umiddelbart udledes det nye System af Ligninger

$$A x_1 = B_1 \;,\; A x_2 = B_2 \ldots A x_n = B_n \;,$$

og dette System, der, idet det er udledt af det givne System, sikkert tilfredsstilles af enhver eventuel Løsning til det givne System, har under den gjorte Antagelse øjensynlig ingen Løsning; thi er f. Eks. $B_r \neq 0$, indses straks, idet $A = 0$, at Ligningen

$$A x_r = B_r$$

ikke er tilfredsstillet for nogen Værdi af x_n.

Er, samtidig med at $A = 0$, tillige alle n Determinanter $B_1, B_2 \ldots B_n$ lig med Nul, er det udledte System $Ax_1 = B_1$, $Ax_2 = B_2 \ldots Ax_n = B_n$ øjensynlig tilfredsstillet af alle Værdier for de Ubekendte, d. v. s. har alle Løsninger overhovedet; i dette Tilfælde kan vi derfor ad denne Vej intetsomhelst slutte om Løsninger til det givne System. Det kan da ogsaa i dette Tilfælde ske, at der ingen Løsninger findes, og det kan ske, at der findes uendelig mange Løsninger.

Opg. 11. Løs Ligningerne
$$\begin{aligned} x+3y+2z &= 4 \\ 4x+5y+2z &= 6 \\ 2x+y+3z &= 1 \end{aligned}$$

Opg. 12. Find saavel ved Lagranges som ved Newtons Interpolationsformel det Polynomium af højst 3die Grad, som for $x = -1, 0, \frac{1}{2}, 3$ antager henholdsvis Værdierne $-10, -4, \frac{23}{8}, 14$.

Opg. 13. For hvilke Værdier af a har de tre homogene Ligninger
$$\begin{aligned} ax-y+3z &= 0 \\ 4x+(a-4)y+6z &= 0 \\ x-ay+5z &= 0 \end{aligned}$$
egentlige Løsninger? Angiv for de fundne Værdier af a den almindelige (fuldstændige) Løsning.

Opg. 14. Samme Opgave som Opg. 13, idet Ligningerne erstattes med
$$\begin{aligned} x+2y-(a+1)z &= 0 \\ x(2+a)+4y-2z &= 0 \\ 3x+(6+2a)y-3z &= 0 \end{aligned}$$

Opg. 15. Vis at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at de m Talsæt $(a') = (a'_1, a'_2 \ldots a'_n) \ldots (a^{(m)}) = (a_1^{(m)}, a_2^{(m)} \ldots a_n^{(m)})$ med n ($\geq m$) Tal i hvert er indbyrdes uafhængige (d. v. s. at $k'(a') + \ldots k^{(m)}(a^{(m)})$ dog og kun da er Talsættet (0), naar $k' = \ldots = k^{(m)} = 0$) er den, at Determinanten af n^{te} Orden

$$\begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & \ldots & a'_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{(m)} & a_2^{(m)} & \ldots & a_n^{(m)} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

har Rangen m.

Opg. 16. Opskriv den Betingelsesligning, som Tallene x, a, b, c maa tilfredsstille, for at de tre homogene Ligninger i s, t og u

$$\begin{aligned} xs + at + bu &= 0 \\ -as + xt + cu &= 0 \\ -bs - ct + xu &= 0 \end{aligned}$$

skal have egentlige Løsninger. (Man udtrykker ogsaa dette saaledes: „Eliminer s, t og u mellem de givne homogene Ligninger", idet man herved stiltiende forudsætter, at s, t og u ikke samtidig maa antage Værdien Nul). Løs dernæst den fundne Ligning med Hensyn til x, idet a, b, c betragtes som Konstanter.

Opg. 17. Idet $(a_1, a_2 \ldots a_n)$ og $(b_1, b_2 \ldots b_n)$ begge er egentlige Talsæt (d. v. s. ingen af dem bestaar af lutter Nuller) skal det vises,[1] at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at de to Ligninger

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots a_n x_n = \alpha$$

og

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots b_n x_n = \beta$$

har <u>ganske de samme</u> Løsninger, er den at Talparrene $(a_1, a_2 \ldots a_n, \alpha)$ og $(b_1, b_2 \ldots b_n, \beta)$ er proportionale, samt 2) at Betingelsen for at de to Ligninger <u>ikke har nogen Løsning fælles</u> bestaar deri, at Talparrene $(a_1, a_2 \ldots a_n)$ og $(b_1, b_2 \ldots b_n)$ er proportionale uden at Talparrene $(a_1, a_2 \ldots a_n, \alpha)$ og $(b_1, b_2 \ldots b_n, \beta)$ er det.

<u>Opg. 18</u>. Find de Værdier af a for hvilke Ligningerne

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= a \\ 3x + 4y + 2z &= a - 3 \\ -4x + 2y + z &= 2 \end{aligned}$$

har en Løsning og angiv for disse Værdier af a Ligningernes Løsninger.

<u>Opg. 19</u>. Diskuter Ligningerne

$$\begin{aligned} a^2x + 5y + z &= b \\ ax + (a+3)y + 3z &= 0 \\ x + 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

idet a og b betegner to vilkaarlige Konstanter.

<u>Opg. 20</u> Bevis (ved Theorien for Opløsning af et System af homogene Ligninger), at den i Opg. 5 omtalte Ligning

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \cdots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \cdots A_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} \cdots A_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}^{n-1}$$

ogsaa er rigtig, naar $\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = 0$.

<u>Opg. 21</u>. Idet (a_{11}, a_{21}, a_{31}) er et givet Talsæt med Kvadratsum $a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1$, skal

det vises, at det (endog paa uendelig mange Maader) er muligt at valge to tilsvarende Talsæt $(\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32})$ og $(\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33})$ saaledes at Talskemaet

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

opfylder de to Betingelser: Skemaets Søjler har Kvadratsum = men 1 og Produktsummen 0, d. v. s.

$$\alpha_{1r}\alpha_{1s} + \alpha_{2r}\alpha_{2s} + \alpha_{3r}\alpha_{3s} = \begin{cases} 0 & \text{for } s \neq r \\ 1 & \text{for } s = r \end{cases},$$

idet s og r er to vilkaarlige (ens eller forskellige) af Tallene 1, 2, 3.

<u>Opg. 22</u>.

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 &= 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 &= 0 \\ \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

er et System af homogene Ligninger, hvis Determinant er Nul og har Rangen 1. Vis at der findes (endog uendelig mange) Par egentlige Løsninger $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ og $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ med Kvadratsummen $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$ og Produktsummen $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0$.

Lineære Substitutioner og kvadratiske Former.

25. *Eenentydig Afhængighed mellem to Systemer af Variable.* Lad

$$(1)\quad x_1, x_2 \ldots x_n$$

og

$$(2)\quad y_1, y_2 \ldots y_n$$

betegne to Systemer af Variable, indeholdende hvert det samme Antal Variable, og lad der være givet en Lov (Regneregel), der til ethvert Værdisæt $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ for det første System af Variable lader svare et og kun et Værdisæt $(y_1, y_2 \ldots y_n)$ for det andet System af Variable. Man siger om en saadan Lov, at den gør Systemet (2) eentydig afhængigt af Systemet (1), hvis den Maade, hvorpaa den til ethvert opgivet Værdisæt $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ lader svare et Værdisæt $(y_1, y_2 \ldots y_n)$, er en saadan, at hvis man omvendt opgiver et vilkaarligt Værdisæt $(y_1, y_2 \ldots y_n)$ for det andet System af Variable, der da eksisterer et og kun et Værdisæt $(x_1, x_2 \ldots x_n)$, der til tilsvarende Værdisæt netop har det opgivne Værdisæt $(y_1, y_2 \ldots y_n)$; med andre Ord, for at den omhandlede Lov skal betegnes som givende Udtryk for en eentydig Afhængighed, fordanges at naar Værdisættet $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ efterhaanden gennemløber alle mulige Sæt af n Tal, skal det tilsvarende Værdisæt $(y_1, y_2 \ldots y_n)$ ligeledes gennemløbe alle mu-

lige Sæt af n Tal og hvert saadant Sæt kun een Gang. Som det umiddelbart fremgaar af det foregaaende, kan en Lov, der giver Systemet (2) eentydig afhængigt af Systemet (1), ogsaa omvendt siges at give Udtryk for, at Systemet (1) afhænger eentydig af Systemet (2); thi den lader jo ogsaa til ethvert Værdisæt $(y_1, y_2 \ldots y_n)$ svare et og kun et Værdisæt $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ og paa en saadan Maade, at vi faar alle mulige Værdisæt $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ med og hvert kun een Gang, naar vi lader Systemet (2) gennemløbe alle mulige Værdisæt $(y_1, y_2 \ldots y_n)$. Om en saadan Lov vil vi derfor i det følgende, for allerede i Udtryksmaaden at tilkendegive, at ikke det ene af de to Systemer (1) og (2) spiller nogen særlig Rolle fremfor det andet, foretrække at sige, at den giver de to Systemer (1) og (2) eentydig afhængige af hinanden, fremfor at sige at den giver det ene System eentydig afhængigt af det andet. Man kalder den Regneregel, der for en eentydig Afhængighed mellem de to Systemer af Variable (1) og (2) udtrykker de Variable i det ene System, f. Eks. i Systemet (1), ved de Variable i det andet System (2) for en Substitution (Erstatning), idet man ved dette Navn antyder, at denne Regneregel giver et Middel til ved Undersøgelser over Funktioner af de Variable $x_1, x_2 \ldots x_n$ at kunne indføre de Variable $y_1, y_2 \ldots y_n$ i Stedet for $x_1, x_2 \ldots x_n$.

26. Lineære Substitutioner. Blandt de forskellige eentydige Afhængigheder mellem to Systemer af Variable (1) og (2) vil vi i det følgende nærmere undersøge en særlig simpel og for Anvendelserne langt den vigtigste Klasse af Afhængigheder, nemlig de Afhængigheder, hvor den Lov, der til ethvert Værdisæt for Systemet af Variable (2) lader svare et bestemt Værdisæt for Systemet (1), kan udtrykkes ved lineære Ligninger af Formen

$$(3)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \ldots \alpha_{1n} y_n \\ x_2 &= \alpha_2 + \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \ldots \alpha_{2n} y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \alpha_n + \alpha_{n1} y_1 + \alpha_{n2} y_2 + \ldots \alpha_{nn} y_n . \end{aligned}$$

Lad os straks bemærke, at hvis de Variable $x_1, x_2 \ldots x_n$ overhovedet kan udtrykkes ved de Variable $y_1, y_2 \ldots y_n$ ved Hjælp af et System af saadanne lineære Ligninger, kan dette kun ske paa een Maade; Rigtigheden heraf indses umiddelbart udfra Sætningen om, at to Polynomier i n Variable, der stemmer overens i Værdi, hvilke Tal man end indsætter for de Variable, er identiske. Af denne Sætning følger nemlig, at hvis de to Udtryk $\alpha_r + \alpha_{r1} y_1 + \alpha_{r2} y_2 + \ldots \alpha_{rn} y_n$ og $\alpha'_r + \alpha'_{r1} y_1 + \alpha'_{r2} y_2 + \ldots \alpha'_{rn} y_n$ er lige store for ethvert Værdisæt $(y_1, y_2 \ldots y_n)$, da er $\alpha_r = \alpha'_r$, $\alpha_{r1} = \alpha'_{r1}$, $\alpha_{r2} = \alpha'_{r2} \ldots \alpha_{rn} = \alpha'_{rn}$.

Et System af n Ligninger som det ovenstaaende (3) bestemmer umiddelbart til ethvert Værdisæt $(y_1, y_2 \ldots y_n)$ et tilsvarende Værdisæt $(x_1, x_2 \ldots x_n)$. Skal imidlertid den ved (3) bestemte Afhængighed mellem Systemerne af Variable (1) og (2) være en eentydig Afhængighed, d. v. s. skal Systemet (3) give Udtryk for en Substitution, maa det yderligere kræves, at der til et opgivet Værdisæt $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ svarer et og kun et saadant Værdisæt $(y_1, y_2 \ldots y_n)$, at naar dette indsættes i Ligningerne for de Variable $y_1, y_2 \ldots y_n$, vi da netop faar det opgivne Værdisæt $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ bestemt; med andre Ord, Betingelsen for at Ligningerne (3) danner en Substitution, d. v. s. bestemmer en eentydig Afhængighed mellem Systemerne (1) og (2) er den, at disse Ligninger, naar man for $x_1, x_2 \ldots x_n$ indsætter n vilkaarlig valgte Tal og derefter opfatter Ligningerne som et System af n lineære Ligninger til Bestemmelse af

de n Ubekendte $y_1, y_2 \ldots y_n$, har een og kun een Løsning. Udfra denne sidste Formulering følger umiddelbart ved Hjælp af den i forrige Afsnit udviklede Theori for Opløsningen af et System af lineære Ligninger, at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for at Ligningerne (3) danner en Substitution er den, at Determinanten

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \ldots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \ldots \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \ldots \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

er $\neq 0$. Et System af Ligninger (3) med Determinanten $A \neq 0$ kaldes en lineær Substitution, og A kaldes Substitutionens Determinant.

27. Omvendt Substitution til en given Substitution. Der gælder den vigtige Sætning, at hvis i en eentydig Afhængighed mellem Systemerne (1) og (2) alle de Variable i Systemet (1) kan fremstilles ved lineære Funktioner af de Variable i Systemet (2), da kan ogsaa omvendt enhver af de Variable i (2) udtrykkes ved lineære Funktioner af de Variable i (1); thi danner Ligningerne (3) en Substitution, d. v. s. er Determinanten $A \neq 0$, faas umiddelbart ved Løsning af Ligningerne (3) med Hensyn til $y_1, y_2 \ldots y_n$ de n nye Ligninger

$$y_1 = \frac{1}{A} \begin{vmatrix} x_1 - \alpha_1 & \alpha_{12} \ldots \alpha_{1n} \\ x_2 - \alpha_2 & \alpha_{22} \ldots \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ x_n - \alpha_n & \alpha_{n2} \ldots \alpha_{nn} \end{vmatrix}, \quad y_2 = \frac{1}{A} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & x_1 - \alpha_1 \ldots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & x_2 - \alpha_2 \ldots \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \alpha_{n1} & x_n - \alpha_n \ldots \alpha_{nn} \end{vmatrix} \ldots y_n = \frac{1}{A} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \ldots x_1 - \alpha_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \ldots x_2 - \alpha_2 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \ldots x_n - \alpha_n \end{vmatrix},$$

d. v. s. Ligningerne

$$(4)\qquad \begin{aligned} y_1 &= \beta_1 + \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \beta_{1n}x_n \\ y_2 &= \beta_2 + \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \beta_{2n}x_n \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n &= \beta_n + \beta_{n1}x_1 + \beta_{n2}x_2 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \beta_{nn}x_n \end{aligned},$$

hvor Koefficienten β_{rs}, d. v. s. Koefficienten til x_s i Udtrykket for y_r er lig med $\frac{A_{sr}}{A}$, i det A_{sr} betegner Komplementet til Elementet α_{sr} i Determinanten A, og hvor $\beta_r = -\frac{A_r}{A}$, i det A_r betegner den Determinant, der fremkommer af A, naar den r^{te} Søjles Elementer erstattes med Tallene $\alpha_1, \alpha_2 \cdot\ \cdot\ \cdot \alpha_n$. Idet Ligningerne (4), der for et givet Værdisæt $(x_1, x_2 \cdot\ \cdot\ \cdot x_n)$ bestemmer det tilsvarende Værdisæt $(y_1, y_2 \cdot\ \cdot\ \cdot y_n)$, jo blot er en anden Form for den eentydige Afhængighed, der i Følge Ligningerne (3), hvis Determinant A jo antages $\neq 0$, finder Sted mellem Systemerne af Variable (1) og (2), danner disse Ligninger (4) ligesaavel Ligningerne (3) en Substitution; heraf følger umiddelbart udfra den ovenfor beviste Sætning, at Determinanten

$$B = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \cdot\ \cdot\ \cdot & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \cdot\ \cdot\ \cdot & \beta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} \quad \cdot\ \cdot & \beta_{nn} \end{vmatrix}$$

nødvendigvis maa være $\neq 0$. Som vi om et Øjeblik skal se, gælder der den nøjagtigere Sætning (hvis Rigtighed man let direkte kunde bevise, men som vi foretrekker nedenfor at udlede som et specielt Tilfælde af et almindeligere Resultat), at de to Determinanter A og B er forbundne ved Ligningen $A.B = 1$. Substitu-

tionen (4), som udtrykker Systemet af Variable (2) ved Systemet af Variable (1) kaldes <u>den omvendte Substitution</u> til den oprindelige Substitution (3), der udtrykker Systemet (1) ved Systemet (2). Paa tilsvarende Maade er den oprindelige Substitution (3) den omvendte Substitution til Substitutionen (4). En Substitution og dens omvendte Substitution er forsaavidt at betragte som ensgyldige som de begge giver Udtryk for den samme eensidige Afhængighed mellem de to Systemer af Variable (1) og (2).

28. <u>Sammensætning af Substitutioner.</u> Lad der være givet to lineare Substitutioner

$$(3)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \ldots \alpha_{1n} y_n \\ x_2 &= \alpha_2 + \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \ldots \alpha_{2n} y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \alpha_n + \alpha_{n1} y_1 + \alpha_{n2} y_2 + \ldots \alpha_{nn} y_n \end{aligned}$$

og

$$(5)\qquad \begin{aligned} y_1 &= \beta_1 + \beta_{11} z_1 + \beta_{12} z_2 + \ldots \beta_{1n} z_n \\ y_2 &= \beta_2 + \beta_{21} z_1 + \beta_{22} z_2 + \ldots \beta_{2n} z_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \beta_n + \beta_{n1} z_1 + \beta_{n2} z_2 + \ldots \beta_{nn} z_n , \end{aligned}$$

af hvilke den første udtrykker en eensidig Afhængighed mellem Systemerne af Variable $x_1, x_2 \ldots x_n$ og $y_1, y_2 \ldots y_n$, medens den anden udtrykker en eensidig Afhængighed mellem Systemerne $y_1, y_2 \ldots y_n$ og $z_1, z_2 \ldots z_n$. Den ved <u>Sammensætning</u> af disse to eensidige Afhængigheder bestemte eensidige Afhængighed mellem Systemerne $x_1, x_2 \ldots x_n$ og $z_1, z_2 \ldots z_n$ (d. v. s. den Afhængighed, hvori der til Værdisættet $(x_1, x_2 \ldots x_n)$

svarer det Værdisæt $(z_1, z_2 \ldots z_n)$, som frembringes, naar man først bestemmer det til $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ svarende Værdisæt $(y_1, y_2 \ldots y_n)$ og dernæst det til $(y_1, y_2 \ldots y_n)$ svarende Værdisæt $(z_1, z_2 \ldots z_n)$) kan da atter udtrykkes ved en lineær Substitution, nemlig ved det System af n lineære Ligninger

$$(6) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \gamma_1 + \gamma_{11} z_1 + \gamma_{12} z_2 + \ldots + \gamma_{1n} z_n \\ x_2 &= \gamma_2 + \gamma_{21} z_1 + \gamma_{22} z_2 + \ldots + \gamma_{2n} z_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \gamma_n + \gamma_{n1} z_1 + \gamma_{n2} z_2 + \ldots + \gamma_{nn} z_n \end{aligned} ,$$

som frembringes af Ligningerne (3) ved for de Variable $y_1, y_2 \ldots y_n$ at indsætte deres Udtryk ved de Variable $z_1, z_2 \ldots z_n$. Koefficienten γ_{rs}, d. v. s. Koefficienten til z_s i Udtrykket for x_r, er her aabenbart bestemt ved Ligningen

$$\gamma_{rs} = \alpha_{r1}\beta_{1s} + \alpha_{r2}\beta_{2s} + \ldots + \alpha_{rn}\beta_{ns} ;$$

γ_{rs} er altsaa det almindelige (d. v. s. det i r^{te} Række og s^{te} Søjle staaende) Element i den Determinant, der frembringes ved „Multiplikation efter Rækker" (d. v. s. efter den i 12 angivne Regel) af de to Determinanter

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} \ldots & \beta_{n1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \ldots & \beta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{1n} & \beta_{2n} \ldots & \beta_{nn} \end{vmatrix} ,$$

af hvilke den første er Substitutionsdeterminanten svarende til (3), medens den anden frembringes af Substitutions-

determinanten til (5) ved at ombytte Rækker og Søjler. Vi mærker os samtidig dette Resultat i følgende Formulering: Hvis vi i n lineære Funktioner af n Variable med Koefficientskemaet (α) udfører en Substitution med Koefficientskemaet (β), da faar vi et System af lineære Funktioner med Koefficientskemaet (γ), idet

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdot & \cdot & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdot & \cdot & \gamma_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdot & \cdot & \gamma_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdot & \cdot & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdot & \cdot & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdot & \cdot & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \cdot & \cdot & \beta_{n1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \cdot & \cdot & \beta_{n2} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \beta_{1n} & \beta_{2n} & \cdot & \cdot & \beta_{nn} \end{vmatrix} .$$

I det foregaaende Resultat er naturligvis specielt indeholdt, at Værdien af Substitutionsdeterminanten Γ til den ved „Sammensætning" af Substitutionerne (3) og (5) fremkomne Substitution (6), er lig Produktet af Substitutionsdeterminanterne A og B svarende til de to oprindelige Substitutioner (3) og (5).

29. Eksempler paa Substitutioner med Determinanten 1. Sammensætter vi en Substitution (3) med dens omvendte Substitution (4), eller korrektere, sammensætter vi Substitutionen

$$(3) \quad \begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \cdot \cdot \cdot \alpha_{1n} y_n \\ x_2 &= \alpha_2 + \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \cdot \cdot \cdot \alpha_{2n} y_n \\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ x_n &= \alpha_n + \alpha_{n1} y_1 + \alpha_{n2} y_2 + \cdot \cdot \cdot \alpha_{nn} y_n \end{aligned}$$

med Substitutionen

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_1 + \beta_{11} z_1 + \beta_{12} z_2 + \cdot \cdot \cdot \beta_{1n} z_n \\ y_2 &= \beta_2 + \beta_{21} z_1 + \beta_{22} z_2 + \cdot \cdot \cdot \beta_{2n} z_n \\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ y_n &= \beta_n + \beta_{n1} z_1 + \beta_{n2} z_2 + \cdot \cdot \cdot \beta_{nn} z_n , \end{aligned}$$

hvor Koefficienterne β_r og β_{rs} betegner Koefficienterne i den til (3) hörende omvendte Substitution (4), faas den saakaldte <u>identiske Substitution</u>

$$x_1 = z_1 \,,\; x_2 = z_2 \,.\;.\;.\; x_n = z_n \,.$$

Thi den eenentydige Afhængighed mellem Systemerne $x_1, x_2 \ldots x_n$ og $z_1, z_2 \ldots z_n$, der bestemmes ved Sammensætning af de to Substitutioner, er netop den, at tilsvarende Værdisæt $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ og $(z_1, z_2 \ldots z_n)$ er identiske, og efter en Sætning i 26 ved vi, at hvis en eenentydig Afhængighed mellem to Systemer overhovedet kan udtrykkes ved lineære Ligninger, der angiver de Variable i det ene System ved de Variable i det andet System, da kan dette kun ske paa een Maade. (Det fundne Resultat $x_1 = z_1 \ldots x_n = z_n$ vilde man naturligvis ogsaa kunne komme til ved direkte Udregning). Idet Determinanten for den identiske Substitution, d. v. s. Determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

er lig med 1, følger heraf som et specielt Tilfælde af Sætningen i 28 den allerede tidligere nævnte Sætning om, <u>at Produktet af Substitutionsdeterminanterne svarende til en Substitution og dens omvendte Substitution er lig med 1</u>.

Som et andet Eksempel paa en Substitution med Determinanten 1 skal vi nævne den saakaldte <u>Forskydningssubstitution</u>, d. v. s. en Substitution af Formen

$$x_1 = \alpha_1 + y_1$$
$$x_2 = \alpha_2 + y_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_n = \alpha_n + y_n \ .$$

Den har (ligesom specielt den identiske Substitution) Determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{vmatrix} \ .$$

Man indser umiddelbart, at den omvendte Substitution, nemlig Substitutionen $y_1 = -\alpha_1 + x_1$, $y_2 = -\alpha_2 + x_2 \ldots y_n = -\alpha_n + x_n$, atter er en Forskydningssubstitution, samt at en Sammensetning af to Forskydningssubstitutioner igen fører til en Forskydningssubstitution.

I de her omtalte Substitutioner med Determinanten 1 er samtlige Elementer i Determinantens Diagonalled lig med 1, medens alle øvrige Elementer er lig med Nul; i det følgende spiller Substitutioner med Determinanter, hvis Talverdi er 1, men som i øvrigt ikke er bygget paa denne simple Maade, en særlig Rolle.

30. <u>Et Polynomium overfor en lineær Substitution</u>. Lad $P(x_1, x_2 \ldots x_n)$ betegne et Polynomium i de n Variable $x_1, x_2 \ldots x_n$. Indfører man i dette Polynomium i Stedet for de Variable $x_1, x_2 \ldots x_n$ et System af nye Variable $y_1, y_2 \ldots y_n$ bestemt ved en lineær Substitution (3), d. v. s. indsætter man for $x_1, x_2 \ldots x_n$ deres ved (3) bestemte Udtryk i de Variable $y_1, y_2 \ldots y_n$, gaar Polynomiet $P(x_1, x_2 \ldots x_n)$ derved ijensynlig over til et <u>Polynomium $Q(y_1, y_2 \ldots y_n)$</u>

i de Variable $y_1, y_2 \ldots y_m$. Betegner $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ og $(y_1, y_2 \ldots y_m)$ to gennem Substitutionen (3) tilsvarende Værdisæt, vil de to Polynomier $P(x_1, x_2 \ldots x_n)$ og $Q(y_1, y_2 \ldots y_m)$ ved Indsættelse af henholdsvis det første og det andet af disse to Værdisæt antage samme Værdi. Fører Substitutionen (3) Polynomiet $P(x_1, x_2 \ldots x_n)$ over i Polynomiet $Q(y_1, y_2 \ldots y_m)$ og Substitutionen (5) $Q(y_1, y_2 \ldots y_m)$ over i Polynomiet $R(z_1, z_2 \ldots z_m)$, vil den ved Sammensætning af (3) og (5) dannede Substitution (6) åbenbart føre $P(x_1, x_2 \ldots x_n)$ over i $R(z_1, z_2 \ldots z_m)$. Heraf følger specielt, at hvis Substitutionen (3) fører $P(x_1, x_2 \ldots x_n)$ over i $Q(y_1, y_2 \ldots y_m)$, vil den anvendte Substitution (4) føre $Q(y_1, y_2 \ldots y_m)$ tilbage til $P(x_1, x_2 \ldots x_n)$; thi sammensættes (3) med den anvendte Substitution (4) kommer vi jo til den identiske Substitution. Fører (3) $P(x_1, x_2 \ldots x_n)$ over i $Q(y_1, y_2 \ldots y_m)$ og altså omvendt (4) $Q(y_1, y_2 \ldots y_m)$ over i $P(x_1, x_2 \ldots x_n)$, og er et af de to Polynomier et Nulpolynomium, da er det andet Polynomium ligeledes et Nulpolynomium; thi tilsvarende Værdisæt $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ og $(y_1, y_2 \ldots y_m)$ giver jo de to Polynomier samme Værdi, saaledes at hvis det ene Polynomium er Nul for alle Værdier af dets Variable, vil det andet ogsaa være det. Heraf følger da, at hvis det ene af de to Polynomier er et egentligt Polynomium, da er det andet ligeledes et egentligt Polynomium; vi vil vise, at de to Polynomier $P(x_1, x_2 \ldots x_n)$ og $Q(y_1, y_2 \ldots y_m)$ er af samme Grad. Rigtigheden heraf indses saaledes: Idet $Q(y_1, y_2 \ldots y_m)$ fremgaar af $P(x_1, x_2 \ldots x_n)$ ved en lineær Substitution (3), altså ved for $x_1, x_2 \ldots x_n$ at indsætte lineære Funktioner af $y_1, y_2 \ldots y_m$, kan Graden q af $Q(y_1, y_2 \ldots y_m)$ øjensynlig ikke være højere end Graden p af $P(x_1, x_2 \ldots x_n)$; nu fremgaar imidlertid omvendt $P(x_1, x_2 \ldots x_n)$ af $Q(y_1, y_2 \ldots y_m)$ ligeledes ved en lineær Substitution (nemlig ved den omvendte Substitution (4) til Substitutionen (3)); følgelig indses paa

samme Maade, at Graden p af $P(x_1, x_2 \ldots x_n)$ ikke kan være højere end Graden q af $Q(y_1, y_2 \ldots y_n)$; men af $q \leqq p$ og $p \leqq q$ følger $p = q$, saaledes som vi skulde vise.

31. <u>Lineære homogene Substitutioner.</u> Ved en lineær <u>homogen</u> Substitution forstaas en lineær Substitution (3), ved hvilken de konstante Led $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ alle er lig med Nul, altsaa et System af Ligninger

$$(7) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \ldots \alpha_{1n} y_n \\ x_2 &= \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \ldots \alpha_{2n} y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \alpha_{n1} y_1 + \alpha_{n2} y_2 + \ldots \alpha_{nn} y_n \end{aligned},$$

for hvilket Determinanten $\begin{vmatrix} \alpha_{11} \alpha_{12} \ldots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} \alpha_{22} \ldots \alpha_{2n} \\ \alpha_{n1} \alpha_{n2} \ldots \alpha_{nn} \end{vmatrix}$ er $\neq 0$. Som et særlig simpelt Eksempel paa en lineær homogen Substitution kan nævnes den saakaldte <u>affine</u> Substitution $x_1 = k_1 y_1$, $x_2 = k_2 y_2 \ldots x_n = k_n y_n$, hvor Konstanterne $k_1, k_2 \ldots k_n$ alle er $\neq 0$; denne Substitution har Determinanten $\begin{vmatrix} k_1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & k_n \end{vmatrix} = k_1 \cdot k_2 \ldots k_n$. Man ser umiddelbart, at den omvendte Substitution til en affin Substitution (nemlig Substitutionen $y_1 = \frac{1}{k_1} x_1$, $y_2 = \frac{1}{k_2} x_2 \ldots y_n = \frac{1}{k_n} x_n$) atter er en affin Substitution, samt at en Sammensætning af to affine Substitutioner igen fører til en affin Substitution.

Vi beviste ovenfor, at en vilkaarlig lineær Substitution fører et Polynomium af m^{te} Grad $P(x_1, x_2 \ldots x_n)$ over i et andet Polynomium $Q(y_1, y_2 \ldots y_n)$ af samme Grad; vi kan her,

hvor Talen er om lineære homogene Substitutioner, bevise den yderligere Sætning (der ikke gælder for en vilkaarlig lineær Substitution), at naar af to ved den lineære homogene Substitution (7) til hinanden svarende Polynomier $P(x_1, x_2 \ldots x_n)$ og $Q(y_1, y_2 \ldots y_n)$ det ene er homogent af m^{te} Grad, da er det andet ligeledes homogent af m^{te} Grad. Thi er f. Eks. $P(x_1, x_2 \ldots x_n)$ homogent af m^{te} Grad, da kan $Q(y_1, y_2 \ldots y_n)$ (om hvilket vi jo ved, at det er et egentligt Polynomium, da $P(x_1, x_2 \ldots x_n)$ er det) aabenbart ikke indeholde noget Led, hvis Grad er forskellig fra m, idet jo alle Leddene i $P(x_1, x_2 \ldots x_n)$ er af m^{te} Grad, og vi for hver af de Variable $x_1, x_2 \ldots x_n$ skal indsætte et lineært homogent Udtryk i de Variable $y_1, y_2 \ldots y_n$. Ved talrige Undersøgelser over lineære Substitutioner kan man nøjes med at studere de lineære homogene Substitutioner, i det jo en vilkaarlig lineær Substitution kan dannes ved Sammensætning af en lineær homogen Substitution og en simpel Forskydningssubstitution.

32. Kvadratiske Former. Ved en kvadratisk Form i de Variable $x_1, x_2 \ldots x_n$ forstaas et homogent Polynomium af 2den Grad i disse Variable. Af ovenstaaende Sætning følger umiddelbart at en kvadratisk Form $F(x_1, x_2 \ldots x_n)$ ved en lineær homogen Substitution (7) atter gaar over i en kvadratisk Form $G(y_1, y_2 \ldots y_n)$. Vi vil i det følgende lidt nærmere undersøge Sammenhængen mellem to saadanne kvadratiske Former F og G, hvoraf den ene fremgaar af den anden ved en lineær homogen Substitution. – En vilkaarlig kvadratisk Form $F(x_1, x_2 \ldots x_n)$ i de n Variable $x_1, x_2 \ldots x_n$ indeholder, hvis ingen af Koefficienterne er Nul, ialt n Kvadrater x_r^2 og $\frac{n(n-1)}{2}$ Produkter $x_r x_s$ $(r \neq s)$. Idet vi betegner Koefficienten til x_r^2 med a_{rr}, samt hvad der vil være hensigtsmæs-

sigt for det følgende, betegner Koefficienten til $x_r x_s$ $(r \neq s)$ med $2a_{rs} = 2a_{sr} = (a_{rs} + a_{sr})$, kan $F(x_1, x_2 \ldots x_n)$ skrives som en Sum af n^2 Led

$$F(x_1, x_2 \ldots x_n) = \sum a_{rs} x_r \cdot x_s ,$$

hvor Summationstegnet angiver, at r og s uafhængig af hinanden skal gennemløbe alle Tallene $1, 2 \ldots n$, eller med en ofte brugt Skrivemaade, paa Formen

$$(8) \qquad F(x_1, x_2 \ldots x_n) = \begin{array}{l} x_1 (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \ldots a_{1n} x_n) \\ + x_2 (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \ldots a_{2n} x_n) \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \\ + x_n (a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 \ldots a_{nn} x_n). \end{array}$$

Ved Determinanten for den kvadratiske Form $F(x_1, x_2 \ldots x_n)$ forstaas den til Koefficientskemaet i det sidste Udtryk for F hørende Determinant

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} ,$$

hvor altsaa Elementerne a_{rr} i Diagonalleddet betegner Koefficienterne til Kvadratleddene x_r^2, medens a_{rs} $(r \neq s)$ angiver den halve Koefficient til Produktet $x_r x_s$. Idet $a_{rs} = a_{sr}$ er Determinanten A en symmetrisk Determinant. Lad os i den kvadratiske Form $F(x_1, x_2 \ldots x_n)$ indføre nye Variable $y_1, y_2 \ldots y_n$ ved en lineær homogen Substitution (7) og lad os skrive den derved fremkomne nye kvadratiske Form $G(y_1, y_2 \ldots y_n)$ paa Formen

$$\mathfrak{G}(y_1, y_2 \ldots y_n) = \Sigma b_{rs} y_r y_s ,$$

idet vi analogt med ovenfor betegner Koefficienten til y_r^2 med b_{rr} og Koefficienten til $y_r y_s$ $(r \neq s)$ med $2b_{rs} = 2b_{sr} = b_{rs} + b_{sr}$. Lad os undersøge, hvorledes Koefficienterne b_{rs} bestemmes udfra Koefficienterne a_{rs} til den givne kvadratiske Form $F(x_1, x_2 \ldots x_n)$ og Koefficienterne α_{rs} til den benyttede lineære homogene Substitution (7). Hertil gaar vi ud fra $F(x_1, x_2 \ldots x_n)$ skrevet paa Formen (8); indsætter vi først indenfor Parenteserne i (8) for $x_1, x_2 \ldots x_n$ deres Udtryk ved de nye Variable $y_1, y_2 \ldots y_n$, medens vi lader de udenfor Parenteserne staaende x'er blive staaende uforandret, faas umiddelbart efter den i 28 fundne Regel (idet vi med Vilje benytter omvendt Indicesbetegnelse af den sædvanlige)

$$(9a)\quad F(x_1, x_2 \ldots x_n) = \begin{array}{l} x_1(\gamma_{11} y_1 + \gamma_{21} y_2 + \ldots \gamma_{n1} y_n) \\ + x_2(\gamma_{12} y_1 + \gamma_{22} y_2 + \ldots \gamma_{n2} y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + x_n(\gamma_{1n} y_1 + \gamma_{2n} y_2 + \ldots \gamma_{nn} y_n) , \end{array}$$

hvori Koefficientskemaet $\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} \ldots \gamma_{n1} \\ \ldots & \ldots \\ \gamma_{1n} & \gamma_{2n} \ldots \gamma_{nn} \end{pmatrix}$ er bestemt ved Produktet

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} \ldots \gamma_{n1} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \ldots \gamma_{n2} \\ \ldots & \ldots \\ \gamma_{1n} & \gamma_{2n} \ldots \gamma_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \ldots \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \ldots \alpha_{n2} \\ \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} \ldots \alpha_{nn} \end{vmatrix} .$$

Omordnes Leddene i (9a) faas

$$(9\text{b})\quad F(x_1, x_2 \ldots x_n) = \begin{array}{l} y_1(\gamma_{11}x_1 + \gamma_{12}x_2 + \ldots \gamma_{1n}x_n) \\ + y_2(\gamma_{21}x_1 + \gamma_{22}x_2 + \ldots \gamma_{2n}x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + y_n(\gamma_{n1}x_1 + \gamma_{n2}x_2 + \ldots \gamma_{nn}x_n) \end{array},$$

hvor det nye Koefficientskema $\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \ldots \gamma_{1n} \\ \ldots & \ldots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} \ldots \gamma_{nn} \end{pmatrix}$, der fremkommer

af det forrige $\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} \ldots \gamma_{n1} \\ \ldots & \ldots \\ \gamma_{1n} & \gamma_{2n} \ldots \gamma_{nn} \end{pmatrix}$ ved Ombytning af Rækker og Søjler,

bestemmes ved Ombytning af de to Determinanter i det overstaaende Produkt, d. v. s. bestemmes ved

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \ldots \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \ldots \gamma_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} \ldots \gamma_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \ldots \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \ldots \alpha_{n2} \\ \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} \ldots \alpha_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \ldots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \ldots \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \ldots \alpha_{nn} \end{vmatrix} .$$

Indsætter vi sluttelig i (9b) for de endnu tilbagestaaende $x_1, x_2 \ldots x_n$ deres Udtryk ved $y_1, y_2 \ldots y_n$, finder vi

$$G(y_1, y_2 \ldots y_n) = \begin{array}{l} y_1(b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ldots b_{1n}y_n) \\ + y_2(b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \ldots b_{2n}y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + y_n(b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ldots b_{nn}y_n) \end{array} = \sum b_{rs}\, y_r\, y_s ,$$

hvor Koefficientskemaet $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots b_{1n} \\ \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots b_{nn} \end{pmatrix}$ bestemmes ved den

samme Regel som før, hvor altsaa

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots b_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \cdots \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \cdots \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} \cdots \gamma_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \cdots \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \cdots \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} \cdots \alpha_{nn} \end{vmatrix},$$

med andre Ord, hvor b_{rs} er det almindelige Led i den Determinant af n^{te} Orden, der fremkommer ved „efter Rækker" at udføre de to Multiplikationer paa højre Side af Ligheds-tegnet i

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots b_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots b_{nn} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \cdots \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \cdots \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} \cdots \alpha_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \cdots \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \cdots \alpha_{nn} \end{vmatrix} \right) \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \cdots \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \cdots \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} \cdots \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

For at fuldstændiggøre Beviset for at Elementerne b_{rs} i den ved de to angivne Multiplikationer fremkomne Determinant netop er de Størrelser vi ønsker at betegne ved b_{rs}, mangler vi endnu at bevise, at der gælder Ligningen $b_{rs} = b_{sr}$; men dette følger umiddelbart deraf, at den ved de to Multiplikationer dannede Determinant, som vi har vist i 14., er en <u>symmetrisk</u> Determinant.

Udfra det fundne Resultat vedrørende Bestemmelsen af Koefficienterne b_{rs} til den nye kvadratiske Form $G(y_1, y_2 \cdots y_n)$ følger naturligvis specielt, at <u>Værdien af Determinanten B svarende til den ved Substitutionen fremkomne Form $G(y_1, y_2 \cdots y_n)$ er lig med Determinanten A til den oprindelige Form $F(x_1, x_2 \cdots x_n)$, multipliceret med Kvadratet paa</u>

Substitutionsdeterminanten A.

33. Invariant. Man siger om et Polynomium i Koefficienterne a_{rs} til en almindelig kvadratisk Form $F(x_1, x_2 \ldots x_m)$, d. v. s. en kvadratisk Form, hvori Koefficienterne a_{rs} opfattes som Variable, for hvilke vi har Frihed til at indsætte specielle Værdier, og ikke som fastlagte Tal, at dette Polynomium er en Invariant overfor en given linear homogen Substitution, hvis Polynomiet antager den samme Talværdi, hvad enten vi for de Variable a_{rs} indsætter Koefficienterne til en vilkaarlig opgiven kvadratisk Form, eller vi indsætter Koefficienterne til den nye kvadratiske Form, der fremkommer af den forrige ved i denne at udføre den givne Substitution (Eks. et vilkaarligt Polynomium i de Variable a_{rs} er invariant overfor den identiske Substitution). Af den sidste Sætning i 32 følger umiddelbart, at Determinanten

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

til den kvadratiske Form $F(x_1, x_2 \ldots x_m)$ er en Invariant overfor enhver linear homogen Substitution med Substitutionsdeterminanten lig med $+1$ eller -1; thi for enhver saadan Substitution er jo Kvadratet paa Substitutionsdeterminanten lig med 1.

34. Orthogonale Substitutioner. Blandt de lineære homogene Substitutioner med Determinant ± 1 spiller de saakaldte orthogonale Substitutioner en særlig Rolle; man betegner med Navnet: „orthogonal Substitution" enhver linear homogen Substitution

$$(7)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \cdots \alpha_{1n}y_n \\ x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \cdots \alpha_{2n}y_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \alpha_{n1}y_1 + \alpha_{n2}y_2 + \cdots \alpha_{nn}y_n \end{aligned},$$

der fører Kvadratsummen af det ene Sæt Variable over til Kvadratsummen af det andet Sæt Variable, d. v. s der anvendt overfor den specielle kvadratiske Form

$$F(x_1, x_2 \cdots x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2$$

fører over til den nye kvadratiske Form

$$G(y_1, y_2 \cdots y_n) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots y_n^2 .$$

Som man umiddelbart ser ved Indsættelse kræves for at Substitutionen (7) skal være orthogonal, at i Substitutionsdeterminanten

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \cdots \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \cdots \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Summen af Kvadraterne paa Elementerne i en vilkaarlig Søjle er lig med 1, medens Produktsummen af tilsvarende Elementer i to vilkaarlige forskellige Søjler er lig med Nul, med andre Ord, at der gælder Ligningerne

$$\alpha_{1r}\alpha_{1s} + \alpha_{2r}\alpha_{2s} \cdots \alpha_{nr}\alpha_{ns} = \begin{cases} 1 \text{ for } r = s \\ 0 \text{ for } r \neq s \end{cases} .$$

Af disse Ligninger følger umiddelbart ved efter den sædvanlige Multiplikationsregel at danne Kvadratet paa Determinanten A, efter først at have ombyttet Rækker og Søjler, at

$$A^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 ,$$

altsaa som allerede ovenfor nævnt, at $A = \pm 1$. Dersom $A = +1$, kaldes Substitutionen en <u>egentlig</u> orthogonal Substitution, er $A = -1$, kaldes Substitutionen en <u>uegentlig</u> orthogonal Substitution. <u>Sammensætter man to orthogonale Substitutioner, kommer man atter til en orthogonal Substitution.</u> thi dersom den ene af de to Substitutioner fører over fra $x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2$ til $y_1^2 + y_2^2 + \ldots y_n^2$, den anden fra $y_1^2 + y_2^2 \ldots y_n^2$ til $z_1^2 + z_2^2 + \ldots z_n^2$, vil jo den sammensatte Substitution føre over fra $x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2$ til $z_1^2 + z_2^2 + \ldots z_n^2$. Idet Determinanten til en sammensat Substitution er lig Produktet af de to oprindelige Substitutionsdeterminanter, ser man umiddelbart, at man ved Sammensætning af to egentlig orthogonale eller af to uegentlig orthogonale Substitutioner kommer til en egentlig orthogonal Substitution, medens en Sammensætning af to orthogonale Substitutioner, hvoraf den ene er egentlig, den anden uegentlig, fører til en uegentlig orthogonal Substitution. Fører en orthogonal Substitution over fra Kvadratsummen $x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2$ til $y_1^2 + y_2^2 + \ldots y_n^2$, vil <u>den omvendte Substitution</u> føre fra $y_1^2 + y_2^2 + \ldots y_n^2$ til $x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2$ og altsaa <u>ligeledes være en orthogonal Substitution</u>, og som det fremgaar af Determinantens Fortegn, egentlig eller uegentlig orthogonal, alt ef-

hersom den oprindelige Substitution er egentlig eller uegentlig orthogonal.

35. Orthogonalinvarianter. Lad $F(x_1, x_2 \ldots x_n) = \sum a_{rs} x_r x_s$ være en almindelig kvadratisk Form i de n Variable $x_1, x_2 \ldots x_n$. Man siger om et Polynomium i Koefficienterne a_{rs}, at det er en Orthogonalinvariant, hvis det er en Invariant overfor enhver orthogonal Substitution. I det Substitutionsdeterminanten A for en orthogonal Substitution er lig med enten $+1$ eller -1, følger umiddelbart ud fra den sidste Sætning i 33, at den kvadratiske Forms Determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

er en Orthogonalinvariant. Der findes øjensynlig uendelig mange Orthogonalinvarianter; f. Eks. er Δ^m, hvor m er et vilkaarligt positivt helt Tal og Δ ovenstaaende Determinant, atter en Orthogonalinvariant. Vi skal ikke her komme ind paa en Undersøgelse med det Formaal at vinde Klarhed over Samlingen af alle mulige Orthogonalinvarianter, men skal nøjes med, foruden den ovenforanførte Determinant Δ, at fremdrage endnu nogle for Anvendelserne særlig vigtige Orthogonalinvarianter. Lad os i dette Øjemed betragte en vilkaarlig kvadratisk Form $F(x_1, x_2 \ldots x_n) = \sum a_{rs} x_r x_s$, og lad os antage, at denne Form ved en vilkaarlig valgt orthogonal Substitution gaar over til den nye kvadratiske Form $G(y_1, y_2 \ldots y_n) = \sum b_{rs} y_r y_s$; da vil, i det enhver orthogonal Substitution fører Kvadratsummen $x_1^2 + x_2^2 \ldots x_n^2$ over

til Kvadratsummen $y_1^2+y_2^2+\ldots y_n^2$, den samme orthogonale Substitution føre den kvadratiske Form $F(x_1, x_2 \ldots x_n) - s(x_1^2+x_2^2+\ldots x_n^2)$, hvor s betegner et vilkaarligt Tal, over til Formen $G(y_1, y_2 \ldots y_n) - s(y_1^2+y_2^2 \ldots y_n^2)$. Determinanten til de to kvadratiske Former $F - s(x_1^2+x_2^2 \ldots x_n^2)$ og $G - s(y_1^2+y_2^2 \ldots y_n^2)$, d. v. s. Determinanterne

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-s \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn}-s \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b_{11}-s & b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}-s \ldots b_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots b_{nn}-s \end{vmatrix},$$

er følgelig ligestore (d. v. s. de har samme Talværdi); thi Determinanten til en kvadratiske Form er jo en Orthogonalinvariant. Dette Resultat kan vi ogsaa udtrykke saaledes: Determinanten

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-s \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn}-s \end{vmatrix}$$

antager, naar vi opfatter s som et givet Tal, Bogstaverne a_{rs} derimod som Variable, samme Talværdi, hvad enten vi for de Variable a_{rs} indsætter Koefficienterne til en vilkaarligt given kvadratiske Form $F(x_1, x_2 \ldots x_n)$, eller vi indsætter Koefficienterne til den nye Form $G(y_1, y_2 \ldots y_n)$, der fremgaar af den forrige ved at underkaste denne en vilkaarlig orthogonal Substitution; med andre Ord: <u>Determinanten (10) er for enhver fast Værdi af s en Orthogonalinvariant.</u> Udvikler vi Determinanten (10) efter Potenser af s, faar vi et Polynomium af n^{te} Grad

$$A_0 + A_1 s + A_2 s^2 \ldots A_{n-1} s^{n-1} + (-1)^n \cdot s^n,$$

hvor Koefficienterne $A_0, A_1 \ldots A_{n-1}$ er Polynomier i Bogstaverne a_{rs}, og hvor forøvrigt A_0, der jo fremkommer ved i (10) at sætte $s = 0$, netop er Determinanten A til den kvadratiske Form $F(x_1, x_2 \ldots x_n)$. Vi vil vise, at <u>enhver af de n Koefficienter $A_0, A_1 \ldots A_{n-1}$ er en Orthogonalinvariant</u>. Dette indses gennem følgende Betragtning: som vi har vist, antager det omhandlede Polynomium af n^{te} Grad, hvilken Værdi vi end tillægger s, den samme Talværdi, hvad enten vi for Bogstaverne a_{rs} indsætter Koefficienterne til den vilkaarligt givne kvadratiske Form $F(x_1, x_2 \ldots x_n)$ eller Koefficienterne til den af $F(x_1, x_2 \ldots x_n)$ ved en hvilkensomhelst given orthogonal Substitution fremkomne nye kvadratiske Form $G(y_1, y_2 \ldots y_n)$; men naar to Polynomier i s er ligestore for alle Værdier af s, da er de identiske. Heraf følger da, at <u>hver enkelt</u> af Koefficienterne $A_0, A_1 \ldots A_{n-1}$ maa have samme Talværdi, hvad enten vi for Bogstaverne a_{rs} indsætter Koefficienterne til Formen $F(x_1, x_2 \ldots x_n)$ eller Koefficienterne til den af $F(x_1, x_2 \ldots x_n)$ ved den vilkaarligt givne orthogonale Substitution fremkomne nye kvadratiske Form $G(y_1, y_2 \ldots y_n)$, altsaa: enhver af de n Koefficienter $A_0, A_1 \ldots A_{n-1}$ er en Orthogonalinvariant, saaledes som vi skulde bevise.

<u>Eks.</u> <u>For n = 2</u> faas

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-s \end{vmatrix} = s^2 - s(a_{11}+a_{22}) + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Altsaa finder vi her de to Orthogonalinvarianter $a_{11}+a_{22}$ og $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

<u>For n = 3</u> faar vi paa tilsvarende Maade

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-s & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-s \end{vmatrix} = A_0 + A_1 s + A_2 s^2 - s^3 ,$$

hvor $A_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $-A_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $A_2 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$.

Altsaa finder vi her de tre Orthogonalinvarianter $A_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

$A_1 = a_{23}^2 + a_{31}^2 + a_{12}^2 - a_{22}a_{33} - a_{33}a_{11} - a_{11}a_{22}$ og $A_2 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$.

Vi afslutter hermed Undersøgelsen over kvadratiske Former med et vilkaarligt Antal, n, Variable og deres Forhold overfor orthogonale Substitutioner og skal nu gaa over til lidt nærmere at undersøge de to specielle, for en senere Anvendelse paa henholdsvis den analytiske Plangeometri og den analytiske Rumgeometri særlig vigtige Tilfælde, hvor Antallet af Variable er 2 eller 3 . Til en Begyndelse vil vi for at vinde Orientering over Mængden af orthogonale Substitutioner i to Variable udlede hvad man kalder en <u>Parameterfremstilling</u> for saadanne Substitutioner.

36. <u>Orthogonal Substitution med to Variable.</u> Mellem de n^2 Koefficienter α_{rs} i en orthogonal Substitution med n Variable bestaar der ialt $n + \frac{n(n-1)}{2}$ Betingelsesligninger, nemlig de n Ligninger, der udsiger, at Kvadratsummen til Koefficienterne i en Søjle er 1 og de $\frac{n(n-1)}{2}$ Ligninger, der udsiger, at Produktsummen af Koefficienterne i to forskellige Søjler er lig med Nul. I Sammenhæng hermed kan man vise, at de n^2 Koefficienter kan udtrykkes ved ialt $n^2 - (n + \frac{n(n-1)}{2}) = \frac{n(n-1)}{2}$ Parametre, d. v. s. kan

udtrykkes som Funktioner af $\frac{n(n-1)}{2}$ Størrelser $v_1, v_2 \ldots\ldots$, saaledes at man ved Variation af disse $\frac{n(n-1)}{2}$ Parametre faar samtlige orthogonale Substitutioner frem. Vi skal her nøjes med at betragte det simpleste Tilfælde, hvor $n=2$, og her vise, at de 4 Koefficienter $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ i en saadan orthogonal Substitution paa simpel Maade kan udtrykkes ved $\frac{2(2-1)}{2} = 1$ Parameter. (Vi skal senere, naar vi kommer til den analytiske Rumgeometri, vise, hvorledes de 9 Koefficienter i en orthogonal Substitution med 3 Variable kan udtrykkes ved $\frac{3(3-1)}{2} = 3$ Parametre). Lad os da betragte en orthogonal Substitution med to Variable

$$x_1 = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2$$
$$x_2 = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 \ .$$

De 4 Koefficienter α_{rs} er her forbundet ved de tre Betingelser

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 = 1 \ , \ \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 = 1 \ , \ \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} = 0 \ .$$

For at udtrykke de 4 Koefficienter ved en og samme Parameter bemærker vi først, at der paa Grund af Ligningen $\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 = 1$ eksisterer et Tal v, saaledes at

$$\alpha_{11} = \cos v \ , \ \alpha_{21} = \sin v \ .$$

Herved er v bestemt paa et Multiplum af 2π nær; for at fastlægge en bestemt Værdi af v, vil vi vælge v saaledes at $0 \leqq v < 2\pi$. Paa tilsvarende Maade følger af Ligningen $\alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 = 1$ Eksistensen af et Tal w, for hvilket

$$\alpha_{12} = \cos w \ , \ \alpha_{22} = \sin w \ ;$$

vi fastlægger w, der jo kun er bestemt paa et Multiplum af 2π nær, saaledes at $v \leqq w < v + 2\pi$. Indsætter vi nu de fundne Udtryk for α_{11}, α_{21}, α_{12} og α_{22} i den tredje Betingelsesligning $\alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} = 0$, faar vi

$$\cos v \cos w + \sin v \sin w = \cos(w - v) = 0 ;$$

heraf følger, at $w - v$ maa have een af Værdierne $\frac{\pi}{2}$ eller $\frac{3\pi}{2}$, altsaa at w er lig med enten $v + \frac{\pi}{2}$ eller $v + \frac{3\pi}{2}$. I første Tilfælde faas $\alpha_{12} = \cos w = -\sin v$, $\alpha_{22} = \sin w = \cos v$, i andet Tilfælde derimod $\alpha_{12} = \sin v$, $\alpha_{22} = -\cos v$. Vi finder derfor i henholdsvis det ene og det andet af de to Tilfælde den orthogonale Substitution fremstillet ved

$$(11\,a) \qquad \begin{aligned} x_1 &= y_1 \cos v - y_2 \sin v \\ x_2 &= y_1 \sin v + y_2 \cos v \end{aligned} \qquad \text{og} \qquad \begin{aligned} x_1 &= y_1 \cos v + y_2 \sin v \\ x_2 &= y_1 \sin v - y_2 \cos v \end{aligned} \qquad (11\,b).$$

Vi har hermed vist, at enhver orthogonal Substitution med to Variable kan skrives paa den ene eller den anden af disse to Former ved et passende Valg af Parameteren v. Omvendt indser man umiddelbart, at enhver Substitution, der har en af disse to Former, er en orthogonal Substitution, da baade (11a) og (11b) for enhver Værdi af Parameteren v, giver $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$. Betragter vi Determinanterne til de to Substitutioner (11a) og (11b), finder vi henholdsvis

$$\begin{vmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{vmatrix} = 1 \qquad \text{og} \qquad \begin{vmatrix} \cos v & \sin v \\ \sin v & -\cos v \end{vmatrix} = -1 .$$

Sammenfatter vi de fundne Resultater, har vi bevist: <u>Lader vi i de to Substitutioner (11a) og (11b) v efterhaanden gennemløbe</u>

alle Værdier fra 0 (incl.) til 2π (excl.), vil Substitutionen (11a) efterhaanden fremstille alle egentlig orthogonale Substitutioner, Substitutionen (11b) alle uegentlig orthogonale Substitutioner, og saaledes at vi paa denne Maade faar enhver orthogonal Substitution med een og kun een Gang.

Sammensætter vi to egentlig orthogonale Substitutioner svarende til henholdsvis Parameterværdierne v_1 og v_2, vil den derved fremkomne egentlig orthogonale Substitution have sit Koefficientskema bestemt ved

$$\begin{vmatrix} \cos v_1 & -\sin v_1 \\ \sin v_1 & \cos v_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos v_2 & \sin v_2 \\ -\sin v_2 & \cos v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(v_1+v_2) & -\sin(v_1+v_2) \\ \sin(v_1+v_2) & \cos(v_1+v_2) \end{vmatrix} .$$

Parameteren til den ved Sammensætningen dannede Substitution vil altsaa paa et Multiplum af 2π nær have Værdien $v_1 \pm v_2$.

37. Reduktion af en kvadratisk Form med to Variable. Lad os betragte en kvadratisk Form med to Variable

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 ,$$

hvor vi af Hensyn til den senere Anvendelse indenfor den analytiske Plangeometri har foretrukket at betegne de Variable med x, y fremfor med x_1 og x_2, og lad os i Stedet for de Variable x, y indføre nye Variable x_1, y_1 bestemte ved en egentlig orthogonal Substitution

$$x = x_1 \cos v - y_1 \sin v$$
$$y = x_1 \sin v + y_1 \cos v.$$

Herved gaar den kvadratiske Form $F(x,y)$ over til en kvadratisk Form i de Variable x_1, y_1

$$G(x_1,y_1) = b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1y_1 + b_{22}y_1^2 ,$$

hvor den halve Koefficient b_{12} til Produktet $x_1 \cdot y_1$, som man umiddelbart ser ved Indsættelse, er bestemt ved

$$b_{12} = -a_{11}\cos v \sin v + a_{12}(\cos^2 v - \sin^2 v) + a_{22}\sin v \cos v = a_{12}\cos 2v - \tfrac{1}{2}(a_{11}-a_{22})\sin 2v .$$

Ved Betragtning af dette sidste Udtryk indses umiddelbart følgende vigtige Sætning: Er Koefficienten $2a_{12}$ til Produktet xy i den givne kvadratiske Form $F(x,y) \neq 0$, kan vi altid ved Anvendelse af en egentlig orthogonal Substitution føre $F(x,y)$ over til en ny kvadratisk Form $G(x_1,y_1)$, hvori Produktleddet x_1y_1 mangler, d. v. s. hvori Koefficienten b_{12} er lig med Nul. For at gøre b_{12} til Nul behøver vi nemlig blot for Parameteren v i den orthogonale Substitution at vælge en af de 4 mellem 0 og 2π beliggende Løsninger $v_1, v_1+\frac{\pi}{2}, v_1+\pi, v_1+\frac{3\pi}{2}$ af Ligningen

$$\cot 2v = \frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}} .$$

Betegner $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos v_1 & -\sin v_1\\ \sin v_1 & \cos v_1\end{pmatrix}$ Koefficientskemaet til den orthogonale Substitution med Parameterværdien v_1, vil de to andre orthogonale Substitutioner, der ligeledes bortskaffer Produktleddet og som har Parameterværdierne $v_1+\frac{\pi}{2}, v_1+\pi, v_1+\frac{3\pi}{2}$, øjensynlig have Koefficientskemaerne

$$\begin{pmatrix}\beta_1 & -\alpha_1\\ \beta_2 & -\alpha_2\end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix}-\alpha_1 & -\beta_1\\ -\alpha_2 & -\beta_2\end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix}-\beta_1 & \alpha_1\\ -\beta_2 & \alpha_2\end{pmatrix} .$$

(Man kunde allerede paa Forhaand indse, at hvis der overhovedet eksisterer en orthogonal Substitution $x=\alpha_1 x_1+\beta_1 y_1$, $y=\alpha_2 x_1+\beta_2 y_1$, der bortskaffer Produktleddet af den kvadratiske Form, da eksisterer der mindst 8 saadanne orthogonale Substitutioner, nemlig foruden den oprindelige de 7 andre, der fremkommer ved Fortegnsskifte for og Ombytning af de Variable x_1 og y_1; at vi ovenfor kun har faaet 4 af disse 8 sammenhørende Substitutioner med bidrager fra, at vi paa Forhaand har opstillet den Fordring, at Substitutionen skulde være egentlig; de 4 øvrige Substitutioner er uegentlige).

Vælger vi en bestemt (ligegyldig hvilken) af de 4 Værdier for v, der gør b_{12} til Nul, vil vi vise, at de to andre Koefficienter b_{11} og b_{22} i den reducerede Form $G(x_1, y_1)$ kan bestemmes som Rødder i Ligningen af 2den Grad

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-s \end{vmatrix} = 0.$$

(Heraf følger dag specielt, at de 4 fundne Substitutioner alle giver det samme Koefficientpar b_{11}, b_{22}, med andre Ord, at kun Rækkefølgen af disse to Koefficienter (og ikke deres Talværdier) er afhængig af, hvilken af de 4 Substitutioner, vi benytter; det samme indses naturligvis ogsaa ved direkte Betragtning af de Udtryk for b_{11} og b_{22}, der faas ved Indsættelse i den givne Form). Rigtigheden heraf indses umiddelbart ved den i 35 beviste Sætning, at Polynomiet af 2den Grad i s paa venstre Side af (12) er en Orthogonalinvariant, altsaa at dette

Polynomium i s er identisk med Polynomiet $\begin{vmatrix} b_{11}-s & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}-s \end{vmatrix}$, d. v. s.

(idet $b_{12} = b_{21} = 0$) med Polynomiet paa venstre Side af Ligningen

$$\begin{vmatrix} b_{11} - s & 0 \\ 0 & b_{22} - s \end{vmatrix} = 0 .$$

Denne sidste Ligning har imidlertid Rødderne $s = \begin{cases} b_{11} \\ b_{22} \end{cases}$; følgelig har den dermed identiske Ligning (12) det ogsaa, saaledes som vi skulde vise. Af det foregaaende fremgaar specielt, at Ligningen (12), hvilken kvadratiske Form vi end betragter, d. v. s. hvilke Tal Bogstaverne a_{11}, $a_{12} = a_{21}$ og a_{22} end betegner, altid har to reelle Rødder (nemlig Rødderne b_{11} og b_{22}); at dette er Tilfældet indses ogsaa umiddelbart direkte, i det venstre Side af (12) er lig med $s^2 - s(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$, hvor

$$(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geqq 0 .$$

38. Reduktion af en kvadratisk Form med tre Variable. Lad

$$(13) \quad F(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy$$

være en kvadratisk Form i de tre Variable x, y, z. Analogt med hvad vi i 37 fandt for en kvadratisk Form med to Variable, gælder her følgende Sætning: Det er muligt gennem en orthogonal Substitution

$$(14) \quad \begin{aligned} x &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}y_1 + \alpha_{13}z_1 \\ y &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}y_1 + \alpha_{23}z_1 \\ z &= \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}y_1 + \alpha_{33}z_1 \end{aligned}$$

at føre $F(x,y,z)$ over til en kvadratisk Form

(15) $G(x_1, y_1, z_1) = b_{11}x_1^2 + b_{22}y_1^2 + b_{33}z_1^2 + 2b_{23}y_1z_1 + 2b_{31}z_1x_1 + 2b_{12}x_1y_1$,

hvor Produktleddene mangler, d. v. s. hvor $b_{23} = b_{31} = b_{12} = 0$. Endvidere vil Kvadratkoefficienterne b_{11}, b_{22}, b_{33} i den reducerede Form (15) bestemmes som Rødder i Polynomiet

$$(16) \qquad \Delta(s) = \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-s & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-s \end{vmatrix}$$

d. v. s. dette Polynomium $\Delta(s)$ vil kunne skrives paa Formen $-(s-b_{11})(s-b_{22})(s-b_{33})$.

Lad os for at bevise denne Sætning først bemærke, at det for at vise Eksistensen af en orthogonal Substitution (14) med den forlangte Egenskab, d. v. s. en orthogonal Substitution, der bortskaffer alle tre Produktled, er tilstrækkeligt at bevise Eksistensen af en orthogonal Substitution (14), der bringer de to af Produktleddene til at falde bort, altsaa saaledes, at f. Eks $b_{31} = b_{12} = 0$; thi er vi først naaet til en kvadratisk Form

$$G(x_1, y_1, z_1) = b_{11}x_1^2 + b_{22}y_1^2 + b_{33}z_1^2 + 2b_{23}y_1z_1,$$

kan vi, hvis b_{23} da ikke allerede af sig selv er Nul, altid ved at udføre endnu en orthogonal Substitution (der da sammensat med den første giver den søgte) komme over til en ny kvadratisk Form $H(x_2, y_2, z_2)$, hvori alle tre Produktled mangler; vi behøver nemlig blot, hvis

$$y_1 = \beta_{11}y_2 + \beta_{12}z_2$$
$$z_1 = \beta_{21}y_2 + \beta_{22}z_2$$

er en saadan orthogonal Substitution i to Variable, at den fører Formen $b_{22}y_1^2 + b_{33}z_1^2 + 2b_{23}y_1z_1$ over til en kvadratisk Form i y_2, z_2, hvori Produktleddet mangler (og at der eksisterer en saadan orthogonal Substitution har vi vist i 37), at sætte

$$x_1 = x_2\ ,\ y_1 = \beta_{11}y_2 + \beta_{12}z_2\ ,\ z_1 = \beta_{21}y_2 + \beta_{22}z_2\ ;$$

da disse tre Ligninger umiddelbart giver $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$, danner de en orthogonal Substitution i de tre Variable, og denne orthogonale Substitution fører aabenbart den kvadratiske Form $G(x_1, y_1, z_1)$ over til en kvadratisk Form $H(x_2, y_2, z_2)$, hvori alle tre Produktled mangler.

Vi skiller os straks af med den sidste Del af den opstillede Sætning, der jo udsiger, at hvis den reducerede Form (15), hvori $b_{23} = b_{31} = b_{12} = 0$, er fremgaaet af den givne Form (13) ved en orthogonal Substitution, vil Kvadratkoefficienterne b_{11}, b_{22}, b_{33} bestemmes som Rødder i Polynomiet $\Delta(s)$, d. v. s. dette Polynomium vil kunne skrives: $\Delta(s) = -(s-b_{11})(s-b_{22})(s-b_{33})$; vi behøver hertil blot at benytte det tidligere Resultat, at Determinanten $\Delta(s)$ (opfattet som Polynomium i s) er en Orthogonalinvariant, d. v. s. bliver identisk uforandret, naar vi for Koefficienterne a_{rs} til den givne Form (13) indsætter Koefficienterne b_{rs} til en kvadratisk Form, der er fremgaaet af (13) ved en vilkaarlig orthogonal Substitution; indsætter vi nemlig i $\Delta(s)$ for Koefficienterne a_{rs} Koefficienterne b_{rs} i den reducerede Form (15), er det derved fremkomne, med $\Delta(s)$ identiske, Polynomium jo intet andet end Polynomiet

$$\begin{vmatrix} b_{11}-s & 0 & 0 \\ 0 & b_{22}-s & 0 \\ 0 & 0 & b_{33}-s \end{vmatrix} = -(s-b_{11})(s-b_{22})(s-b_{33}).$$

Ej det sidste Resultat fremgaar aabenbart, at hvis der overhovedet, som første Del af den opstillede Sætning udsiger, eksisterer en orthogonal Substitution (14), der fører den givne Form (13) over til en reduceret Form (15), maa Polynomiet $\Delta(s)$ nødvendigvis have tre reelle (ens eller forskellige) Rødder, nemlig de tre Kvadratkoefficienter til den reducerede Form. Lad os imidlertid straks bemærke, at vi umiddelbart uden nogensomhelst nærmere Undersøgelse af Polynomiet $\Delta(s)$ kan slutte, at dette Tredjegradspolynomium har <u>mindst een reel Rod</u> s_1, et Resultat, der nedenfor vil være af væsentlig Betydning for os; det gælder nemlig den almindelige Sætning (som vi først i et senere Afsnit skal bevise, men som vi allerede her vil gøre Brug af), <u>at ethvert Polynomium af ulige Grad har mindst een (reel) Rod</u>. (At Polynomiet $\Delta(s)$ i Virkeligheden har ikke blot een, men tre reelle Rødder, kunde man herefter direkte eftervise ved Regning; vi behøver imidlertid ikke at føre et saadant direkte Bevis, i det, som vi nedenfor skal se, Beviset for at der eksisterer en orthogonal Substitution (14), der reducerer Formen (13), kan gennemføres uden at gøre Brug af andet vedrørende Polynomiet $\Delta(s)$ end det ovenfor angivne Resultat, der udsiger, at dette Polynomium har mindst een reel Rod s_1; og har vi først bevist Eksistensen af en saadan orthogonal Substitution, følger jo heraf, som vi ovenfor har paavist, Rigtigheden af at $\Delta(s)$ har tre reelle Rødder umiddelbart af sig selv).

De foranstaaende forberedende Bemærkninger har, idet vi resumerer dem, givet til Resultat, at vi for det første for at bevise Rigtigheden af begge de i den opstillede Sætning udtalte Paastande, kan nøjes med at bevise Rigtigheden af den første Paastand, d. v. s. bevise Eksistensen af en orthogonal Substitution, der bortskaffer de tre Produktled, og endvidere, at det

for at bevise Eksistensen af en saadan orthogonal Substitution, er tilstrækkeligt at bevise Eksistensen af en orthogonal Substitution, der anvendt overfor den givne kvadratiske Form fører denne over til en ny kvadratisk Form (15), hvori $b_{31} = b_{12} = 0$. For at føre dette sidste Eksistensbevis, vil det, ogsaa af Hensyn til den senere mere indgaaende Diskussion, være hensigtsmæssigt at begynde med at stille den yderligere Fordring til den søgte orthogonale Substitution (14), at Koefficienterne i den nye kvadratiske Form (15), hvortil Substitutionen skal overføre den givne Form (13), ikke alene skal opfylde Betingelserne $b_{31} = b_{12} = 0$, men ogsaa Betingelsen $b_{11} = s_1$, hvor s_1 er den ovenfor paaviste reelle Rod i Polynomiet $\Delta(s)$.

I dette Øjemed betragter vi den Ligning, der bestemmer det symmetriske Koefficientskema til den kvadratiske Form (15), der fremgaar af (13) gennem Anvendelse af den orthogonale Substitution (14), nemlig Ligningen

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} .$$

Betegner vi Elementerne i første Række af den Produktdeterminant, der fremkommer ved Multiplikation af de to i Parentesen staaende Determinanter, ved $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, bestemmes Tallene b_{11}, b_{12}, b_{13} ved Ligningerne

$$\begin{aligned} b_{11} &= \beta_1 \alpha_{11} + \beta_2 \alpha_{21} + \beta_3 \alpha_{31} \\ b_{12} &= \beta_1 \alpha_{12} + \beta_2 \alpha_{22} + \beta_3 \alpha_{32} \\ b_{13} &= \beta_1 \alpha_{13} + \beta_2 \alpha_{23} + \beta_3 \alpha_{33} \end{aligned} .$$

Skal der nu gælde Ligningerne $b_{11} = s_1$, $b_{12} = 0$, $b_{13} = 0$, d. v. s. Ligningerne

$$(18)\qquad \begin{aligned} \beta_1\alpha_{11}+\beta_2\alpha_{21}+\beta_3\alpha_{31} &= s_1 \\ \beta_1\alpha_{12}+\beta_2\alpha_{22}+\beta_3\alpha_{32} &= 0 \\ \beta_1\alpha_{13}+\beta_2\alpha_{23}+\beta_3\alpha_{33} &= 0 \end{aligned} \quad ,$$

er, som vi skal vise, en nødvendig og tilstrækkelig Betingelse herfor, at

$$(19)\qquad \beta_1 = s_1\cdot\alpha_{11}\ ,\quad \beta_2 = s_1\cdot\alpha_{21}\ ,\quad \beta_3 = s_1\cdot\alpha_{31}\ .$$

Rigtigheden af denne Paastand om, at Ligningerne (18) og (19) — idet $\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\ \alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{pmatrix}$ er forudsat at være Koefficientskemaet for en orthogonal Substitution — er fuldkommen ensgyldige (d. v. s. at enten begge disse Ligningssæt er opfyldt, eller intet af dem) eller underledes udtrykt, at Ligningerne (18), naar vi i dem opfatter $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ som Ubekendte, har Løsningen $(s_1\alpha_{11}, s_1\alpha_{21}, s_1\alpha_{31})$ og kun denne Løsning, indses umiddelbart saaledes: For det første er (19) en Løsning til Ligningerne (18), saaledes som man umiddelbart ser ved Indsættelse (idet man gør Brug af de Betingelsesligninger mellem α^{rm}, der gælder fordi den betragtede Substitution er forudsat orthogonal), og for det andet er (19) sikkert den eneste Løsning til Ligningerne (18), naar vi i dem opfatter $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ som Ubekendte; thi Ligningernes Determinant er jo da Substitutionsdeterminanten $\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{21}&\alpha_{31}\\ \alpha_{12}&\alpha_{22}&\alpha_{32}\\ \alpha_{13}&\alpha_{23}&\alpha_{33}\end{vmatrix}$, der er lig med $+1$ eller -1, altsaa forskellig fra Nul. — Nu er imidlertid efter Multiplikationsreglen for Determinanter

$\beta_1 = \alpha_{11}a_{11} + \alpha_{21}a_{12} + \alpha_{31}a_{13}$, $\beta_2 = \alpha_{11}a_{21} + \alpha_{21}a_{22} + \alpha_{31}a_{23}$, $\beta_3 = \alpha_{11}a_{31} + \alpha_{21}a_{32} + \alpha_{31}a_{33}$.

De fundne Betingelser (19) er følgelig ensbetydende med, at der skal gælde de tre Ligninger

$$(20)\qquad \begin{aligned} \alpha_{11}(a_{11}-s_1) + \alpha_{21}a_{12} + \alpha_{31}a_{13} &= 0 \\ \alpha_{11}a_{21} + \alpha_{21}(a_{22}-s_1) + \alpha_{31}a_{23} &= 0 \\ \alpha_{11}a_{31} + \alpha_{21}a_{32} + \alpha_{31}(a_{33}-s_1) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Vi har saaledes fundet, at <u>den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse, som den orthogonale Substitution (14) maa opfylde, for at den skal føre den givne kvadratiske Form (13) over til en kvadratisk Form, hvis Koefficienter $b_{r,s}$ tilfredsstiller Betingelserne $b_{11} = s_1$, $b_{12} = b_{13} = 0$, er den, at Koefficienterne til x_1 i Substitutionen (14), d. v. s. de i første Søjle af Koefficientskemaet til den orthogonale Substitution staaende Tal $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}$ skal tilfredsstille de tre Ligninger (20)</u>. Idet de tre Ligninger (20), naar vi opfatter dem som Ligninger til Bestemmelse af de tre Ubekendte $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}$, er et System af Ligninger, hvis Determinant er lig med Nul, da jo s_1 er Rod i Polynomiet $\Delta(s)$, har disse Ligninger en egentlig Løsning og følgelig ogsaa en Løsning $(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31})$, hvis Kvadratsum $\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2$ er lig med 1; thi er $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ en vilkaarlig egentlig Løsning vil $\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}, \frac{\alpha_2}{\alpha}, \frac{\alpha_3}{\alpha}\right)$, hvor $\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$ være en Løsning med den forlangte Egenskab. Idet vi imidlertid, naar $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}$ betegner tre Tal, hvis Kvadratsum er 1, altid (endog paa uendelig mange Maader, smlg. Opg 21) kan finde to andre Talsæt $(\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32})$ og $(\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33})$, saaledes at $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$ er Koefficientskemaet til en orthogonal Substitution, er herigennem

vist det Hovedresultat, at der virkelig eksisterer en orthogonal Substitution, der gør $b_{11} = s_1$, $b_{12} = b_{13} = 0$ og altsaa specielt, at der eksisterer en orthogonal Substitution, der bortskaffer to af Produktleddene. Hermed er den opstillede Sætning fuldstændig bevist.

39. Diskussion af den orthogonale Substitution, der reducerer en kvadratisk Form med tre Variable. I 38 har vi bevist Eksistensen af en orthogonal Substitution (14), der fører den givne kvadratiske Form (13) over til en ny kvadratiske Form (15), hvori Produktleddene mangler, d. v. s. hvori $b_{23} = b_{31} = b_{12} = 0$, og vi har tillige vist, at Determinanten $\Delta(s)$ har tre reelle Rødder s_1, s_2, s_3, samt at disse tre Rødder netop giver os Kvadratkoefficienterne b_{11}, b_{22}, b_{33} (i en eller anden Orden) til den reducerede kvadratiske Form (15). Vi vil nu gaa over til en fuldstændig Undersøgelse af, hvor stor Frihed vi har i Valget af den omhandlede orthogonale Substitution (14), en Undersøgelse, der tillige vil oplyse os om, hvorledes man bekvemmest bestemmer en Substitution med den omhandlede Egenskab.

Lad os straks til Orientering bemærke, at hvis (14) er en orthogonal Substitution, der reducerer den givne kvadratiske Form (13), vil der sikkert eksistere mindst 48 (indbyrdes forskellige) saadanne orthogonale Substitutioner, nemlig de 48 (deri iberegnet (14)), der fremkommer af (14) ved i denne dels paa alle mulige Maader at permutere de Variable x_1, y_1, z_1 og dels i hver af de derved fremkomne 6 Substitutioner at foretage Fortegnsskifte for een eller flere af de Variable, hvorved Antallet af Substitutioner aabenbart bliver multipliceret med $2^3 = 8$; de til disse 48 orthogonale Substitutioner svarende 48 Determinanter kan parres sammen to og to, saaledes at to De-

terminanter i samme Par har modsat Fortegn. Deraf følger at de 24 Substitutioner er egentlige, de andre 24 uegentlige. For en Undersøgelse som den foreliggende er et saadant Sæt af 48 sammenhørende Substitutioner i det væsentlige at opfatte som kun een Substitution.

Vi ved, at enhver orthogonal Substitution, der bortskaffer Produktleddene, fører over til en kvadratisk Form, hvorv Kvadratkoefficienterne er lig med Rødderne s_1, s_2, s_3 i $\Delta(s)$; vi kan imidlertid, uden at indskrænke Undersøgelsens Almindelighed, nøjes med at beskæftige os med de orthogonale Substitutioner, der fører over til den kvadratiske Form $s_1x_1^2 + s_2y_1^2 + s_3z_1^2$, hvor vi altsaa har forlangt, at det netop er s_1, der skal være Koefficient til x_1^2 og netop s_2, der skal være Koefficient til y_1^2; thi i en Gruppe paa 48 sammenhørende Substitutioner, der reducerer (13), vil der altid findes nogle (nemlig 8, hvis da ikke to eller tre af Tallene s_1, s_2, s_3 er ligestore, i hvilke Tilfælde der vil være 16 eller alle 48), der netop giver os Koefficienterne s_1, s_2, s_3 i den angivne Rækkefølge.

Det Baand, der er paalagt en orthogonal Substitution derigennem, at den skal føre over fra den givne kvadratiske Form (13) til Formen $s_1x_1^2 + s_2y_1^2 + s_3z_1^2$, kan vi ogsaa udtrykke saaledes: den gennem Substitutionen fremkomne Form (15) skal opfylde de 3 Betingelser

$$\begin{array}{lll} 1) & b_{11} = s_1, & b_{12} = 0, \quad b_{13} = 0 \\ 2) & b_{21} = 0, & b_{22} = s_2, \quad b_{23} = 0 \\ 3) & b_{31} = 0, & b_{32} = 0, \quad b_{33} = s_3. \end{array}$$

(Disse tre Betingelser er iøvrigt ikke uafhængige af hinanden, da jo $b_{rs} = b_{sr}$). Som vi i 38 har set, er det Baand, der er paa-

lagt den orthogonale Substitution (14) gennem den første af disse 3 Betingelser, fuldkommen ensbetydende med, at Koefficienterne $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}$ til x_1 skal opfylde de tre Ligninger

$$(20)\qquad \begin{aligned} &\alpha_{11}(a_{11}-s_1)+\alpha_{21}a_{12}+\alpha_{31}a_{13}=0\\ &\alpha_{11}a_{21}+\alpha_{21}(a_{22}-s_1)+\alpha_{31}a_{23}=0\\ &\alpha_{11}a_{31}+\alpha_{21}a_{32}+\alpha_{31}(a_{33}-s_1)=0\,. \end{aligned}$$

Paa tilsvarende Maade (eller ved simpelthen at foretage en Ombytning af Bogstaverne x_1 og y_1) indses at det Baand, der er paalagt den orthogonale Substitution (14) gennem den anden af de tre Betingelser, er ensbetydende med at Koefficienterne $\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}$ til y_1 skal opfylde de tre Ligninger

$$(21)\qquad \begin{aligned} &\alpha_{12}(a_{11}-s_2)+\alpha_{22}a_{12}+\alpha_{32}a_{13}=0\\ &\alpha_{12}a_{21}+\alpha_{22}(a_{22}-s_2)+\alpha_{32}a_{23}=0\\ &\alpha_{12}a_{31}+\alpha_{22}a_{32}+\alpha_{32}(a_{33}-s_2)=0\,, \end{aligned}$$

og endelig indses, at den tredje af de nævnte Betingelser er ensbetydende med, at der skal gælde Ligningerne

$$(22)\qquad \begin{aligned} &\alpha_{13}(a_{11}-s_3)+\alpha_{23}a_{12}+\alpha_{33}a_{13}=0\\ &\alpha_{13}a_{21}+\alpha_{23}(a_{22}-s_3)+\alpha_{33}a_{23}=0\\ &\alpha_{13}a_{31}+\alpha_{23}a_{32}+\alpha_{33}(a_{33}-s_3)=0\,. \end{aligned}$$

Vor Opgave: at bestemme samtlige orthogonale Substitutioner (14), der føre den givne kvadratiske Form (13) over til Formen $s_1x_1^2+s_2y_1^2+s_3z_1^2$, er saaledes ensbetydende med den Opgave at bestemme samtlige orthogonale Substitutioner (14), hvis Koefficienter tilfredsstille de tre Sæt Ligninger (20), (21), (22), eller,

hvad der er det samme, at bestemme alle Løsninger $(\alpha_{11} \ldots \alpha_{33})$ til Systemet af Ligninger (20), (21), (22) og

$$\alpha_{1r}\alpha_{1s} + \alpha_{2r}\alpha_{2s} + \alpha_{3r}\alpha_{3s} = \begin{cases} 1 \text{ for } r = s & (23^a) \\ 0 \text{ for } r \neq s & (23^b) \end{cases},$$

hvor r og s er to hvilkesomhelst af Tallene 1, 2, 3. Ved den følgende Undersøgelse maa vi skelne mellem tre forskellige Tilfælde, nemlig dels det Tilfælde, hvor de tre Rødder i $\Delta(s)$, s_1, s_2, s_3 alle er forskellige, dels det, hvor de to er ligestore, den tredje forskellig fra dem, og endelig det Tilfælde, hvor alle tre Rødder er ligestore.

I: Lad os først betragte det Hovedtilfælde, <u>hvor alle tre Rødder s_1, s_2, s_3 er forskellige</u>, hvor altsaa enhver af dem er <u>enkelt Rod</u> i Ligningen $\Delta(s) = 0$. Betragter vi Ligningerne (20), vil dette System af lineære homogene Ligninger til Bestemmelse af de Ubekendte $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}$ have Ligningernes Determinant lig med

$$\Delta(s_1) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}-s_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-s_1 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}-s_1 \end{vmatrix};$$

i det s_1 er <u>enkelt</u> Rod i $\Delta(s)$, er denne Determinant lig Nul og har <u>Rangen 2</u> (se 15). Den fuldstændige Løsning til Systemet (20) vil derfor have Formen $t(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, hvor $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ er en egentlig Løsning og Parameteren t en uindskrænket Variabel; der eksisterer derfor <u>to og kun to Løsninger $(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31})$, der tilfredsstiller Betingelsesligningen</u> $\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 = 1$, nemlig de to Løsninger, der fremgaar af $t(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ved at tillægge Parameteren t enten Værdien $\frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}}$ eller Værdien $-\frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}}$; den ene af disse to Løsninger fremgaar altsaa af den anden ved Multiplikation med -1. Paa fuldkommen tilsvarende Maade finder vi ved Opløsning af henholdsvis Ligningerne (21) og (22) (i det jo ogsaa her Ligningernes De-

terminant er Nul og har Rangen to, da jo ogsaa s_2 og s_3 er Enkeltrødder i $\Delta(s)$) to og kun to, paa Faktoren -1 nær overensstemmende, Løsninger $(\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32})$ med Kvadratsummen 1 og to og kun to, paa Faktoren -1 nær overensstemmende Løsninger $(\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33})$ med Kvadratsummen 1. Vi har saaledes som foreløbige Muligheder fundet 8 Koefficientsæt $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$, hvoraf dog et vilkaarligt fremgaar af et vilkaarlig andet ved at multiplicere een eller flere Søjler med -1; vi siger „foreløbige Muligheder", fordi vi jo endnu ikke har taget Hensyn til de tre Ligninger (23^b). Imidlertid er det klart, at hvis blot een af disse 8 Substitutioner virkelig er orthogonal, er de det alle 8; da vi nu tidligere har vist, at der virkelig eksisterer orthogonale Substitutioner, der bortskaffer Produktleddene af den forelagte kvadratiske Form, d. v. s. løser den stillede Opgave, maa de fundne 8 Substitutioner følgelig nødvendigvis være orthogonale, d. v. s de maa af sig selv tilfredsstille de resterende 3 Ligninger (23^b). At dette er Tilfældet, indser man imidlertid ogsaa direkte; i det der gælder den almindelige Sætning: <u>Er s_1 og s_2 to vilkaarlige indbyrdes forskellige Tal og er $(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31})$ og $(\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32})$ to vilkaarlige Løsninger til henholdsvis (20) og (21), vil der gælde Ligningen</u>

$$\alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32} = 0 \ ;$$

thi multiplicerer man Ligningerne (20) med henholdsvis $\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}$ og Ligningerne (21) med henholdsvis $-\alpha_{11}, -\alpha_{21}, -\alpha_{31}$, og adderer man dem derefter alle seks, finder man Resultatet $(s_2 - s_1)(\alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32}) = 0$, hvoraf, idet $s_1 \neq s_2$, følger $\alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32} = 0$. Paa samme Maade

udledes de to analoge Ligninger i (23^b). Idet vi resumerer, har vi i dette Tilfælde fundet ialt 8 orthogonale Substitutioner, der fører (13) over til $s_1 x_1^2 + s_2 y_1^2 + s_3 z_1^2$; disse 8 Substitutioner er dog at betragte som <u>væsentlig kun een</u>, idet en vilkaarlig af dem fremgaar af en vilkaarlig anden ved blot at skifte Fortegn for een eller flere af de Variable x_1, y_1, z_1.

II: Vi vender os derefter til det Tilfælde, <u>hvor Polynomiet $\Delta(s)$ har een Enkelt- og een Dobbeltrod</u>, hvor f. Eks. s_1 er en Enkeltrod, medens $s_2 = s_3$ er en Dobbeltrod. Idet s_1 er en Enkeltrod finder vi af Ligningerne (20), ganske som før, to og kun to paa en Faktor -1 nær overensstemmende Løsninger $(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31})$. Idet imidlertid nu $s_2 = s_3$, bliver Koefficienterne i (21) og (22) de samme, saaledes at vi faar det <u>samme Sæt Ligninger</u> til Bestemmelse af $\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}$ og af $\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}$. Da vi jo ved, at der findes orthogonale Substitutioner, der løser den stillede Opgave, maa dette sidstnævnte System af Ligninger (altsaa (21) eller det dermed overensstemmende (22)) derfor nødvendigvis besidde to Løsninger $(\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32})$ og $(\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33})$ med Kvadratsum 1 og Produktsum Nul, altsaa specielt to egentlige Løsninger, der ikke er proportionale. At dette er Tilfældet, indser man imidlertid ogsaa direkte; thi idet s_2 er <u>Dobbeltrod</u> i $\Delta(s)$, har Ligningernes Determinant $\Delta(s)$ Rangen 1 (se 15), og vi kan (se Opg. 22) endog paa uendelig mange Maader finde to Sæt Løsninger $(\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32})$ og $(\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33})$ med Kvadratsum 1 og Produktsum 0. Idet $s_1 \neq s_2$ vil (som vist i Slutningen af I) enhver af disse Løsninger taget sammen med Løsningen $(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31})$ have Produktsummen 0, saaledes at det fundne Koefficientskema

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

virkelig bestemmer en orthogonal Substitution, der opfylder alle de stillede Betingelser. Der er altsaa i dette Tilfæl-

de, i Modsætning til det forrige, uendelig mange orthogonale Substitutioner, der løser Reduktionsopgaven.

III: Lad os sluttelig betragte det Tilfælde, hvor $s_1 = s_2 = s_3$, hvor altsaa s_1 er en tredobbelt Rod i $\Delta(s)$. I det i dette Tilfælde (se 15) samtlige 9 Elementer i Determinanten $\Delta(s)$ bliver 0 for $s = s_1$, er her samtlige Koefficienter i Ligningerne (20), (21) og (22) lig med Nul, saaledes at der slet ikke paalægges en orthogonal Substitution nogetsomhelst Baand derved, at dens Koefficienter skal tilfredsstille disse Ligninger. Opgaven løses altsaa her af enhver orthogonal Substitution (f. Eks. af den identiske). Dette er ogsaa umiddelbart indlysende; thi idet alle 9 Elementer i Determinanten $\Delta(s)$ bliver Nul, naar man for s indsætter s_1, er her $a_{11} = a_{22} = a_{33} = s_1$, $a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0$, saaledes at den givne kvadratiske Form ikke er andet end $F(x, y, z) = s_1(x^2 + y^2 + z^2)$.

Opg. 23. Find den omvendte Substitution til den givne Substitution

$$x_1 = 1 + 3y_1 + 7y_2 + 11y_3$$
$$x_2 = 2 + y_1 + 2y_2 + 3y_3$$
$$x_3 = -1 + 2y_1 + 5y_2 + 7y_3 ,$$

samt sammensat den givne Substitution med Substitutionen

$$y_1 = -2 - z_1 + 2z_2 + 3z_3$$
$$y_2 = 1 + z_1 + 3z_2 - 2z_3$$
$$y_3 = 2 + 4z_1 + z_2 + z_3 .$$

Opg. 24. Bevis at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for at Koefficientskemaet $\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \cdots \beta_{1m} \\ \vdots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} \cdots \beta_{mm} \end{pmatrix}$ bestemmer den omvendte Substitution til en given lineær homogen Substitution med Koefficientskemaet $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdots \alpha_{1m} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} \cdots \alpha_{mm} \end{pmatrix}$ udtrykkes ved Ligningen

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \cdots \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \cdots \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} \cdots \beta_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \cdots \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \cdots \alpha_{m2} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} \cdots \alpha_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots 1 \end{vmatrix} .$$

Opg. 25. Benyt Opg. 24. til at vise, at Koefficientskemaet til den omvendte Substitution til en given orthogonal Substitution fremkommer af Koefficientskemaet til den givne Substitution ved i dette at ombytte Rækker og Søjler.

Opg. 26. Indføres vi i et egentligt Polynomium $P(x_1, x_2 \ldots x_m)$ af m^{te} Grad for de Variable $x_1, x_2 \ldots x_m$ lineære Udtryk i de nye Variable $y_1, y_2 \ldots y_m$, vil jo, dersom den til Koefficientskemaet i disse Udtryk hørende Determinant er $\neq 0$ (d. v. s. hvis der er Tale om en eentydig Afhængighed mellem de to Sæt Variable) Polynomiet $P(x_1, x_2 \ldots x_m)$ derved gaa over til et egentligt Polynomium af m^{te} Grad $Q(y_1, y_2 \ldots y_m)$. Vis at denne Sætning ikke har almen Gyldighed, naar Fordringen om at den nævnte Determinant skal være $\neq 0$ udelades.

Opg. 27. Vis at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for at et homogent Polynomium af 2^{den} Grad i Koefficienterne a, b, c til den almindelige kvadratiske Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ er en Orthogonalinvariant, bestaar i at dette Polynomium kan skrives paa Formen $k_1(a+c)^2 + k_2(ac - b^2)$, hvor k_1 og k_2 er Konstanter.

Opg. 28. Bevis at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at et lineært homogent Polynomium i Koefficienterne a_{rs} til en alminde-lig kvadratisk Form med n Variable $\Sigma a_{rs} x_r x_s$ er en Orthogonal-invariant, er den at Polynomiet har Formen $k(a_{11} + a_{22} + \ldots a_{nn})$, hvor k er en Konstant.

Opg 29. Reducer, d. v. s. bortskaf ved en orthogonal Substitution Produkt-leddet af de kvadratiske Former

$$x^2 - 2xy + y^2, \quad x^2 - 4xy + y^2 \text{ og } xy.$$

Opg. 30. Reducer de kvadratiske Former

$$3x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + y^2, \quad x^2 + 9y^2 - 6xy \text{ og } 2x^2 + y^2 - 4xy.$$

Opg. 31. Reducer den kvadratiske Form $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz$.

Opg. 32. Reducer den kvadratiske Form $2xy + 2xz + 2yz$.

Opg. 33. Reducer de kvadratiske Former (hvori kun et Produktled findes):

$$z^2 - xy \text{ og } x^2 + y^2 - z^2 + 2xy.$$

Kapitel II

Grundtræk af den analytiske Geometri.

Lineære Problemer i analytisk-geometrisk Fremstilling.

40. Indledende Bemærkninger. En Behandling af et geometrisk Problem, hvad enten det drejer sig om et Problem indenfor den rette Linies, Planens eller Rummets Geometri, betegnes som analytisk-geometriske, hvis Undersøgelsen føres saaledes, at man karakteriserer først og fremmest Punkter, men dernest ogsaa rette Linier, Planer, Flader o. s. v ved Tal og Forbindelserne imellem dem ved Ligninger, hvorved da det oprindelige geometriske Problem føres over til et Problem, der kan behandles ved Regning. Den Maade, hvorpaa man herved karakteriserer de geometriske Elementer (Punkter, rette Linier o. s. v.) ved Tal, bestaar i, at man, som man siger, henfører dem til et eller andet Koordinatsystem, d. v. s. paa en i det enkelte Tilfælde nærmere angivet Maade bestemmer deres Beliggen-

hed i Forhold til en eller anden given Grundfigur.

Den analytiske Geometri fremtræder saaledes, naar vi tager vort Udgangspunkt indenfor Geometrien, som et Hjælpemiddel til Brug ved geometriske Undersøgelser, et Hjælpemiddel, der gør de geometriske Problemer tilgængelig for en analytisk Behandling. Det er imidlertid nyttigt at have Øjet saabent for, at den analytiske Geometri ogsaa kan betragtes fra et andet, man kunde sige det omvendte Synspunkt – og det er egentlig dette sidste, der i en Lærebog i matematisk Analyse naturligst vil komme til at træde mest i Forgrunden – nemlig idet man tager Udgangspunktet indenfor Analysen og benytter den ved den analytiske Geometri tilvejebragte Forbindelse mellem de geometriske Elementer og Tallene til geometrisk at illustrere de analytiske Regninger. Som det allerede vil fremgaa af det foreliggende Kapitel, men som vi navnlig naar vi kommer til Funktionslæren skal se talrige Eksempler paa, vil de analytiske Undersøgelser gennem en saadan geometrisk Fortolkning ofte kunne belyses paa særlig klar Maade; ja man kan i Virkeligheden sige, at det ved saa at sige alle Undersøgelser over Funktioner af henholdsvis een, to eller tre Variable er hensigtsmæssigt at tænke sig de Variable geometrisk fortolkede, nemlig som Koordinater til Punkter henholdsvis paa en ret Linie, i Planen eller i Rummet.

I den følgende Fremstilling af Grundtrækkene af den analytiske Plangeometri saavelsom af den analytiske Rumgeometri vil vi til Koordinatsystem gennemgaaende benytte et saakaldt <u>retvinklet Koordinatsystem</u>, hvor man, hvis Talen er om Planens Geometri, bestemmer et Punkt ved dets Afstande fra to faste paa hinanden vinkelrette Linier, medens man inden for Rummets

Geometri bestemmer et Punkt ved dets Afstande fra tre faste paa hinanden vinkelrette Planer; i Tilknytning til det her nævnte (inhomogene) retvinklede Koordinatsystem vil vi tillige (til Brug for saadanne Undersøgelser, ved hvilke vi ogsaa inddrager Planens eller Rummets „uendelig fjerne" Elementer i Betragtningen) studere det Koordinatsystem, der karakteriseres ved Benyttelsen af saakaldte homogene Koordinater. Endvidere vil vi ogsaa lejlighedsvis benytte et saakaldt Parallelkoordinatsystem, der slutter sig nær op til det retvinklede Koordinatsystem, som det omfatter som et specielt Tilfælde; og endelig skal vi ogsaa undersøge den analytiske Fremstilling af Planens og Rummets Punkter, naar de henføres til et saakaldt polært Koordinatsystem.

Vi har inddelt vor Fremstilling af Grundtrækkene af den analytiske Plan- og Rumgeometri i tre Dele, af hvilke den første Del væsentlig behandler Fremstillingen af ret Linie og Plan, der, som vi skal se, analytisk kan karakteriseres som geometriske Steder for Punkter, hvis Koordinater (henført til et retvinklet Koordinatsystem) tilfredsstiller Ligninger af første Grad, hvor Koefficienterne er Tal, der karakteriserer henholdsvis den rette Linie og Planen. Inden vi imidlertid begynder vor Gennemgang af den analytiske Plangeometri og Rumgeometri, vil vi som en naturlig Indledning forudskikke nogle Betragtninger vedrørende den rette Linies analytiske Geometri; Formaalet med disse Betragtninger, der væsentlig bliver knyttet til Behandlingen af et Eksempel og ikke faar nogen egentlig systematisk Karakter, er i første Linie den at give os Lejlighed til allerede her, hvor Forholdene er særlig enkle, at kunne fremdrage de Synspunkter, der leder til Indførelse af Geometriens „uendelig fjerne"

Elementer og til deres analytiske Fremstilling ved Hjælp af „homogene" Koordinater.

II. Den rette Linies analytiske Geometri.

41. Koordinatsystem. Den simpleste Maade, paa hvilken man ved Tal kan bestemme Punkterne paa en given ret Linie, bestaar i at vælge et af Linjens Punkter O til Nulpunkt og et andet af Linjens Punkter E til Enhedspunkt og derefter karakterisere det variable Punkt P paa Linien ved det dermed benævnte Tal (Punktets Koordinat eller Abscisse) $x = \frac{OP}{OE}$, hvor x skal regnes positiv eller negativ, eftersom P ligger paa samme Side af O som E eller paa modsat Side; med andre Ord, man karakteriserer Punktet P ved dets Afstand fra O, maalt med OE som Enhed, idet man tillige har fastlagt en positiv Retning paa Linien og fastlagt den saadan, at den gaar fra O over E. Ved Hjælp af et saadant Koordinatsystem bringer man en entydig Afbildning til Veje mellem Linjens Punkter og de reelle Tal, d. v. s. til ethvert Punkt paa Linien svarer der et og kun et Tal som Punktets Abscisse, og omvendt svarer der til et givet Tal et og kun et Punkt, der netop har dette Tal til Abscisse. Denne Afbildning af de reelle Tal i Punkterne af en ret Linie er fundamental for Forestillingen om en reel Variabel.

Lad os som et simpelt (og for den senere Indførelse af Linjens „uendelig fjerne" Punkt særlig instruktivt) Eksempel paa, hvorledes Undersøgelsen af et geometrisk Problem gennem Anvendelse af et Koordinatsystem som det nævnte føres over til en Undersøgelse, der kan udføres ved Regning, betragte den Opgave, hvor der er givet to faste (indbyrdes forskellige) Punkter A og B paa Linien, og hvor det gælder om at studere

Afhængigheden mellem to bevægelige Punkter P og P_1, om hvilke det forlanges, at Punktparret P, P_1 hele Tiden skal være harmonisk forbundet med det faste Punktpar A, B. Vælger vi Koordinatsystemet saaledes, at de faste Punkter A og B har henholdsvis Abscisserne $+1$ og -1, samt betegner vi Abscisserne for P og P_1 med henholdsvis x og x_1, udtrykkes den Betingelse, der er paalagt det variable Punktpar P, P_1, d. v. s. Betingelsen $\frac{AP}{BP} = -\frac{AP_1}{BP_1}$, eller korrektere (for ikke at afskære det Tilfælde, hvor et af Punkterne P og P_1 falder i Punktet B) Betingelsen $AP \cdot BP_1 = -BP \cdot AP_1$ ved Ligningen $(x-1)(x_1+1) = -(x+1)(x_1-1)$; vi finder saaledes Abscisserne x og x_1 underkastet Betingelsesligningen

$$(1) \qquad x x_1 = 1 .$$

Er Punktet P_1, d. v. s. er Abscissen x_1 givet, viser Ligning (1) os umiddelbart det (fra den elementære Geometri velkendte) Resultat, at der eksisterer et og kun et Punkt P, der sammen med P_1 deler AB harmonisk (nemlig det Punkt P, hvis Abscisse er bestemt ved $x = \frac{1}{x_1}$) undtagen i det ene Tilfælde, hvor $x_1 = 0$, d. v. s. hvor P_1 er Midtpunktet af AB; i dette sidste Tilfælde findes der intet Punkt P, der sammen med P_1 deler AB harmonisk, idet jo Ligningen $x x_1 = 1$, naar $x_1 = 0$, ikke har nogen Løsning, d. v. s. ikke tilfredsstilles af noget Tal x.

42. <u>Uendelig fjernt Punkt.</u> Ved visse Undersøgelser indenfor den rette Linies Geometri (f. Eks. netop ved en Undersøgelse som den foregaaende) er det bekvemt ved <u>Definition</u> at fastsætte, at der skal tillægges den rette Linie foruden dens „sædvanlige" Punkter endnu et Punkt (et „egentligt" Punkt) som man kalder Liniens <u>uendelig fjerne Punkt</u>.

Ved den ovenfor betragtede Opgave vedrørende harmo-

nisk forbundne Punkter vil vi da ved Definition fastsætte, at det uendelig fjerne Punkt og Midtpunktet O af AB skal siges at være harmonisk forbundne med Hensyn til Punktparret A, B. (At man kalder det „uegentlige" Punkt, man ved Definition lader svare til Midtpunktet O, for Liniens uendelig fjerne Punkt, hænger naturligvis sammen med, at Punktet P, naar P_1 nærmer sig til at falde sammen med O, fjerner sig bort i det uendelige, idet jo $\frac{1}{x_1}$ i numerisk Værdi vokser ud over alle Grænser, naar x_1 nærmer sig til Nul. Idet det endvidere er Punktet P_1's Tilnærmelse til et og samme Punkt O (blot fra forskellig Side), der bringer det tilsvarende Punkt P til at fjerne sig bort i det uendelige til den positive Side og til at fjerne sig bort i det uendelige til den negative Side, forstaar man, hvorfor det er hensigtsmæssigt i en Sammenhæng som den foreliggende kun at tillægge den rette Linie et uendelig fjernt Punkt og ikke f. Eks. to „forskellige" uendelig fjerne Punkter, et til den positive Side og et til den negative Side). Ved at indføre „Liniens uendelig fjerne Punkt" og vedtage, at dette Punkt skal siges at være harmonisk forbundet med O med Hensyn til A, B, opnaar man den for videregaaende Undersøgelser væsentlige Fordel, at den Afhængighed, der er til Stede mellem de variable Punkter P og P_1, derved at de skal være harmonisk forbundne med Hensyn til det givne Punktpar A, B, nu bliver en saadan, at der, naar et af Punkterne, f. Eks P_1, gennemløber alle Liniens Punkter (de sædvanlige saavelsom det uendelig fjerne), til enhver „Beliggenhed" af P_1 svarer een og kun een Beliggenhed af det andet Punkt P; med andre Ord, man opnaar at kunne undgaa den Spaltning i Undersøgelsen (og den dermed følgende vidtløftige Udtryksmaade), der opstaar, saalænge man kun opererer med de sædvanlige Punkter, derved at man tvinges til hele Tiden at maatte skelne mellem det (almindelige) Tilfælde,

hvor P_1 ikke er Midtpunktet af AB og hvor der findes et med P_1 harmonisk forbundet Punkt P, og det (særlige) Tilfælde, hvor P_1 netop falder i Midtpunktet af AB, og hvor der intet tilsvarende Punkt P findes.

Vi møder her et Forhold, som vi i det følgende flere Gange vil træffe paa (f. Eks. ved Indførelsen af de komplekse Tal og lignende), og som er karakteristisk for den Maade, hvorpaa Matematikken opbygges, nemlig at man, efterhaanden som man kommer til nye Undersøgelser og støder paa nye Problemer, føres til at udvide Omraadet for de Begreber, hvormed man oprindelig opererede, (i det foreliggende Tilfælde, til at udvide Begrebet „Punkt paa en ret Linie" til foruden de sædvanlige Punkter ogsaa at omfatte Liniens uendelig fjerne Punkt). Lad os da straks slaa fast, at ved enhver saadan Udvidelse er den ledende Tanke, om man vil Formaalet, altid en og samme: man er stødt paa en Problemkreds, ved hvis Behandling der viser sig ikke at gælde simple, almengyldige (d. v. s. uden nogen Undtagelse gældende) Sætninger, saalænge man benytter de hidtidige Definitioner; man søger da naturligt, om det ikke skulde være muligt ved en Udvidelse af de Begreber, hvormed der opereres, at naa frem til et saadant mere omfattende Begrebsomraade, at naar man lægger dette Omraade til Grund, der da ved Undersøgelsen af de paagældende Problemer gælder enkle og almengyldige Love. Og lad os tilføje, at selv om man til syvende og sidst kun interesserer sig for de Resultater, der vedrører de oprindelig forelagte Begreber (f. Eks. selv om man ved en Undersøgelse over harmoniske forbundne Punkter kun interesseres sig for de Resultater, der vedrører de sædvanlige Punkter), er det dog hensigtsmæssigt at foretage den omhandlede Udvidelse af Begrebsomraadet for undervejs i Undersøgelsen at kunne ope-

rere med almengyldige Sætninger, og ikke stadig være nødt til at spalte Undersøgelsen op i adskilte Tilfælde, der maa behandles hvert for sig. — Lad os som en orienterende Bemærkning tilføje, at det er udfra Synspunkter, som de her fremsatte, at man f. Eks. er ført til at udvide det oprindelig rationale Talområde til det mere omfattende reelle Talområde gennem Indførelsen af de irrationale Tal.

Men lad os fra disse almindeligere Bemærkninger vende tilbage til den rette Linies Geometri; efter at vi — i Tilknytning til den betragtede Opgave vedrørende harmonisk forbundne Punkter — har indført den rette Linies uendelig fjerne Punkt, rejser der sig naturligt det Spørgsmaal, hvorledes man derefter paa simpel Maade ved Hjælp af et Koordinatsystem kan karakterisere Liniens Punkter (de sædvanlige saavelsom det uendelig fjerne) ved Hjælp af Tal. Her gælder det naturligvis om at vælge Koordinatbestemmelsen saaledes, at det uendelig fjerne Punkt kommer med paa naturlig Maade, og saaledes at Indførelsen af dette Punkt ogsaa for Regningernes Vedkommende medfører en Lettelse, d. v. s. (idet vi atter knytter Betragtningerne til det specielle Eksempel vedrørende harmonisk forbundne Punkter) saaledes at vi derved kan undgaa at maatte spalte Undersøgelsen op i adskilte Tilfælde, men fremtidig kan føre Undersøgelsen samlet under eet. En saadan overmaade simpel og for Regningerne hensigtsmæssig Koordinatbestemmelse af Liniens Punkter (de sædvanlige saavelsom det uendelig fjerne) opnaar man ved at benytte saakaldte homogene Koordinater. Den Ide, der ligger til Grund for Indførelsen af homogene Koordinater, kan, som vi senere skal se, ogsaa umiddelbart finde Anvendelse, naar Talen er om de uendelig fjerne Elementer indenfor Planens og Rummets Geometri.

43. Homogene Koordinater. For at indføre saakaldte homogene Koordinater til Karakterisering af en ret Linies Punkter gaar vi, ligesom ved det tidligere „inhomogene" Koordinatsystem, og idet vi foreløbig kun tager Hensyn til Liniens sædvanlige Punkter, udfra et Nulpunkt O og et Enhedspunkt E samt positiv Retning paa Linien valgt fra O over E. Vi karakteriserer imidlertid her et sædvanligt Punkt P, i Stedet for ved det ene Tal x, der angiver dets Afstand $x = OP$ fra Nulpunktet O, ved to Tal X, N, hvor $N \neq 0$, saaledes beskaffne, at $\frac{X}{N} = x$. Paa denne Maade svarer der til ethvert sædvanligt Punkt P uendelig mange Sæt Koordinater (X, N), men for dem alle er Forholdet $\frac{X}{N}$ det samme; de fremkommer alle af et vilkaarligt af dem ved at multiplicere begge Tallene i dette Sæt med en vilkaarlig fra Nul forskellig Konstant. Den herigennem tilvejebragte Afhængighed mellem Liniens sædvanlige Punkter paa den ene Side og Mængden af Talpar (X, N) med $N \neq 0$ paa den anden Side er hvad man kalder en een-uendeligtydig Afhængighed, idet der til ethvert Talpar (X, N) med $N \neq 0$ svarer et og kun et Punkt, nemlig det Punkt, der har Abscissen $x = \frac{X}{N}$, medens der omvendt til ethvert sædvanligt Punkt svarer uendelig mange Talpar (X, N) med $N \neq 0$, nemlig alle de Talpar, for hvilke Forholdet $\frac{X}{N}$ er lig med Punktets Abscisse. Lad os imidlertid straks bemærke, hvad der er af Vigtighed for Forstaaelsen af Begrebet homogene Koordinater, at den omhandlede Afhængighed mellem Liniens sædvanlige Punkter og Talparrene (X, N) med $N \neq 0$ i en vis Forstand ogsaa kan opfattes som en eentydig Afhængighed, nemlig naar vi paa Forhaand i Tanken fastholder Mængden af alle indbyrdes proportionale Talpar (X, N) som en Enhed. — Vi vender os nu atter til den ovenfor betragtede Opgave, hvor P, P_1 er et variabelt Punktpar underkastet den Betingelse at skulle dele

det faste Punktpar A, B harmonisk; vi vælger som ovenfor Linjens Nulpunkt i Midtpunktet O af A B og Enhedspunktet i Punktet A; herved udtrykkes Betingelsen i inhomogene Koordinater ved Ligningen

$$(1) \qquad x x_1 = 1 \; ;$$

gaar vi nu over til homogene Koordinater, finder vi, idet Talen foreløbig kun er om sædvanlige Punkter P og P_1, og idet vi med (X, U) og (X_1, U_1) betegner et vilkaarligt af de uendelig mange Sæt Koordinater til henholdsvis P og P_1, Betingelsen udtrykt ved $\frac{X}{U} \cdot \frac{X_1}{U_1} = 1$, eller, idet vi bringer Ligningen paa hel Form, ved Ligningen

$$(2) \qquad X \cdot X_1 = U \cdot U_1 \; ;$$

denne sidste Ligning (2) er, idet vi jo foreløbig kun beskæftiger os med saadanne Talpar (X, U) og (X_1, U_1), for hvilke $U \neq 0$ og $U_1 \neq 0$, fuldkommen ensgyldig med Ligningen $\frac{X}{U} \cdot \frac{X_1}{U_1} = 1$. Vi bemærker, at medens Betingelsesligningen, naar vi benytter inhomogene Koordinater (altsaa Ligning (1)), er en <u>inhomogen</u> Ligning af første Grad i x, naar x_1 tænkes givet, er Betingelsesligningen derimod, naar vi benytter homogene Koordinater (altsaa Ligning (2)) og tænker os Punktet P_1 (d. v. s. Koordinaterne (X_1, U_1) eller rettere Forholdet $\frac{X_1}{U_1}$) givet, en <u>homogen</u> Ligning af første Grad i Koordinaterne (X, U) til Punktet P. Som ovenfor fremhævet har Ligning (1), naar vi for x_1 indsætter Koordinaten 0 til Midtpunktet O, ingen Løsning, da der jo ikke findes noget Tal, der indsat for x tilfredsstiller Ligningen $0 \cdot x = 1$; derimod ser vi, at den homogene Ligning (2), naar vi for (X_1, U_1) indsætter et Sæt Koordinater til Midtpunktet O (d. v. s indsætter et Talpar $(0, k)$, hvor $k \neq 0$) foruden naturligvis den selvfølgelige Nulløsning $(0, 0)$, har ogsaa egentli-

ge Løsninger (X, M), nemlig Løsningen $(c, 0)$, hvor c er en vilkaarlig Konstant $\neq 0$. Idet vi saaledes, naar vi i Ligning (2) formelt indsætter Koordinaterne $(0, k)$ til Midtpunktet O, som Løsning finder Talparret $(c, 0)$, er det naturligt ved Definition at fastsætte, at $(c, 0)$, hvor c er et vilkaarligt Tal $\neq 0$, skal opfattes som homogene Koordinater til Liniens uendelig fjerne Punkt, om hvilket vi jo netop havde vedtaget, at det skulde siges at være harmonisk forbundet med Midtpunktet O. Ved denne Fastsættelse af Koordinaterne til det uendelig fjerne Punkt — efter hvilken der er skabt en een-uendeligtydig Forbindelse til Veje mellem samtlige Liniens Punkter (de sædvanlige saavelsom det uendelig fjerne) og Mængden af alle egentlige (d. v. s fra $(0, 0)$ forskellige) Talpar (X, M), og en saadan at to egentlige Talpar da og kun da er Koordinater til samme Punkt, naar de er proportionale — har vi opnaaet, hvad vi vilde, nemlig at Betingelsen for at de to Punkter P og P_1 deler AB harmonisk udtrykkes ens, d. v. s. ved en og samme Betingelsesligning, (2), uafhængigt af, (d. v. s. uden at vi behøver at bekymre os om), hvorvidt Punkterne er sædvanlige eller uendelig fjerne.

Vi afslutter hermed vore Betragtninger over den rette Linies analytiske Geometri; disse Betragtninger har, som ovenfor sagt, væsentlig skullet tjene som en naturlig Indledning til Planens og Rummets analytiske Geometri, særlig hvad angaar den senere Indførelse af Planens og Rummets uendelig fjerne Elementer og deres Fremstilling ved Hjælp af homogene Koordinater.

B. Planens analytiske Geometri.

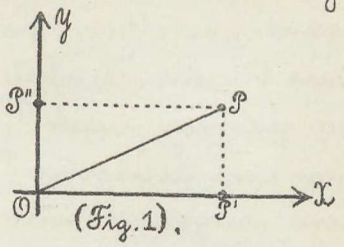
Skønt vi i og for sig forudsætter, at Læseren er fortrolig

med Begyndelsesgrundene af den analytiske Plangeometri (hvad vi ogsaa senere vil benytte os af, naar vi kommer til Læren om Keglesnittene), vil vi dog, inden vi gaar over til at indføre Planens uendelig fjerne Punkter, give en kort Fremstilling af den elementære analytiske Plangeometri omhandlende Planens „sædvanlige" Punkter, væsentlig for at have denne Fremstilling paa en saadan Form, at naar vi senere gaar over til at behandle Rummets Geometri, den fuldstændige Analogi mellem den analytisk-geometriske Behandling af Plan og Rum da kan træde tydeligt frem.

44. Retvinklet Koordinatsystem. Lad der i en given Plan være opgivet en Længdeenhed til Brug ved Maaling af Liniestykker, samt lad der være fastlagt to paa hinanden vinkelrette rette Linier X og Y skærende hinanden i Punktet O og forsynet med positive Retninger. Hermed er der fastlagt et retvinklet Koordinatsystem i Planen med Begyndelsespunkt i O og Koordinatakser X og Y; man karakteriserer ved Hjælp af dette Koordinatsystem det variable Punkt P i Planen ved to Koordinater x og y (Punktets Abscisse og Ordinat), af hvilke den første x (i Størrelse og Fortegn) angiver Projektionen OP' af Liniestykket OP med paa X-Aksen, medens den anden y paa tilsvarende Maade angiver Projektionen OP'' af OP paa Y-Aksen. Ved Hjælp af et saadant Koordinatsystem faar man tilvejebragt en eenentydig Afhængighed mellem Planens Punkter P og Mængden af samtlige Talpar (x,y), idet der jo til ethvert Punkt P svarer et og kun et Sæt Koordinater (x,y), og anvendt til et givet Talpar (x,y) findes et og kun et Punkt P, der netop har dette Talpar til Koordinater. — Idet Afstanden OP fra Begyndelsespunktet til det variable Punkt P: (x,y) er Hypotenuse i den retvinklede Trekant $OP'P$ (se Fig. 1), hvor P' som ovenfor angiver Projektio-

men af P ned paa X-Aksen, finder vi umiddelbart denne Afstand bestemt ved Ligningen

$$OP^2 = OP'^2 + P'P^2 = x^2 + y^2 .$$



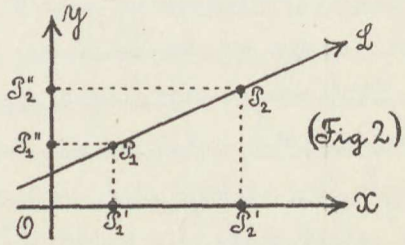
(Fig. 1).

45. Retning og Retningscosinusser. Ved et Parallelbundt forstaas en Samling af parallelle rette Linier, der tilsammen udfylder hele Planen. Man siger om en ret Linie, at den er orienteret, hvis den er forsynet med positiv Retning, og man siger om et Parallelbundt, at det er et orienteret Parallelbundt, hvis alle de enkelte Linier i Bundtet er orienterede, og saaledes at deres positive Retninger stemmer overens, d. v. s. saaledes at de positive Retninger paa to vilkaarlige af Linierne falder sammen, naar de to Linier ved Parallelforskydning bringes til Dækning med hinanden. Et orienteret Parallelbundt siges at bestemme en Retning, og alle Linierne i Bundtet siges at have samme Retning (nemlig den ved Bundtet bestemte), idet man ved Ordet „Retning" søger at give Udtryk for netop det ved en orienteret ret Linie, som den har fælles med alle de rette Linier, der tilhører det samme orienterede Parallelbundt, men med ingen andre. Skifter man positiv Retning paa alle Linierne i et orienteret Parallelbundt, siger man om det nye orienterede Parallelbundt, der derved fremkommer, at dets Retning er den modsatte af Retningen af det oprindelige Bundt. Man karakteriserer et orienteret Parallelbundts Retning ved to Tal α og β, der kaldes Bundtets (ligesom ogsaa de i Bundtet indeholdte Liniers) Retningscosinusser, af hvilke det førstnævnte angiver cosinus

til den Vinkel $< (XL)$, som en vilkaarlig af Bundtets Linier L (ligegyldig hvilken) danner med X-Aksen, medens β angiver cosinus til den Vinkel $< (YL)$, som en vilkaarlig af Bundtets Linier danner med Y-Aksen. Idet der er fastlagt positive Retninger paa Linierne X, Y og L, medens der derimod ikke er angivet nogen positiv Omløbsretning til Brug ved Bestemmelsen af Vinklerne $< (XL)$ og $< (YL)$, er disse Vinkler (naturligvis bortset fra hele Multipla af 2π) kun bestemt paa nær deres Fortegn, medens derimod Størrelserne $\alpha = \cos(XL)$ og $\beta = \cos(YL)$ er fuldstændig bestemte. Da cosinus til en Vinkel skifter Fortegn, naar Vinklen forøges med π, ses umiddelbart, at hvis en Retning er karakteriseret ved Retningscosinusserne (α, β), vil den modsatte Retning have Retningscosinusserne $(-\alpha, -\beta)$.

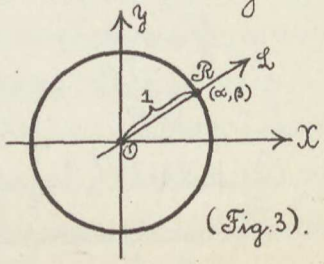
Lad P_1 og P_2 være to Punkter paa en orienteret ret Linie L med Retningscosinusser (α, β); da vil Projektionen af Liniestykket $P_1 P_2$ ned paa Koordinatakserne (se Fig. 2) være bestemt ved henholdsvis

$$P_1'P_2' = P_1P_2 \cdot \alpha \quad , \quad P_1''P_2'' = P_1P_2 \cdot \beta \quad ,$$



(Fig. 2).

hvor P_1P_2 er regnet med Fortegn i Overensstemmelse med den positive Retning paa L. Heraf følger specielt (se Fig. 3), at dersom R betegner det Punkt paa en orienteret ret Linie L gennem Begyndelsespunktet med Retningscosinusser (α, β), for hvilket $OR = +1$, vil Projektionen af OR ned paa Akserne være henholdsvis lig med α og β, d. v. s. Punktet R har Koordinaterne (α, β). <u>Retningscosinusserne (α, β) til en given Retning er følgelig lig</u>

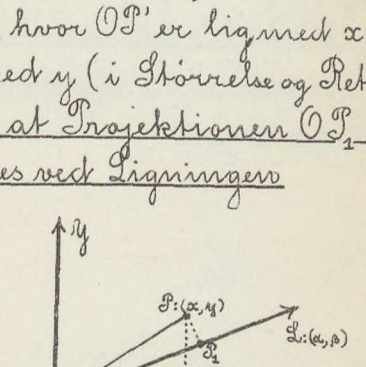


(Fig. 3).

med Koordinaterne til det Punkt R paa Enhedscirklen (d. v. s. paa Cirklen med Centrum i O og Radius 1), for hvilket Linien OR, orienteret saaledes at OR er positiv (altsaa $(OR)=+1$) har den givne Retning. Betragter vi efterhaanden alle mulige forskellige Retninger (α, β), vil det tilsvarende „Retningspunkt" R med Koordinater (α, β) ijensynlig gennemløbe Enhedscirklen, saaledes at vi faar hvert Punkt paa denne Cirkel med een og kun een Gang; heraf følger for det første, at to forskellige Retninger besidder forskellige Sæt Retningscosinusser (α, β) og (α_1, β_1), idet jo de tilsvarende Retningspunkter R og R_1 med Koordinater (α, β) og (α_1, β_1) er to forskellige Punkter paa Enhedscirklen; endvidere følger, at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for at et Talpar (α, β) er Retningscosinusser for en eller anden Retning er den, at Punktet med Koordinater (α, β) er beliggende paa Enhedscirklen, d. v. s. at $\alpha^2+\beta^2=1$.

Lad $P:(x,y)$ betegne et vilkaarligt Punkt i Planen, og lad P_1 angive Projektionen af P ind paa en orienteret ret Linie L gennem Begyndelsespunktet med Retningscosinusser (α, β). Ved at anvende den saakaldte Projektionssætning, og idet vi bemærker, at man kan komme fra O til P ad en brudt Linie $OP'P$, hvor OP' er lig med x (i Størrelse og Retning), medens $P'P$ er lig med y (i Størrelse og Retning), finder vi umiddelbart (se Fig. 4), at Projektionen OP_1 af Liniestykket OP ind paa Linien L bestemmes ved Ligningen

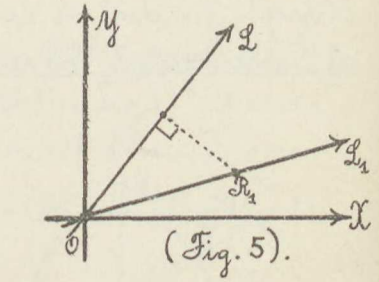
$$(3) \quad OP_1 = OP' \cdot \cos(XL) + P'P \cdot \cos(YL) = \alpha x + \beta y .$$



(Fig 4)

Ved at gøre Brug af denne Formel kan vi umiddelbart bestemme cosinus til Vinklen u mellem to Retninger bestemt ved Retningscosinusserne (α, β) og (α_1, β_1), idet vi ved denne Vinkel u forstaar Vinklen mellem to vilkaarlige Linier L og L_1, der har henholdsvis den ene og den anden af de givne Retninger. (Da vi intet har sagt om, udfra hvilken af de to Linier L og L_1 Vinklen skal regnes, ligesom der heller ikke er fastlagt nogen positiv Omløbsretning ved Bestemmelsen af denne Vinkel, er u ojensynlig kun bestemt paa nær sit Fortegn — allerede een af de to nævnte Grunde vilde være tilstrækkelig til at u kun var bestemt paa nær Fortegnet —; derimod er den Størrelse $\cos u$, vi søger, fuldstændig bestemt ved Opgivelsen af de to Retninger (α, β) og (α_1, β_1)). For at bestemme $\cos u$ drager vi (se Fig 5) gennem O to orienterede rette Linier L og L_1 med henholdsvis Retningscosinusserne (α, β) og (α_1, β_1) og bestemmer paa Linien L_1 det Punkt R_1, for hvilket $OR_1 = +1$; da har Punktet R_1 Koordinaterne (α_1, β_1). Vi projicerer nu Liniestykket OR_1 ind paa Linien L, hvad der giver Resultatet $OR_1 \cdot \cos u = \cos u$; idet R_1 har Koordinaterne (α_1, β_1) kan imidlertid i Følge Formel (3) Projektionen af OR_1 ind paa L ogsaa udtrykkes ved $\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1$; vi har saaledes fundet, <u>at cosinus til Vinklen u mellem to Retninger karakteriserede ved Retningscosinusserne (α, β) og (α_1, β_1) bestemmes ved Ligningen:</u>

(4) $$\cos u = \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 .$$



(Fig. 5).

Angiver (α, β) og (α_1, β_1) en og samme Retning, d. v. s. er $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ giver Ligning (4) os Resultatet $\cos u = \alpha^2 + \beta^2 = 1$, stemmende med at u her er lig med 0; bestemmer (α, β) og (α_1, β_1) modsatte Retninger,

d. v. s. er $\alpha_1 = -\alpha$, $\beta_1 = -\beta$, finder vi $\cos u = -(\alpha^2 + \beta^2) = -1$, stemmende med at u her er lig med π. To Retninger med Retningscosinusser (α, β) og (α_1, β_1) siges at være <u>vinkelrette paa hinanden</u>, hvis de tilsvarende Linier er vinkelrette paa hinanden, altsaa hvis $\cos u = \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 = 0$; Retningscosinusserne til den Retning (eller rettere de to Retninger), der er vinkelret paa en given Retning med Retningscosinusser (α, β), bestemmes følgelig som en saadan Løsning (α_1, β_1) i den homogene Ligning $\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 = 0$, at Kvadratsummen $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1$; idet den almindelige Løsning til denne Ligning er givet ved $k \cdot (-\beta, \alpha)$, hvor k er en vilkaarlig Konstant, bliver de søgte Løsninger (d. v. s. de med Kvadratsum 1) øjensynlig $(-\beta, \alpha)$ og $(\beta, -\alpha)$; de fremkommer altsaa af det givne Sæt Retningscosinusser (α, β) ved at ombytte α og β og samtidig skifte Fortegn for et af disse Tal.

46. <u>Den rette Linies Parameterfremstilling</u>. <u>Lad os karakterisere en orienteret ret Linie L ved Tallene x_0, y_0, α, β, hvor (x_0, y_0) er Koordinaterne til et givet Punkt paa Linien, medens (α, β) er Liniens Retningscosinusser</u>. Lad $P: (x, y)$ være et variabelt Punkt paa Linien L, og lad os betegne den variable Afstand P_0P (maalt med Fortegn) ved r; vi finder da umiddelbart ved Projektion af P_0P ned paa Koordinatakserne Ligningerne $x - x_0 = \alpha r$, $y - y_0 = \beta r$; Koordinaterne til det variable Punkt P udtrykkes altsaa ved Ligningerne

$$(5) \qquad x = x_0 + \alpha r \quad , \quad y = y_0 + \beta r \; .$$

Opfatter vi i (5) r som en uindskrænket Parameter, vil det ved Ligningerne bestemte Punkt $P: (x, y)$, efterhaanden som r gennemløber alle Værdier, gennemløbe den rette Linie L, saaledes at vi faar alle Punkter paa L med (hvert kun een Gang) og in-

gen andre. Ligningerne (5) giver os følgelig en Parameterfremstilling for det variable Punkt (x, y) paa L, eller som man sædvanligvis kortere siger, Ligningerne (5) giver os, naar vi opfatter r som en uindskrænket Variabel, en Parameterfremstilling af Linien L. (Skifter vi positiv Retning paa Linien L, hvorved (α, β) ombyttes med $(-\alpha, -\beta)$, gaar Ligningerne (5) over til Ligningerne: $x = x_0 - \alpha r$, $y = y_0 - \beta r$; denne nye Parameterfremstilling af Linien afviger kun fra den forrige ved Fortegnet for r, hvad der stemmer med, at Afstanden fra det givne Punkt P_0 til det variable Punkt P jo nu regnes positiv til modsat Side af før).

Af det overstaaende følger specielt, at enhver ret Linie kan fremstilles paa Parameterform ved to Ligninger

$$(6) \qquad x = a + bt \quad , \quad y = c + dt,$$

hvor af de fire Tal a, b, c, d, der herved karakteriserer Linien, ikke begge Tallene b og d (Koefficienterne til t) er lig med Nul, medens Parameteren t er en uindskrænket Variabel. Vi vil bevise den omvendte Sætning, nemlig at enhver Parameterfremstilling (6), hvori ikke begge Tallene b og d er lig med Nul, og hvor t betegner en uindskrænket Variabel, fremstiller en ret Linie. For at indse Rigtigheden heraf behøver vi blot i Stedet for Parameteren t at indføre en ny uindskrænket Variabel r, bestemt ved Ligningen $t = q \cdot r$, hvor det fra Nul forskellige Tal q er valgt saaledes, at Tallene $\alpha = q \cdot b$ og $\beta = q \cdot d$ har Kvadratsummen 1 (hvor altsaa $q = +\frac{1}{\sqrt{b^2 + d^2}}$ eller $-\frac{1}{\sqrt{b^2 + d^2}}$; herved gaar Ligningerne (6) nemlig over til Ligningerne $x = a + \alpha r$, $y = c + \beta r$, hvor $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, og disse sidste Ligninger vides jo i Følge det foregaaende at fremstille en ret Linie, nemlig den rette Linie, der gaar gennem Punktet (a, c) og (efter passende Valg af positiv Retning) har Ret-

ningscosinusserne (α, β).

47. Den rette Linies Ligning. Af den fundne Sætning om, at enhver ret Linie (endog paa uendelig mange Maader) kan fremstilles paa Parameterform ved to Ligninger (6), hvori ikke begge Koefficienter b og d er Nul, og at omvendt ethvert Sæt Ligninger (6), hvor ikke $b = d = 0$, fremstiller en ret Linie, udleder man umiddelbart følgende Hovedsætning: En ret Linie kan analytisk karakteriseres som det geometriske Sted for Punkter, hvis Koordinater (x, y) tilfredsstiller en Ligning af første Grad

$$(7) \qquad Ax + By + C = 0,$$

hvor af de tre Tal A, B, C der herved karakteriserer Linien (Liniens „Koordinater") ikke begge Tallene A og B er Nul, eller anderledes formuleret: enhver ret Linie kan fremstilles ved en Ligning af første Grad (7), hvor ikke begge Koefficienter A og B er Nul, og omvendt vil enhver saadan Ligning fremstille en ret Linie.

Beviset følger umiddelbart ud fra de tidligere Resultater vedrørende Løsning af lineære Ligninger; thi

1) er L en given ret Linie, som vi vil antage givet os ved Parameterfremstillingen

$$x - a = bt, \quad y - c = dt,$$

hvor ikke baade b og d er Nul, vil de Værdipar $(x-a, y-c)$, der fremkommer, naar Parameteren t varierer uindskrænket, stemme overens med de Værdipar $(x-a, y-c)$, der tilfredsstiller den ved Elimination af t fremkomne Ligning (smlg. 23)

gen andre. Ligningerne (5) giver os følgelig en Parameterfremstilling for det variable Punkt (x,y) paa L, eller som man sædvanligvis kortere siger, Ligningerne (5) giver os, naar vi opfatter r som en uindskrænket Variabel, en Parameterfremstilling af Linien L. (Skifter vi positiv Retning paa Linien L, hvorved (α,β) ombyttes med $(-\alpha,-\beta)$, gaar Ligningerne (5) over til Ligningerne: $x=x_0-\alpha r$, $y=y_0-\beta r$; denne nye Parameterfremstilling af Linien afviger kun fra den forrige ved Fortegnet for r, hvad der stemmer med, at Afstanden fra det givne Punkt P_0 til det variable Punkt P jo nu regnes positiv til modsat Side af før).

Af det ovenstaaende følger specielt, at enhver ret Linie kan fremstilles paa Parameterform ved to Ligninger

$$(6) \qquad x=a+bt \quad , \quad y=c+dt,$$

hvor af de fire Tal a,b,c,d, der herved karakteriserer Linien, ikke begge Tallene b og d (Koefficienterne til t) er lig med Nul, medens Parameteren t er en uindskrænket Variabel. Vi vil bevise den omvendte Sætning, nemlig at enhver Parameterfremstilling (6), hvori ikke begge Tallene b og d er lig med Nul, og hvor t betegner en uindskrænket Variabel, fremstiller en ret Linie. For at indse Rigtigheden heraf behøver vi blot i Stedet for Parameteren t at indføre en ny uindskrænket Variabel r, bestemt ved Ligningen $t=q\cdot r$, hvor det fra Nul forskellige Tal q er valgt saaledes, at Tallene $\alpha=q\cdot b$ og $\beta=q\cdot d$ har Kvadratsummen 1 (hvor altsaa $q=+\frac{1}{\sqrt{b^2+d^2}}$ eller $-\frac{1}{\sqrt{b^2+d^2}}$; herved gaar Ligningerne (6) nemlig over til Ligningerne $x=a+\alpha r$, $y=c+\beta r$, hvor $\alpha^2+\beta^2=1$, og disse sidste Ligninger vides jo i Følge det foregaaende at fremstille en ret Linie, nemlig den rette Linie, der gaar gennem Punktet (a,c) og (efter passende Valg af positiv Retning) har Ret-

ningscosinusserne (α, β).

47. Den rette Linies Ligning. Af den fundne Sætning om, at enhver ret Linie (endog paa uendelig mange Maader) kan fremstilles paa Parameterform ved to Ligninger (6), hvori ikke begge Koefficienter b og d er Nul, og at omvendt ethvert Sæt Ligninger (6), hvor ikke $b = d = 0$, fremstiller en ret Linie, udleder man umiddelbart følgende Hovedsætning: En ret Linie kan analytisk karakteriseres som det geometriske Sted for Punkter, hvis Koordinater (x, y) tilfredsstiller en Ligning af første Grad

$$(7) \qquad Ax + By + C = 0,$$

hvor af de tre Tal A, B, C der herved karakteriserer Linien (Linjens „Koordinater") ikke begge Tallene A og B er Nul, eller anderledes formuleret: enhver ret Linie kan fremstilles ved en Ligning af første Grad (7), hvor ikke begge Koefficienter A og B er Nul, og omvendt vil enhver saadan Ligning fremstille en ret Linie.

Beviset følger umiddelbart ud fra de tidligere Resultater vedrørende Løsning af lineære Ligninger; thi

1) er L en given ret Linie, som vi vil antage givet os ved Parameterfremstillingen

$$x - a = bt, \quad y - c = dt,$$

hvor ikke baade b og d er Nul, vil de Værdipar $(x-a, y-c)$, der fremkommer, naar Parameteren t varierer uindskrænket, stemme overens med de Værdipar $(x-a, y-c)$, der tilfredsstiller den ved Elimination af t fremkomne Ligning (smlg. 23)

$$\begin{vmatrix} x-a\ , & b \\ y-c\ , & d \end{vmatrix} = 0,$$

d. v. s. Ligningen $dx - by + (bc - ad) = 0$; den givne rette Linie fremstilles altsaa virkelig ved en Ligning af første Grad i x og y, hvor ikke begge Koefficienterne til x og y er lig med Nul. Og omvendt

3) er der fastlagt en Ligning $Ax + By + C = 0$, hvor ikke $A = B = 0$, kan vi for det første ved passende Valg af Talparret (x_0, y_0) skrive denne Ligning paa Formen

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

(da jo Ligningen $Ax + By + C = 0$, idet ikke $A = B = 0$, øjensynlig har en Løsning (x_0, y_0)); for denne sidste homogene Ligning i de Ubekendte $x - x_0$ og $y - y_0$ kan imidlertid den almindelige Løsning paa Parameterform fremstilles ved Ligningerne $x - x_0 = -Bt$, $y - y_0 = At$, hvor t er en vilkaarlig Parameter; den oprindelige Ligning $Ax + By + C = 0$ har saaledes den almindelige Løsning

$$x = x_0 - Bt\ , \quad y = y_0 + At;$$

hermed er Beviset fuldført, thi disse sidste Ligninger med den vilkaarlige Parameter t vides jo at fremstille Punkterne paa en ret Linie.

Idet (smlg. Opg 17) to Ligninger af første Grad $Ax + By + C = 0$ og $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, hvor intet af Talparrene (A, B) og (A_1, B_1) bestaar af to Nuller, da og kun da har de samme Løsninger, naar Talsættene (A, B, C) og (A_1, B_1, C_1) er proportionale, følger;

at to Ligninger af første Grad i x og y da og kun da fremstiller den samme rette Linie, naar den ene af Ligningerne fremkommer af den anden ved Multiplikation med en (fra Nul forskellig) Konstant; vi udtrykker dette ved at sige, at den rette Linies „Koordinater" (Koefficientsættet (A,B,C)) er at opfatte som homogene Koordinater, d. v. s. to Sæt Koordinater $(A, B, C,)$ og (A_1, B_1, C_1) tilhører da og kun da den samme rette Linie, naar de er proportionale.

Lad os betragte to Ligninger $Ax+By+C=0$ og $A_1x+B_1y+C_1=0$, om hvilke vi vil antage, at de ikke fremstiller samme rette Linie, altsaa at de to egentlige Talsæt (A,B,C) og (A_1,B_1,C_1) ikke er proportionale. Vi indser da, at Betingelsen for at de to rette Linier er parallele er den, at Talparrene (A,B) og (A_1,B_1) er proportionale; thi denne Betingelse er jo (smlg. Opg. 17) nødvendig og tilstrækkelig for, at de to givne Ligninger ingen Løsning har, d. v. s. for at de to rette Linier ikke skærer hinanden.

Ovenfor, hvor vi talte om en ret Linies Parameterfremstilling, tænkte vi os den rette Linie bestemt ved at skulle gaa gennem et givet Punkt og have en given Retning. Vi vil nu bestemme Ligningen for en ret Linie L, karakteriseret ved Koordinaterne (x_2, y_2) og (x_3, y_3) til to givne (forskellige) Punkter P_2 og P_3 paa Linien. Vi vil vise, at den rette Linie har Ligningen

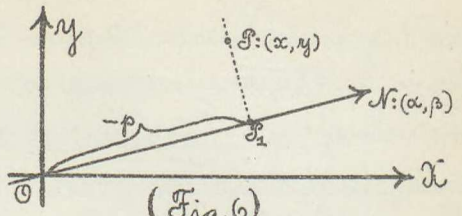
$$(8) \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

dette indses umiddelbart saaledes: for det første har venstre Side af Ligning (8) øjensynlig Formen $Ax+By+C=0$, hvor Koefficienterne $A=y_2-y_3$ og $B=x_3-x_2$ ikke begge er Nul, og for det andet ses

Ligningen umiddelbart at være tilfredsstillet, naar vi for de løbende Koordinater (x, y) indsætter Koordinaterne (x_2, y_2) eller Koordinaterne (x_3, y_3), idet jo en Determinant med to Rækker ens er lig med Nul.

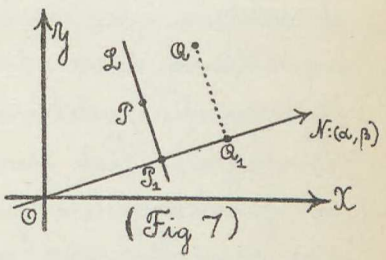
48. Den rette Linies Ligning paa Normalform. Man siger om en ret Linies Ligning, at den er skreven paa Normalform, hvis den har Formen $\alpha x + \beta y + p = 0$, hvor $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Ligningen for en vilkaarlig ret Linie $Ax + By + C = 0$ kan umiddelbart bringes paa Normalform ved at multiplicere Ligningen med en saadan Konstant q, at i den derved fremkomne Ligning Koefficienterne Aq og Bq til x og y har Kvadratsummen 1, d. v. s. ved at multiplicere Ligningen enten med $+\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ eller med $-\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. En ret Linie har saaledes to forskellige Normalformer, hvoraf den ene dog umiddelbart fremkommer af den anden ved at multiplicere Ligningen med -1. Idet i en ret Linies Ligning paa Normalform $\alpha x + \beta y + p = 0$ Koefficientparret (α, β) tilfredsstiller Ligningen $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, følger umiddelbart, at dette Koefficientpar (α, β) er Retningscosinusser for en eller anden ret Linie. Vi skal vise, at Koefficientparret (α, β) netop er Retningscosinusser for Liniens Normal (idet de to forskellige Normalformer svarer til de to forskellige Retninger, der kan vælges paa Normalen). Dette indses umiddelbart derigennem, at Tallet $\alpha x + \beta y$, hvor (x, y) er Koordinaterne til et vilkaarligt Punkt P i Planen, som vi tidligere har vist, er lig med Projektionen OP_1 af Liniestykket OP ind paa den orienterede rette Linie N gennem Begyndelsespunktet O, hvis Retning er bestemt ved Retningscosinusserne (α, β); heraf følger nemlig (se Fig. 6), at den Betingelse, der er paalagt et Punkt P ved, at dets Koordinater (x, y) skal tilfredsstille Ligningen

$$\alpha x + \beta y = -p,$$



(Fig. 6)

er den, at Projektionen af P ind paa Linien N med Retningscosinusser (α, β) falder i det faste Punkt P_1, hvis Afstand OP_1 fra Begyndelsespunktet (regnet med Fortegn) er lig med $-p$; men dette udsiger jo netop, at Ligningen $\alpha x + \beta y + p = 0$ bestemmer det geometriske Sted for Punkter P, hvis Projektion paa N falder i det faste Punkt P_1, altsaa at N er vinkelret paa den ved Ligningen $\alpha x + \beta y + p = 0$ fremstillede rette Linie. — Lad (x_1, y_1) være Koordinater til et vilkaarligt Punkt Q i Planen; da er (se Fig 7) $\alpha x_1 + \beta y_1 = OQ_1$, hvor Q_1 betegner Projektionen af Q ind paa Linien N; følgelig faas, idet $p = P_1O$



(Fig 7)

$$\alpha x_1 + \beta y_1 + p = OQ_1 + P_1O = P_1Q_1;$$

altsaa: Indsætter man i venstre Side af en ret Linies Ligning paa Normalform i Stedet for de løbende Koordinater (x, y) Koordinaterne (x_1, y_1) til et vilkaarligt Punkt Q i Planen, vil det derved fremkomne Tal $\alpha x_1 + \beta y_1 + p$ netop angive Afstanden fra den rette Linie til Punktet Q, regnet med Fortegn i Overensstemmelse med den valgte positive Retning paa Normalen, d. v. s. i Overensstemmelse med den positive Retning paa Normalen, hvis Retningscosinusser netop er Koefficientparret (α, β).

Lad os betragte en vilkaarlig linear Funktion $Ax + By + C$ i de to Variable x og y, hvor ikke begge Koefficienterne A og B

er lig med Nul. Skriver vi denne Funktion paa Formen $q\cdot(\alpha x+\beta y+p)$, hvor $q=\sqrt{A^2+B^2}$, altsaa $\alpha^2+\beta^2=1$, følger ud fra den foregaaende Sætning, at Værdien af den lineære Funktion $Ax+By+C$, naar vi opfatter de Variable x, y som Koordinater til et variabelt Punkt P i Planen, har en simpel geometrisk Betydning, idet den, paa nær den konstante Faktor $q=\sqrt{A^2+B^2}$ angiver Afstanden fra Linien $\alpha x+\beta y+p=0$, d. v. s. fra Linien $Ax+By+C=0$ til det variable Punkt P, regnet med Fortegn i Overensstemmelse med den ved Retningscosinusserne (α,β) bestemte positive Retning paa Normalen. Funktionen $Ax+By+C$ er altsaa Nul paa selve den rette Linie og positiv i den ene af de to Halvplaner, negativ i den anden af de to Halvplaner, hvori Linien deler Planen.

49. Positiv Omløbsretning i Planen. I det foregaaende har vi ikke tænkt os Planen tillagt nogen Omløbsretning (og vi har i Sammenhæng dermed overalt, hvor Talen har været om en Vinkel, betragtet Vinklens cosinus, der jo er uafhængig af Vinklens Fortegn). Ved flere Undersøgelser er det imidlertid bekvemt at fastlægge en positiv Omløbsretning i Planen (man siger da om Planen, at den er orienteret); vi vil, hvor ikke det modsatte udtrykkelig fremhæves, stedse tænke os den positive Omløbsretning valgt saadan, at Koordinatvinklen $\sphericalangle(XY)=+\frac{\pi}{2}$. I en orienteret Plan er Vinklen v fra en given Retning til en anden given Retning (d. v. s. Vinklen fra en Linie med den første Retning til en Linie med den anden Retning) fuldstændig bestemt, naturligvis paa nær et Multiplum af 2π. Er L en orienteret ret Linie, for hvilken $\sphericalangle(XL)=v$, vil der, idet $\sphericalangle(XY)=+\frac{\pi}{2}$, gælde Ligningen $\sphericalangle(YL)=v-\frac{\pi}{2}$; Linjens Retningscosinusser (α,β) kan følgelig udtrykkes ved $\alpha=\cos v$, $\beta=\sin v$, hvor $v=\sphericalangle(XL)$.

I en orienteret Plan vil vi ved den positive Normalretning n til en given Retning l med Retningscosinusser (α, β) forstaa den af de to paa den givne Retning vinkelrette Retninger, for hvilken Vinklen fra l til n er lig med $+\frac{\pi}{2}$; er L en Linie med den givne Retning l og er $\sphericalangle(XL) = v$, vil følgelig en „positiv Normal" til L (d. v. s. en Linie N med Retningen n) med X-Aksen danne Vinklen $\sphericalangle(XN) = v + \frac{\pi}{2}$; den positive Normalretning n til en given Retning l med Retningscosinusser (α, β) har følgelig sine Retningscosinusser (α_1, β_1) bestemte ved

$$\alpha_1 = \cos\left(v + \tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin v = -\beta \quad , \quad \beta_1 = \sin\left(v + \tfrac{\pi}{2}\right) = \cos v = \alpha \, .$$

Ligesom $(-\beta, \alpha)$ saaledes bestemmer den positive Normalretning til Retningen (α, β), bestemmer $(\beta, -\alpha)$ den negative Normalretning til Retningen (α, β). Eksempelvis nævner vi, at Y-Aksen er positiv Normal til X-Aksen, medens X-Aksen er negativ Normal til Y-Aksen.

Ved den positive Normalform til en orienteret ret Linie forstaas den af de to Normalformer, for hvilken Koefficientparret til x, y er lig Retningscosinusserne til Liniens positive Normalretning; har den givne orienterede Linie Retningscosinusserne (α, β) vil den positive Normalform følgelig have Formen $-\beta x + \alpha y + p = 0$. Naar der indenfor en orienteret Plan er Tale om Afstanden fra en orienteret ret Linie til et vilkaarligt Punkt, vil vi vedtage stedse at regne denne Afstand saaledes med Fortegn, at den regnes positiv til den Side, der bestemmes ved den orienterede rette Linies positive Normalretning; Afstanden bestemmes altsaa som det Tal, der fremkommer af venstre Side af Liniens positi-

ve Normalform ved for de løbende Koordinater at indsætte Koordinaterne til det betragtede Punkt. Lad os som et Eksempel paa Bestemmelsen af den positive Normalform til en given Linie søge den positive Normalform til en orienteret ret Linie med Retningscosinusser (α, β), om hvilken det er givet, at den gaar gennem Punkterne $P_2: (x_2, y_2)$ og $P_3: (x_3, y_3)$, altsaa at den har Ligningen

$$Ax+By+C = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Betegner vi Projektionerne af Punkterne P_2 og P_3 ned paa Akserne med henholdsvis P_2', P_2'' og P_3', P_3'', finder vi Koefficienterne A og B i den ovenstaaende Ligning bestemt ved

$$A = y_2 - y_3 = -P_2''P_3'' = (-\beta) \cdot P_2P_3 \quad , \quad B = x_3 - x_2 = P_2'P_3' = \alpha \cdot P_2P_3 .$$

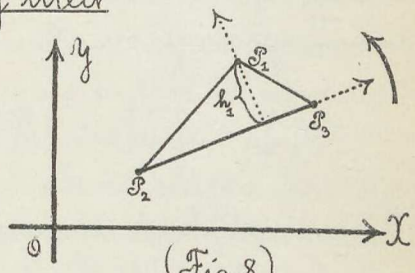
Ydet nu den positive Normalform som Koefficienter til x og y har henholdsvis Tallene $-\beta$ og α, viser de fundne Udtryk for Koefficienterne A og B, at den søgte Normalform fremkommer ved at dividere den ovenstaaende Ligning med P_2P_3; altsaa: <u>den positive Normalform fremstilles ved Ligningen</u>

$$\frac{1}{P_2P_3} \cdot \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

<u>hvor P_2P_3 er regnet med Fortegn i Overensstemmelse med den positive Retning paa Linien.</u>

50. Arealet af en Trekant. Medens man i den elementære Geometri ved Arealet af en Trekant jo forstaar det positive Tal, der angiver hvormange Enhedskvadrater Trekanten indeholder, er det hensigtsmæssigt i den analytiske Geometri (naar Talen er om en orienteret Plan) at skelne mellem Trekanter med positivt Areal og Trekanter med negativt Areal. Dette sker ved Hjælp af følgende Definition: Arealet af Trekant $P_1P_2P_3$ (hvilket Areal vi vil betegne med $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3$) skal sættes lig med

$$\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3 = \tfrac{1}{2} h_1 \cdot P_2P_3 ,$$



(Fig. 8)

hvor vi, idet vi tænker os fastlagt en positiv Retning paa den ved Punkterne P_2 og P_3 bestemte Linie L, regner saavel Trekantsiden P_2P_3 som ogsaa Højden h_1 fra Linien L til den modstaaende Vinkelspids P_1 med Fortegn (d. v. s. ved h_1 forstaar Afstanden fra L til Punktet P_1 regnet positiv til den Side, der bestemmes ved den positive Normalretning til L). Det er aabenbart, at det herved fastsatte Fortegn for $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3$ ikke afhænger af hvilken positiv Retning vi har valgt paa L; thi skifter vi positiv Retning paa L, vil jo derved begge Tallene P_2P_3 og h_1 skifte Fortegn, saaledes at deres Produkt forbliver uforandret. Tænker vi os positiv Retning paa L valgt saaledes, at P_2P_3 er positiv (se Fig. 8), vil Fortegnet for $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3$ være det samme som Fortegnet for h_1, d. v. s. det vil være positivt eller negativt, alt efter som P_1 ligger paa den positive eller negative Side af L; bestemmer vi Fortegnet for $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3$ paa denne Maade, ser man umiddelbart ved at kaste et Blik paa en Figur, at $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3$ vil være positiv

eller negativ, eftersom den ved de tre Punkter $P_1P_2P_3$ (i den angivne Rækkefølge) bestemte Omløbsretning er den samme som eller den modsatte af den i Planen fastlagte positive Omløbsretning. Heraf følger umiddelbart, at Arealet af en Trekant skifter Fortegn, naar man ombytter to af dens Vinkelspidser, og heraf følger atter, at $P_\alpha P_\beta P_\gamma$, hvor α, β, γ er en Permutation af Tallene 1, 2, 3, har samme eller modsat Fortegn som $P_1P_2P_3$ eftersom Antallet af Inversioner $J(\alpha, \beta, \gamma)$ er lige eller ulige; der gælder altsaa Ligningerne

$$P_1P_2P_3 = P_2P_3P_1 = P_3P_1P_2 = -P_1P_3P_2 = -P_2P_1P_3 = -P_3P_2P_1 .$$

For nu at bestemme Arealet $P_1P_2P_3$ gaar vi saaledes frem: Den orienterede rette Linie L, der gaar gennem de to Punkter P_2 og P_3, har, som vi i 49 har set, den positive Normalform

$$\frac{1}{P_2P_3} \cdot \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

hvor P_2P_3 skal regnes med Fortegn paa Linien L. Følgelig bestemmes Højden h_1 ved

$$h_1 = \frac{1}{P_2P_3} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} ,$$

nemlig ved det Tal, der fremkommer af venstre Side af den positive Normalform for L ved i denne for de løbende Koordinater at indsætte Koordinaterne (x_1, y_1) til Punktet P_1. Vi fin-

der da slutteliq den rigtige Formel

$$\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3 = \tfrac{1}{2}\, h_1 \cdot \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3 = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} .$$

Den fundne Formel giver os umiddelbart — idet en Determinant jo skifter Fortegn, naar man ombytter to af dens Rækker — en Bekræftelse paa det ovenfor fundne Resultat, at Arealet af en Trekant skifter Fortegn, naar man ombytter to af dens Vinkelspidser; omvendt har vi, for en Determinant af 3die Orden, i den Maade, hvorpaa Trekantens Areal skifter Fortegn, naar Vinkelspidserne permuteres, den geometriske Illustration til den nævnte Determinantsætning. — Lad os slutteliq bemærke, at det at vi gennem den ovenfor brugte Vedtægt for Bestemmelsen af Fortegnet for Arealet $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3$ har kunnet opnaa, at Arealet af en Trekant udtrykkes <u>ens</u> i alle Tilfælde, d. v. s. ved en og samme simple Formel uafhængig af hvor de tre Vinkelspidser end er beliggende, netop er en af Hovedfordelene ved (eller Hovedgrundene til) at regne saadanne Arealer med Fortegn.

51. <u>Koordinattransformation.</u> Ved forskellige Undersøgelser indenfor den analytiske Plangeometri er det bekvemt at udføre en saakaldt <u>Koordinattransformation</u>, d. v. s. at gaa over fra Fremstillingen af Planens Punkter ved Hjælp af et retvinklet Koordinatsystem til Fremstillingen ved Hjælp af et andet retvinklet Koordinatsystem. Lad (XY) og (X_1Y_1) betegne to vilkaarlige retvinklede Koordinatsystemer (om hvilke vi vil antage, at den til Brug ved Maaling af Liniestykker fastlagte Længdeenhed er den samme for begge Koordinatsystemer), og

lad (x,y) og (x_1,y_1) angive Koordinaterne til et og samme variable Punkt P henført henholdsvis til Systemet (XY) og til Systemet (X_1Y_1). Det er da for det første klart, at den Forbindelse der herigennem er fastlagt mellem Koordinatparrene (x,y) og (x_1,y_1) er en <u>eentydig Afhængighed</u>; thi er der givet et vilkaarligt Talpar (x,y) eksisterer der et og kun et Punkt P, der henført til Koordinatsystemet (XY) netop har dette Talpar (x,y) til Koordinater, og idet P er bestemt, er jo derved tillige dets Koordinater (x_1,y_1) henført til Systemet (X_1Y_1) entydig bestemt, saaledes at der virkelig til et opgivet Talpar (x,y) findes et og kun et tilsvarende Talpar (x_1,y_1); og omvendt indser man naturligvis paa fuldkommen tilsvarende Maade, at der til et givet (x_1y_1) findes et og kun et tilsvarende Talpar (x,y).

Vi vil vise, at den herigennem fastlagte eentydige Afhængighed mellem Systemet af Variable (x,y) og Systemet af Variable (x_1,y_1) — altsaa den Afhængighed, der er givet derved, at (x,y) og (x_1,y_1) skal være Koordinater til et og samme Punkt henført til de to forskellige retvinklede Koordinatsystemer — kan fremstilles ved en <u>linear Substitution</u>, altsaa at det ene Sæt Koordinater, f. Eks. (x,y), kan udtrykkes ved det andet Sæt Koordinater (x_1,y_1) ved Ligninger af Formen

$$x = a + bx_1 + cy_1$$
$$y = d + ex_1 + fy_1 ,$$

hvor $a, b \ldots f$ er Konstanter, d. v. s. kun er afhængige af de to Koordinatsystemer og ikke af hvilket Punkt P vi betragter.

Inden vi gaar over til at undersøge den „almindelige" Koordinattransformation, hvor de to Koordinatsystemer

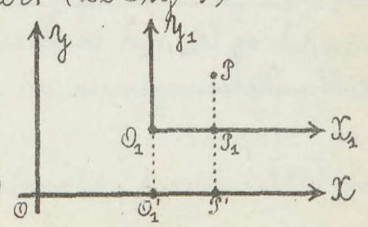
(XY) og $(X_1 Y_1)$ ligger paa fuldkommen vilkaarlig Maade overfor hinanden, vil vi først studere to specielle Typer af Koordinattransformation, nemlig dels en saadan Transformation, hvor det ene af de to Koordinatsystemer fremgaar af det andet ved en Parallelforskydning, og dels en saadan Transformation, ved hvilken Begyndelsespunktet ligger fast (d. v. s. hvor de to Systemer har samme Begyndelsespunkt). Behersker vi disse to specielle Typer af Koordinattransformation, behersker vi i Virkeligheden ogsaa den almindelige Koordinattransformation, idet denne sidste aabenbart kan „sammensættes" af en Transformation af den ene og en Transformation af den anden Type.

Lad os da først betragte en Parallelforskydning, d. v. s. lad os undersøge Sammenhængen mellem Koordinaterne (x, y) og (x_1, y_1) til et og samme variable Punkt P henført til to Koordinatsystemer (XY) og $(X_1 Y_1)$, hvor X- og X_1-Aksen har samme Retning og Y- og Y_1-Aksen har samme Retning (hvor altsaa de tilsvarende Akser er parallele og har overensstemmende positive Retninger). Lad os antage, at Begyndelsespunktet O_1 i Systemet $(X_1 Y_1)$ (som vi vil kalde det „nye" System) henført til Koordinatsystemet (XY) (det „gamle" System) har Koordinaterne (a, b). Gennem Opgivelsen af de to Tal a og b er da de to Systemers Beliggenhed overfor hinanden fuldstændig bestemt. Lad P være et variabelt Punkt med Koordinater (x, y) og (x_1, y_1), og lad P' og P_1 betegne Projektionerne af P paa henholdsvis X-Aksen og X_1-Aksen; lad endvidere O_1' betegne Projektionen af O_1 paa X-Aksen. Vi finder da umiddelbart (se Fig. 9)

$$x = OP' = OO_1' + O_1'P' = OO_1' + O_1P_1 = a + x_1$$

og paa tilsvarende Maade (ved Projektion paa Y-Aksen)

$$y = b + y_1 .$$



(Fig 9)

Overgangen fra Koordinaterne (x_1, y_1) til Koordinaterne (x, y) sker altsaa ved Forskydningssubstitutionen

$$x = a + x_1$$
$$y = b + y_1 .$$

Loser vi de to sidste Ligninger med Hensyn til x_1 og y_1, finder vi Koordinaterne (x_1, y_1) udtrykte ved Koordinaterne (x, y) ved Ligningerne (den omvendte Substitution til den forrige)

$$x_1 = -a + x$$
$$y_1 = -b + y .$$

(Disse sidste Ligninger fremgaar ogsaa umiddelbart (d. v. s. uden nogensomhelst Regning) af de foregaaende, nemlig naar vi opfatter $(X_1 Y_1)$ som det „gamle" System og (XY) som det „nye" System og bemærker, at Begyndelsespunktet O i Systemet (XY) henført til Systemet $(X_1 Y_1)$ aabenbart har Koordinaterne $(-a, -b)$).

Lad os dernæst betragte en Koordinattransformation, ved hvilken Begyndelsespunktet ligger fast, d. v. s. lad os undersøge Sammenhængen mellem Koordinaterne (x, y) og (x_1, y_1) til samme variable Punkt P henført til to givne retvinklede Koordinatsystemer (XY) og $(X_1 Y_1)$ med samme Begyndelsespunkt O. Lad os karakterisere det „nye" System $(X_1 Y_1)$'s Beliggenhed overfor det „gamle" System (XY) ved Retningscosinusserne (α_1, β_1) og (α_2, β_2) for de „nye" Akser X_1 og Y_1 henført til Systemet (XY). I det (α_1, β_1) og (α_2, β_2) er Retningscosinusser for to paa hinanden vinkelrette Retninger, er de forbundne ved de tre Ligninger

$$(9) \qquad \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 , \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1 , \quad \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 = 0 ,$$

(ligesom anvendt to Sæt Tal (α_1, β_1) og (α_2, β_2) for hvilke der gælder disse tre Ligninger netop vil være Retningscosinusser for to paa hinanden vinkelrette Retninger).

Lad P med Koordinater (x, y) og (x_1, y_1) være et variabelt Punkt i Planen. Idet Projektionen af OP ind paa en orienteret ret Linie gennem O, hvis Retningscosinusser (henført til Systemet (XY)) er (α, β), er bestemt ved $\alpha x + \beta y$, finder vi umiddelbart ved at projicere OP ind paa henholdsvis X_1-Aksen og Y_1-Aksen Transformationsformlerne

$$(10) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x + \beta_1 y \\ y_1 &= \alpha_2 x + \beta_2 y . \end{aligned}$$

Herved har vi fundet Koordinaterne (x_1, y_1) udtrykt ved Koordinaterne (x, y). For omvendt at finde (x, y) udtrykt ved (x_1, y_1) behøver vi blot at bestemme den omvendte Substitution, d.v.s. at løse Ligningerne (10) med Hensyn til x og y; simplere (uden nogensomhelst Regning) finder vi dog de søgte Udtryk ved blot at betragte (XY) som det „nye" System og $(X_1 Y_1)$ som det „gamle" System og bemærke, at Akserne X og Y henført til Systemet $(X_1 Y_1)$ aabenbart har Retningscosinusserne (α_1, α_2) og (β_1, β_2), hvorved gaar Ligningerne (10) over til Ligningerne

$$(11) \qquad \begin{aligned} x &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 \\ y &= \beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 . \end{aligned}$$

Idet den Betingelse, der er paalagt Tallene $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ derved at (α_1, β_1) og (α_2, β_2) skal være Retningscosinusser for to paa hinanden vinkelrette Retninger, jo som ovenfor fremhævet er fuldkommen ensbetydende med, at de skal tilfredsstille de

tre Ligninger (9), viser de sidst fundne Transformationsformler (11) os følgende vigtige Sætning:

De Formler, der bestemmer Overgangen fra et retvinklet Koordinatsystem $(X_1 Y_1)$ til et andet retvinklet Koordinatsystem (XY) med samme Begyndelsespunkt danner en orthogonal Substitution, og omvendt: enhver orthogonal Substitution i to Variable kan geometrisk fortolkes som udtrykkende Koordinaterne til et variabelt Punkt, henført til et retvinklet Koordinatsystem, ved Hjælp af Koordinaterne til det samme Punkt henført til et andet retvinklet Koordinatsystem med samme Begyndelsespunkt som det første.

Det er denne geometriske Betydning, som en lineær homogen Substitution (11), hvis Koefficienter tilfredsstiller Ligningerne (9), skylder Navnet orthogonal (retvinklet) Substitution. Gennem den fundne geometriske Fortolkning af en orthogonal Substitution (i to Variable) belyses de tidligere fundne Sætninger vedrørende orthogonale Substitutioner paa karakteristisk Maade; saaledes udsiger Sætningen om, at den omvendte Substitution til en orthogonal Substitution atter er orthogonal, i geometrisk Fortolkning simpelthen, at hvis en Substitution fører over fra et retvinklet Koordinatsystem til et andet (f. Eks. fra (XY) til $(X_1 Y_1)$) vil den omvendte Substitution ligeledes føre over fra et retvinklet Koordinatsystem til et andet (nemlig fra $(X_1 Y_1)$ til (XY)); ogsaa Sætningen om, at en Substitution, der fremkommer ved Sammensætning af to orthogonale Substitutioner, atter er orthogonal, er fra et geometrisk Synspunkt indlysende; thi hvis den ene af de givne Substitutioner fører over fra Koordinatsystemet (XY) til $(X_1 Y_1)$, den anden fra $(X_1 Y_1)$ til $(X_2 Y_2)$, vil jo den sammensatte Substitution føre over fra (XY) til $(X_2 Y_2)$. Endelig bemærker vi, at den geometri-

ske Fortolkning af den Egenskab ved en orthogonal Substitution, at den fører Kvadratsummen x^2+y^2 over til Kvadratsummen $x_1^2+y_1^2$, er den, at Kvadratet paa Afstanden fra Begyndelsespunktet O til det variable Punkt P (hvilket Tal jo forbliver uforandret ved en Koordinattransformation, ved hvilken Begyndelsespunktet ligger fast) i det ene System udtrykkes ved x^2+y^2, i det andet ved $x_1^2+y_1^2$. — Idet den omvendte (orthogonale) Substitution til en given orthogonal Substitution (11) jo udtrykkes ved Ligningerne (10), følger umiddelbart (hvad man ogsaa let direkte kunde eftervise ved Regning, smlg. Opg 25), at hvis de fire Tal $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ er underkastet Betingelserne

$$\alpha_1^2+\beta_1^2=1\ ,\ \alpha_2^2+\beta_2^2=1\ ,\ \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2=0\ ,$$

vil de nødvendigvis af sig selv tilfredsstille Ligningerne

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2=1\ ,\ \beta_1^2+\beta_2^2=1\ ,\ \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=0\ ;$$

denne sidste Sætning udsiger i geometrisk Fortolkning simpelthen, at hvis (α_1, β_1) og (α_2, β_2) henført til et Koordinatsystem (XY) bestemmer Retningscosinusser for to paa hinanden vinkelrette orienterede rette Linier X_1 og Y_1, vil (α_1, α_2) og (β_1, β_2) ligeledes bestemme Retningscosinusser for to paa hinanden vinkelrette Linier (nemlig for Linierne X og Y henført til Koordinatsystemet $(X_1 Y_1)$).

Vi siger om to retvinklede Koordinatsystemer (XY) og $(X_1 Y_1)$ at de er <u>ens orienterede</u> eller at de er <u>modsat orienterede</u>, alteftersom den positive Omløbsretning i Planen, der bestemmes ved det ene Koordinatsystem, er den samme som eller den modsatte af den, der bestemmes ved det andet Koordi-

natsystem, med andre Ord, eftersom den positive Omløbsretning i Planen, der gjør $\sphericalangle(XY)$ til $+\frac{\pi}{2}$, ligeledes gjør $\sphericalangle(X_1Y_1)$ til $+\frac{\pi}{2}$ eller derimod gjør $\sphericalangle(X_1Y_1)$ til $-\frac{\pi}{2}$. To Koordinatsystemer (XY) og (X_1Y_1), hvoraf det ene fremgaar af det andet ved en Parallelforskydning er selvfølgelig ens orienterede. Ved den hidtidige Undersøgelse af Koordinattransformation med Fasthholdelse af Begyndelsespunktet har vi ikke gjort nogensomhelst Antagelse om, hvorvidt de to Koordinatsystemer er ens eller modsat orienterede, saaledes at de fundne Resultater omfatter begge Tilfælde; vi gaar nu over til at undersøge, paa hvilken Maade Forskellen mellem det Tilfælde, hvor de to Systemer er ens orienterede, og det Tilfælde, hvor de er modsat orienterede, giver sig Udtryk i Transformationsformlerne. Lad os hertil bemærke, at det at de to Systemer (XY) og (X_1Y_1) er ens (modsat) orienterede, aabenbart er ensbetydende med, at naar vi henfører Linierne X_1 og Y_1 til Koordinatsystemet (XY), da bliver Y_1 positiv (negativ) Normal til X_1; heraf følger, at hvis X_1 henført til Systemet (XY) har Retningscosinusserne (α_1, β_1) vil i det første Tilfælde Y_1 have Retningscosinusserne $(-\beta_1, \alpha_1)$, i det andet derimod Retningscosinusserne $(\beta_1, -\alpha_1)$. Idet imidlertid

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{vmatrix} = \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 \quad , \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_1 & -\alpha_1 \end{vmatrix} = -(\alpha_1^2 + \beta_1^2) = -1 \quad ,$$

har vi herigennem fundet Sætningen: <u>Overgangen fra et retvinklet Koordinatsystem til et andet med samme Begyndelsespunkt vil udtrykkes ved en egentlig eller en uegentlig orthogonal Substitution, eftersom de to Systemer er ens eller modsat orienterede.</u>

Vi vil meddele endnu et Bevis for denne Sætning, der har den Fordel fremfor det foregaaende umiddelbart at kunne almindeliggøres saaledes at det ogsaa kan benyttes, hvor Talen er om den tilsvarende Sætning vedrørende Koordinattransformation i Rummet. Lad R_1 og R_2 betegne de Punkter i Planen, der henført til Koordinatsystemet (XY) har henholdsvis Koordinaterne (α_1, β_1) og (α_2, β_2); disse to Punkter vil være beliggende paa henholdsvis X_1-Aksen og Y_1-Aksen i Afstanden $+1$ fra Begyndelsespunktet; man indser da umiddelbart, at $(X_1 Y_1)$ vil være ens eller modsat orienteret med (XY), eftersom Arealet af Trekanten $O R_1 R_2$ henført til Koordinatsystemet (XY) er positivt eller negativt, d. v. s. eftersom Tallet

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

er positivt eller negativt, altsaa eftersom den orthogonale Substitution (10) er egentlig eller uegentlig orthogonal. — Dette sidste Bevis giver os tillige den geometriske Fortolkning af, at Substitutionsdeterminanten for en orthogonal Substitution (i to Variable) har den numeriske Værdi 1, nemlig at Arealet af den nævnte Trekant $O R_1 R_2$ (der jo er en ligebenet, retvinklet Trekant med Kateterne 1) er lig med $\frac{1}{2}$.

Betragter vi det Tilfælde, hvor de to Systemer (XY) og $(X_1 Y_1)$ er ens orienterede (hvilket er det Tilfælde, man sædvanligvis vil anvende) og betegner vi $\sphericalangle (X X_1)$ (maalt med Fortegn i den for de to Koordinatsystemer fælles Omløbsretning) ved v, hvor v saaledes angiver den Vinkel, Koordinatsystemet (XY) skal drejes for at bringes til Dækning med Systemet $(X_1 Y_1)$, finder vi

$$\alpha_1 = \cos\nu \;,\quad \beta_1 = \sin\nu \;,\quad \alpha_2 = -\beta_1 = -\sin\nu \;,\quad \beta_2 = \alpha_1 = \cos\nu \;,$$

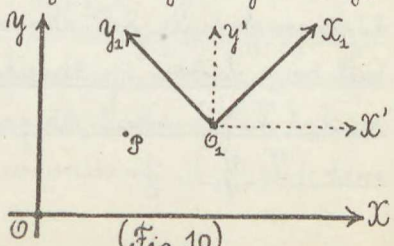
altsaa Transformationsformlerne

$$x = x_1\cos\nu - y_1\sin\nu$$
$$y = x_1\sin\nu + y_1\cos\nu \;.$$

Disse sidste Formler er netop den tidligere fundne Parameterfremstilling af en egentlig orthogonal Substitution; vi har herigennem faaet den geometriske Fortolkning af hvad Parameteren ν betyder.

Efter at vi i det foregaaende har behandlet de to specielle Transformationstyper: Parallelforskydning og Transformation med Fastholdelse af Begyndelsespunktet, kan vi nu umiddelbart løse den almindelige Transformationsopgave, hvor der er givet to retvinklede Koordinatsystemer beliggende paa fuldkommen vilkaarlig Maade overfor hinanden. Lad os antage, at Begyndelsespunktet O_1 i det „nye" System $(X_1\,Y_1)$ henført til det „gamle" System $(X\,Y)$ har Koordinaterne (a, b), samt at Akserne i Systemet $(X_1\,Y_1)$ henført til $(X\,Y)$ har henholdsvis Retningscosinusserne (α_1, β_1) og (α_2, β_2). Lad os indskyde et „Hjælpekoordinatsystem" $(X'\,Y')$, der har samme Begyndelsespunkt O_1 som Systemet $(X_1\,Y_1)$, men hvis Akser har samme Retninger som Akserne i det gamle System $(X\,Y)$. Betegner (x, y), (x', y') og (x_1, y_1) Koordinaterne til et og samme variable Punkt P, finder vi da (se Fig 10, hvor vi har antaget $(X\,Y)$ og $(X_1\,Y_1)$ ens vinkterede)

$$x = a + x' \qquad x' = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1$$
$$y = b + y' \qquad y' = \beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 \;,$$



(Fig 10).

altsaa ved Sammensætning

$$x = a + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1$$
$$y = b + \beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 \quad ,$$

der er de søgte Transformationsformler.

52. *Uendelig fjerne Elementer.* Ved talrige geometriske Undersøgelser har man Brug for, hvad man kalder at „kombinere" Punkter og rette Linier, d. v. s. dels at bestemme rette Linier, der gaar gennem givne Punkter og dels at bestemme Skæringspunkter for givne rette Linier. Medens der jo her gælder den almengyldige Sætning, at to (forskellige) Punkter P_1 og P_2 bestemmer een og kun een ret Linie (nemlig den der, henført til et retvinklet Koordinatsystem, fremstilles ved Ligningen

$$\left| \begin{matrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{matrix} \right| = 0 \quad) \quad ,$$

gælder der derimod ingen tilsvarende almengyldig (d. v. s. uden Undtagelse gældende) Sætning for Skæring af to vilkaarlige (forskellige) rette Linier. Her gælder jo kun „i Almindelighed" den Sætning, at to rette Linier skærer hinanden i et og kun et Punkt, idet jo det Tilfælde, hvor de to Linier er parallele, danner en Undtagelse herfra. Denne Omstændighed, at to rette Linier enten har et Skæringspunkt (nemlig hvis de ikke er parallele) eller intet Skæringspunkt har (nemlig hvis de er parallele) — eller set fra et analytisk Synspunkt, den Omstændighed, at to Ligninger af første Grad $Ax + By + C = 0$ og $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ kan have en Løsning (x, y), men ikke altid har en Løsning — er ved mere omfattende Under-

sögelser over Kombination af rette Linier og Punkter en meget væsentlig Ulempe, idet man derved tvinges til idelig at maatte foretage en Spaltning i Undersögelsen, nemlig at maatte skelne mellem det Tilfælde, hvor de to i Øjeblikket i Betragtning kommende rette Linier er parallele, og det Tilfælde, hvor de ikke er parallele. Denne Ulempe raader man Bod paa (i fuldstændig Analogi med den Fremgangsmaade vi benyttede, da vi indförte det uendelig fjerne Punkt i den rette Linies Geometri) ved at udvide Begreberne Punkt og ret Linie til foruden de sædvanlige" Punkter og „sædvanlige" rette Linier at omfatte, hvad man kalder Planens uendelig fjerne" Punkter og Planens „uendelig fjerne" rette Linie. Dette sker gennem følgende Definitioner.

Definition I. Enhver sædvanlig ret Linie skal siges at indeholde et og kun et uendelig fjernt Punkt, og to sædvanlige rette Linier skal da og kun da siges at indeholde (gaa igennem) det samme uendelig fjerne Punkt, naar de er parallele. Man udtrykker ogsaa ofte denne Definition saadan, at et uendelig fjernt Punkt P er en Heldning bestemt ved et eller andet Parallelbundt, og siger da om en ret Linie, at den indeholder det uendelig fjerne Punkt P, hvis den har den tilsvarende Heldning (d. v. s. tilhører det tilsvarende Parallelbundt); ved Ordet „Heldning" (Stilling i Planen) — der ikke maa forveksles med Ordet „Retning", som vi benyttede da Talen var om orienterede rette Linier — söger man at give Udtryk for netop det ved en ret Linie, som den har fælles med alle dermed parallele rette Linier, men med ingen andre.

Definition II. Samlingen af alle uendelig fjerne Punkter (af hvilke der i Følge den foregaaende Definition hører et og kun et til hvert Parallelbundt) skal kaldes Planens uendelig fjerne rette Linie.

De uendelig fjerne Punkter samt den uendelig fjerne rette Linie kaldes Planens uendelig fjerne Elementer.

Vi skal nu vise, hvorledes disse Definitioner er valgt saadan, at naar vi benytter de gennem Indførelsen af Planens uendelig fjerne Elementer almindeliggjorte Begreber „Punkt" og „ret Linie", der da ikke blot vedbliver at gælde den almengyldige Sætning: gennem to Punkter P_1 og P_2 gaar der altid een og kun een ret Linie, men at der nu ogsaa, i Modsætning til før, gælder den tilsvarende almengyldige Sætning: to rette Linier L_1 og L_2 har altid et og kun et Punkt fælles, eller som man siger, skærer altid hinanden i et og kun et Punkt.

Lad os begynde med at betragte den første af disse to Sætninger, hvor der er givet to vilkaarlige (sædvanlige eller uendelig fjerne) Punkter P_1 og P_2. Er disse Punkter begge sædvanlige Punkter, gaar der en og kun en sædvanlig ret Linie igennem dem, medens den uendelig fjerne Linie ikke gaar igennem dem (da denne Linie jo ikke indeholder noget sædvanligt Punkt); er dernæst det ene Punkt f. Eks P_1 et sædvanligt Punkt, det andet P_2 et uendelig fjernt Punkt, er Sætningen øjensynlig ogsaa rigtig, idet den jo da simpelthen udsiger, at der gennem P_1 gaar en og kun en ret Linie med den ved P_2 bestemte Heldning (d. v. s. tilhørende det ved P_2 bestemte Parallelbundt); er endelig begge Punkter P_1 og P_2 uendelig fjerne, findes der ingen sædvanlig ret Linie, der indeholder dem begge; derimod vil i dette Tilfælde den uendelige fjerne Linie gaa gennem begge de to Punkter. Hermed er Beviset for den første af de to opstillede Sætninger fuldført.

Vender vi os dernæst til den anden af de to Sætninger, indser man umiddelbart, at de to givne Linier L_1 og L_2,

hvis de begge er sædvanlige Linier og ikke er parallele, har et sædvanligt Punkt fælles, medens de, hvis de enten begge er sædvanlige og er parallele, eller hvis den ene er en sædvanlig Linie, den anden den uendelig fjerne Linie, har et uendelig fjernt Punkt fælles; de to Linier skærer altsaa i alle Tilfælde hinanden i et og kun et Punkt, saaledes som vi skulde vise.

53. Homogene Koordinater. Vi vil nu søge at vælge et simpelt Koordinatsystem, saaledes at vi ved Henføring til dette System ved Hjælp af Tal (Koordinater) kan karakterisere de almindeliggjorte Begreber Punkt og ret Linie; her gælder det naturligvis om at vælge Koordinatsystemet saaledes, at man ogsaa fra et analytisk Standpunkt opnaar en tilsvarende Simpelhed og Almengyldighed i Regningerne, som den vi har opnaaet fra et geometrisk Synspunkt. Dette sker (i Analogi med den Fremgangsmaade, vi benyttede indenfor den rette Linies Geometri) ved at benytte saakaldte homogene Koordinater. For at indføre homogene Koordinater gaar vi ud fra et sædvanligt (inhomogent) retvinklet Koordinatsystem $(X\,Y)$; vi karakteriserer imidlertid her et sædvanligt Punkt P (idet vi foreløbig kun tænker paa Planens sædvanlige Punkter) i Stedet for ved Hjælp af de to Tal x og y, der angiver Projektionerne af OP ind paa Koordinatakserne, ved tre Tal X, Y, N, af hvilke $N \neq 0$ og hvor $\frac{X}{N} = x$, $\frac{Y}{N} = y$. Herigennem er der bragt en eenentydig Forbindelse til Veje mellem Planens sædvanlige Punkter og Mængden af alle Talsæt (X, Y, N) med $N \neq 0$, idet der til ethvert sædvanligt Punkt svarer uendelig mange Talsæt (X, Y, N), der dog alle er indbyrdes proportionale, medens der til et givet Talsæt (X, Y, N) med $N \neq 0$ svarer et og kun et Punkt, nemlig

det Punkt, hvis inhomogene Koordinater er bestemt ved $x = \frac{X}{U}$, $y = \frac{Y}{U}$.

Lad os betragte en sædvanlig ret Linie L bestemt ved „Koordinaterne" (A, B, C) (hvor ikke $A = B = 0$), d. v. s. som henført til det inhomogene Koordinatsystem har Ligningen

$$Ax + By + C = 0.$$

Gaar vi nu over fra Fremstillingen af Planens sædvanlige Punkter ved inhomogene Koordinater (x, y) til Fremstillingen ved homogene Koordinater (X, Y, U), indses umiddelbart, at de sædvanlige Punkter, hvis inhomogene Koordinater tilfredsstiller Ligningen $Ax + By + C = 0$, er de samme som de, hvis homogene Koordinater tilfredsstiller Ligningen $A\frac{X}{U} + B\frac{Y}{U} + C = 0$, d. v. s. som tilfredsstiller den <u>homogene</u> Ligning

$$AX + BY + CU = 0. \tag{12}$$

Denne sidste Ligning tilfredsstilles altsaa af ethvert Sæt homogene Koordinater til ethvert sædvanligt Punkt paa Linien L, men ikke af noget Sæt homogene Koordinater til noget sædvanligt Punkt udenfor L. Den fundne homogene Ligning har imidlertid foruden de Løsninger (X, Y, U), der er Koordinater til sædvanlige Punkter, d. v. s. for hvilke $U \neq 0$, ogsaa andre egentlige (: fra Løsningen $(0, 0, 0)$ forskellige) Løsninger, nemlig de hvori $U = 0$, d. v. s. Løsningerne $k(-B, A, 0)$, hvor k er en vilkaarlig fra Nul forskellig Konstant. Da vi nu har vedtaget at tillægge den rette Linie L, foruden dens sædvanlige Punkter, endnu et Punkt, Liniens uendelig fjerne Punkt, er det naturligt (for at opnaa, at Betingelsen for at et Punkt P ligger paa Linien L, udtrykkes ved en og samme Betingelsesligning mellem Koor-

dinaterne, hvad enten P er et sædvanligt Punkt eller et uendelig fjernt Punkt) ved Definition at fastsætte, at Linjens uendelig fjerne Punkt skal karakteriseres ved Koordinaterne $k(-B, A, 0)$, hvor k er en vilkaarlig Konstant $\neq 0$, altsaa at Linjens uendelig fjerne Punkt til homogene Koordinater skal have enhver egentlig Løsning $(X, Y, 0)$ til den homogene Ligning (Linjen L's Ligning i homogene Koordinater) $AX + BY + CW = 0$.

Den trufne Vedtægt er, hvad der naturligvis maa fremhæves, ikke blot valgt saadan, at den er uafhængig af hvilken Form for Linjens Ligning vi benytter (d. v. s. det uendelig fjerne Punkt faar samme Koordinater, om vi erstatter Linjen L's Koordinater (A, B, C) med et dermed proportionalt Talsæt (A_1, B_1, C_1)), men ogsaa saadan, at den er i Overensstemmelse med den tidligere Definition, i Følge hvilken der tillagdes alle indbyrdes parallele rette Linjer det samme uendelig fjerne Punkt; thi Koordinaterne $k(-B, A, 0)$ er jo kun afhængige af Koefficienterne A og B, d. v. s. de er uafhængige af den tredie Konstant C, saaledes at Koordinaterne til Linjens uendelig fjerne Punkt kun afhænger af Linjens Heldning. (Set fra et analytisk Synspunkt er det naturligvis omvendt: paa Grund af at de egentlige Løsninger (X, Y, W) til Ligningen $AX + BY + CW = 0$, der ikke svarer til sædvanlige Punkter, d. v. s. for hvilke $W = 0$, kun afhænger af de to første Koefficienter A og B (og altsaa er de samme for alle indbyrdes parallele rette Linjer), vedtager man at tillægge parallele rette Linjer det samme uendelig fjerne Punkt). — Idet Koordinaterne (X, Y, W) til det uendelig fjerne Punkt paa Linjen L er bestemt saadan, at $W = 0$, medens (X, Y) er en vilkaarlig egentlig Løsning til Ligningen $AX + BY = 0$, indses umiddelbart, at disse Koordinater ogsaa kan karakteriseres paa følgende Maade: Som homogene Koordinater (X, Y, W) til et uendelig fjernt

Punkt bestemt ved en given Heldning skal forstaas ethvert saadant Talsæt (X, Y, W), for hvilket $W = 0$, medens (X, Y) er de inhomogene Koordinater til et vilkaarligt, fra Begyndelsespunktet O forskelligt, sædvanligt Punkt paa den af de rette Linier med den givne Heldning, der gaar gennem O. (thi denne rette Linie har jo i inhomogene Koordinater netop Ligningen $Ax + By = 0$). Gennem denne sidste Maade at karakterisere de homogene Koordinater til et uendelig fjernt Punkt paa frembgaar umiddelbart, at den tilvejebragte Forbindelse mellem Planens uendelig fjerne Punkter og Mængden af alle egentlige Talsæt (X, Y, W) med $W = 0$ er en eenydeentydig, idet der til ethvert egentligt Talsæt $(X, Y, 0)$ svarer et og kun et uendelig fjernt Punkt (nemlig det uendelig fjerne Punkt, der er bestemt ved Heldningen af den rette Linie, der forbinder Begyndelsespunktet O med det Punkt, hvis inhomogene Koordinater er (X, Y)), medens der omvendt til ethvert uendelig fjernt Punkt svarer uendelig mange egentlige Talsæt $(X, Y, 0)$, der dog alle er proportionale.

Sammenfatter vi de trufne Vedtægter vedrørende Fremstillingen af Planens Punkter ved Koordinatsæt (X, Y, W), finder vi som Resultat, at der er tilvejebragt en eenydeentydig Forbindelse mellem samtlige Planens Punkter (de sædvanlige saavel som de uendelig fjerne) og Mængden af alle egentlige (d. v. s. fra $(0, 0, 0)$ forskellige) Talsæt (X, Y, W) og saaledes, at to forskellige Talsæt da og kun da bestemmer samme Punkt, naar de er proportionale; er i det egentlige Talsæt (X, Y, W) den tredie Koordinat $W \neq 0$, vil Talsættet bestemme et sædvanligt Punkt, medens det, hvis $W = 0$, bestemmer et uendelig fjernt Punkt. Lad os tilføje den Bemærkning, at den omhandlede eenydeentydige Afhængighed mellem Planens Punkter og Mængden af alle egentlige Talsæt (X, Y, W) dog ogsaa i en vis

Forstand kan opfattes som en eenentydig Afhængighed, nemlig naar man paa Forhaand tænker sig Mængden af alle indbyrdes proportionale Talsæt fastholdt som en Enhed.

Idet vi tidligere ved Definition har fastsat, at Samlingen af alle Planens uendelig fjerne Punkter skal kaldes Planens „uendelig fjerne rette Linie", er det naturligt at kalde den Ligning $W=0$ (eller almindeligere Ligningen $CW=0$, hvor C er en vilkaarlig Konstant $\neq 0$), der karakteriserer de uendelig fjerne Punkter for Ligningen for Planens uendelig fjerne rette Linie (Set fra et analytisk Synspunkt er det naturligvis omvendt: foridi de uendelig fjerne Punkter, naar vi benytter homogene Koordinater, karakteriseres ved en homogen Ligning af første Grad (nemlig $W=0$), vedtager man at kalde Samlingen af de uendelig fjerne Punkter for en ret Linie).

Er der givet en vilkaarlig ret Linie (sædvanlig eller den uendelig fjerne), der i homogene Koordinater fremstilles ved — d. v. s. hvis Punkter i homogene Koordinater tilfredsstiller — Ligningen $AX+BY+CW=0$, vil vi betegne Koefficientsættet (A, B, C) som Linjens homogene Koordinater. Herved er der da (ganske som ved Fremstillingen af Planens Punkter ved homogene Koordinater) tilvejebragt en eenentydig Forbindelse mellem samtlige Planens rette Linier (de sædvanlige saavel som den uendelig fjerne) og Mængden af alle egentlige Talsæt (A, B, C), og en saadan, hvor to Talsæt da og kun da bestemmer samme rette Linie, naar de er proportionale; er ikke begge Tallene A og B lig med Nul, bestemmer (A, B, C) en sædvanlig ret Linie, er derimod $A=B=0$ (og følgelig $C\neq 0$) bestemmer (A, B, C) den uendelig fjerne rette Linie. — Betegner (X, Y, W) homogene „Punktkoordinater", (A, B, C) homogene „Liniekoordinater", gælder der øjensynlig

den fundamentale Sætning: Den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for at Linien (A, B, C) indeholder Punktet (X, Y, W) (eller at Punktet (X, Y, W) ligger paa Linien (A, B, C)) udtrykkes ved Ligningen

$$AX + BY + CW = 0 .$$

Som et Øvelseseksempel i Regning med homogene Koordinater vil vi vise, hvorledes de to Hovedsætninger, som vi ovenfor ad geometrisk Vej beviste, nemlig: to Punkter bestemmer een og kun een ret Linie og to rette Linier bestemmer et og kun et Punkt, ogsaa umiddelbart, naar vi benytter homogene Koordinater, kan udledes ad analytisk Vej udfra Læren om lineare homogene Ligninger. Vi bemærker hertil først, at det aabenbart er tilstrækkeligt at bevise den ene af disse Sætninger; thi paa Grund af den fuldkomne Analogi mellem homogene Punktkoordinater (X, Y, W) og homogene Liniekoordinater (A, B, C), og idet den Ligning $AX + BY + CW = 0$, der udtrykker Betingelsen for at den rette Linie (A, B, C) gaar gennem Punktet (X, Y, W) (eller at Punktet (X, Y, W) ligger paa den rette Linie (A, B, C)) jo er fuldkommen symmetrisk i (X, Y, W) og (A, B, C), d. v. s. ikke forandres, naar disse to Koordinatsæt ombyttes med hinanden, gaar Beviset for den ene af disse Sætninger umiddelbart over til Beviset for den anden, naar man blot overalt ombytter Ordene „Punktkoordinat" og „Liniekoordinat". Lad os da betragte f. Eks. den første af de to Sætninger; tænker vi os de to givne Punkter P_1 og P_2 bestemte ved de to Sæt homogene Koordinater (X_1, Y_1, W_1) og (X_2, Y_2, W_2), vil den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at en ret Linie L med de homogene Liniekoordi-

naar (A, B, C) gaar gennem de to Punkter P_1 og P_2 vare den, at (A, B, C) tilfredsstiller de to Ligninger

$$(13) \qquad \begin{aligned} A x_1 + B y_1 + C z_1 &= 0 \\ A x_2 + B y_2 + C z_2 &= 0 . \end{aligned}$$

Vi har her to homogene Ligninger, hvor Koefficientsættene (x_1, y_1, z_1) og (x_2, y_2, z_2) begge er egentlige Talsæt og ikke er proportionale (da jo P_1 og P_2 er to forskellige Punkter), d. v. s. hvor Determinanten

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

har Rangen 2. Følgelig kan (smlg. 22) den fuldstændige Løsning til de to Ligninger (13) paa Parameterform skrives: $(A, B, C) = t(\alpha, \beta, \gamma)$, hvor (α, β, γ) er en vilkaarlig egentlig Løsning; de to Ligninger (13) har altsaa egentlige Løsninger (A, B, C), men disse er alle proportionale; der findes altsaa een og kun een ret Linie L, der gaar gennem P_1 og P_2, saaledes som vi skulde vise. Idet den almindelige Løsning (A, B, C) til Ligningerne (13), som vi tidligere (22. Eks. 3) har vist, kan skrives paa Formen

$$\frac{A}{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}} = \frac{B}{\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}} = \frac{C}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} ,$$

finder vi Ligningen for den rette Linie L gennem P_1 og P_2 udtrykt ved

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} X & Y & W \\ X_1 & Y_1 & W_1 \\ X_2 & Y_2 & W_2 \end{vmatrix} = 0 ;$$

thi de tre Koefficienter til X, Y og W i denne sidste Ligning er jo netop de tre overstaaende Determinanter af 2den Orden. At (14) fremstiller en ret Linie gennem P_1 og P_2, indses iøvrigt ogsaa umiddelbart direkte; thi (14) er jo for det første en homogen Ligning af første Grad i X, Y, W (og fremstiller altsaa en ret Linie) og for det andet ses (14) umiddelbart at tilfredsstilles af Koordinaterne til P_1 og P_2

54. <u>En ret Linies Parameterfremstilling i homogene Koordinater.</u> Lad der være givet en ret Linie L ved de homogene Liniekoordinater (A, B, C) og lad os sige <u>en Parameterfremstilling for denne Linie</u>, eller korrektere en Parameterfremstilling for Liniens Punkter (X, Y, W), d. v. s. for de egentlige Løsninger (X, Y, W) til Ligningen $AX + BY + CW = 0$. Idet vi her har at gøre med kun een lineær homogen Ligning med tre Ubekendte X, Y, W, kan den fuldstændige Løsning skrives paa Parameterform ved Hjælp af to uafhængige Parametre s og t, nemlig paa Formen

$$(15) \qquad \begin{aligned} X &= \alpha_1 s + \beta_1 t \\ Y &= \alpha_2 s + \beta_2 t \\ W &= \alpha_3 s + \beta_3 t \end{aligned} ,$$

hvor $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ og $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ er to indbyrdes uafhængige (d. v. s. ikke proportionale) egentlige Løsninger, eller, hvad der aabenbart udsiger det samme, hvor $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ og $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ er Koordinater til to (vilkaarlige) af Liniens Punkter. Idet Parameterfremstil-

lingen (15), naar s og t varierer uindskrænket, giver os enhver Løsning (X, Y, W) til Ligningen $AX + BY + CW = 0$ en og kun en Gang (altsaa ikke giver samme Løsning for to forskellige Talpar (s_1, t_1) og (s_2, t_2)) indses for det første umiddelbart, at $(0,0)$ er det eneste Talpar for Parametrene, der giver os Nulløsningen $(0, 0, 0)$, ligesom man indser, at to forskellige egentlige Talpar (s_1, t_1) og (s_2, t_2) for Parametrene da og kun da giver os indbyrdes proportionale Løsninger (X_1, Y_1, W_1) og (X_2, Y_2, W_2), naar de to Talpar (s_1, t_1) og (s_2, t_2) selv er proportionale. Altsaa: en ret Linie L kan paa Parameterform fremstilles ved tre Ligninger (15), hvor Koefficientsættene $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ og $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ er homogene Koordinater til to forskellige Punkter paa Linien, og hvor Parameterparret (s, t) gennemløber alle mulige egentlige (d. v. s. fra $(0,0)$ forskellige) Talpar; to Parameterpar (s_1, t_1) og (s_2, t_2) vil da og kun da bestemme samme Punkt paa Linien (d. v. s. give indbyrdes proportionale Talsæt (X, Y, W)) naar de er proportionale. Omvendt kan man vise, at tre vilkaarlige Ligninger (15), hvor Koefficientsættene $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ og $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ikke er proportionale, og hvor s og t er to indbyrdes uafhængige uindskrænkede Parametre (der dog ikke samtidig maa antage Værdien 0), altid fremstiller en ret Linie; thi idet Determinanten

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 0 \end{vmatrix}$$

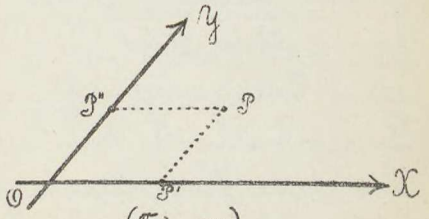
har Rangen 2, kommer vi ved Elimination af Parametrene s og t (se 23) til en homogen Ligning af første Grad, nemlig Ligningen

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & X \\ \alpha_2 & \beta_2 & Y \\ \alpha_3 & \beta_3 & W \end{vmatrix} = 0,$$

der jo (idet Nulløsningen $(0,0,0)$ lades ude af Betragtning i Overensstemmelse med, at vi har antaget $(s,t) \neq (0,0)$) vides at fremstille en ret Linie, nemlig den rette Linie, der gaar gennem Punkterne $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ og $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. — Vi afslutter hermed forelöbig Behandlingen af de retvinklede (inhomogene og homogene) Koordinater, og gaar nu over til kort at omtale den analytiske Fremstilling af Planens Punkter ved Hjælp af visse andre simple Koordinatsystemer.

55. Parallelkoordinatsystem. Lad der i en Plan være givet to sædvanlige, ikke parallele, rette Linier X og Y forsynede med positive Retninger og skærende hinanden i Punktet O; disse to orienterede rette Linier (i Forbindelse med en given Længdeenhed til Brug ved Maaling af Liniestykker) siges da at bestemme et Parallelkoordinatsystem med Begyndelsespunkt i O og Koordinatakser X og Y. Lad P være et vilkaarligt sædvanligt Punkt i Planen, og lad os gennem P drage to rette Linier parallele med henholdsvis Y-Akse og X-Akse og skærende henholdsvis X-Akse og Y-Akse i Punkterne P' og P''; vi karakteriserer nu Punktet P (se Fig 11) ved Koordinaterne

$$x = OP', \quad y = OP'';$$



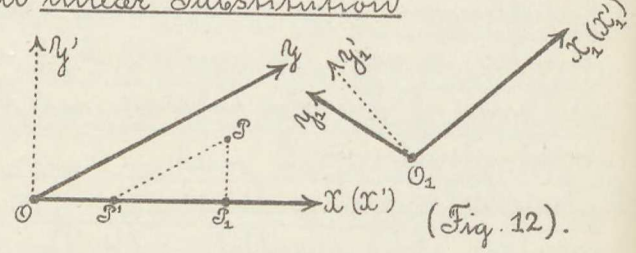
(Fig 11)

vi faar øjensynlig herved (ganske som ved det retvinklede Koordinatsystem, der jo er et specielt Tilfælde af et Parallelkoordinat-

system, nemlig svarende til at de to Akser staar vinkelret paa hinanden) tilvejebragt en eenentydig Afhængighed mellem Planens sædvanlige Punkter P og Mængden af alle Talpar (x, y).

Lad (XY) og $(X_1 Y_1)$ være to vilkaarlige Parallelkoordinatsystemer; vi vil vise, at den eenentydige Afhængighed mellem det variable Talpar (x, y) og det variable Talpar (x_1, y_1), der bestemmes ved at (x,y) og (x_1, y_1) er Koordinater til samme variable Punkt P henført til henholdsvis det ene og det andet af de to Koordinatsystemer, kan udtrykkes ved en lineær Substitution

$$x_1 = a + bx + cy$$
$$y_1 = d + ex + fy .$$



(Fig. 12).

For at bevise denne Sætning er det øjensynligt tilstrækkeligt (idet vi gør Brug af det tidligere fundne Resultat, om at Overgangen fra et retvinklet Koordinatsystem til et vilkaarligt andet retvinklet Koordinatsystem sker ved en lineær Substitution) at vise, at Overgangen fra et vilkaarligt Parallelkoordinatsystem (XY) til et retvinklet Koordinatsystem $(X'Y')$ valgt paa speciel, bekvem, Maade i Forhold til Parallelkoordinatsystemet, f. Eks. saadan at det har samme Begyndelsespunkt og samme første Akse som (XY), sker ved en lineær Substitution (og følgelig Overgangen fra $(X'Y')$ til (XY) ved den omvendte lineære Substitution); thi betegner (se Fig. 12) $(X'Y')$ og $(X_1'Y_1')$ to retvinklede Koordinatsystemer, der ligger paa den angivne Maade overfor henholdsvis det ene og det andet af de to givne Parallelkoordinatsystemer (XY) og $(X_1 Y_1)$, vil jo da Overgangen fra (XY) til $(X'Y')$, fra $(X'Y')$ til $(X_1'Y_1')$ og fra $(X_1'Y_1')$ til $(X_1 Y_1)$ ske

ved lineære Substitutioner, og følgelig vil ogsaa Overgangen fra (XY) til $(X_1 Y_1)$ ske ved en lineær Substitution, nemlig den der fremkommer ved Sammensætning af de tre foregaaende. — For nu at vise, at Overgangen fra Parallelkoordinatsystemet (XY) til det retvinklede Koordinatsystem $(X'Y')$ udtrykkes ved en lineær Substitution, betragter vi (se Fig. 12) et variabelt Punkt P, som vi vil antage henført til Koordinatsystemerne (XY) og $(X'Y')$ hvor henholdsvis Koordinaterne (x, y) og (x', y'). Projicerer vi (se Fig. 12) den brudte Linie $OP'P$ ind paa X-Aksen (eller, hvad der er det samme, paa X-Aksen) finder vi, idet vi betegner Koordinatvinklen $\sphericalangle(XY)$ (maalt i den ved det retvinklede Koordinatsystem $(X'Y')$ fastlagte Omløbsretning, d. v. s. den Omløbsretning, der gør $\sphericalangle(X'Y'') = +\frac{\pi}{2}$) med ν:

$$OP_1 = OP' + P'P\cos(XY),$$

altsaa

$$x' = x + y\cos\nu,$$

medens vi ved Projektion af $OP'P$ paa Y'-Aksen finder

$$y' = P'P\cos(Y'Y) = y\sin\nu.$$

Løser vi disse to Ligninger med Hensyn til x og y finder vi umiddelbart den omvendte Substitution, der altsaa fører over fra $(X'Y')$ til (XY), udtrykt ved Ligningerne

$$x = x' - y'\cot\nu$$
$$y = \frac{y'}{\sin\nu}.$$

Vi vil benytte den fundne Sætning om, at Overgangen fra et vil-

kaarligt Parallelkoordinatsystem til et vilkaarligt andet (eller, hvad vi her alene vil faa Brug for, at Overgangen fra et vilkaarligt Parallelkoordinatsystem til et retvinklet Koordinatsystem og omvendt Overgangen fra et retvinklet Koordinatsystem til et vilkaarligt Parallelkoordinatsystem) udtrykkes ved en lineær Substitution, til at udlede det vigtige Resultat, at der for den analytiske Fremstilling af en sædvanlig ret Linie henført til et vilkaarligt Parallelkoordinatsystem $(X\,Y)$ gælder ganske samme Sætning som den vi tidligere har fundet, da Talen var om det specielle retvinklede Koordinatsystem, nemlig: en ret Linie fremstilles ved en Ligning af første Grad $Ax + By + C = 0$, hvor af de tre Tal A, B, C, der herved karakteriserer Linien, ikke begge Koefficienterne A og B er Nul, og omvendt: enhver saadan Ligning af første Grad $Ax + By + C = 0$ fremstiller en ret Linie. For at bevise denne Sætning betragter vi sammen med det givne Parallelkoordinatsystem $(X\,Y)$ et vilkaarlig valgt retvinklet Koordinatsystem $(X'\,Y')$. Er der nu givet en ret Linie L, da ved vi, at den henført til det retvinklede System $(X'\,Y')$ fremstilles ved en Ligning af første Grad $A'x' + B'y' + C' = 0$ (hvor ikke $A' = B' = 0$), men heraf følger, at den ogsaa henført til det givne Parallelkoordinatsystem fremstilles ved en Ligning af første Grad $Ax + By + C = 0$ (hvor ikke $A = B = 0$), nemlig ved den Ligning, hvis venstre Side er det lineære Polynomium $Ax + By + C$, der fremkommer af Polynomiet $A'x' + B'y' + C'$, naar vi paa dette Polynomium anvender den lineære Substitution, der udtrykker de retvinklede Koordinater (x', y') ved Parallelkoordinaterne (x, y); thi da de to lineære Funktioner $Ax + By + C$ og $A'x' + B'y' + C'$ jo antager samme Værdi, naar vi indsætter henholdsvis Koordinaterne (x, y) og Koordinaterne (x', y') til samme variable Punkt, vil Polynomiet $Ax + By + C$ da og kun

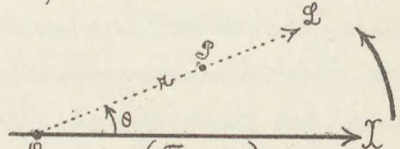
da blive Nul, naar (x, y) er Parallelkoordinater til et Punkt, hvis retvinklede Koordinater (x', y') gør Polynomiet $A'x' + B'y' + C'$ til Nul, d. v. s. som ligger paa den givne Linie L. Og omvendt, er der givet en første Grads Ligning $Ax + By + C = 0$, vil de Punkter, hvis Koordinater tilfredsstiller denne Ligning, være de samme som de Punkter, hvis retvinklede Koordinater (x', y') tilfredsstiller den første Grads Ligning $A'x' + B'y' + C' = 0$, hvis venstre Side er det lineære Polynomium, der fremkommer af det givne Polynomium $Ax + By + C$ ved Anvendelse af den lineære Substitution, der udtrykker Parallelkoordinaterne (x, y) ved de retvinklede Koordinater (x', y') (altsaa den omvendte Substitution af den vi betragtede før); men de Punkter, hvis retvinklede Koordinater (x', y') tilfredsstiller en første Grads Ligning $A'x' + B'y' + C' = 0$, vides jo netop at være Punkterne paa en ret Linie.

Vi skal ikke opholde os længere ved Omtalen af et Parallelkoordinatsystem, men skal afslutte vor Behandling heraf med den Bemærkning, at man ogsaa naar man benytter et saadant Koordinatsystem (ganske som ved det specielle retvinklede Koordinatsystem) indfører <u>homogene Koordinater</u> til Brug for saadanne Undersøgelser, ved hvilke man inddrager Planens uendelig fjerne Elementer i Betragtningen; ogsaa her bestemmer man de homogene Koordinater til et sædvanligt Punkt, hvis inhomogene Koordinater er (x, y), ved tre Tal X, Y, N, hvor $N \neq 0$ og $\frac{X}{N} = x$, $\frac{Y}{N} = y$, medens man som homogene Koordinater til et uendelig fjernt Punkt, bestemt ved en given Heldning, betegner ethvert saadant Talsæt (X, Y, N), hvor $N = 0$, og (X, Y) er de inhomogene Koordinater til et vilkaarligt, fra Begyndelsespunktet O forskelligt, sædvanligt Punkt paa den rette Linie med den givne Heldning, som gaar gennem O. Som et Blik paa den tidligere Undersøgelse over homogene

Koordinater viser, er de Resultater man opnaar ved Indførelsen af homogene Koordinater fuldkommen uafhængige af, om vi har lagt et retvinklet eller et vilkaarligt Parallelkoordinatsystem til Grund.

56. Polære Koordinater. Vi afslutter vor Gennemgang af den analytiske Plangeometris Begyndelsesgrunde med at omtale den analytiske Fremstilling af Planens Punkter henført til et saakaldt polært Koordinatsystem. Lad der i en orienteret Plan (en Plan med given Omløbsretning) være opgivet et Punkt O og en orienteret ret Linie X gaaende gennem O. Herved (i Forbindelse med en given Længdeenhed til Brug ved Maaling af Liniestykker) er der da, som man siger, fastlagt et polært Koordinatsystem med Pol O og Akse X; lad P være et vilkaarligt (sædvanligt) Punkt i Planen, og lad os forbinde dette Punkt P med Polen O ved en ret Linie L, paa hvilken vi vælger en positiv Retning; vi karakteriserer da Punktet P (se Fig. 13) ved to Tal (Koordinater) (r, θ), hvor

$$r = OP \quad , \quad \theta = \sphericalangle(XL).$$



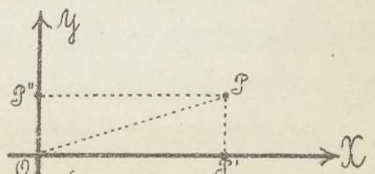
(Fig. 13)

Medens vi ved de tidligere betragtede Koordinatsystemer (det retvinklede saavelsom det almindeligere Parallelkoordinatsystem), hvor vi analytisk fremstillede Planens sædvanlige Punkter ved Hjælp af Koordinatpar (x, y), havde at gøre med en eneentydig Afhængighed, er den Forbindelse, der ved Hjælp af et polært Koordinatsystem tilvejebringes mellem Planens Punkter og Mængden af Talpar (r, θ) aabenbart en eenïendeligtydig Afhængighed; til ethvert Punkt P svarer der nemlig uendelig mange Sæt Koordinater (r, θ), der hvis

Punktet ikke netop er Polen O, kan skrives paa Formen $r = r_0$, $\theta = \theta_0 + 2p\pi$ og $r = -r_0$, $\theta = \theta_0 + (2p+1)\pi$ (hvor de første svarer til et Valg af positiv Retning, de sidste til det modsatte Valg af positiv Retning paa Linien (OP), medens Punktet P, hvis det netop er Polen O, til Koordinatsæt (r, θ) har ethvert Talsæt $(0, \theta)$, hvor θ er et fuldkommen vilkaarligt Tal; omvendt svarer der derimod til et givet Sæt Koordinater (r, θ) et og kun et Punkt P, som man kommer til ved paa den gennem Ligningen $\sphericalangle(XL) = \theta$ entydig bestemte orienterede rette Linie L at afsætte Liniestykket $OP = r$.

Ved visse Undersøgelser er det bekvemt at gaa over fra Fremstillingen af Planens Punkter ved Hjælp af et polært Koordinatsystem til Fremstillingen ved Hjælp af et retvinklet Koordinatsystem, eller omvendt. For at kunne komme over fra et vilkaarligt polært Koordinatsystem til et vilkaarligt retvinklet System er det øjensynlig tilstrækkeligt, da vi jo behersker Formlerne for Overgang fra et retvinklet System til et vilkaarligt andet retvinklet System, at undersøge Overgangen fra et polært Koordinatsystem til et retvinklet System (XY), der er beliggende paa speciel særlig bekvem Maade overfor det polære System; et saadant retvinklet Koordinatsystem har vi (se Fig. 14) i det System (XY), der har Polen O til Begyndelsespunkt og Aksen X til X-Akse, og hvor vi desuden vil antage Y-Aksen orienteret saadan, at Koordinatvinklen $\sphericalangle(XY)$ (maalt i den i Planen fastlagte Omløbsretning) er lig med $+\frac{\pi}{2}$. Er P et variabelt Punkt i Planen og angiver (r, θ) et vilkaarligt af Punktets uendelig mange polære Koordinatsæt, finder vi umiddelbart, ved Projektion af OP ind paa henholdsvis X-Akse og Y-Akse, Punktets retvinklede Koordinater (x, y) udtrykt ved

(16) $\quad x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta .$



(Fig. 14)

Ligningerne (16) udtrykker x og y entydig ved r og θ, hvad der jo stemmer med, at naar (r,θ) er givet, er Punktet P og derved atter de retvinklede Koordinater (x,y) entydig bestemt. — For omvendt at finde Formler, der udtrykker de polære Koordinater (r,θ) ved (x,y), behøver vi blot at løse Ligningerne (16) med Hensyn til r og θ. Som vi skal se, og som vi paa Forhaand kunde vide maatte være Tilfældet, har disse Ligninger for opgivne Værdier af x og y uendelig mange Løsninger (r,θ), i Overensstemmelse med at der til et opgivet Koordinatsæt (x,y), d. v. s. til et givet Punkt P svarer uendelig mange Sæt polære Koordinater. Er det givne Punkt (x,y) Polen $(0,0)$ bestemmes Løsningerne $(r\ \theta)$ til Ligningerne (16) øjensynlig ved $(0,\theta)$, hvor θ er et vilkaarligt Tal; er x og y ikke begge Nul, finder vi

$$(17)\qquad r=\pm\sqrt{x^2+y^2}\quad,\quad \cos\theta=\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}\quad,\quad \sin\theta=\frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}\ ,$$

hvor vi helt igennem skal benytte samme Fortegn for Kvadratroden (d. v. s. enten overalt Fortegnet + eller overalt Fortegnet $\div$); idet en Vinkel θ er fuldstændig bestemt (paa nær et Multiplum af 2π) naar saavel dens cosinus som dens sinus kendes, og idet en Vinkel forøges med π, naar samtidig dens cosinus og sinus skifter Fortegn, viser Ligningerne (17) det (allerede paa Forhaand givne) Resultat, at Mængden af Løsninger $(r\ \theta)$ udtrykkes paa Formen $r=r_0$, $\theta=\theta_0+2p\pi$ og $r=-r_0$, $\theta=\theta_0+(2p+1)\pi$, hvor de første Løsninger svarer til det ene, de sidste Løsninger til det andet Fortegn for Kvadratroden. (Er x og y ikke begge Nul, bestemmer man ofte Vinklen θ, i Stedet for ved dens cosinus og sinus, ved Ligningen $\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}$; benyttes denne Bestemmelsesligning maa dog erindres, for det Tilfælde at $x=0$, at Ligningen $\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}$ i Virkeligheden staar som en afkortet Betegnelse for den altid

korrekte Udtryksmaade, at Talparret $(\sin\theta, \cos\theta)$ er proportionalt med Talparret (x, y); for Kortheds Skyld skriver man dog ofte $tg\,\theta = \frac{y}{x}$, ogsaa naar $x = 0$, og siger da at $tg\,\theta$ er „Uendelig" (∞).

Naar man i den analytiske Plangeometri benytter et Koordinatsystem (f. Eks. et retvinklet eller almindeligere et Parallelkoordinatsystem) henført til hvilket Planens Punkter karakteriseres <u>eentydigt</u> ved Koordinatpar (x, y) forstaar man ved Udtryksmaaden: en Kurve fremstilles ved en vis Ligning mellem Koordinaterne, altid et og det samme, nemlig at Ligningen tilfredsstilles af Koordinaterne til ethvert Punkt paa Kurven, derimod ikke af Koordinaterne til noget Punkt udenfor Kurven. Benytter man derimod et Koordinatsystem som f. Eks. et polært Koordinatsystem, hvor der til et Punkt svarer ikke et men <u>flere</u> Sæt Koordinater, forstaar man ved Udtrykket: En Kurve fremstilles ved en vis Ligning mellem Koordinaterne, undertiden et og undertiden et andet, idet man derved <u>enten</u> mener, at Ligningen tilfredsstilles af <u>ethvert</u> Sæt Koordinater til et vilkaarligt Punkt paa Kurven, <u>eller</u> at der blandt de forskellige Sæt Koordinater til et vilkaarligt Punkt paa Kurven findes <u>mindst eet</u>, der tilfredsstiller Ligningen; i begge Tilfælde forlanges naturligvis tillige, at Ligningen ikke maa tilfredsstilles af noget Sæt Koordinater til noget Punkt udenfor Kurven. (Grunden til at vi først her, i Tilknytning til Behandlingen af det polære Koordinatsystem, gør opmærksom paa denne Tvetydighed, og ikke fremsatte den gjorte Bemærkning allerede den Gang Talen var om <u>homogene</u> Koordinater (X, Y, W), hvor vi jo ligeledes havde at gøre med en eenlindeligtydig Afhængighed mellem Planens Punkter og Mængden af Koordinatsæt, hvor der altsaa ligeledes til et Punkt svarede ikke et, men flere

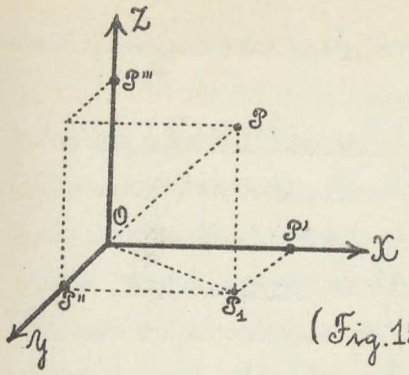
Sæt Koordinater, er den, at man, naar man benytter homogene Koordinater, altid (principielt) opererer med Ligninger af Formen $P(X, Y, Z) = 0$, hvor $P(X, Y, Z)$ er et homogent Polynomium i (X, Y, Z); og idet en saadan Ligning, hvis den har den egentlige Løsning (X_0, Y_0, Z_0), jo tillige tilfredsstilles af ethvert dermed proportionalt Talsæt (X, Y, Z), vil denne Ligning, hvis den tilfredsstilles af blot et Sæt Koordinater til et Punkt, nødvendigvis af sig selv tilfredsstilles af samtlige Punktets Koordinatsæt, saaledes at de nævnte to Definitioner paa Begrebet „en Kurves Ligning" her falder sammen). Det er nyttigt ved Undersøgelser, hvor man benytter polære Koordinater, at holde disse to forskellige Betydninger af Udtrykket en Kurves Ligning, af hvilke det ved visse Undersøgelser vil være bekvemt at benytte den ene, ved andre at benytte den anden, klart ude fra hinanden. Betragter vi eksempelvis en Cirkel med Centrum i Polen O og Radius a, vil denne Cirkel, naar vi benytter den sidste af de to Definitioner (d. v. s. kun forlanger, at der blandt de forskellige Sæt Koordinater (r, θ) til et vilkaarligt Punkt paa Cirklen skal findes saadanne (mindst ét), der tilfredsstiller Ligningen), kunne fremstilles ved Ligningen $r = a$ (eller ved Ligningen $r = -a$), medens man derimod, naar man benytter den første Definition (altsaa forlanger, at Ligningen skal tilfredsstilles af samtlige Koordinater til Cirklens Punkter) maa benytte Ligningen $r^2 = a^2$. Lad os tilføje den almindelige Bemærkning, at hvis en Kurve, henført til det retvinklede Koordinatsystem (XY) med Polen til Begyndelsespunkt og Aksen til X-Akse, er givet ved en Ligning mellem Koordinaterne x og y, f. Eks ved en algebraisk Ligning $P(x, y) = 0$, hvor P er et Polynomium

i x og y, vil den nye Ligning i r og θ, der fremkommer af Ligningen $P(x,y)=0$ ved for x at indsætte $r\cos\theta$ for y at indsætte $r\sin\theta$, øjensynlig fremstille Kurven i den førstnævnte Forstand, d. v. s. den vil tilfredsstilles af <u>samtlige</u> Koordinater til ethvert Punkt paa Kurven (og ikke af noget Sæt Koordinater til noget Punkt udenfor Kurven); dette følger umiddelbart af, at Ligningerne $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ gælder for <u>ethvert</u> Sæt polære Koordinater til Punktet (x,y), saaledes at de to Tal $P(x,y)$ og $P(r\cos\theta, r\sin\theta)$ er ligestore, hvilket polært Koordinatsæt (r,θ) til Punktet (x,y) vi end betragter (gaar vi eksempelvis ud fra Cirkelligningen i retvinklede Koordinater $x^2+y^2=a^2$, finder vi, naar vi indsætter $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, Ligningen $r^2=a^2$ — og ikke f. Eks. Ligningen $r=a$). Lad os som et Øvelseseksempel i Behandlingen af polære Koordinater bestemme Ligningen for en given ret Linie gennem Polen O, som vi vil antage ikke er vinkelret paa Aksen, og som altsaa i retvinklede Koordinater har Ligningen $y=x\cdot tg\,v$, hvor $tg\,v$ er Liniens Retningskoefficient; indsætter vi for x og y henholdsvis $r\cos\theta$ og $r\sin\theta$, finder vi Linieens Ligning i polære Koordinater udtrykt ved $r\sin\theta = r\cos\theta\cdot tg\,v$; denne Ligning tilfredsstilles i Følge sin Udledelse af ethvert Sæt polære Koordinater til ethvert Punkt paa den rette Linie, hvad der jo ogsaa umiddelbart fremgaar af Ligningen, idet den jo tilfredsstilles af $\theta=v+p\pi$ (d. v. s. $tg\,\theta=tg\,v$) i Forbindelse med en vilkaarlig Værdi af r, samt desuden af Koordinaterne $(0,\theta)$ for enhver Værdi af θ. Benytter vi imidlertid den anden Definition paa en „Kurves Ligning", d. v. s. forlanger vi kun at Ligningen skal tilfredsstilles af mindst eet Sæt Koordinater til et vilkaarligt Punkt paa Linieen, kan vi for det første uden videre bortkaste Faktoren r (hvis Tilstedeværelse, naar vi benytter den første Definition, er nødvendig for at Ligningen skal tilfredsstilles af samtlige Polens

Koordinatsæt); den fremkomne Ligning: $\sin\theta = \cos\theta \cdot \operatorname{tg} v$ tilfredsstilles ligesom før af ethvert Sæt Koordinater til ethvert fra Polen forskelligt Punkt paa Linien, men derimod ikke mere af samtlige Polens Koordinatsæt, men kun af nogle af disse, nemlig $(0, v + p\pi)$; endvidere kan vi nu dividere Ligningen med $\cos\theta$ (altsaa skrive den paa Formen $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg} v$), thi Ligningen $\sin\theta = \cos\theta \cdot \operatorname{tg} v$ tilfredsstilles jo ikke af noget Sæt Koordinater (r, θ) for hvilket $\cos\theta = 0$; endelig kan vi erstatte Ligningen $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg} v$ med den endnu simplere Ligning $\theta = v$, der tilfredsstilles af et og kun et Sæt Koordinater til ethvert af Liniens Punkter. — Betragter vi almindeligere en vilkaarlig ret Linie, som vi vil antage i retvinklede Koordinater (x, y) har Ligningen $x\cos v + y\sin v + p = 0$, finder vi dens Ligning i polære Koordinater at være $r\cos\theta\cos v + r\sin\theta\sin v + p = 0$, eller sammentrukket $r\cos(\theta - v) + p = 0$; denne Ligning findes ogsaa ved at projicere „Radius vektor" OP til et vilkaarligt Punkt P paa Linien ind paa Liniens Normal.

C. Rummets analytiske Geometri.

57. Retvinklet Koordinatsystem. Lad der i Rummet være givet tre paa hinanden vinkelrette rette Linier X, Y, Z gaaende gennem et og samme Punkt O og forsynede med positive Retninger. Disse tre rette Linier (i Forbindelse med en given Længdeenhed til Brug ved Maaling af Liniestykker) bestemmer et saakaldt retvinklet Koordinatsystem $(X\ Y\ Z)$ med Begyndelsespunkt O, Koordinatakser X, Y, Z og Koordinatplaner (YZ), (ZX), (XY); man karakteriserer ved Hjælp af dette Koordinatsystem et vilkaarligt Punkt P i Rummet ved de tre Tal (Koordinater)



(Fig. 15)

$x = OP'$, $y = OP''$, $z = OP'''$,

der (se Fig. 15) angiver Projektionerne af OP ind paa de tre Koordinatakser X, Y, Z. Paa denne Maade tilvejebringes en eenetydig Afhængighed mellem Rummets Punkter og Mængden af alle Talsæt (x, y, z), idet der til ethvert Punkt P svarer et og kun et Sæt Koordinater (x, y, z), medens der omvendt til et givet Talsæt (x, y, z) eksisterer et og kun et Punkt, der netop har dette Talsæt til Koordinater. — Koordinaterne (x, y, z) til et Punkt kan øjensynlig ogsaa karakteriseres som de (med Fortegn regnede) Afstande fra Koordinatplanerne (YZ), (ZX), (XY) til Punktet P, eller man kan f. Eks. karakterisere Koordinaterne (x, y, z) til et Punkt P saadan, at de to første (x, y) bestemmer Punktets Projektion P_1 ned paa (XY)-Planen, henført til det plane retvinklede Koordinatsystem (XY), medens den tredie Koordinat z angiver Afstanden (regnet med Fortegn i Overensstemmelse med Z-Aksens positive Retning) fra (XY)-Planen til P. — Idet Afstanden OP fra Begyndelsespunktet til Punktet P: (x, y, z) er Hypotenuse i en retvinklet Trekant med Kateterne $z = P_1P$ og $OP_1 = \sqrt{x^2+y^2}$, faas umiddelbart Ligningen

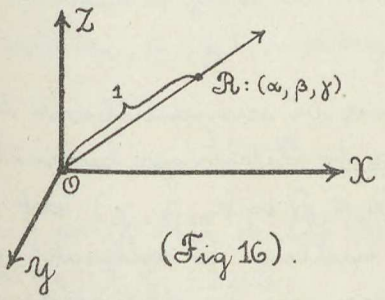
$$OP^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

er specielt $z = 0$, d. v. s. ligger Punktet P i (XY)-Planen, gaar

denne Formel over til den før brugte, fra den analytiske Plangeometri bekendte, Formel $OP^2 = x^2 + y^2$.

58. Retning og Retningscosinusser. Ved et Parallelknippe forstaas en Samling af parallele rette Linier, der tilsammen udfylder hele Rummet. Man siger (ligesom indenfor den plane Geometri) om en ret Linie, at den er orienteret, hvis den er forsynet med positiv Retning, og man siger om et Parallelknippe, at det er et orienteret Parallelknippe, hvis alle de enkelte Linier i Knippet er orienterede, og saaledes at deres positive Retninger stemmer overens, d. v. s. saaledes at de positive Retninger paa to vilkaarlige af Linierne falder sammen, naar de to Linier ved Parallelforskydning bringes til Dækning med hinanden. Et orienteret Parallelknippe siges at bestemme en Retning i Rummet, og man siger om Linierne i Knippet, at de alle har den samme (nemlig den ved Knippet bestemte) Retning. Skifter man positiv Retning paa alle Linierne i et orienteret Parallelknippe, siger man om det nye orienterede Parallelknippe, der derved fremkommer, at dets Retning er den modsatte af Retningen af det oprindelige Knippe. I fuldkommen Analogi med den Maade, hvorpaa vi indenfor den analytiske Plangeometri gennem Tal (Retningscosinusser) karakteriserede en Retning i Planen, karakteriser vi en Retning i Rummet (altsaa et orienteret Parallelknippes Retning) ved de tre Tal α, β, γ, der angiver Cosinusserne til de tre Vinkler (XL), (YL), (ZL), som en vilkaarlig af Knippets Linier L (ligegyldig hvilken) danner med henholdsvis X-Aksen, Y-Aksen og Z-Aksen. Disse Tal kaldes Knippets (ligesom ogsaa de i Knippet indeholdte Liniers) Retningscosinusser. Idet der er fastlagt positive Retninger paa

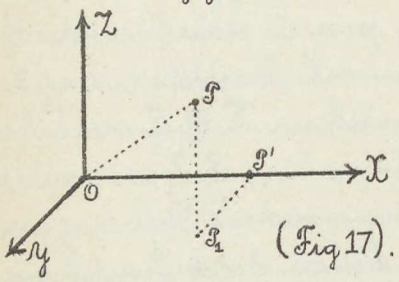
Linierne X, Y, Z, L, medens der derimod ikke er angivet nogen positiv Omløbsretning i Planerne $(XL), (YL)$ og (ZL), er disse tre Vinkler (paa Mangefold af 2π nær) kun bestemt paa Fortegnet nær; derimod er de tre Retningscosinusser $\alpha = \cos(XL), \beta = \cos(YL), \gamma = \cos(ZL)$ fuldstændig bestemt. Idet Cosinus til en Vinkel skifter Fortegn, naar Vinklen forøges med π, ses umiddelbart, at hvis en Retning er karakteriseret ved Retningscosinusserne (α, β, γ), vil den modsatte Retning have Retningscosinusserne $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$. Lad P_1 og P_2 være to Punkter paa en orienteret ret Linie med Retningscosinusserne (α, β, γ); da vil Projektionen af Liniestykket P_1P_2 ned paa de tre Koordinatakser X, Y, Z være bestemt ved henholdsvis $P_1P_2 \cdot \alpha$, $P_1P_2 \cdot \beta$, $P_1P_2 \cdot \gamma$, hvor P_1P_2 er regnet med Fortegn i Overensstemmelse med den positive Retning paa L. Heraf følger specielt (se Fig 16), idet R betegner det Punkt paa en orienteret ret Linie gennem Begyndelsespunktet O med Retningscosinusserne (α, β, γ), for hvilket $OR = +1$, at Projektionen af OR ned paa Akserne er henholdsvis lig med α, β, γ, d. v. s. at R har Koordinaterne (α, β, γ). <u>Retningscosinusserne (α, β, γ) til en given Retning er følgelig lig med Koordinaterne til det Punkt R paa Enhedskuglen</u>, d. v. s. paa Kuglefladen med Centrum i Begyndelsespunktet og Radius 1, <u>for hvilket Linien OR, orienteret saaledes at OR er positiv, har den givne Retning</u>. Betragter vi efterhaanden alle mulige Retninger i Rummet, vil det tilsvarende Punkt R med Koordinaterne (α, β, γ) igjennemløbe Enhedskuglen, saaledes at vi faar hvert Punkt paa denne Kuglefladen med een og kun een Gang; heraf følger for det første, at <u>to forskellige Retninger besidder forskellige Sæt Ret-</u>



(Fig 16).

ningscosinusser, samt endvidere at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for at tre Tal (α, β, γ) er Retningscosinusser for en eller anden Retning er den, at Punktet med Koordinaterne (α, β, γ) er beliggende paa Enhedskuglen, d. v. s. at $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$.

Lad P betegne et vilkaarligt Punkt i Rummet med Koordinater (x, y, z) og lad $\overline{P}$ være Projektionen af P ind paa en orienteret ret Linie (α, β, γ) (d. v. s. med Retningscosinusserne α, β, γ) gennem Begyndelsespunktet. Idet vi (se Fig. 17) kan komme fra O til P ad en brudt Linie $OP'P_1P$, hvor OP', $P'P_1$ og P_1P er lig med henholdsvis x, y og z i Størrelse og Retning, finder vi umiddelbart ved Anvendelse af Projektionssætningen, at Projektionen $O\overline{P}$ af Liniestykket OP ind paa Linien L bestemmes ved Ligningen



(Fig. 17).

$$(1) \qquad O\overline{P} = \alpha x + \beta y + \gamma z .$$

Ved at gøre Brug af denne Formel kan vi umiddelbart bestemme Cosinus til Vinklen u mellem to Retninger, bestemte henholdsvis ved Retningscosinusserne (α, β, γ) og $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, idet vi ved denne Vinkel u forstaar Vinklen mellem to vilkaarlige Linier L og L_1, der har henholdsvis den ene og den anden af de givne Retninger. (Idet vi intet har udtalt om, udfra hvilken af de to Linier L og L_1 Vinklen skal regnes, ligesom der heller ikke er fastlagt nogen positiv Omløbsretning til Bestemmelse af denne Vinkel, er u ejensynlig kun bestemt paa nær sit Fortegn, hvorimod $\cos u$ er fuldstændig bestemt). Lad os i dette Øjemed projicere Liniestykket OR_1, hvor R_1 er det Punkt paa Enhedskuglen, hvis Koordinater er $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$

ind paa den gennem Begyndelsespunktet O gaaende orienterede rette Linie (α, β, γ). Idet Projektionen $O\overline{R_1}$ jo paa den ene Side er lig med $+1 \cdot \cos u$ og paa den anden Side efter Ligningen (1) er lig med $\alpha \cdot \alpha_1 + \beta \cdot \beta_1 + \gamma \cdot \gamma_1$, finder vi umiddelbart Formlen

$$(2) \qquad \cos u = \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 .$$

Bestemmer (α, β, γ) og $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ een og samme Retning, d. v. s. er $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$, giver Ligningen (2) os Resultatet $\cos u = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, stemmende med at u her er lig med Nul, ligesom vi i det Tilfælde hvor (α, β, γ) og $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ bestemmer modsatte Retninger, d. v. s. $\alpha_1 = -\alpha$, $\beta_1 = -\beta$, $\gamma_1 = -\gamma$, finder $\cos u = -(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = -1$, stemmende med, at u her er lig med π. Betingelsen for at Retningen (α, β, γ) er <u>vinkelret paa</u> Retningen $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, d. v. s. for at en vilkaarlig Linie med Retningscosinusserne (α, β, γ) er vinkelret paa en vilkaarlig Linie med Retningscosinusserne $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, udtrykkes i Følge (2) ved Ligningen

$$(3) \qquad \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0 ,$$

idet jo u her er lig med $\frac{\pi}{2}$ (eller, for at nævne alle Værdier for u, $\pm \frac{\pi}{2} + 2p\pi$).

59. <u>Den rette Linies Parameterfremstilling</u>. Lad os karakterisere en orienteret ret Linie L ved Tallene $x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma$, idet (x_0, y_0, z_0) er Koordinaterne til et Punkt P_0 paa L, og (α, β, γ) er Retningscosinusserne for L. (For en given orienteret ret Linie er af de nævnte 6 Tal $x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma$ de tre sidste eentydig bestemt som Liniens Retningscosinusser, medens de tre første (x_0, y_0, z_0) til en vis Grad kan vælges vilkaarligt, idet de er underkastet den og kun den Betingelse at skulle være Koordinater til

et Punkt paa L). Lad P med Koordinater (x, y, z) være et variabelt Punkt paa Linien L, og lad os betegne den variable Afstand P_0P (maalt med Fortegn) fra det faste Punkt (x_0, y_0, z_0) til det variable Punkt (x, y, z) med r; vi finder da umiddelbart ved Projektion af P_0P med paa de tre Koordinatakser Ligningerne: $x - x_0 = \alpha r$, $y - y_0 = \beta r$, $z - z_0 = \gamma r$, d. v. s. Ligningerne

$$(4) \qquad x = x_0 + \alpha r, \quad y = y_0 + \beta r, \quad z = z_0 + \gamma r.$$

Lader vi i de tre Ligninger (4) (der sammenknytter de til det variable Punkt P hørende Tal (x, y, z, r) med de givne Tal $(x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma)$, der tjener til at karakterisere Linien) r gennemløbe alle mulige Værdier, vil det tilsvarende Punkt P med Koordinater (x, y, z) gennemløbe den rette Linie L, saaledes at vi faar alle Punkter paa L med og hvert kun een Gang. Vi siger om Ligningerne (4), at de, idet r betegner en uindskrænket Variabel, giver en Parameterfremstilling af den rette Linie L. Ligningerne (4) skrives undertiden paa Formen

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} = r,$$

hvor man imidlertid for det Tilfælde, at et eller to af Talene α, β, γ er lig med Nul, maa erindre at denne Skrivemaade i Virkeligheden kun staar som en anden Betegnelse for de tre Ligninger (4). (Skifter vi positiv Retning paa Linien L, hvorved (α, β, γ) ombyttes med $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$, gaar Ligningerne (4) over til Ligningerne

$$x = x_0 - \alpha r, \quad y = y_0 - \beta r, \quad z = z_0 - \gamma r;$$

denne nye Parameterfremstilling for Linien L afviger kun fra den forrige ved Fortegnet for r, hvad der stemmer med at Afstanden fra det faste Punkt P_0 til det variable Punkt P jo nu regnes positiv til modsat Side af før). Af det ovenstaaende følger specielt, at enhver ret Linie L (iøvrigt paa uendelig mange forskellige Maader), kan fremstilles ved en Parameterfremstilling paa Formen

$$(5) \qquad x = a + bt, \quad y = c + dt, \quad z = e + ft,$$

hvor af de 6 Konstanter a, b, c, d, e, f, der herved karakteriserer Linien, ikke alle tre Koefficienter b, d, f til Parameteren t er lig med Nul, og hvor t er en uindskrænket Variabel. Vi vil bevise den omvendte Sætning, nemlig at enhver Parameterfremstilling (5), hvori ikke alle tre Tal b, d, f er lig med Nul, og hvori t betegner en uindskrænket Variabel, fremstiller en ret Linie, d. v. s. at Punktet P: (x, y, z), naar t gennemløber alle mulige Talværdier, gennemløber en ret Linie, saaledes at vi faar ethvert Punkt paa Linien med een og kun een Gang, og ingen andre Punkter. For at indse dette behøver vi blot i Stedet for Parameteren t at indføre en ny uindskrænket Variabel r, bestemt ved Ligningen $t = q \cdot r$, hvor q er bestemt saaledes, at Tallene $\alpha = qb$, $\beta = qd$, $\gamma = qf$ har Kvadratsummen 1 (altsaa hvor $q = \frac{1}{\pm\sqrt{b^2+d^2+f^2}}$); herved gaar Ligningerne (5) over til Ligningerne

$$x = a + \alpha r, \quad y = c + \beta r, \quad z = e + \gamma r,$$

hvor $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, og disse sidste tre Ligninger vides jo i Følge det foregaaende at fremstille en ret Linie, nemlig den

rette Linie, der gaar gennem Punktet (a, c, e) og (efter et passende Valg af positiv Retning) tilhører det Parallelknippe, der har Retningscosinusserne α, β, γ. Det er klart, at naar vi til Bestemmelse af Punkterne paa en ret Linie L benytter en Parameterfremstilling (5), er de 6 Konstanter a, b, c, d, e, f, der herved karakteriserer Linien, ikke entydig bestemt, d. v. s. at vi for een og samme rette Linie kan vælge de 6 Tal til en vis Grad vilkaarligt; vi kan nemlig til Tallene a, c, e vælge Koordinaterne til et vilkaarligt Punkt paa L og til Tallene b, d, f vælge et vilkaarligt Sæt Retningstal, d. v. s. Tal, der er proportionale med Linjens Retningscosinusser, efter at der er valgt en positiv Retning paa L; Mængden af alle Sæt Retningstal er selvfølgelig den samme, uafhængigt af hvilken positiv Retning, vi tillægger Linien L.

En ret Linie gaaende gennem de to (forskellige) Punkter $P_1 : (x_1, y_1, z_1)$ og $P_2 : (x_2, y_2, z_2)$ kan fremstilles paa Parameterform ved Ligningerne

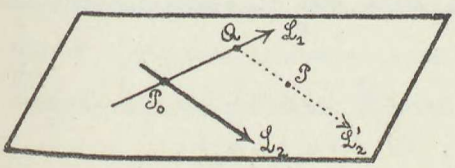
$$(6) \qquad x = x_1 + (x_2 - x_1)\,t\,, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)\,t\,, \quad z = z_1 + (z_2 - z_1)\,t\,;$$

thi idet $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ ikke alle er 0, fremstiller Ligningerne (6) i Følge det foregaaende en ret Linie, og denne ses umiddelbart at gaa gennem P_1 og P_2, idet vi for $t = 0$ finder $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ og for $t = 1$ finder $x = x_2$, $y = y_2$, $z = z_2$. (At den ved Ligningerne (6) fremstillede rette Linie ikke blot gaar gennem P_1, men ogsaa gennem P_2, indses ogsaa umiddelbart udfra det foregaaende derigennem, at der, naar vi paa Linien gennem P_1 og P_2 fastlægger en positiv Retning, og denne har Retningscosinusserne (α, β, γ), jv. gælder Ligningerne

$$x_2 - x_1 = P_1P_2 \cdot \alpha\,, \quad y_2 - y_1 = P_1P_2 \cdot \beta\,, \quad z_2 - z_1 = P_1P_2 \cdot \gamma\,,$$

saaledes at Koefficientsættet $(x_2-x_1\,,\ y_2-y_1\,,\ z_2-z_1)$ til Parameteren t er proportionalt med Talsættet (α, β, γ), d. v. s. Koefficientsættet $(x_2-x_1\,,\ y_2-y_1\,,\ z_2-z_1)$ er et Sæt Retningstal for Linien P_1P_2).

60. Planens Parameterfremstilling. Lad os karakterisere en Plan Π ved Tallene $x_0, y_0, z_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, idet (x_0, y_0, z_0) angiver Koordinaterne til et Punkt P_0 i Planen Π, medens $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ og $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ er to saadanne Sæt Retningscosinusser, at Planen Π baade indeholder Linier med Retningscosinusserne $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ og Linier med Retningscosinusserne $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$; vi antager at $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ hverken er lig med $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ eller lig med $(-\alpha_1, -\beta_1, -\gamma_1)$, altsaa at de to Sæt Retningscosinusser hverken bestemmer een og samme Retning eller to modsatte Retninger. Ved Opgivelsen af disse ni Tal er Planen Π fuldstændig bestemt; derimod kan man naturligvis for een og samme Plan Π vælge de ni Tal paa mangfoldige Maader. Lad os gennem Punktet P_0 drage to rette Linier L_1 og L_2 (se Fig 18), af hvilke den første har Retningscosinusserne $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, den anden Retningscosinusserne $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$; disse to rette Linier er da begge beliggende helt i Planen Π.



(Fig 18)

Lad P med Koordinaterne (x, y, z) være et variabelt Punkt i Planen Π, og lad os gennem P trække en ret Linie parallel med L_2 og orientere den i Overensstemmelse med L_2; lad denne Linie L'_2 skære L_1 i Q. Betegner vi Afstandene P_0Q og QP, regnet med Fortegn paa Linierne L_1 og L'_2, med henholdsvis r_1 og r_2, faar Q Koordinaterne

$$(x', y', z') = (x_0 + \alpha_1 r_1 , y_0 + \beta_1 r_1 , z_0 + \gamma_1 r_1)$$

og P Koordinaterne

$$(x, y, z) = (x' + \alpha_2 r_2 , y' + \beta_2 r_2 , z' + \gamma_2 r_2) ;$$

Følgelig finder vi Koordinaterne (x, y, z) til P bestemte ved

$$(7) \qquad x = x_0 + \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 , \; y = y_0 + \beta_1 r_1 + \beta_2 r_2 , \; z = z_0 + \gamma_1 r_1 + \gamma_2 r_2 .$$

Lader vi i de tre Ligninger (7) Talparret (r_1, r_2) gennemløbe alle mulige Talpar, vil det tilsvarende Punkt P med Koordinator (x, y, z) øjensynlig gennemløbe Planen Π, saaledes at vi faar ethvert Punkt i Π med een og kun een Gang, og ingen andre. Man siger om Ligningerne (7), at de idet r_1 og r_2 betegner to indbyrdes uafhængige og uindskrænkede Variable, giver en Parameterfremstilling af Planen Π.

Af det ovenstaaende følger specielt at enhver Plan Π (paa mendelig mange Maader) kan fremstilles ved en Parameterfremstilling paa Formen

$$(8) \qquad x = a + a_1 s + a_2 t , \; y = b + b_1 s + b_2 t , \; z = c + c_1 s + c_2 t ,$$

hvor blandt de 9 Konstanter $a, a_1, a_2 \ldots c, c_1, c_2$, der herved karakteriserer Planen, hverken alle tre Tal a_1, b_1, c_1 eller alle tre Tal a_2, b_2, c_2 er Nul, og hvor Talsættet (a_1, b_1, c_1) ikke er proportionalt med Talsættet (a_2, b_2, c_2). Vi vil bevise den omvendte Sætning: Enhver Parameterfremstilling (8), hvor begge Talsættene (a_1, b_1, c_1) og (a_2, b_2, c_2) er egentlige og ikke proportionale, fremstiller, idet s og t er to indbyrdes uafhængige uindskræn-

kede Variable, en Plan. For at indse dette behøver vi blot i Stedet for Parametrene s og t at indføre to nye uindskrænkede Variable r_1 og r_2 bestemte ved Ligningerne $s = q_{f1} r_1$ og $t = q_{f2} r_2$, hvor $q_{f1} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}$ og $q_{f2} = \frac{1}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$; herved gaar Ligningerne (8) jo over til Ligningerne

$$x = a + \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \,,\quad y = b + \beta_1 r_1 + \beta_2 r_2 \,,\quad z = c + \gamma_1 r_1 + \gamma_2 r_2 \,,$$

hvor $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1$, og disse tre sidste Ligninger vides jo at fremstille en Plan, nemlig den Plan, der gaar gennem Punktet (a, b, c) og indeholder saavel Linier med Retningen $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ som Linier med Retningen $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, hvor $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ og $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ hverken bestemmer en og samme Retning eller to modsatte Retninger.

61. Planens Ligning. Af den fundne Sætning om, at enhver Plan (i øvrigt paa uendelig mange Maader) kan fremstilles paa Parameterform ved tre Ligninger af Formen (8), hvor begge Talsæt $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ og $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ er egentlige og ikke proportionale, og at omvendt ethvert Sæt Ligninger (8), der er underkastet disse Betingelser, fremstiller en Plan, udleder man umiddelbart følgende Sætning: Enhver Plan kan fremstilles ved en Ligning af første Grad

$$(9) \qquad Ax + By + Cz + D = 0 \,,$$

hvor (A, B, C) er et egentligt Talsæt, og omvendt vil enhver Ligning (9), hvori (A, B, C) er et egentligt Talsæt fremstille en Plan, nøjagtigere formuleret: Til enhver Plan Π svarer der fire Tal A, B, C, D (Planens Koefficienter eller Koordinater), hvor (A, B, C) er et egentligt Talsæt, saaledes at Mængden af Planens Punkter er identisk med Mængden af Punkter P, hvis

Koordinater tilfredsstiller Ligningen (9), og omvendt vil Mængden af Punkter P, hvis Koordinater (x,y,z) er en Løsning til en given Ligning af Formen (9), hvor Talsættet (A, B, C) er egentligt, netop være samtlige Punkter i en vis Plan Π. Beviset følger umiddelbart udfra tidligere Resultater vedrørende Løsningen af lineære Ligninger; thi
1) er der givet en Plan Π, som vi kan antage givet ved Parameterfremstillingen

$$x-a = a_1 s + a_2 t,\quad y-b = b_1 s + b_2 t,\quad z-c = c_1 s + c_2 t,$$

hvor begge Talsæt (a_1, b_1, c_1) og (a_2, b_2, c_2) er egentlige og ikke proportionale, da vil de Værdisæt $(x-a, y-b, z-c)$, der fremkommer, naar s og t uafhængig af hinanden gennemløber alle mulige Talværdier, altsaa Værdisættene

$$(x-a, y-b, z-c) = s\,(a_1, b_1, c_1) + t\,(a_2, b_2, c_2),$$

stemme overens med de Værdisæt $(x-a, y-b, z-c)$, der tilfredsstiller den ved Elimination af s og t fremkomne Ligning (se 23)

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0,$$

altsaa en Ligning af Formen $Ax + By + Cz + D = 0$, hvor Talsættet (A, B, C) er egentligt, i det ikke alle tre Tal

$$A = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},\quad B = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix},\quad C = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

er lig med Nul. Og

2) er der forelagt en Ligning $Ax+By+Cz+D=0$, hvor Talsættet (A,B,C) er et egentligt Talsæt, kan vi for det første aabenbart ved passende Valg af Talsættet (x_0,y_0,z_0) skrive denne Ligning paa Formen

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\,;$$

den fuldstændige Løsning til denne homogene Ligning $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ i de tre Ubekendte (Variable) $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ kan imidlertid skrives paa Formen

$$(x-x_0,\,y-y_0,\,z-z_0)=s(a_1,b_1,c_1)+t(a_2,b_2,c_2),$$

hvor (a_1,b_1,c_1) og (a_2,b_2,c_2) er to indbyrdes uafhængige Løsninger (d. v. s. to egentlige, ikke proportionale Løsninger), medens s og t er to uindskrænkede Variable; den fuldstændige Løsning til den givne Ligning $Ax+By+Cz+D=0$ bliver da

$$x=x_0+a_1s+a_2t\,,\quad y=y_0+b_1s+b_2t\,,\quad z=z_0+c_1s+c_2t\,,$$

der jo vides at fremstille en Plan.

Idet to Ligninger af første Grad

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad\text{og}\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\,,$$

hvor baade (A,B,C) og (A_1,B_1,C_1) er egentlige Talsæt, da og kun da har ganske de samme Løsninger, naar Talsættene (A,B,C,D) og (A_1,B_1,C_1,D_1) er proportionale, indses, at <u>to Ligninger af første Grad da og kun da fremstiller den samme Plan, naar den ene</u>

af Ligningerne fremkommer af den anden ved Multiplikation med en (fra Nul forskellig) Konstant.

Karakteriserer vi en Plan Π ved de 4 Tal A, B, C, D (hvor (A, B, C) er et egentligt Talsæt), der indgaar som Koefficienter i Planens Ligning, vil Planen vel være fuldstændig bestemt, naar disse 4 Tal er givne; derimod vil disse Tal ikke være entydig bestemt, naar Planen Π er givet, idet de jo, som vi har set, kan variere proportionalt. Planen kan derfor i Virkeligheden siges at karakteriseres ved tre Forhold mellem de 4 Tal A, B, C, D eller som man siger: (A, B, C, D) er homogene Koordinater til Planen.

Lad os betragte to Planer $Ax + By + Cz + D = 0$ og $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, hvor vi udtrykkelig antager, at Ligningerne fremstiller to forskellige Planer, d. v. s. vi antager, at de to Talsæt (A, B, C, D) og (A_1, B_1, C_1, D_1) ikke er proportionale. Vi indser da, at Betingelsen for at de to Planer er parallele, er den, at de to Talsæt (A, B, C) og (A_1, B_1, C_1) er proportionale; thi idet det er antaget, at de to Talsæt (A, B, C, D) og (A_1, B_1, C_1, D_1) ikke er proportionale, er denne Betingelse (smlg. Opg. 17) nødvendig og tilstrækkelig for at de to givne Ligninger ingen Løsninger har, d. v. s. for at de to Planer ikke skærer hinanden.

Ovenfor hvor vi talte om Parameterfremstilling af en Plan, tænkte vi os denne bestemt ved at skulle gaa gennem et givet Punkt og indeholde Linier med to givne Retninger. Vi vil nu søge Ligningen for en Plan Π bestemt ved at skulle gaa gennem tre givne Punkter $P_2: (x_2, y_2, z_2)$, $P_3: (x_3, y_3, z_3)$, $P_4: (x_4, y_4, z_4)$, om hvilke vi antager, at de ikke ligger paa een og samme rette Linie. Denne Bestemmelse henfører vi til den forrige, idet vi om Planen Π siger, at den skal gaa gennem Punktet $P_2: (x_2, y_2, z_2)$ og indeholde Linier med de to (i Følge den givne Antagelse forskellige og ikke modsatte) Retninger, der faas ved paa vilkaarlig Maade at ori-

ensbetydende Linierne P_2P_3 og P_2P_4. Til Retningerne P_2P_3 og P_2P_4 svarer henholdsvis Retningstallene $(x_3-x_2, y_3-y_2, z_3-z_2)$ og $(x_4-x_2, y_4-y_2, z_4-z_2)$; i Følge det foregaaende bliver da Planens Ligning

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x_3-x_2 & y_3-y_2 & z_3-z_2 \\ x_4-x_2 & y_4-y_2 & z_4-z_2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

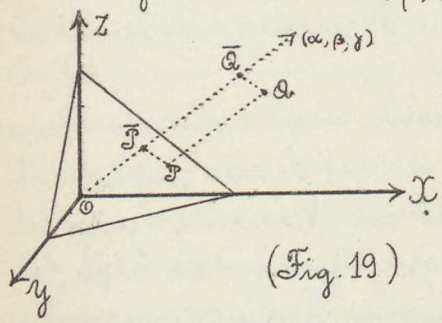
der ogsaa kan skrives

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Ligningen (10) ses ogsaa umiddelbart at være tilfredsstillet, naar vi for de løbende Koordinater (x, y, z) indsætter Koordinaterne (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4), idet jo en Determinant med to Rækker ens er lig med Nul.

62. <u>Planens Ligning paa Normalform</u>. Ligesom man indenfor Planens Geometri taler om Normalformen for en ret Linies Ligning, taler man indenfor Rummets Geometri om Normalformen for en Plans Ligning. Man siger om Ligningen for en Plan, at den er skrevet paa <u>Normalform</u>, hvis den har Formen $\alpha x+\beta y+\gamma z+p=0$, hvor $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$. Ligningen for en vilkaarlig Plan $Ax+By+Cz+D=0$ kan umiddelbart bringes paa Normalform ved at multiplicere Ligningen med en saadan Konstant q, at i den derved fremkomne Ligning Koefficienterne Aq, Bq, Cq til x, y, z har Kvadratsummen 1, d. v. s. ved at multiplicere Ligningen enten med $\frac{1}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ eller med $\frac{1}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. En Plan har følgelig

to forskellige Normalformer, hvoraf den ene dog umiddelbart fremkommer af den anden ved at multiplicere Ligningen med -1. Idet i en Plans Ligning paa Normalform $\alpha x+\beta y+\gamma z+p=0$, Koefficientsættet (α,β,γ) har Kvadratsummen $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, følger umiddelbart, at dette Koefficientsæt er Retningscosinusser for en eller anden ret Linie. Vi skal vise, at Koefficientsættet (α,β,γ) netop er Retningscosinusser for Planens Normal, idet de to forskellige Normalformer svarer til de to forskellige positive Retninger, der kan valges paa Normalen. Thi skrives Ligningen: $\alpha x+\beta y+\gamma z=-p$, udtrykker den i Følge (1) umiddelbart, at Projektionen $O\overline{P}$ af Liniestykket OP, hvor $P:(x,y,z)$ er et vilkaarligt Punkt i Planen, ind paa Linien (α,β,γ) gennem O er konstant og lig med $-p$, d. v. s. at Linien (α,β,γ) er Normal til den ved Ligningen $\alpha x+\beta y+\gamma z+p=0$ bestemte Plan. — Lad (x_1,y_1,z_1) være Koordinater til et vilkaarligt Punkt Q i Rummet (se Fig. 19); da er $\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1=O\overline{Q}$, hvor $\overline{Q}$ betegner Q's Projektion ind paa Linien (α,β,γ); altsaa faas



(Fig. 19)

$$\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1+p=O\overline{Q}+\overline{P}O=\overline{P}\overline{Q},$$

d. v. s. indsætter man i venstre Side af en Plans Ligning paa Normalform i Stedet for de løbende Koordinater (x,y,z) Koordinaterne (x_1,y_1,z_1) til et vilkaarligt Punkt Q i Rummet, vil det derved fremkomne Tal $\alpha x+\beta y+\gamma z+p$ netop angive Afstanden fra Planen til Punktet Q, regnet med Fortegn i Overensstemmelse med den valgte positive Retning paa Normalen, d. v. s. i Overensstemmelse med den positive Retning paa Normalen, hvis Retningscosi-

netop en Koefficientsættet (α, β, γ)

Lad os betragte en vilkaarlig lineær Funktion i de tre Variable x, y, z

$$Ax + By + Cz + D,$$

hvor ikke alle tre Tal A, B, C er lig med Nul. Skrives denne Funktion paa Formen $q(\alpha x + \beta y + \gamma z + p)$, hvor $q = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, altsaa $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, følger ud fra den foregaaende Sætning, at den Værdi Funktionen $Ax + By + Cz + D$ antager, naar vi for de Variable x, y, z indsætter Koordinaterne til et variabelt Punkt i Rummet, har en simpel geometrisk Betydning, idet den simpelthen paa nær den konstante Faktor $q = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ angiver Afstanden fra Planen $\alpha x + \beta y + \gamma z + p = 0$, d. v. s. fra Planen $Ax + By + Cz + D = 0$ til det betragtede Punkt, regnet med Fortegn i Overensstemmelse med den positive Retning paa Normalen (α, β, γ). Funktionen $Ax + By + Cz + D$ er altsaa Nul i selve Planen og positiv i det ene af de to Halvrum, negativ i det andet af de to Halvrum, hvori Planen deler Rummet.

63. Den rette Linies Ligninger. Lad der være givet to Planer bestemte ved Ligningerne $Ax + By + Cz + D = 0$ og $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, om hvilke vi vil antage, at de ikke er parallele, altsaa at Koefficientsættet (A, B, C) ikke er proportionalt med Koefficientsættet (A_1, B_1, C_1). Da vil de to Planer, som bekendt fra den elementære Rumgeometri, skære hinanden i en ret Linie. Herved er altsaa vist, at to Ligninger af første Grad $Ax + By + Cz + D = 0$ og $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, hvor Koefficientsættet (A, B, C) ikke er proportionalt med Koefficientsættet (A_1, B_1, C_1) fremstiller en ret Linie, d. v. s. Løsningerne (x, y, z) til disse to Ligninger bestemmer netop Koordinaterne til samtlige Punkter paa en

ret Linie. Rigtigheden af denne Sætning indses ogsaa umiddelbart analytisk paa følgende Maade: For det første har de to givne Ligninger øjensynlig en Løsning (x_0, y_0, z_0) (thi idet (A, B, C) ikke er proportional med (A_1, B_1, C_1) er mindst een af de tre Determinanter $\begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} C & A \\ C_1 & A_1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$ forskellig fra Nul, og er f. Eks $\begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} \neq 0$, kan vi jo vælge x_0 vilkaarlig og derefter paa eentydig Maade bestemme y_0 og z_0). Skriver vi derefter Ligningerne paa Formen

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \quad , \quad A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)+C_1(z-z_0)=0 ,$$

vil den fuldstændige Løsning til disse to homogene Ligninger i de tre Ubekendte $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$, hvor Koefficienterne ikke er proportionale, d. v. s. hvor Determinanten $\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ har Rangen 2, som bekendt (smlg. Eks. 3, 22) udtrykkes paa Formen

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = t(a, b, c),$$

hvor $a = \begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}$, $b = \begin{vmatrix} C & A \\ C_1 & A_1 \end{vmatrix}$, $c = \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$, og hvor t er en uindskrænket Variabel; men de tre Ligninger

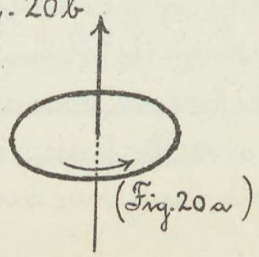
$$x = x_0 + at \quad , \quad y = y_0 + bt \quad , \quad z = z_0 + ct$$

vides jo i Følge det foregaaende at fremstille en ret Linie.

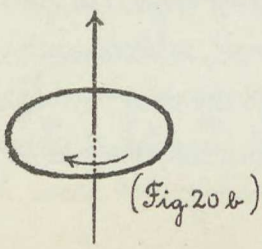
Idet jo en given ret Linie paa mangfoldige Maader kan dannes som Skæringslinie mellem to Planer, indses umiddelbart Rigtigheden af den anvendte Sætning: Enhver ret Linie kan (paa uendelig mange forskellige Maader) fremstilles ved to Ligninger af første Grad $Ax+By+Cz+D=0$ og $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,

hvor de to Koeffisientsæt (A, B, C) og (A_1, B_1, C_1) ikke er proportionale.

64. Positiv Drejningsretning i Rummet. Ligesom det ved visse Undersøgelser indenfor den analytiske Plangeometri var bekvemt at fastlægge en positiv Omløbsretning i Planen, vil det ved forskellige Undersøgelser indenfor Rummets Geometri være hensigtsmæssigt at fastlægge hvad man kalder en positiv Drejningsretning i Rummet. Ved den plane Geometri var en af de væsentligste Fordele vi opnaaede ved at fastlægge en positiv Omløbsretning i Planen den, at vi da paa naturlig Maade kunde indføre Begrebet: positiv Normalretning til en orienteret ret Linie; paa tilsvarende Maade vil et af de Hovedformaal, vi har for Øje ved Indførelsen af positiv Drejningsretning i Rummet, være den paa naturlig Maade at kunne indføre Begrebet: positiv Normalretning til en orienteret Plan, hvor vi ved en orienteret Plan forstaar en Plan, i hvilken der er fastlagt en positiv Omløbsretning. Idet vi direkte styrer los paa dette Maal, kommer vi til Begrebet: positiv Drejningsretning gennem følgende Betragtning. Lad der være givet en orienteret Plan og en orienteret Normal (eller rettere en Normalretning) til denne Plan. Der kan da indtræffe et af følgende to væsensforskellige Tilfælde: enten ligger Planens positive Omløbsretning i Forhold til den givne Normalretning som paa Fig. 20a, eller ogsaa ligger Planens positive Omløbsretning overfor den givne Normalretning, som angivet paa Fig. 20b



(Fig. 20a)



(Fig. 20b)

(I det første Tilfælde ses Planens positive Omløbsretning fra et Punkt paa den positive Normal at dreje til modsat Side af Viserne paa et Ur; i det andet Tilfælde derimod ses Planens positive Omløbsretning fra et Punkt paa den positive Normal at dreje til samme Side som Viserne paa et Ur). Man siger i det første Tilfælde, at Planens positive Omløbsretning i Forbindelse med den positive Normalretning bestemmer en højre Drejning, idet denne Sprogbrug antyder, at den kombinerede Bevægelse, der fremkommer ved Sammensætning af en Parallelforskydning langs en Akse i Planens positive Normalretning og en Omdrejning omkring Aksen i Planens positive Omløbsretning, stemmer overens med den Bevægelse en Højreskrue foretager, naar den trænger ind i en fast Møtrik. Paa lignende Maade siger man i det andet, d. v. s. det ved Fig 206 angivne, Tilfælde, at Planens positive Omløbsretning i Forbindelse med den positive Normalretning bestemmer en venstre Drejning. Man siger nu, at der er fastlagt en positiv Drejningsretning i Rummet, hvis det er vedtaget ved den positive Normalretning til en orienteret Plan enten i alle Tilfælde (d. v. s. for enhver orienteret Plan) at forstaa den Normalretning, der sammen med Planens positive Omløbsretning bestemmer en højre Drejning, eller i alle Tilfælde at forstaa den Normalretning, der sammen med Planens positive Omløbsretning bestemmer en venstre Drejning; i første Tilfælde siges Rummets positive Drejningsretning at være Højredrejningsretningen, i det andet Tilfælde at være Venstredrejningsretningen. Er der fastlagt en positiv Drejningsretning i Rummet, kaldes Rummet orienteret. I et orienteret Rum vil vi for det første vedtage at regne Afstanden fra en orienteret Plan til et vilkaarligt Punkt i Rummet med Fortegn, idet vi regner Afstanden positiv til den Side, der angives ved Planens posi-

tive Normalretning. Ved den positive Normalform til en orienteret Plan i et orienteret Rum, vil vi forstaa den af de to Normalformer $\alpha x+\beta y+\gamma z+p=0$, for hvilken (α, β, γ) er Retningscosinusserne for Planens positive Normalretning. Afstanden fra en orienteret Plan til et vilkaarligt Punkt P bestemmes følgelig ved i venstre Side af Planens positive Normalform for de løbende Koordinater (x, y, z) at indsætte Koordinaterne til det betragtede Punkt P. Endvidere vil vi ved Vinklen u mellem to orienterede Planer vedtage at forstaa Vinklen mellem deres positive Normaler; denne Vinkel er da bestemt paa nær sit Fortegn, saaledes at cos u er fuldstændig bestemt. (Fastholder vi Orienteringen i begge Planer, men forandrer vi Rummets positive Drejningsretning, forbliver cos u uforandret, idet jo begge de positive Normalretninger gaar over til de modsatte Retninger; skifter vi derimod positiv Omløbsretning i een (og kun een) af de to givne Planer, vil u derved forandres med π, saa at cos u skifter Fortegn).

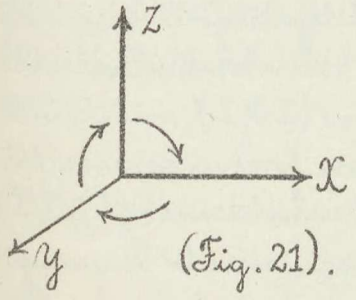
Lad der være givet to orienterede Planer Π og Π' og i den første Plan Π tre Punkter P_2, P_3, P_4, hvis Projektioner paa den anden Plan Π' henholdsvis betegnes med P_2', P_3', P_4'. Forsaavidt Trekantsarealerne $P_2P_3P_4$ og $P_2'P_3'P_4'$ ikke er Nul, d. v. s. forsaavidt P_2, P_3, P_4 henholdsvis P_2', P_3', P_4' ikke ligger i een og samme rette Linie, vil vi regne dem med Fortegn (d. v. s. for enhver af disse Trekanter regner vi Arealet positivt eller negativt eftersom den ved de tre Punkter i den nævnte Rækkefølge bestemte Omløbsretning er den samme som eller den modsatte af den i vedkommende Plan, Π eller Π', fastlagte Omløbsretning); betegner vi endvidere Vinklen mellem de to orienterede Planer med u, hvorved som ovenfor nævnt Tallet cos u er entydig bestemt, gælder der da følgende Sætning, Arealprojektionssætningen:

(11) $$P_2' P_3' P_4' = P_2 P_3 P_4 \cdot \cos u .$$

Bortset fra Fortegnet er Rigtigheden af denne Sætning kendt fra den elementære Rumgeometri; for at vise at Ligningen (11) ogsaa er rigtig i Henseende til Fortegn, kan vi antage at de to Planer Π og Π' ikke er parallele, idet Sætningens Rigtighed i Tilfælde af at Planerne er parallele, hvori altsaa $\cos u$ enten er lig $+1$ eller -1, er umiddelbart indlysende. Er een af Siderne f. Eks. $P_2 P_3$ beliggende i Snitlinien S mellem Planerne Π og Π', ses strakes at $P_2 P_3 P_4$ og $P_2' P_3' P_4'$ har samme eller modsat Fortegn, eftersom den numeriske Værdi af u ligger mellem 0 og $\frac{\Pi}{2}$ eller mellem $\frac{\Pi}{2}$ og Π, d. v. s. eftersom $\cos u$ er positiv eller negativ; idet endvidere en Parallelforskydning af Trekant $P_2 P_3 P_4$ medfører en Parallelforskydning af Trekant $P_2' P_3' P_4'$, følger heraf umiddelbart Sætningens Rigtighed for det Tilfælde, at een af Siderne i $P_2 P_3 P_4$ er parallel med Snitlinien S. Er endelig ingen af Siderne i $P_2 P_3 P_4$ parallel med Snitlinien S, da vil af de tre Paralleler med S, der kan trækkes gennem Punkterne P_2, P_3, P_4 den ene skære den modstaaende Side i Trekanten; herved deles Trekanten i to andre, der begge har en Side parallel med S. Anvender vi nu Sætningen paa enhver af disse Trekanter for sig, og adderer vi derefter de fundne Ligninger, da er Beviset for Sætningens Rigtighed fuldført.

Hvor vi inden for den analytiske Plangeometri opererede med en orienteret Plan, tænkte vi os Planens positive Omløbsretning fastlagt „i Overensstemmelse" med det benyttede retvinklede Koordinatsystem (X, Y), d. v. s. vi tænkte os Omløbsretningen valgt saadan (eller positive Retninger paa Koordinataksene valgt saadan) at $< XY = + \frac{\Pi}{2}$, d. v. s. at Y-Aksen var den positive Normal til X-Aksen. Paa tilsvaren-

de Maade vil vi, naar vi opererer i et orienteret Rum stedse (naar da ikke det modsatte udtrykkelig fremhæves) tænke os positiv Drejningsretning i Rummet fastlagt „i Overensstemmelse med" det benyttede retvinklede Koordinatsystem (X, Y, Z). Inden vi gaar over til nærmere at forklare, hvad der herved skal forstaas, vil vi forudskikke nogle Bemærkninger. Ved den hidtidige Brug af et retvinklet Koordinatsystem (XYZ) i Rummet har vi kun tænkt os Koordinatakserne, derimod ikke Koordinatplanerne, orienteret; for de følgende Undersøgelser vil det være hensigtsmæssigt ogsaa at tænke os <u>Koordinatplanerne orienteret</u>, og vi vil vedtage at fastlægge positiv Omløbsretning i de tre Koordinatplaner (YZ), (ZX) og (XY) saaledes at $\sphericalangle(YZ) = \sphericalangle(ZX) = \sphericalangle(XY) = +\frac{\pi}{2}$. Heraf følger da, at naar vi betragter enhver af de saaledes orienterede Koordinatplaner $(YZ), (ZX)$ og (XY) sammen med den derpaa vinkelrette orienterede Koordinatakse, altsaa henholdsvis X, Y og Z-Aksen, vil vi alle tre Gange faa bestemt den <u>samme</u> Drejningsretning i Rummet, altsaa enten alle tre Gange en højre eller alle tre Gange en venstre Drejningsretning. Lad os først vise Rigtigheden af denne Paastand for et specielt Valg af positive Retninger X, Y, Z sammen med de positive Omløbsretninger $(YZ), (ZX), (XY)$; træffer vi dette Valg som paa hosstaaende Figur ser vi, at de omtalte tre Drejningsretninger alle er venstre Drejninger. Fra dette Valg af positive Retninger paa Akserne kan man imidlertid komme til et vilkaarligt andet Valg ved successivt at ombytte den positive Retning paa een (og kun een) af Akserne med den mod-



(Fig. 21).

satte. Men ved en saadan Ombytning af den positive Retning paa een af Akserne med den modsatte, vil aabenbart alle tre Drejningsretninger skifte Karakter (d. v. s. gaa over fra venstre Drejning til højre Drejning, eller omvendt), saaledes at hvis de tre Drejningsretninger for Ombytningen alle var venstre Drejninger, vil de efter Ombytningen alle være højre Drejninger, eller omvendt; thi skifter vi f. Eks positiv Retning paa Y-Aksen, men ikke paa X-Aksen og Z-Aksen, da skifter vi samtidig efter ovenstaaende Vedtægt positiv Omløbsretning i (XY)-Planen og (YZ)-Planen, men ikke i (ZX)-Planen, og ved disse tre Skifter: af den positive Retning paa Y-Aksen, af den positive Omløbsretning i (XY)-Planen og af den positive Omløbsretning i (YZ)-Planen vil jo netop alle tre Drejningsretninger skifte Karakter. Vi fastlegger nu ved Definition, at positiv Drejningsretning i et orienteret Rum skal siges at være i Overensstemmelse med det retvinklede Koordinatsystem (XYZ), hvis Drejningsretninger er valgt saaledes, at enhver af de tre orienterede Koordinatakser er den positive Normal til den derpaa vinkelrette orienterede Koordinatplan. (Betragter vi saaledes f. Eks det paa Fig. 21 skitserede Koordinatsystem (XYZ) skal vi for at faa Rummets positive Drejningsretning i Overensstemmelse med Koordinatsystemet til positiv Drejningsretning vælge Venstredrejningsretningen). I et Rum, orienteret i Overensstemmelse med det valgte Koordinatsystem (XYZ), vil vi ved Retningscosinusserne for en orienteret Plan forstaa cosinus til de tre Vinkler, som Planen danner med henholdsvis (YZ), (ZX) og (XY)-Planen; idet Vinklen mellem to orienterede Planer jo i Følge Definition er Vinklen mellem de positive Normaler, finder vi umiddelbart, idet jo X, Y og Z-Akse er positive Normaler til henholdsvis (YZ), (ZX) og (XY)-Plan, at en orienteret Plans

Retningscosinusser stemmer overens med Retningscosinusserne for Planens positive Normal. Med Benyttelse heraf kan vi da karakterisere den positive Normalform for Ligningen for en orienteret Plan ved at sige, at Koefficienterne til x, y, z er Planens Retningscosinusser (i Stedet for ved at sige, at de er Retningscosinusser for Planens positive Normalretning).

Lad P_2, P_3, P_4 være tre Punkter i en orienteret Plan med Retningscosinusser (α, β, γ) og lad Projektionen af $P_n (n = 1, 2, 3)$ med paa $(YZ), (ZX)$ og (XY)-Plan betegnes med P_n', P_n'', P_n'''. Da finder vi umiddelbart ved Hjælp af Arealprojektionssætningen (og idet vi regner med Fortegn) det vigtige Resultat, at

$$P_2'P_3'P_4' = P_2P_3P_4 \cdot \alpha \;, \quad P_2''P_3''P_4'' = P_2P_3P_4 \cdot \beta \;, \quad P_2'''P_3'''P_4''' = P_2P_3P_4 \cdot \gamma$$

(hvoraf specielt følger, idet $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, at

$$\left(P_2'P_3'P_4'\right)^2 + \left(P_2''P_3''P_4''\right)^2 + \left(P_2'''P_3'''P_4'''\right)^2 = \left(P_2P_3P_4\right)^2 \Big) .$$

Som et Øvelseseksempel paa analytisk Regning inden for et orienteret Rum vil vi søge den positive Normalform for Ligningen for en orienteret Plan med Retningscosinusser (α, β, γ), der indeholder de tre, ikke paa een ret Linie liggende, Punkter: $P_2: (x_2, y_2, z_2)$, $P_3: (x_3, y_3, z_3)$, $P_4: (x_4, y_4, z_4)$. Denne Plan har Ligningen

$$Ax + By + Cz + D = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Betegner vi som ovenfor Projektionerne af Punktet $P_n (n=1,2,3)$ ned paa de tre Koordinatplaner $(YZ), (ZX), (XY)$ med henholdsvis P_n', P_n'', P_n''', finder vi (ved at benytte den i den analytiske Plangeometri fundne Sætning om en Trekants Areal) Koefficienterne A, B, C i Planens ovenstaaende Ligning udtrykt ved

$$A = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot P_2' P_3' P_4' = 2 \cdot P_2 P_3 P_4 \cdot \alpha ; \quad B = \begin{vmatrix} z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \\ z_4 & x_4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot P_2'' P_3'' P_4'' = 2 \cdot P_2 P_3 P_4 \cdot \beta ;$$

$$C = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 2 P_2''' P_3''' P_4''' = P_2 P_3 P_4 \cdot \gamma .$$

Da den positive Normalform som Koefficienter til x, y, z netop har Tallene α, β, γ, fremgaar den positive Normalform aabenbart af Ligningen $Ax + By + Cz + D = 0$ ved at dividere med $2 \cdot P_2 P_3 P_4$; altsaa: <u>den positive Normalform er Ligningen</u>

$$\frac{1}{2 \cdot P_2 P_3 P_4} \cdot \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

<u>hvor Trekantsarealet $P_2 P_3 P_4$ er regnet med Fortegn i Overensstemmelse med den valgte positive Omløbsretning i Planen</u>.

65. <u>Volumen af et Tetraeder</u>. Medens man i den elementære Geometri ved Volumenet af et Tetraeder forstaar det <u>positive</u> Tal, (bestemt som $\frac{1}{3}$ Højde · Grundflade), der angiver hvor mange

Enhedsterninger Tetraedret indeholder, er det hensigtsmæssigt i den analytiske Geometri — naar Talen er om et orienteret Rum — at skelne mellem Tetraedre med positivt Volumen og Tetraedre med negativt Volumen. Dette sker gennem følgende Definition:

Voluminet af Tetraedret $P_1P_2P_3P_4$ (hvilket Volumen vi betegner med $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$) skal sættes lig med

$$\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4 = \tfrac{1}{3}h_1 \cdot \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4 ,$$

hvor vi, idet vi tænker os fastlagt en positiv Omløbsretning i den ved Punkterne $P_2P_3P_4$ bestemte Plan Π, naaler Arealet $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$ med Fortegn samt ved „Højden" h_1 forstaar Afstanden fra Π til P_1 regnet med Fortegn. Det er aabenbart, at det herved fastlagte Fortegn for Voluminet $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$ ikke afhænger af hvilken positiv Omløbsretning, vi har fastlagt i Π; thi skifter vi positiv Omløbsretning i Π, vil derved Tallene $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$ og h_1 begge skifte Fortegn, saaledes at deres Produkt forbliver uforandret. For nu at bestemme Voluminet af $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$ gaar vi saaledes frem: Den orienterede Plan Π, der gaar gennem de tre Punkter P_2, P_3, P_4 har som ovenfor vist den positive Normalform

$$\frac{1}{2\cdot\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4} \cdot \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

hvor $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$ skal regnes med Fortegn. Følgelig er Højden h_1 bestemt ved

$$h_1 = \frac{1}{2 \cdot \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} ,$$

nemlig ved det Tal, der fremkommer af venstre Side i den positive Normalform ved i denne for de løbende Koordinater at indsætte Koordinaterne $(x_1\, y_1\, z_1)$ til Punktet $\mathfrak{P}_1$. Vi finder herigennem

$$\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4 = \tfrac{1}{3} h_1 \cdot \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} .$$

Idet en Determinant skifter Fortegn, naar man ombytter to af dens Rækker, viser den fundne Formel os umiddelbart (hvad vi naturligvis ogsaa direkte kunde have udledt ud fra Voluminets Definition), at Voluminet af et Tetraeder skifter Fortegn, naar man ombytter Ordenen (Rækkefølgen) af to af dets Hjørner; heraf følger atter at $\mathfrak{P}_\alpha\mathfrak{P}_\beta\mathfrak{P}_\gamma\mathfrak{P}_\delta$, hvor $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ angiver en Permutation af Tallene 1, 2, 3, 4, har samme eller modsat Fortegn som $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$, eftersom Antallet af Inversioner $\mathfrak{J}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ er lige eller ulige.

Lad os som et Eksempel paa Volumenbestemmelse ved Hjælp af den fundne Formel søge Voluminet V af Tetraedret $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$, hvor $\mathfrak{P}_1$ er Begyndelsespunktet O, medens $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$ er de Punkter paa henholdsvis X-, Y-, Z-Akse, hvis Afstand fra Begyndelsespunktet er lig med $+1$; vi finder

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}$$

66. Koordinattransformation. Lad $(X\,Y\,Z)$ og $(X_1\,Y_1\,Z_1)$ betegne to vilkaarlige retvinklede Koordinatsystemer i Rummet, om hvilke vi vil antage, at der for dem begge er fastlagt samme Længdeenhed til Brug ved Maaling af Afstande, og lad (x, y, z) og (x_1, y_1, z_1) angive Koordinaterne til det samme variable Punkt P henført henholdsvis til Systemet $(X\,Y\,Z)$ og til Systemet $(X_1\,Y_1\,Z_1)$. Det er da for det første klart, at den Forbindelse der herigennem er tilvejebragt mellem Systemet af Variable (x, y, z) og Systemet af Variable (x_1, y_1, z_1) er en eensbetydig Afhængighed; vi skal vise, at denne eensbetydige Afhængighed kan fremstilles ved en lineær Substitution, altsaa at de Variable i det ene System f. Eks Systemet (x, y, z) kan udtrykkes ved de Variable i det andet System $(x_1, y_1 z_1)$ ved Ligninger af Formen

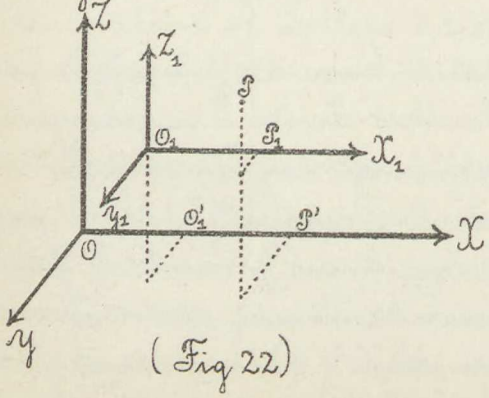
$$x = a + bx_1 + cy_1 + dz_1\,, \quad y = e + fx_1 + gy_1 + hz_1\,, \quad z = i + jx_1 + ky_1 + lz_1\,,$$

hvor $a, b, \ldots l$ er Konstanter, d. v. s. kun er afhængige af de to Koordinatsystemer og ikke af hvilket Punkt P vi betragter.

For at komme over fra Fremstillingen af Planens Punkter ved Hjælp af et retvinklet Koordinatsystem $(X\,Y\,Z)$ til Fremstillingen ved Hjælp af et vilkaarligt andet retvinklet Koordinatsystem $(X_1\,Y_1\,Z_1)$ gaar vi frem i to Skridt, idet vi først parallelforskyder Koordinatsystemet $(X\,Y\,Z)$ saaledes at det faar Begyndelsespunkt fælles med $(X_1\,Y_1\,Z_1)$, og derefter fore-

tager en Koordinattransformation, ved hvilken Begyndelsespunktet ligger fast. Behersker vi disse to specielle Typer af Koordinattransformation: en Parallelforskydning og en Transformation med Bibeholdelse af Begyndelsespunktet, behersker vi ogsaa den almindelige Koordinattransformation, idet denne sidste aabenbart kan „sammensættes" af en Transformation af den ene og en Transformation af den anden Type.

Lad os da først betragte en Parallelforskydning, d. v. s. lad os undersøge Sammenhængen mellem Koordinaterne (x, y, z) og (x_1, y_1, z_1) til samme variable Punkt P henført til to Koordinatsystemer (XYZ) og $(X_1 Y_1 Z_1)$, hvor de tilsvarende Akser (d. v. s. X, X_1 ; Y, Y_1 ; Z, Z_1) har samme Retning, d. v. s. er parallele og har overensstemmende positive Retninger. Lad os antage, at Begyndelsespunktet O_1 i Systemet $(X_1 Y_1 Z_1)$ (som vi vil kalde det „nye" System) henført til Koordinatsystemet (XYZ) (det „gamle" System) har Koordinaterne (a, b, c). Betegner vi med P' og P_1 Projektionerne af det variable Punkt P paa henholdsvis X-Akse og X_1-Akse, samt betegner vi med O_1' Projektionen af O_1 paa X-Aksen, finder vi umiddelbart (se Fig. 22)



(Fig 22)

$$x = OP' = OO_1' + O_1'P' = OO_1' + O_1P_1 = a + x_1 \; ;$$

paa tilsvarende Maade faas ved Projektion paa henholdsvis Y-Aksen og Z-Aksen Ligningerne $y = b + y_1$, $z = c + z_1$. Overgangen fra Koordinaterne (x_1, y_1, z_1) til Koordinaterne (x, y, z) sker altsaa ved Formlen

lerne (Forskydningssubstitutionen)

$$x = a + x_1 \ , \quad y = b + y_1 \ , \quad z = c + z_1 \ .$$

Af de udledte Ligninger finder man umiddelbart ved Opløsning med Hensyn til x_1, y_1, z_1, at Koordinaterne (x_1, y_1, z_1) bestemmes ved (x, y, z) gennem Formlerne (den omvendte Substitution til den foregående)

$$x_1 = -a + x \ , \quad y_1 = -b + y \ , \quad z_1 = -c + z \ .$$

Disse sidste Ligninger fremgaar ogsaa umiddelbart (d. v. s. uden nogensomhelst Regning) af de foregaaende, nemlig naar vi opfatter $(X_1 Y_1 Z_1)$ som det „gamle" System og $(X\,Y\,Z)$ som det „nye" System og bemærker, at Begyndelsespunktet O i Systemet $(X\,Y\,Z)$ henført til Systemet $(X_1 Y_1 Z_1)$ har Koordinaterne $(-a, -b, -c)$.

Som et Øvelseseksempel paa Anvendelse af en Parallelforskydning af Koordinatsystemet vil vi søge Projektionen $\overline{P_1 P_2}$ af Liniestykket $P_1 P_2$ $(P_1 : (x_1\, y_1\, z_1),\ P_2 : (x_2\, y_2\, z_2))$ ind paa en orienteret ret Linie L med Retningscosinusserne (α, β, γ) og gaaende gennem Punktet P_1 (eller, hvad der naturligvis giver samme Resultat, ind paa en vilkaarlig orienteret ret Linie med Retningscosinusserne (α, β, γ)). Parallelforskyder vi nu Koordinatsystemet saaledes at Begyndelsespunktet falder i Punktet P_1, vil i Følge de ovenstaaende Transformationsformler Punktet P_2 henført til dette nye Koordinatsystem have Koordinaterne $(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$, medens Linien L naturligvis stadig beholder Retningscosinusserne (α, β, γ). Gør vi nu Brug af den kendte Formel $(\overline{OP} = \alpha x + \beta y + \gamma z)$ for Projektionen af et Liniestykke, hvis ene Endepunkt falder i Begyndelsespunktet,

ind paa en orienteret ret Linie, finder vi den søgte Projektion $\overline{P_1 P_2}$ udtrykt ved

$$\overline{P_1 P_2} = \alpha (x_2 - x_1) + \beta (y_2 - y_1) + \gamma (z_2 - z_1) ,$$

altsaa: Man finder Projektionen af Liniestykket $P_1 P_2$ ind paa en orienteret ret Linie L ved først at projicere $P_1 P_2$ ned paa Koordinataksernne (hvad der giver Resultaterne $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$), derefter projicere de fremkomne Liniestykker ind paa Linien L (hvad der sker ved at multiplicere med henholdsvis α, β, γ) og endelig danne Summen af de tre fundne Tal. — En anden (og tilsvarende) Anvendelse af en Parallelforskydning viser os (udfra den kendte Formel: $OP^2 = x^2 + y^2 + z^2$), at Afstanden $P_1 P_2$ mellem to Punkter $P_1 : (x_1, y_1, z_1)$ og $P_2 : (x_2, y_2, z_2)$ udtrykkes ved Formlen

$$P_1 P_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 .$$

Ved at benytte de to sidste Resultater kan vi umiddelbart finde den korteste Afstand d mellem en ret Linie L, bestemt ved at gaa gennem et givet Punkt (x_1, y_1, z_1) og have Retningscosinusserne (α, β, γ), og Punktet $P_2 : (x_2, y_2, z_2)$; thi idet denne Afstand jo er Kathete i en retvinklet Trekant, hvori $P_1 P_2$ er Hypotenuse, medens Projektionen af $P_1 P_2$ ind paa L er den anden Kathete, finder vi umiddelbart Formlen

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - \left\{ \alpha (x_2 - x_1) + \beta (y_2 - y_1) + \gamma (z_2 - z_1) \right\}^2 .$$

Lad os dernæst betragte en Koordinattransformation, ved hvilken Begyndelsespunktet ligger fast, d. v. s. lad os undersøge Sammenhangen mellem Koordinaterne (x, y, z) og (x_1, y_1, z_1)

til samme variable Punkt P henført til to retvinklede Systemer (XYZ), $(X_1 Y_1 Z_1)$ med samme Begyndelsespunkt O. Lad os antage at Akserne i det „nye" System X_1, Y_1, Z_1 henført til det „gamle" System (XYZ) har henholdsvis Retningscosinusserne $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$; $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$. Idet disse tre Sæt Tal er Retningscosinusser for tre paa hinanden vinkelrette Retninger, er de forbundne ved de 6 Ligninger

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1\ ,\quad \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1\ ,\quad \alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=1\ ;$$

(12)

$$\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0\ ,\quad \alpha_3\alpha_1+\beta_3\beta_1+\gamma_3\gamma_1=0\ ,\quad \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0$$

(ligesom omvendt tre Sæt Tal $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ $(n=1,2,3)$, for hvilke der gælder disse 6 Ligninger, vil være Retningscosinusser for tre paa hinanden vinkelrette Retninger X_1, Y_1, Z_1).

Lad P med Koordinater (x, y, z) og (x_1, y_1, z_1) være et vilkaarligt Punkt i Rummet. Idet Projektionen af OP ind paa en orienteret ret Linie gennem O, hvis Retningscosinusser (henført til Systemet (XYZ)) er (α, β, γ), bestemmes ved Udtrykket $\alpha x+\beta y+\gamma z$, finder vi umiddelbart ved Projektion af OP ind paa henholdsvis X_1-, Y_1- og Z_1-Aksen Ligningerne

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z \\ y_1 &= \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z \\ z_1 &= \alpha_3 x+\beta_3 y+\gamma_3 z\ . \end{aligned} \qquad (13)$$

Herved har vi fundet Koordinaterne (x_1, y_1, z_1) udtrykte ved Koordinaterne (x, y, z); for omvendt at finde (x, y, z) udtrykte ved (x_1, y_1, z_1) behøver vi blot at udlede den omvendte Substitution til (13), hvad der jo sker ved at løse de tre

Ligninger (13) med Hensyn til x, y, z; simplere (uden nogensomhelst Regning) finder vi dog de søgte Udtryk ved blot at betragte $(X\,Y\,Z)$ som det „nye" System og $(X_1\,Y_1\,Z_1)$ som det „gamle" System og bemærke, at Akserne i Systemet $(X\,Y\,Z)$ henført til Systemet $(X_1\,Y_1\,Z_1)$ aabenbart har Retningscosinusserne $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$; derved gaar da Ligningerne (13) over til Ligningerne

$$(14.)\qquad \begin{aligned} x &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_3 z_1 \\ y &= \beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_3 z_1 \\ z &= \gamma_1 x_1 + \gamma_2 y_1 + \gamma_3 z_1 . \end{aligned}$$

I det den Betingelse, der er paalagt de 9 Koefficienter $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ for at Substitutionen (13), (14) skal bestemme Overgangen mellem to retvinklede Koordinatsystemer $(X\,Y\,Z)$ og $(X_1\,Y_1\,Z_1)$ med samme Begyndelsespunkt jo er den, at $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ skal være Retningscosinusser for tre paa hinanden vinkelrette Retninger, eller hvad der som ovenfor fremhævet er ensbetydende hermed, at der skal gælde de 6 Ligninger (12), viser de sidst fundne Ligninger (14) os følgende Sætning: De Formler, der bestemmer Overgangen fra et retvinklet Koordinatsystem $(X_1\,Y_1\,Z_1)$ til et andet retvinklet Koordinatsystem $(X\,Y\,Z)$ med samme Begyndelsespunkt danner en orthogonal Substitution, ligesom omvendt enhver orthogonal Substitution med tre Variable geometrisk kan fortolkes som udtrykkende Koordinaterne til et Punkt i et retvinklet System ved Hjælp af Koordinaterne til det samme Punkt i et andet retvinklet System, der har samme Begyndelsespunkt som det første.

For den geometriske Fortolkning, som en orthogonal

Substitution i tre Variable paa denne Maade bliver Gen-stand for, gælder fuldstændig analoge Bemærkninger til dem vi tidligere fremsatte, hvor Talen var om Koordinattrans-formation i Planen, og hvor vi havde at gøre med en ortogonal Substitution i to Variable; specielt kan bemærkes at den geometriske Fortolkning af den Egenskab ved en ortogonal Substitution, at den fører Kvadratsummen $x^2+y^2+z^2$ over til Kvadratsummen $x_1^2+y_1^2+z_1^2$, her er den, at Kvadratet paa Afstanden fra Begyndelsespunktet O til Punktet P (hvilket Tal jo forbliver uforandret ved en Koordinattransformation, der fastholder Begyndelsespunktet) i det ene System udtrykkes ved $x^2+y^2+z^2$, i det andet ved $x_1^2+y_1^2+z_1^2$. Idet den omvendte (ligeledes orthogonale) Substitution til (14) er Substitutionen (13), har vi, som en Art Tilgift til den foregaaende Undersøgelse, fundet følgende Resultat, der ligeledes let (smlg. Opg. 25) kunde udledes direkte: <u>Koefficientskemaet til den ene af to ortogonale Substitutioner (13) og (14), der er hinandens omvendte Substitutioner, gaar umiddelbart over til Koefficientskemaet til den anden ved blot at ombytte Rækker og Søjler.</u> Heraf følger atter, at det Baand, der er paalagt de 9 Tal $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ derved, at de skal tilfredsstille Ligningerne

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 = \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2 = \alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2 = 1 \; ; \; \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3 = \alpha_3\alpha_1+\beta_3\beta_1+\gamma_3\gamma_1 = \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2 = 0$$

er fuldstændig ensbetydende med det Baand, at der skal gælde Ligningerne

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 = \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2 = \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2 = 1 \; ; \; \beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3 = \gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2+\gamma_3\alpha_3 = \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3 = 0 \; ;$$

d. v. s. hvis de 9 Tal $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ tilfredsstiller de første 6 Ligninger vil de af sig selv tilfredsstille de sidste 6 Ligninger, og omvendt. Som det fremgaar af det foregaaende er den geometriske Betydning af denne Sætning jo den, at hvis $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ henført til et Koordinatsystem $(X\,Y\,Z)$ bestemmer Retningscosinusserne for tre paa hinanden vinkelrette orienterede rette Linier $X_1\,Y_1\,Z_1$, vil $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ ligeledes bestemme Retningscosinusser for tre paa hinanden vinkelrette Linier, nemlig for Linierne X, Y, Z henførte til Koordinatsystemet $(X_1\,Y_1\,Z_1)$.

Vi siger om to retvinklede Koordinatsystemer $(X\,Y\,Z)$ og $(X_1\,Y_1\,Z_1)$ at de er ens orienterede eller at de er modsat orienterede, alteftersom den positive Drejningsretning i Rummet, der bestemmes ved det ene Koordinatsystem er den samme som eller den modsatte af den, der bestemmes ved det andet Koordinatsystem, med andre Ord alteftersom den positive Drejningsretning i Rummet, der gør Koordinatakserne i det ene System til de positive Normaler til de derpaa vinkelrette Koordinatplaner, ligeledes gør Koordinatakserne i det andet System til de positive Normaler til dette Systems Koordinatplaner eller derimod gør dem til Koordinatplanernes negative Normaler. To Koordinatsystemer, hvoraf det ene fremgaar af det andet ved en Parallelforskydning, er selvfølgelig ens orienterede. Ved den hidtidige Undersøgelse af Transformation af et Koordinatsystem til et andet med samme Begyndelsespunkt har vi ikke gjort nogensomhelst Antagelse om, hvorvidt de to Koordinatsystemer er ens eller modsat orienterede, saaledes at de fundne Resultater omfatter begge Tilfælde; vi skal nu gaa over til at undersøge, paa hvilken Maade Forskellen mellem det Tilfælde, hvor de to Systemer er

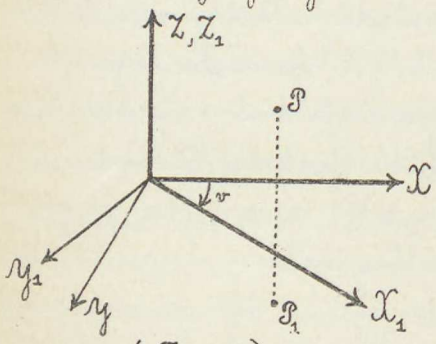
ens orienterede, og det Tilfælde, hvor de er modsat orienterede, giver sig Udtryk i Transformationsformlerne. Et simpelt Kendetegn paa hvorvidt to Systemer (XYZ) og $(X_1Y_1Z_1)$ er ens eller modsat orienterede, kommer vi til ved at betragte et (vilkaarlig valgt) fast Tetraeder $P_1P_2P_3P_4$ i Rummet og bestemme dets Volumen henført henholdsvis til Koordinatsystemet (XYZ) og til Systemet $(X_1Y_1Z_1)$; faar Volumiet ved begge disse Bestemmelser samme Fortegn, er de to Koordinatsystemer aabenbart ens orienterede, faar Volumiet derimod modsat Fortegn, er Koordinatsystemerne modsat orienterede. Lad der nu være givet to Koordinatsystemer (XYZ) og $(X_1Y_1Z_1)$ med samme Begyndelsespunkt og lad os betragte det Tetraeder $P_1P_2P_3P_4$, hvori P_1 er Begyndelsespunktet O, medens $P_2P_3P_4$ er de tre Punkter paa henholdsvis X_1-, Y_1-, Z_1-Aksen, hvis Afstande fra O er $+1$. Henført til Systemet $(X_1Y_1Z_1)$ faar Volumiet, som tidligere vist, Værdien $-\frac{1}{6}$, altsaa negativt Fortegn; følgelig vil de to Systemer være ens eller modsat orienterede, alteftersom Tetraedrets Volumen henført til Systemet (XYZ) faar Fortegnet minus eller Fortegnet plus; nu har imidlertid — med de tidligere benyttede Betegnelser — P_1, P_2, P_3, P_4 henført til Koordinatsystemet (XYZ) Koordinaterne $(0,0,0)$, $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$, $(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$, $(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)$. Vi finder følgelig Tetraedrets Volumen lig med

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Altsaa: Systemerne (XYZ) og $(X_1Y_1Z_1)$ er ens eller modsat orien-

lerede, eftersom Determinanten $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$ er lig med +1 eller med −1, d. v. s. Overgangen fra et retvinklet Koordinatsystem til et andet med samme Begyndelsespunkt udtrykkes ved en egentlig eller ved en uegentlig orthogonal Substitution, alteftersom de to Systemer er ens eller modsat orienterede.

Som et specielt, særlig simpelt, Tilfælde af en Koordinattransformation med Bibeholdelse af Begyndelsespunktet, vil vi betragte den Koordinattransformation mellem ens orienterede Koordinatsystemer (XYZ) og $(X_1 Y_1 Z_1)$, af hvilke det ene $(X_1 Y_1 Z_1)$ fremkommer af det andet (XYZ) ved en Drejning om en af Akserne f. Eks. om Z-Aksen (se Fig 23). Betegnes Drejningsvinklen, d. v. s. Vinklen (XX_1) regnet med Fortegn i (XY)-Planen, med v, har X_1, Y_1, Z_1-Aksen henført til Systemet (XYZ) henholdsvis Retningscosinusserne $(\cos v, \sin v, 0)$, $(-\sin v, \cos v, 0)$, $(0, 0, 1)$. Overgangsformlerne bliver følgelig



(Fig. 23)

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \cos v \cdot x + \sin v \cdot y \\ y_1 &= -\sin v \cdot x + \cos v \cdot y \\ z_1 &= z \end{aligned}\right\} \text{ og } \begin{cases} x = \cos v \cdot x_1 - \sin v \cdot y_1 \\ y = \sin v \cdot x_1 + \cos v \; y_1 \\ z = z_1 \end{cases}.$$

Disse Formler kunde naturligvis ogsaa umiddelbart være udledt af Formlerne for Koordinattransformation i den plane Geometri; thi idet Projektionen P_1 af P med paa XY-Planen henført til det plane System (XY) har Koordinaterne (x, y) og henført til (X_1, Y_1) har Koordinaterne (x_1, y_1), er de Formler, der forbinder (x, y) og (x_1, y_1) de samme som de, der for-

binder Koordinaterne til et og samme Punkt P_1 i (XY)-Planen, henført henholdsvis til Systemet (XY) og til det System $(X_1 Y_1)$, der fremkommer af (XY) ved en Drejning paa Vinklen v, medens naturligvis den tredie Koordinat z, der angiver Afstanden fra (XY)-Planen, forbliver uforandret ved Drejningen.

Da Talen var om en orthogonal Substitution med to Variable, eller, hvad der er ensbetydende hermed, om de Formler, der udtrykker Overgang fra et retvinklet Koordinatsystem i Planen til et andet med samme Begyndelsespunkt, var de 4 Koefficienter i Substitutionen underkastet 3 Betingelser; i Sammenhæng hermed kunde vi udtrykke de 4 Koefficienter ved $4-3=1$ Parameter, og vi valgte, som det vil erindres, en saadan Parameterfremstilling, at den indgaaende Parameter v havde en simpel geometriske Betydning (var en Drejningsvinkel). Vi skal nu gaa over til at vise, hvorledes man paa tilsvarende Maade, naar Talen er om en orthogonal Substitution med 3 Variable, eller, hvad der er ensbetydende hermed, om de Formler, der udtrykker Overgang fra et retvinklet Koordinatsystem i Rummet til et andet med samme Begyndelsespunkt, hvor de 9 Koefficienter i Substitutionen jo er underkastet 6 Betingelser, kan udtrykke <u>samtlige 9 Koefficienter ved $9-6=3$ Parametre</u>; ogsaa her vil vi vælge en saadan Parameterfremstilling, hvor Parametrene har simple geometriske Betydninger, og hvor Parameterfremstillingen umiddelbart kan udledes udfra den geometriske Fortolkning af Substitutionen. Lad os i dette Øjemed betragte to Koordinatsystemer (XYZ) og $(X_1 Y_1 Z_1)$ med samme Begyndelsespunkt, og hvor vi vil antage, at de to Systemer er ens orienterede, altsaa, som man siger, kongruente og ikke symmetriske. (Det at vi saaledes nøjes med at betragte de egentlig orthogonale Substitutioner

betyder naturligvis i Virkeligheden ingen Indskrænkning i Undersøgelsens Almindelighed, idet man aabenbart, hvis man behersker samtlige egentlige Substitutioner, tillige behersker samtlige uegentlige Substitutioner; Mængden af uegentlige orthogonale Substitutioner fremkommer jo f. Eks., som det umiddelbart fremgaar af Substitutionernes geometriske Fortolkning, af Mængden af egentlige Substitutioner, naar man i enhver af disse sidste ombytter x med $-x$). Idet vi tænker os det af de tre Akser (XYZ) dannede System af 3 paa hinanden vinkelrette rette Linier stift, men bevægeligt i Rummet, kan vi øjensynlig bringe dette System (XYZ) til Dækning med det andet System $(X_1Y_1Z_1)$ ved tre paa hinanden følgende Drejninger om en af Systemets Akser, f. Eks. ved først at foretage en Drejning om X-Aksen, derefter en Drejning om Y-Aksen og sluttelig en Drejning om Z-Aksen; vi behøver hertil blot først at dreje en saadan Vinkel u om X-Aksen, at i den nye Stilling af Systemet (XYZ) Aksen Y er beliggende i (X_1Y_1)-Planen, d. v. s. saaledes at Y-Aksen falder i Skæringslinien mellem Planerne (YZ) og (X_1Y_1); idet Y-Aksen efter denne Drejning ligger i (X_1Y_1)-Planen, vil ikke blot Z-Aksen, men nu ogsaa Z_1-Aksen være vinkelret paa Y-Aksen, saaledes at vi ved at dreje Systemet (XYZ) en passende Vinkel v om Y-Aksen kan faa Z-Aksen til at falde sammen med Z_1-Aksen; efter at Z-Aksen nu er bragt hen paa Z_1-Aksen, og altsaa XY-Planen falder sammen med X_1Y_1-Planen, kan vi sluttelig ved at dreje en passende Vinkel w om Z-Aksen bringe (XYZ) til Dækning med $(X_1Y_1Z_1)$. Betegner vi de to Stillinger, som det bevægelige Koordinatsystem (XYZ) har indtaget undervejs, d. v. s. Stillingen efter den første Drejning om X-Aksen og Stillingen efter den derpaa følgende Drejning om Y-Aksen med henholdsvis $(X'Y'Z')$ og $(X''Y''Z'')$, finder vi Overgangsformlerne fra (XYZ) til $(X'Y'Z')$,

fra $(X'Y'Z')$ til $(X''Y''Z'')$ og sluttelig fra $(X''Y''Z'')$ til $(X_1 Y_1 Z_1)$ udtrykt ved Ligningerne:

$$x = x' \qquad y' = y'' \qquad z'' = z_1$$

$$y = y' \cos u - z' \sin u \quad ; \quad z' = z'' \cos v - x'' \sin v \quad ; \quad x'' = x_1 \cos w - y_1 \sin w$$

$$z = y' \sin u + z' \cos u \qquad x' = z'' \sin v + x'' \cos v \qquad y'' = x_1 \sin w + y_1 \cos w \,.$$

Ved Sammensætning af disse tre Substitutioner finder vi da sluttelig de Formler, der fører over fra det ene af de oprindelig givne Systemer $(X_1 Y_1 Z_1)$ til det andet $(X Y Z)$, nemlig Formlerne

$$x = x_1 (\cos v \cos w) + y_1 (-\cos v \sin w) + z_1 \sin v$$

$$y = x_1 (\cos u \sin w + \sin u \sin v \cos w) + y_1 (\cos u \cos w - \sin u \sin v \sin w) + z_1 (-\sin u \cos v)$$

$$z = x_1 (\sin u \sin w - \cos u \sin v \cos w) + y_1 (\sin u \cos w + \cos u \sin v \sin w) + z_1 (\cos u \cos v) \,.$$

Disse Formler giver os den søgte Parameterfremstilling for de 9 Koeffi-cienter i en egentlig orthogonal Substitution udtrykte ved de tre Parametre (Drejningsvinkler) u, v, w.

Efter at vi i det foregaaende har behandlet de to specielle Transformationstyper: Parallelforskydning og Transformation med Bibeholdelse af Begyndelsespunktet, kan vi nu umiddelbart løse <u>den almindelige Transformationsopgave</u>, hvor der er givet to ret-vinklede (ens eller forskelligt orienterede) Koordinatsystemer $(X Y Z)$ og $(X_1 Y_1 Z_1)$ beliggende paa fuldkommen vilkaarlig Maade overfor hinanden. Lad os tænke os det „nye" Koordinatsystem $(X_1 Y_1 Z_1)$ i Beliggenhed over for det „gamle" System $(X Y Z)$ karakte-riseret derved, at der er opgivet Koordinaterne (a, b, c) til det nye Systems Begyndelsespunkt O_1 henført til det gamle System, samt Retningscosinusserne $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ for de nye Ko-ordinatakser $X_1 Y_1 Z_1$ henført til Systemet $(X Y Z)$. Lad os indsky-

de et Hjelpekoordinatsystem $(X'Y'Z')$, der har samme Begyndelsespunkt O_1 som det nye System $(X_1 Y_1 Z_1)$, men hvis Akser har samme Retninger som Akserne i det gamle System (XYZ). Betegner da (x, y, z), (x', y', z') og (x_1, y_1, z_1) Koordinaterne til et og samme Punkt P henført til de tre Systemer finder vi

$$\begin{aligned} x &= a + x' \\ y &= b + y' \\ z &= c + z' \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} x' &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_3 z_1 \\ y' &= \beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_3 z_1 \\ z' &= \gamma_1 x_1 + \gamma_2 y_1 + \gamma_3 z_1 \end{aligned} ,$$

altsaa ved Sammensetning de søgte Formler

$$\begin{aligned} x &= a + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_3 z_1 \\ y &= b + \beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_3 z_1 \\ z &= c + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 y_1 + \gamma_3 z_1 \end{aligned} .$$

67. Uendelig fjerne Elementer. Ved talrige Undersøgelser indenfor Rummets Geometri, hvor det drejer sig om at „kombinere" Punkter, rette Linier og Planer, f. Eks. at søge Skæringspunkt mellem Plan og ret Linie, at søge Skæringslinie mellem to Planer eller at bestemme ret Linie og Plan, der gaar gennem opgivne Punkter, er det hensigtsmæssigt for at naa til et Begrebsområde, hvor der gælder almengyldige Sætninger, at udvide Begreberne Punkt, ret Linie og Plan, til foruden de „sædvanlige" Punkter, rette Linier og Planer ogsaa at omfatte hvad man kalder Rummets uendelig fjerne Punkter, uendelig fjerne Linier og uendelig fjerne Plan; dette sker gennem følgende Definitioner:

Definition I. Enhver sædvanlig ret Linie skal siges at indeholde et og kun et uendelig fjernt Punkt, og to sædvanlige rette Linier skal siges at indeholde (gaa igennem) det samme uende-

lig fjerne Punkt da og kun da, naar de er parallele. Man udtrykker ogsaa ofte denne Definition saaledes: et uendelig fjernt Punkt i Rummet er en Heldning bestemt ved et Parallelknippe; og en ret Linie gaar gennem det saaledes bestemte uendelig fjerne Punkt, hvis den har den tilsvarende Heldning, d. v. s. tilhører det tilsvarende Parallelknippe (Ligesom ved Indførelsen af de uendelig fjerne Punkter i den plane Geometri vil vi her fremhæve, at Begrebet Heldning (Stilling i Rummet) ikke maa forveksles med Begrebet Retning, der blev indført til Brug ved Behandlingen af orienterede rette Linier).

En Plan skal siges at indeholde (gaa igennem) et uendelig fjernt Punkt P, hvis den indeholder en ret Linie, der gaar igennem P, altsaa naar den indeholder en ret Linie med den ved P bestemte Heldning; enhver Plan indeholder følgelig uendelig mange uendelig fjerne Punkter bestemt ved de forskellige Heldninger af Planens rette Linier.

Definition II. En uendelig fjern ret Linie er Samlingen af uendelig fjerne Punkter i en Plan. To parallele Planer indeholder en og samme uendelig fjerne rette Linie; thi de rette Linier i de to Planer har parvis samme Heldning; to parallele Planer siges at skære hinanden i den fælles uendelig fjerne Linie.

Definition III. Mængden af samtlige uendelig fjerne Punkter (svarende til alle mulige forskellige Heldninger) skal kaldes Rummets uendelig fjerne Plan. Idet den uendelig fjerne Plan indeholder samtlige uendelig fjerne Punkter, indeholder den ogsaa samtlige uendelig fjerne rette Linier.

De uendelig fjerne Punkter og rette Linier samt den uendelig fjerne Plan kaldes Rummets uendelig fjerne Elementer.

Vi skal nu gaa over til at vise, hvorledes der, naar vi benytter de udvidede Begreber: Punkt, ret Linie og Plan (altsaa

regner de uendelig fjerne Elementer med) helt igennem gælder simple almengyldige Sætninger vedrørende Kombination af Punkt, ret Linie og Plan. Lad os da først bevise, at de almengyldige Sætninger, der gjaldt før Begrebsudvidelsen, vedbliver at bestaa ogsaa efter Indførelsen af de uendelig fjerne Elementer. Vi tænker her paa de tre Sætninger:

1) Gennem to givne Punkter gaar een og kun een ret Linie.
2) En Plan indeholder en ret Linie, naar den indeholder to af dens Punkter.
3) Gennem tre Punkter, der ikke ligger paa een ret Linie, gaar een og kun een Plan.

Beviset for, at enhver af disse tre Sætninger vedbliver at bestaa, ogsaa naar man regner de uendelig fjerne Elementer med, maa naturligvis føres derved, at man betragter de forskellige mulige Tilfælde, der kan indtræffe, hvert for sig; vi skal nøjes med at gøre dette for den sidste Sætnings Vedkommende og skal overlade Læseren selv at gennemføre den tilsvarende simple Betragtning for de to andre Sætningers Vedkommende. Lad os altsaa tænke os givet tre Punkter P, Q, R, der ikke ligger paa een ret Linie; vi maa da skelne mellem 4 Tilfælde. 1) P, Q, R er alle sædvanlige Punkter; der findes da een sædvanlig Plan, der indeholder dem, og den uendelig fjerne Plan indeholder dem selvfølgelig ikke, da den jo ikke indeholder noget sædvanligt Punkt. 2) Det ene Punkt f. Eks. P er uendelig fjernt, de to andre Q og R er sædvanlige Punkter; Linierne QP og QR bestemmer da Planen. 3) De to Punkter P og Q er uendelig fjerne, R et sædvanligt Punkt; Linierne RP og RQ bestemmer Planen. 4) P, Q, R er alle uendelig fjerne. Her findes (da det jo er givet, at de tre Punkter ikke ligger paa een ret Linie, altsaa heller ikke paa en uendelig fjern Linie) ingen sædvanlig Plan, der indeholder alle tre Punkter; der-

imod indeholder den uendelig fjerne Plan dem alle tre. Hermed er Sætningen fuldstændig bevist. — Foruden disse Sætninger (der som ovenfor nævnt jo ogsaa er almengyldige, saaledes som vi operere med de sædvanlige Begreber: Punkt, ret Linie og Plan), gælder der, som man umiddelbart indser ved en Betragtning fuldkommen analog med den ovenfor gennemførte, naar vi benytter de udvidede Begreber (og her i Modsætning til hvad der finder Sted inden den foretagne Begrebsudvidelse) endnu en Række almengyldige Sætninger vedrørende Kombination af Punkt, ret Linie og Plan, nemlig følgende:

Tv Linier i samme Plan har altid et fælles Punkt (Skæringspunkt).

To Planer skærer altid hinanden i en ret Linie.

En Linie og en Plan, der ikke indeholder Linien, har altid et og kun et fælles Punkt (Skæringspunkt).

Tre Planer, der ikke gaar gennem samme Linie, har tre Skæringslinier, der gaar gennem samme Punkt.

68. Homogene Koordinater. Efter at vi nu har udvidet Begreberne: Punkt, ret Linie og Plan til ogsaa at omfatte Rummets uendelig fjerne Elementer, vil vi søge at vælge et simpelt Koordinatsystem, saaledes at vi ved Henføring til dette Koordinatsystem kan karakterisere de almindeliggjorte Begreber Punkt, ret Linie og Plan ved Hjælp af Tal (Koordinater); her gælder det naturligvis, ligesom ved de tidligere Opgaver af tilsvarende Natur, om at vælge Koordinatsystemet saaledes, at man gennem de foretagne Begrebsudvidelser, ogsaa fra et analytisk Standpunkt, opnaar en tilsvarende Simpelhed og Almengyldighed, som den vi har opnaaet fra et geometriske Synspunkt. Dette sker (i fuldkommen Analogi med den Fremgangsmaade vi benyttede inden for Planens Geometri) ved at benytte saakald-

te homogene Koordinater. Vi bringer her, idet vi gaar ud fra et sædvanligt retvinklet Koordinatsystem $(X\,Y\,Z)$, Forbindelse til Veje mellem Mængden af samtlige Punkter i Rummet (de sædvanlige saavel som de uendelig fjerne) og Mængden af samtlige egentlige (d. v. s. fra $(0,0,0,0)$ forskellige) Talsæt (X,Y,Z,T); denne Forbindelse er saadan, at ethvert egentligt Talsæt (X,Y,Z,T) bestemmer et og kun et Punkt, medens der til ethvert Punkt svarer uendelig mange Sæt „Koordinater" (X,Y,Z,T), der dog alle er indbyrdes proportionale (tænker vi os, hvad der sædvanligvis er bekvemt, alle indbyrdes proportionale egentlige Talsæt (X,Y,Z,T) sammenholdt som en Helhed, bliver den omhandlede Forbindelse mellem Punkter og Koordinater at opfatte som en eentydig Afhængighed). Forbindelsen vælges saadan, at de sædvanlige Punkter kommer til at svare til Mængden af Koordinatsæt (X,Y,Z,T), for hvilke den fjerde Koordinat T er forskellig fra Nul, medens de Koordinatsæt, hvor T er lig med Nul, forbeholdes de uendelig fjerne Punkter. Efter disse orienterende Bemærkninger skal vi nu gaa over til nærmere at angive den Maade, hvorpaa Rummets Punkter karakteriseres ved homogene Koordinater (X,Y,Z,T). Lad os da først betragte et sædvanligt Punkt P, som vi vil antage henført til det givne (inhomogene) Koordinatsystem $(X\,Y\,Z)$ hvor de (inhomogene) Koordinater (x,y,z); vi vedtager her, at der som homogene Koordinater til P skal svare ethvert Talsæt (X,Y,Z,T) med $T \neq 0$, for hvilket $\frac{X}{T}=x$, $\frac{Y}{T}=y$, $\frac{Z}{T}=z$. Herved er der da bragt Forbindelse til Veje mellem Rummets sædvanlige Punkter og Mængden af samtlige Talsæt (X,Y,Z,T) med $T \neq 0$, saaledes at to saadanne Talsæt da og kun da svarer til samme Punkt, naar de er proportionale. Lad os dernæst betragte et uendelig fjernt Punkt, bestemt ved Heldningen af et Paral-

Helknippe. Vi vedtager her (i fuldkommen Analogi med den Maade, hvorpaa vi bestemte de homogene Koordinater (X, Y, W) til et uendelig fjernt Punkt i Planen), at der til det givne uendelig fjerne Punkt skal svare ethvert Talsæt (X, Y, Z, W), hvor $W \neq 0$ og hvor (X, Y, Z) er de inhomogene Koordinater til et vilkaarligt, fra Begyndelsespunktet O forskelligt, sædvanligt Punkt paa den rette Linie med den givne Heldning (d. v. s. tilhørende det givne Parallelknippe), der gaar gennem O. I det en ret Linie gennem O jo i inhomogene Koordinater fremstilles ved Ligninger af Formen $x = at$, $y = bt$, $z = ct$, hvor (a, b, c) er et egentligt Talsæt, medens t er en uindskranket Variabel, ses umiddelbart, at de forskellige Koordinatsæt (X, Y, Z, W), der svarer til samme uendelig fjerne Punkt alle er indbyrdes proportionale. Hermed er der da bragt Forbindelse til Veje mellem Rummets uendelig fjerne Punkter og Mængden af alle egentlige Talsæt (X, Y, Z, W), for hvilke $W \neq 0$, og en saadan Forbindelse, at to Koordinatsæt $(X_1, Y_1, Z_1, 0)$ og $(X_2, Y_2, Z_2, 0)$ da og kun da svarer til samme Punkt, naar de er proportionale.

Af Definitionen paa homogene Koordinater (X, Y, Z, W) til et uendelig fjernt Punkt følger aabenbart, at Mængden af homogene Koordinater til samtlige uendelig fjerne Punkter i den sædvanlige Plan Π, hvis Ligning i inhomogene Koordinater er $Ax + By + Cz + D = 0$, er den samme som Mængden af alle Talsæt $(X, Y, Z, 0)$, hvor (X, Y, Z) er de inhomogene Koordinater til et vilkaarligt fra Begyndelsespunktet O forskelligt sædvanligt Punkt i den Plan Π: $Ax + By + Cz = 0$ gennem Begyndelsespunktet, der er parallel med Π, altsaa Mængden af alle Talsæt $(X, Y, Z, 0)$, hvor (X, Y, Z) er en vilkaarlig egentlig Løsning til den homogene Ligning $Ax + By + Cz = 0$.

Betragter vi nu Mængden af samtlige Punkter i Rummet

(sædvanlige og uendelig fjerne) har vi, som vi tilstrabte, gennem Indførelsen af homogene Koordinater tilvejebragt en entydig Forbindelse mellem denne Mængde og Mængden af samtlige egentlige Talsæt (X, Y, Z, W), og en saadan at to forskellige Talsæt da og kun da svarer til det samme Punkt, naar de er proportionale.

Benytter vi homogene Koordinater gælder der, som vi nu skal vise, følgende vigtige Sætning for Fremstillingen af en Plan (en sædvanlig eller den uendelig fjerne), en Sætning, der er det fuldstændige Analogon til Sætningen indenfor den plane Geometri vedrørende den rette Linies Fremstilling ved Hjælp af plane homogene Koordinater.

Enhver homogen Ligning af første Grad $AX+BY+CZ+DW=0$, hvor (A, B, C, D) er et egentligt Talsæt, fremstiller en Plan, d. v. s. Mængden af egentlige Løsninger (X, Y, Z, W) til den homogene Ligning er identisk med Mængden af homogene Koordinater til samtlige Punkter i Planen; og omvendt vil enhver Plan fremstilles ved en homogen Ligning af første Grad $AX+BY+CZ+DW=0$, hvor (A, B, C, D) er et egentligt Talsæt, og to Ligninger vil da og kun da fremstille den samme Plan, naar Koefficienterne er proportionale. Paa Grund af den i denne Sætning angivne Forbindelse mellem Mængden af Planer Π (de sædvanlige saavel som den uendelig fjerne) og Mængden af Ligninger $AX+BY+CZ+DW=0$, hvor (A, B, C, D) er et egentligt Talsæt, kalder vi Koefficientsættet (A, B, C, D) til en homogen første Grads Ligning, der fremstiller Planen Π, for Planens homogene Koordinater; homogene „Punktkoordinater" og homogene „Plankoordinater" er da forbundne ved Sætningen: Den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for at Planen (A, B, C, D) indeholder Punktet (X, Y, Z, W) (eller at Punktet (X, Y, Z, W) ligger

i Planen (A,B,C,D) udtrykkes ved Ligningen $AX+BY+CZ+DU=0$.
Ved Beviset for den opstillede Sætning vil vi først tænke os, at der er givet en vilkaarlig Plan Π; det gælder da om at vise, at denne Plan kan fremstilles ved en Ligning $AX+BY+CZ+DU=0$, hvor (A,B,C,D) er et egentligt Talsæt. (Lad os straks, for at skille os af med en Del af den opstillede Sætning, bemærke, at hvis Planen overhovedet kan fremstilles ved en saadan homogen Ligning af første Grad, er Planens Koordinater (A,B,C,D) derved entydig bestemt paa en Proportionalitetsfaktor nær, idet jo to homogene Ligninger af første Grad da og kun da har ganske de samme egentlige Løsninger (X,Y,Z,U), naar Koefficientsættene i de to Ligninger er proportionale). Lad os først betragte det Tilfælde, hvor den givne Plan Π er Rummets uendelig fjerne Plan; idet Mængden af homogene Koordinater til samtlige Punkter i denne Plan (d. v. s. til samtlige uendelig fjerne Punkter) er den samme som Mængden af samtlige Talsæt (X,Y,Z,U), hvor $U=0$, medens (X,Y,Z) er et vilkaarligt egentligt Talsæt, ses umiddelbart, at den uendelig fjerne Plan fremstilles ved Ligningen $U=0$. Lad dernæst Π være en sædvanlig Plan, som i inhomogene Koordinater har Ligningen $Ax+By+Cz+D=0$; vi vil vise, at Planen i homogene Koordinater fremstilles ved $AX+BY+CZ+DU=0$. Hertil bemærker vi for det første, at idet ethvert Koordinatsæt (X,Y,Z,U) til et sædvanligt Punkt jo har den fjerde Koordinat $U\neq 0$, er de sædvanlige Punkter, hvis homogene Koordinater tilfredsstiller $AX+BY+CZ+DU=0$, de samme som de sædvanlige Punkter, hvis homogene Koordinater tilfredsstiller Ligningen $A\frac{X}{U}+B\frac{Y}{U}+C\frac{Z}{U}+D=0$, d. v. s. hvis inhomogene Koordinater (x,y,z) tilfredsstiller Ligningen $Ax+By+Cz+D=0$; de sædvanlige Punkter, hvis homogene Koordinater tilfredsstiller $AX+BY+CZ+DU=0$ er følgelig netop,

saaledes som vi skulde vise, de sædvanlige Punkter i den givne Plan Π; vi mangler at bevise, at de uendelig fjerne Punkter, hvis homogene Koordinater tilfredsstiller $AX+BY+CZ+DW=0$, netop er de uendelig fjerne Punkter i den ved den inhomogene Ligning $Ax+By+Cz+D=0$ bestemte Plan Π; dette følger imidlertid umiddelbart deraf, at Mængden af homogene Koordinater til samtlige uendelig fjerne Punkter i Planen Π i Følge en tidligere Bemærkning jo netop er alle de egentlige Talsæt $(X,Y,Z,0)$, hvor (X,Y,Z) er en vilkaarlig egentlig Løsning til den homogene Ligning $AX+BY+CZ=0$. — Dernæst skal det vises, at omvendt enhver homogen første Grads Ligning $AX+BY+CZ+DW=0$, hvor (A,B,C,D) er et egentligt Talsæt, fremstiller en Plan. Beviset herfor fremgaar imidlertid umiddelbart af det foregaaende; thi dersom $A=B=C=0$ (og følgelig $D\neq 0$), fremstiller Ligningen jo den uendelig fjerne Plan, og er ikke alle tre Tal A, B, C lig med Nul, fremstiller Ligningen den Plan Π, der i inhomogene Koordinater bestemmes ved Ligningen $Ax+By+Cz+D=0$. Hermed er da den opstillede Sætning fuldstændig bevist.

I det vi ovenfor ad geometrisk Vej har bevist, at to (forskellige) Planer altid skærer hinanden i en ret Linie, medens omvendt en ret Linie aabenbart (paa mangfoldig Maade) kan dannes som Skæringslinie mellem to Planer, følger af den foregaaende Sætning umiddelbart: <u>Enhver ret Linie kan</u> (paa mangfoldig Maade) <u>fremstilles ved to homogene Ligninger</u>

$$\begin{aligned} AX+BY+CZ+DW&=0\\ A_1X+B_1Y+C_1Z+D_1W&=0, \end{aligned}$$

hvor Koefficientsættene (A,B,C,D) og (A_1,B_1,C_1,D_1) ikke er proportionale, og omvendt vil to hvilkesomhelst saadanne Ligninger fremstille en ret Linie. Det vil nu ikke være forbundet med nogensomhelst Vanskelighed analytisk at verificere de forskellige ovenfor ad geometrisk Vej beviste almengyldige Sætninger vedrørende Kombination af Punkt, ret Linie og Plan. Lad os som et Eksempel paa en saadan analytisk Behandling søge Skæringspunkterne mellem tre forskellige Planer (A,B,C,D), (A_1,B_1,C_1,D_1) og (A_2,B_2,C_2,D_2), d. v. s. søge de egentlige Løsninger (X,Y,Z,W) til de tre homogene Ligninger

$$AX+BY+CZ+DW=0,\quad A_1X+B_1Y+C_1Z+D_1W=0,\quad A_2X+B_2Y+C_2Z+D_2W=0,$$

om hvilke det er givet, at ikke to af de tre Koefficientsæt (A,B,C,D), (A_1,B_1,C_1,D_1), (A_2,B_2,C_2,D_2) er proportionale, hvoraf følger, at Rangen af Determinanten

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

mindst er lig med 2. Vi skelner nu mellem to Tilfælde:

1) Er Rangen af ovenstaaende Determinant 2, d. v. s. er de 4 Underdeterminanter til Elementerne i sidste Række alle lig med Nul, da kan som bekendt (smlg. 20) een af de tre ovenstaaende Ligninger udledes af de to andre, d. v. s. de tre Planer gaar gennem samme rette Linie.

2) Er Rangen af Determinanten 3, d. v. s. er de 4 Underdeterminanter ikke alle lig med Nul, vil samtlige egentlige

Løsninger til de 3 givne Ligninger have Formen $t\cdot(X_0, Y_0, Z_0, V_0)$, hvor (X_0, Y_0, Z_0, V_0) er en egentlig Løsning, medens t er en vilkaarlig fra Nul forskellig Konstant. I dette Tilfælde vil de tre Planer følgelig skære hinanden i et og kun et Punkt.

Opfatter vi i den foregaaende Undersøgelse (A, B, C, D), (A_1, B_1, C_1, D_1), (A_2, B_2, C_2, D_2) ikke længere som Koordinater til tre forskellige Planer, men som Koordinater til tre forskellige Punkter, for hvilke vi søger saadanne Planer (X, Y, Z, V), der gaar gennem disse tre Punkter, kan Resultatet af Regningen umiddelbart fortolkes saaledes: Dersom ovenstaaende Determinant har Rangen 2, vil det ene Punkt være beliggende i enhver Plan, der gaar gennem de to andre, d. v. s. de tre Punkter vil være beliggende paa en ret Linie, og der gaar da uendelig mange Planer gennem dem; har Determinanten derimod Rangen 3 gaar der en og kun een Plan gennem dem (nemlig den hvis Koordinater med de ovenstaaende Betegnelser udtrykkes ved $t\cdot(X_0\ Y_0\ Z_0\ V_0)$).

I Tilknytning til det foregaaende kan bemærkes, at hvis de tre Punkter (X_1, Y_1, Z_1, V_1), (X_2, Y_2, Z_2, V_2), (X_3, Y_3, Z_3, V_3) ikke ligger paa en ret Linie, d. v. s. i Følge det foregaaende at den nævnte Determinant har Rangen 3 eller at ikke alle fire Determinanter

$$\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 & V_1 \\ Y_2 & Z_2 & V_2 \\ Y_3 & Z_3 & V_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} Z_1 & V_1 & X_1 \\ Z_2 & V_2 & X_2 \\ Z_3 & V_3 & X_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} V_1 & X_1 & Y_1 \\ V_2 & X_2 & Y_2 \\ V_3 & X_3 & Y_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

er lig med Nul, vil den ene Plan, der i dette Tilfælde indeholder dem alle, være bestemt ved Ligningen

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & T \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & T_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & T_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & T_3 \end{vmatrix} = 0 \quad ;$$

thi i denne Ligning $AX+BY+CZ+DT=0$ er (A, B, C, D) et egentligt Talsæt, og Ligningen tilfredsstilles øjensynlig af Punkterne (X_1, Y_1, Z_1, T_1), (X_2, Y_2, Z_2, T_2) og (X_3, Y_3, Z_3, T_3). — I det specielle Tilfælde, hvor de tre givne (ikke paa een og samme rette Linie beliggende) Punkter alle tre er sædvanlige Punkter, kan den søgte Ligning for den (sædvanlige) Plan Π, der gaar gennem de tre Punkter, naturligvis ogsaa umiddelbart udledes ud fra den kendte inhomogene Ligning for Planen Π:

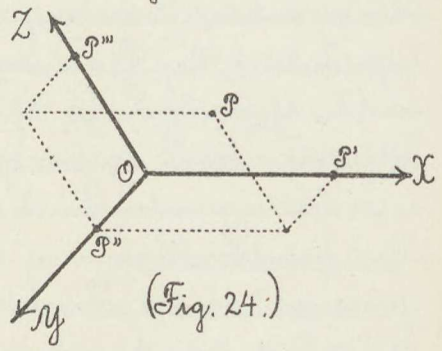
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ved blot at bringe denne sidste Ligning paa homogen Form, d. v. s. ved at sætte $x=\frac{X}{T}$, $y=\frac{Y}{T}$, $z=\frac{Z}{T}$ og derefter bortmultiplicere T (samtidig med at man for det givne Punkt $P_n (n=1,2,3)$ indfører $(x_n, y_n, z_n) = \left(\frac{X_n}{T_n}, \frac{Y_n}{T_n}, \frac{Z_n}{T_n}\right)$ og derefter multiplicerer med $T_1 \cdot T_2 \cdot T_3$).

69. Parallelkoordinatsystem. Lad der være givet tre orienterede rette Linier X, Y og Z, der gaar gennem samme Punkt O, men ikke ligger i samme Plan. Disse tre rette Linier (i Forbindelse med en given Længdeenhed) bestemmer et saakaldt Parallelkoordinatsystem (XYZ) med Begyndelsespunkt O,

Koordinatakser X, Y, Z og Koordinatplaner YZ, ZX, XY. Lad P være et variabelt Punkt i Rummet, og lad os gennem Punktet P drage tre Planer parallele med henholdsvis YZ-, ZX- og XY-Planen til Skæring med henholdsvis X-, Y- og Z-Akse i Punkterne P', P'', P'''; vi karakteriserer da (se Fig. 24) Punktet P henført til Parallelkoordinatsystemet (XYZ) ved de tre Tal

$$x = OP', \quad y = OP'', \quad z = OP'''.$$

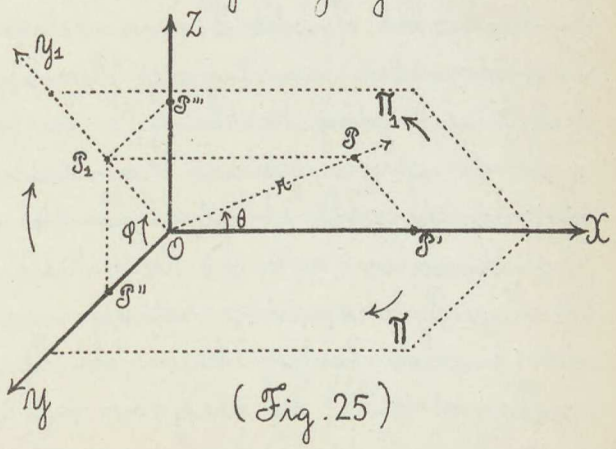


(Fig. 24.)

Vi faar øjensynlig herigennem (ligesom ved det retvinklede Koordinatsystem, der jo er et specielt Tilfælde af et Parallelkoordinatsystem, nemlig svarende til at de tre Akser X, Y, Z er vinkelrette paa hinanden) tilvejebragt en <u>eensentydig</u> Forbindelse mellem Rummets sædvanlige Punkter og Mængden af samtlige Talpar (x, y, z). — Vi skal ikke gaa nærmere ind paa Omtalen af et Parallelkoordinatsystem, men skal nøjes med at nævne, at der (svarende til en Sætning om Parallelkoordinatsystemer indenfor den plane Geometri) gælder den Sætning (se Opg. 67), at <u>de Transformationsformler, der fører over fra et Parallelkoordinatsystem i Rummet til et vilkaarligt andet</u>, d. v. s. de Formler, som udtrykker Koordinaterne til et variabelt Punkt henført til det ene System ved Koordinaterne til samme Punkt henført til det andet System, <u>danner en lineær Substitution</u>. Heraf slutter man (ganske som ved den tilsvarende Sætning indenfor den plane Geometri), at der naar man benytter et vilkaarligt Parallelkoordinatsy-

stem $(X\,Y\,Z)$ gælder samme fundamentale Sætning for Fremstillingen af en Plan, som den vi ovenfor har bevist for det speciellere retvinklede Koordinatsystems Vedkommende, nemlig: Enhver Plan fremstilles ved en Ligning af første Grad $Ax + By + Cz + D = 0$, hvor (A, B, C) er et egentligt Talsæt, og omvendt vil enhver saadan Ligning fremstille en Plan. Vi nævner slutteligt, at man ogsaa naar det benyttede Koordinatsystem er et vilkaarligt Parallelkoordinatsystem (ligesom ved det speciellere retvinklede System) indfører homogene Koordinater (X, Y, Z, N) til Brug ved saadanne Undersøgelser, hvor Rummets uendelig fjerne Elementer inddrages i Betragtningen.

70. Polære Koordinater. Lad der i et orienteret Rum (d. v. s. et Rum med fastlagt Drejningsretning) være givet et Punkt O, en orienteret ret Linie X gennem dette Punkt O og en orienteret Plan Π igennem Linien X. Hermed er der da fastlagt et polart Koordinatsystem med Polen O, Aksen X og Grundplanen Π. Man karakteriserer et vilkaarligt Punkt P i Rummet henført til et saadant polart Koordinatsystem ved tre Tal (Koordinater) r, θ, φ, der bestemmes paa følgende Maade (se Fig. 25): Gennem Punktet P og Aksen X lægges en orienteret Plan Π_1; de to første Koordinater r, θ bestemmer Punktets Beliggenhed i denne Plan, idet de angiver de plane polære Koordinater til Punktet P henført til det plane polære Koordinatsystem i den orienterede Plan



(Fig. 25)

Π_1, der har O til Pol og X til Akse; endelig tjener den tredie Koordinat φ til Bestemmelse af den orienterede Plan Π_1, idet den angiver den Vinkel, som den orienterede Grundplan Π maa drejes omkring Aksen X for at bringes til Dækning (vg. saa hvad Omløbsretningen angaar) med den orienterede Plan Π_1, idet vi ved Bestemmelsen af denne Drejningsvinkel φ regner den Omløbsretning omkring Aksen for den positive, der taget sammen med Aksens positive Retning stemmer overens med den i Rummet fastlagte Drejningsretning; den tredie Koordinat φ kan øjensynlig ogsaa karakteriseres saaledes: vi skærer de to gennem Aksen gaaende orienterede Planer Π og Π_1 med en Plan gennem O vinkelret paa Aksen (paa Fig. Planen YZ), og orienterer denne Plan saaledes, at den har Aksen X til positiv Normal; endvidere orienterer vi de to Skæringslinier Y og Y_1, saaledes at $\sphericalangle(XY)$ (maalt i den orienterede Plan Π) og $\sphericalangle(XY_1)$ (maalt i den orienterede Plan Π_1) begge er lig med $+\frac{\pi}{2}$; da er $\varphi = \sphericalangle(YY_1)$. — Den ved Hjælp af et polært Koordinatsystem tilvejebragte Forbindelse mellem Rummets sædvanlige Punkter P og Mængden af Talsæt (r, θ, φ) er øjensynlig en <u>eentydig</u>; thi til et givet Talsæt (r, θ, φ) svarer eet og kun eet Punkt P, der netop har dette Talsæt til polære Koordinater, nemlig det Punkt P, der i den ved den givne Vinkel φ eentydig bestemte orienterede Plan Π_1 er eentydig bestemt ved de givne polære Koordinater (r, θ); omvendt derimod svarer der til et givet Punkt P uendelig mange Sæt polære Koordinater (r, θ, φ), der kan karakteriseres paa følgende Maade: 1) er P ikke netop beliggende paa Aksen X (hvoraf følger at der findes en og kun en Plan Π_1, der indeholder Aksen X og Punktet P), og angiver $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ et af P's polære Koordinatsæt, har P uendelig mange polære Koordinatsæt, der natur-

ligt falder i de fire Grupper

$$(15)\qquad \begin{matrix} (r_0, \theta_0 + 2p\pi, \varphi_0 + 2q\pi) \;, & (-r_0, \theta_0 + (2p+1)\pi, \varphi_0 + 2q\pi) \\ (r_0, -\theta_0 + 2p\pi, \varphi_0 + (2q+1)\pi) \;, & (-r_0, -\theta_0 + (2p+1)\pi, \varphi_0 + (2q+1)\pi) \end{matrix},$$

af hvilke de to øverste Grupper svarer til det ene Valg af positiv Omløbsretning i Planen Π_1, medens de to nederste svarer til det modsatte Valg; 3/ er P beliggende paa Aksen X uden netop at være Polen O, kan de uendelig mange polære Koordinatsæt til P aabenbart skrives paa Formen

$$(r_0, 2p\pi, \varphi) \;, \quad (-r_0, (2p+1)\pi, \varphi),$$

hvor $r_0 = OP$ (regnet med Fortegn paa Aksen X), medens φ er et fuldkommen vilkaarligt Tal; 3/ er endelig P selve Polen O har det Koordinaterne

$$(0, \theta, \varphi),$$

hvor baade θ og φ er fuldkommen vilkaarlige. — Som det simplest mulige Øvelseseksempel paa Benyttelsen af polære Koordinater nævner vi, at en Kugleflade med Centrum i Polen O og Radius a fremstilles ved Ligningen $r^2 = a^2$, hvis vi om Ligningen forlanger, at den skal tilfredsstilles af ethvert Sæt polære Koordinater til Kuglefladens Punkter, medens Kuglefladen kan fremstilles ved Ligningen $r = a$ (eller $r = -a$), dersom vi om Ligningen kun forlanger, at den skal tilfredsstilles for et passende Valg af (d. v. s. af mindst ét af) de forskellige polære Koordinatsæt til Fladens Punkter.

Lad os tilføje, at ligesom $r = \text{const.}$ fremstiller koncentriske Kugleflader med Centrum i Polen, vil $\theta = \text{const.}$ fremstille Omdrejningskegleflader med Toppunkt i Polen og Aksen til Omdrejningsakse, og $\varphi = \text{const.}$ fremstille Planer gaaende gennem Aksen.

Ofte er det bekvemt samtidigt med et polært Koordinatsystem at betragte det retvinklede Koordinatsystem (XYZ) (se Fig 25), der har Polen O til Begyndelsespunkt, Aksen X til X-Akse og den orienterede Grundplan Π til (XY)-Plan, og som er orienteret i Overensstemmelse med den i Rummet fastlagte Drejningsretning, d. v. s. hvor Z-Aksen er den positive Normal til Planen Π. Lad os betragte et vilkaarligt Punkt P i Rummet, hvis retvinklede Koordinater vi betegner med (x, y, z), medens (r, θ, φ) angiver et vilkaarligt af Punktets uendelig mange polære Koordinatsæt, og lad os søge de retvinklede Koordinater (x, y, z) udtrykt ved de polære Koordinater (r, θ, φ). Ved at projicere OP paa X-Aksen finder vi for det første umiddelbart $x = r\cos\theta$. Projicerer vi dernæst OP paa Skæringslinien Y_1 mellem Planen Π_1 og YZ-Planen, idet vi som ovenfor vrienterer Y_1 saaledes at $\sphericalangle(XY_1) = +\frac{\pi}{2}$, finder vi (se Fig 25) Projektionen $OP_1 = r\sin\theta$, og projicerer vi sluttelig OP_1 ind paa henholdsvis Y- og Z-Akse, finder vi (idet $\sphericalangle(YY_1) = \varphi$) $y = OP_1\cos\varphi$, $z = OP_1\sin\varphi$. De søgte Transformationsformler er altsaa

$$(16) \qquad x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta\cos\varphi\,, \quad z = r\sin\theta\sin\varphi\,.$$

Disse Formler udtrykker (x, y, z) entydigt ved (r, θ, φ) i Overensstemmelse med, at naar (r, θ, φ) er givet, er derved Punktet P og derved atter (x, y, z) entydig bestemt. Vil vi omvendt finde

de polære Koordinater (r, θ, φ) udtrykt ved de retvinklede Koordinater (x, y, z) behøver vi blot at løse Ligningerne (16) med Hensyn til r, θ, φ. Vi ved paa Forhaand, at disse Ligninger for opgivne Værdier af x, y, z har uendelig mange Løsninger (r, θ, φ), idet der jo til et opgivet Koordinatsæt (x, y, z), d. v. s. til et givet Punkt, svarer uendelig mange Sæt polære Koordinater. Idet vi som et Øvelseseksempel vil gennemføre den fuldstændige Opløsning af Ligningerne (16) med Hensyn til r, θ, φ, maa vi skelne mellem tre Tilfælde, nemlig dels det Tilfælde, hvor det givne Punkt (x, y, z) er Begyndelsespunktet O, dels det Tilfælde, hvor (x, y, z) er beliggende paa X-Aksen uden netop at være Begyndelsespunktet, og endelig det Tilfælde, hvor (x, y, z) ikke er beliggende paa X-Aksen. 1) Er $x = y = z = 0$ giver de to sidste Ligninger $0 = r \sin\theta \cdot \cos\varphi$, $0 = r \sin\theta \cdot \sin\varphi$ os Resultatet: $r \sin\theta = 0$, φ vilkaarlig; benytter vi dernæst til Bestemmelse af r og θ den sidste Ligning $r \sin\theta = 0$ i Forbindelse med den første Ligning $r \cos\theta = 0$ finder vi $r = 0$, θ vilkaarlig; vi har altsaa fundet $r = 0$, θ vilkaarlig, φ vilkaarlig. 2) Er $x \neq 0$, $y = z = 0$ giver de to sidste Ligninger $0 = r \sin\theta \cos\varphi$, $0 = r \sin\theta \sin\varphi$ os ligesom før Resultatet $r \sin\theta = 0$, φ vilkaarlig; benytter vi dernæst $r \sin\theta = 0$ i Forbindelse med den første Ligning $r \cos\theta = x$, finder vi $\theta = 2p\pi$, $r = x$ eller $\theta = (2p+1)\pi$, $r = -x$; Løsningerne er altsaa her $(x, 2p\pi, \varphi)$, $(-x, (2p+1)\pi, \varphi)$, hvor φ er vilkaarlig. 3) Betragter vi endelig Hovedtilfældet, hvor ikke begge Tallene y og z er lig med Nul, gaar man ved Opløsningen af Ligningerne (16) frem paa følgende Maade: Først bestemmes φ ved Ligningen $\operatorname{tg}\varphi = \frac{z}{y}$ (eller korrektere, af Hensyn til Tilfældet $y = 0$, ved Betingelsen: $(\sin\varphi, \cos\varphi)$ proportionalt med (z, y)); dernæst bestemmes θ, hvis $y \neq 0$, ved Ligningen $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x \cos\varphi}$, medens man, hvis $y = 0$ (hvad der medfører $\cos\varphi = 0$), til Bestemmelse af θ benytter Ligningen $\operatorname{tg}\theta = \frac{z}{x \sin\varphi}$; endelig bestem-

mes x, hvis $x \neq 0$, ved Ligningen $r = \frac{x}{\cos\theta}$, medens x, hvis $x = 0$ (hvad der medfører $\cos\theta = 0$) bestemmes ved en af de to Ligninger $r = \frac{y}{\sin\theta\cos\varphi}$ eller $r = \frac{z}{\sin\theta\sin\varphi}$. Antager vi f. Eks $y \neq 0$, $x \neq 0$ former den successive Løsning sig som vist paa efterfølgende Skema

$\underline{tg\,\varphi = \frac{z}{y} \text{ giver}}$

$\varphi = \varphi_0 + 2q\pi$ $\qquad$ $\varphi = \varphi_0 + (2q+1)\pi$

$\underline{tg\,\theta = \frac{y}{x\cos\varphi} \text{ giver dernæst}}$

$\theta = \theta_0 + 2p\pi$ $\qquad$ $\theta = \theta_0 + (2p+1)\pi$ $\qquad$ $\theta = -\theta_0 + 2p\pi$ $\qquad$ $\theta = -\theta_0 + (2p+1)\pi$

$\underline{r = \frac{x}{\cos\theta} \text{ giver sluttelig}}$

$r = r_0$ $\qquad$ $r = -r_0$ $\qquad$ $r = r_0$ $\qquad$ $r = -r_0$.

De fundne Løsninger har (som vi paa Forhaand vidste, at det maatte være Tilfældet) netop Formen (15). Lad os tilføje den Bemærkning at man (i alle Tilfælde) ved at kvadrere og addere de tre Ligninger (16) finder: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, altsaa den bekendte Formel $OP^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Vi afslutter vor Omtale af Koordinatsystemer i Rummet med at nævne, at det ved nogle Opgaver er fordelagtigt at benytte saakaldte <u>semipolære</u> (halvpolære) <u>Koordinater</u>, hvor det variable Punkt P, der tænkes beliggende i et retvinklet Koordinatsystem, bestemmes dels ved sin z-Koordinat, dels ved plane polære Koordinater (r, θ) for dets Projektion paa (XY)-Planen.

<u>Opg. 34.</u> Idet vi benytter homogene Koordinater (X, M) til Karakterisering af Punkterne (de sædvanlige saavelsom det uendelig fjerne) paa en given ret Linie, tænker vi os to variable Punkter $P_1 : (X_1, M_1)$ og $P_2 : (X_2, M_2)$ forbundet ved Ligningen

$$a X_1 X_2 + b X_1 N_2 + c X_2 N_1 + d N_1 N_2 = 0 ,$$

hvor $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. Vis først, at den herigennem fastlagte Forbindelse mellem det variable Punkt P_1 og det variable Punkt P_2 er en <u>eentydig</u> Afhængighed. Vis dernæst, at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at de to „Punktrækker" P_1 og P_2 har et <u>Fællespunkt</u> (d. v. s. for at der eksisterer et Punkt, der er sit eget tilsvarende Punkt), udtrykkes ved Uligheden $(b+c)^2 - 4ad \geqq 0$. Angiv endelig Fællespunktet (eller Fællespunkterne) i de specielle Tilfælde, hvor 1) $a=1$, $b+c=-3$, $d=2$, 2) $a=d=1$, $b+c=-2$, 3) $a=0$, $b+c=d=1$ og 4) $a=b+c=d=0$.

Opg. 35. Find Retningscosinusserne for Linien $x+4y-5=0$ orienteret saaledes, at Afstanden fra det Punkt, hvori Linien skærer X-Aksen til det Punkt, hvori Linien skærer Y-Aksen, er positiv, samt Retningscosinusserne for Linien $\begin{cases} x = 3t-1 \\ y = 2t+5 \end{cases}$ orienteret saaledes, at Afstanden fra Punktet $t=0$ til Punktet $t=1$ er negativ. Find dernæst cosinus til den Vinkel, de to saaledes orienterede Linier danner med hinanden, og bestem endelig Linieernes Skæringspunkt. (Figur).

Opg. 36. Idet vi i en orienteret Plan regner Arealet $P_1 P_2 \ldots P_n$ af en vilkaarlig konveks Polygon med de n (paa hinanden følgende) Vinkelspidser $P_1 : (x_1 y_1)$, $P_2 : (x_2 y_2)$ . . . $P_n : (x_n y_n)$ positivt eller negativt, eftersom Omløbet $P_1 P_2 \ldots P_n$ stemmer med Planens positive eller med Planens negative Omløbsretning, skal det (ved Hjælp af Sætningen om en Trekants Areal) vises, at dette Areal bestemmes ved Ligningen

$$P_1 P_2 \ldots P_n = \frac{1}{2} \left\{ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \ldots\ldots\ldots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & x_n \\ y_{n-1} & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix} \right\} .$$

Opg. 37. Find Ligningen for Linien $3x+7y+2\sqrt{2}=0$ henført til det med det givne Koordinatsystem (XY) ens orienterede Koordinatsystem (X_1Y_1), der har Begyndelsespunkt i $(3,-4)$, og for hvilket X_1-Aksen gaar gennem $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ og er orienteret saaledes at $\sphericalangle(YX_1)$ ligger i første Kvadrant. (Figur).

Opg. 38. Bevis, idet $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ er Koefficientskemaet til en egentlig orthogonal Substitution, at Determinanterne

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{vmatrix} \alpha x_1+\beta y_1 & \gamma x_1+\delta y_1 & 1\\ \alpha x_2+\beta y_2 & \gamma x_2+\delta y_2 & 1\\ \alpha x_3+\beta y_3 & \gamma x_3+\delta y_3 & 1\end{vmatrix}$$

er ligestore og angiv den geometriske Fortolkning heraf.

Opg. 39. Ved et Liniebundt i Planen forstaas Samlingen af alle rette Linier gennem eet (sædvanligt eller uendelig fjernt) Punkt. Vis at hvis (A_1,B_1,C_1) og (A_2,B_2,C_2) er homogene Liniekoordinater til to (indbyrdes forskellige) Linier i et saadant Bundt, vil samtlige Linier i Bundtet bestemmes ved

$$(A,B,C)=k_1(A_1,B_1,C_1)+k_2(A_2,B_2,C_2),$$

hvor Parameterparret (k_1,k_2) er et vilkaarligt egentligt Talpar, samt af to forskellige Parameterpar (k_1,k_2) og (k_1',k_2') da og kun da bestemmer samme Linie i Bundtet, naar de er proportionale.

Opg. 40. For hvilke Værdier af Konstanten a gaar de tre rette Linier

$$\begin{aligned} X(a^2+a-6)+Y(4a-8)+14Z&=0\\ X(a^2-3)+Y(3a-5)+7Z&=0\\ X(a-3)+Y(a-3)+6Z&=0\end{aligned}$$

gennem samme Punkt (tilhører samme Bundt)? Angiv for de fundne Værdier af a Liniernes Skæringspunkt (Bundtets Toppunkt).

Opg. 41. Find Skæringspunktet P_1 mellem de to rette Linier $X+2Y+3N=0$ og $N=0$, Skæringspunktet P_2 mellem de rette Linier $X+Y+N=0$ og $\begin{cases} X=s+t \\ Y=2s+t \\ N=3s+4t \end{cases}$ og Skæringspunktet P_3 mellem Linierne $\begin{cases} X=s-t \\ Y=s-2t \\ N=s-5t \end{cases}$ og $\begin{cases} X=s+t \\ Y=s \\ N=-s-t \end{cases}$ og vis at de tre Punkter P_1, P_2, P_3 ligger paa een og samme rette Linie.

Opg. 42. Idet vi karakteriserer saavel Planens Punkter som Planens Linier ved homogene Koordinater, kan vi bringe en eensentydig Forbindelse til Veje mellem Mængden af samtlige Punkter og Mængden af samtlige Linier derved at vi lader et Punkt P og en Linie L svare til hinanden, naar P's Punktkoordinater er de samme som L's Liniekoordinater. Karakteriser denne Afhængighed geometriske, d. v. s. angiv hvorledes et Punkt P og den tilsvarende Linie L ligger overfor hinanden. Vis endvidere, at til tre Punkter paa samme rette Linie svarer der tre Linier gennem samme Punkt.

Opg. 43. Lad der i en orienteret Plan være fastlagt et Parallelkoordinatsystem med Aksevinklen $\sphericalangle(XY)=\nu$, og lad $P_1:(x_1,y_1)$ og $P_2:(x_2,y_2)$ være to givne (forskellige) Punkter i Planen. Bestem 1) Midtpunktet af P_1P_2, 2) Afstanden mellem P_1 og P_2, 3) Ligningen for den rette Linie L gennem P_1 og P_2, samt 4) Afstanden fra L til Begyndelsespunktet.

Opg. 44. Angiv den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for at to sædvanlige Linier i Rummet: $x=a+bt$, $y=c+dt$, $z=e+ft$ og $x=a_1+b_1t$, $y=c_1+d_1t$, $z=e_1+f_1t$ ligger i samme Plan.

Opg. 45 Bestem de Punkter paa y-Aksen, hvis Afstand fra Punktet $(0,-1,-4)$ er lig 5.

Opg. 46. Find Vinklerne i en Trekant med Vinkelspidserne $(0,0,0)$, $(-1,-2,2)$, $(1,-3,4)$.

Opg. 47. Find Parameterfremstillingen for den rette Linie, der bestemmes ved Punkterne $P_1:(x_1,y_1,z_1)$ og $P_2:(x_2,y_2,z_2)$, idet Parameteren skal være det Forhold u, hvori det variable Punkt paa Linien $P:(x,y,z)$ deler Liniestykket P_1P_2.

Opg. 48. Bestem de rette Linier, der ligger i (XY)-Planen, gaar gennem Begyndelsespunktet og danner Vinklen v med Linien $x=y=z$.

Opg. 49. Find de Punkter paa X-Aksen, hvis Afstand fra Linien $x-1=y-1=z+2$ er lig $\sqrt{6}$.

Opg. 50. For hvilken Værdi af Konstanten α vil Linierne

$$\begin{cases} 3x+z-3\alpha=0 \\ 3y+2z+3=0 \end{cases} \quad \text{og} \quad \begin{cases} 3\alpha x+2y-\alpha z+2\alpha-3=0 \\ 2y+3z+2\alpha=0 \end{cases}$$

skære hinanden, og hvad er Ligningen for den Plan, der i saa Fald indeholder Linierne?

Opg. 51. Find Ligningen for en Plan, der gaar gennem Punktet $P_1:(x_1,y_1,z_1)$ og er parallel med Linierne $L_1: x=a_1+b_1t$, $y=c_1+d_1t$, $z=e_1+f_1t$ og $L_2: x=a_2+b_2t$, $y=c_2+d_2t$, $z=e_2+f_2t$, samt find Ligningen for en Plan, der gaar gennem Punkterne $P_1:(x_1,y_1,z_1)$ og $P_2:(x_2,y_2,z_2)$ og er parallel med Linien $L: x=a+bt$, $y=c+dt$, $z=e+ft$.

Opg. 52 For hvilken Værdi af Konstanten a vil Planerne

$$4x+y+7z=1 \quad , \quad x-2y+az=1 \quad , \quad 7x+ay+10z=2$$

være parallele med samme rette Linie?

Opg. 53. Et Tetraeder har Vinkelspidserne $A:(0,0,0)$; $B:(3,0,0)$; $C:(2,1,0)$; $D:(1,1,1)$. I det Rummet er orienteret i Overensstemmelse med Koordinatsystemet, samt idet Sidefladerne ABC og ABD er orienterede saaledes, at Omløbet ABC henholdsvis Omløbet ABD stemmer overens med den positive Omløbsretning, skal man finde de positive Normalfortmer for disse to orienterede Sideflader og derved cosinus til Vinklen mellem dem. Bestem endvidere Volūminet af Tetraedret $ABCD$.

Opg. 54. Find den korteste Afstand mellem de to Linier

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha_1 r \\ y = y_1 + \beta_1 r \\ z = z_1 + \gamma_1 r \end{cases} \qquad \text{og} \qquad \begin{cases} x = x_2 + \alpha_2 r \\ y = y_2 + \beta_2 r \\ z = z_2 + \gamma_2 r \end{cases} .$$

Opg. 55. Find den korteste Afstand mellem to saadanne Kanter i et regulært Oktaeder, der ikke ligger i samme Plan. (Vælg de tre Diagonaler til Koordinatakser).

Opg. 56. Find Ligningerne for en ret Linie, som gaar gennem Punktet $(3,2,-1)$ og skærer Linierne

$$x-1=y=z+4 \text{ og } \frac{x-10}{5}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-2}{2} .$$

Opg. 57. Find Ligningen for en ret Linie, der skærer under ret Vinkel to givne Linier L_1 og L_2 med Ligningerne henholdsvis $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+7}{-2}$ og $x=y=z$.

Opg 58. Ved et Planbundt forstaas Samlingen af alle Planer gennem en given (sædvanlig eller uendelig fjern) ret Linie. Vis at hvis (A_1, B_1, C_1, D_1) og (A_2, B_2, C_2, D_2) er homogene Plankoordinater til to (indbyrdes forskellige) Planer i et saadant Bundt, vil samtlige Planer i Bundtet bestemmes ved

$$(A, B, C, D) = k_1 (A_1, B_1, C_1, D_1) + k_2 (A_2, B_2, C_2, D_2),$$

hvor Parameterparret (k_1, k_2) er et vilkaarligt egentligt Talpar, samt at to forskellige Parameterpar (k_1, k_2) og (k_1', k_2') da og kun da bestemmer samme Plan i Bundtet, naar de er proportionale.

Opg. 59. Ved et Planknippe forstaas Samlingen af alle Planer gennem et givet (sædvanligt eller uendelig fjernt) Punkt. Vis at hvis (A_1, B_1, C_1, D_1), (A_2, B_2, C_2, D_2), (A_3, B_3, C_3, D_3) er homogene Plankoordinater til tre (indbyrdes forskellige og ikke til samme Planbundt hørende) Planer i et saadant Knippe, vil samtlige Planer i Knippet bestemmes ved

$$(A, B, C, D) = k_1 (A_1, B_1, C_1, D_1) + k_2 (A_2, B_2, C_2, D_2) + k_3 (A_3, B_3, C_3 D_3),$$

hvor (k_1, k_2, k_3) er et vilkaarligt egentligt Talsæt, samt at to forskellige Parametersæt (k_1, k_2, k_3) og (k_1', k_2', k_3') da og kun da bestemmer samme Plan i Knippet, naar de er proportionale.

Opg. 60. Idet (A_1, B_1, C_1, D_1), (A_2, B_2, C_2, D_2), (A_3, B_3, C_3, D_3) er tre Planer skal man angive den geometriske Betydning af, at Rangen af Determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}$$

er 3 eller 2 eller 1.

Opg. 61. For hvilken Værdi af Konstanten a tilhører de tre Planer $(a,1,1,0)$, $(1,-a,1,-a)$, $(0,2,0,a)$ samme Bundt?

Opg. 62. For hvilke Værdier af Konstanten a tilhører de fire Planer $(a,2,0,0)$, $(4,0,-4,-2a)$, $(0,2,-a,-4)$, $(0,0,a,3)$ samme Plankippe?

Opg. 63. Idet vi karakteriserer saavel Rummets Punkter som Rummets Planer ved homogene Koordinater, kan vi bringe en eentydig Forbindelse til Veje mellem Mængden af samtlige Punkter og Mængden af samtlige Planer derved, at vi lader et Punkt og en Plan svare til hinanden, naar de har samme Koordinater. Karakteriser denne Afhængighed geometrisk.

Opg. 64. Vis at en vilkaarlig Plan paa Parameterform i homogene Koordinater kan fremstilles ved Ligninger af Formen

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1 s + \alpha_2 t + \alpha_3 u \\ Y &= \beta_1 s + \beta_2 t + \beta_3 u \\ Z &= \gamma_1 s + \gamma_2 t + \gamma_3 u \\ W &= \delta_1 s + \delta_2 t + \delta_3 u \ , \end{aligned}$$

hvor de tre Talsæt $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\delta_1)$, $(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2,\delta_2)$, $(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3,\delta_3)$ er indbyrdes uafhængige, og hvor Parametersættet (s,t,u) gennemløber alle egentlige Talsæt. Bevis dernæst den anvendte Sætning. Angiv en Parameterfremstilling for den Plan, der gaar gennem Punkterne $(1,2,3,4)$, $(-1,0,1,0)$, $(0,1,0,0)$.

Opg. 65. Vis at en vilkaarlig ret Linie paa Parameterform i homogene Koordinater kan fremstilles ved Ligninger af Formen

$$X = \alpha_1 s + \alpha_2 t$$
$$Y = \beta_1 s + \beta_2 t$$
$$Z = \gamma_1 s + \gamma_2 t$$
$$U = \delta_1 s + \delta_2 t ,$$

hvor $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ og $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$ begge er egentlige Talsæt og ikke er proportionale, og hvor Parameterparret (s,t) gennemløber alle egentlige Talpar. Bevis dernæst den omvendte Sætning. Angiv en Parameterfremstilling for den rette Linie, der gaar gennem Punkterne $(1,0,1,0)$ og $(0,1,0,1)$.

Opg. 66. Find Skæringspunktet mellem den rette Linie $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 ; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$ (se Opg. 65) og Planen (A, B, C, D). Diskutér Opgaven.

Opg. 67. Vis at Overgangen fra et Parallelkoordinatsystem i Rummet til et vilkaarligt andet udtrykkes ved en lineær Substitution.

Opg. 68. Find samtlige polære Koordinatsæt til det Punkt P, der henført til det retvinklede Koordinatsystem, der ligger paa sædvanlig Maade overfor det polære System, har Koordinaterne $(1,1,1)$.

Keglesnit og Keglesnitsflader

A. Keglesnit.

71. Indledende Definitioner og Bemærkninger. Vi vender os atter til Planens analytiske Geometri og tænker os, idet vi foreløbig kun beskæftiger os med Planens sædvanlige Punkter, fastlagt ved et (inhomogent) retvinklet Koordinatsystem (XY). Ved de hidtidige Undersøgelser over den analytiske Fremstilling af Kurver i Planen har vi udelukkende beskæftiget os med rette Linier, eller som vi her hellere vil sige, med algebraiske Kurver af første Orden, idet vi ved denne Maade at betegne en ret Linie paa giver Udtryk for, at den rette Linie fra et analytisk-geometrisk Synspunkt kan karakteriseres som det geometriske Sted for Punkter, hvis Koordinater (x,y) tilfredsstiller en algebraisk Ligning af første Grad $Ax + By + C = 0$. I det følgende skal vi beskæftige os med de algebraiske Kurver af 2den Orden, idet vi ved en algebraisk Kurve af 2den Orden ifølge Definition forstaar det geometriske Sted for Punkter, hvis Koordinater (x, y) tilfredsstiller en algebraisk Ligning af 2den Grad, altsaa

en Ligning af Formen

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

hvor af de 6 Tal A, B ... F, der karakteriserer Kurven, ikke alle tre Koefficienter A, B, 2C til Leddene af 2^den Grad er lig med Nul. En algebraisk Kurve af 2^den Orden benævnes (af Grunde, der senere vil træde klart frem) ogsaa et Keglesnit.

Lad os til denne Definition straks tilføje den Bemærkning af fundamental Karakter, at den Egenskab ved en Punktmængde (en Samling af Punkter) at være en algebraisk Kurve af 2^den Orden, d. v. s. at være geometrisk Sted for Punkter, hvis Koordinater (x, y) tilfredsstiller en algebraisk Ligning af 2^den Grad, er uafhængig af hvilket retvinklet Koordinatsystem (XY), vi har lagt til Grund, eller anderledes udtrykt: hvis en Punktmængde henført til det retvinklede Koordinatsystem (XY) fremstilles ved en algebraisk Ligning af 2^den Grad $P(x, y) = 0$, vil Punktmængden ligeledes kunne fremstilles ved en algebraisk Ligning af 2^den Grad $P_1(x_1, y_1) = 0$, naar vi henfører Planens Punkter til et vilkaarligt andet retvinklet Koordinatsystem $(X_1 Y_1)$; thi angiver $x = a + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1$, $y = b + \beta_1 x_1 + \beta_2 y_1$ den lineære Substitution, der forbinder Koordinaterne (x, y) og $(x_1 y_1)$ til samme variable Punkt henført til henholdsvis det ene og det andet af de to Koordinatsystemer (XY) og $(X_1 Y_1)$, og betegner $P_1(x_1, y_1)$ det Polynomium af 2^den Grad i $(x_1 y_1)$, der fremkommer af det givne Polynomium af 2^den Grad $P(x, y)$ ved Anvendelse af den nævnte Substitution, vil den Punktmængde, der

henført til Systemet $(X_1\ Y_1)$ bestemmes ved Ligningen $P_1(x_1, y_1) = 0$, øjensynlig være den samme som den der henført til Systemet $(X\ Y)$ bestemmes ved Ligningen $P(x, y) = 0$, idet jo de to Polynomier $P(x, y)$ og $P_1(x_1, y_1)$ antager samme Talværdi, naar vi indsætter henholdsvis Koordinaterne (x, y) og (x_1, y_1) til samme Punkt. Vi siger om to Ligninger $P(x, y) = 0$ og $P_1(x_1, y_1) = 0$, der fremgaar af hinanden paa den omhandlede Maade, at de <u>svarer til hinanden</u> i de to Koordinatsystemer $(X\ Y)$ og $(X_1\ Y_1)$.

Da Talen var om algebraiske Kurver af første Orden (rette Linier), fandt vi at to Ligninger af første Grad $Ax + By + C = 0$ og $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ da og kun da fremstillede den samme Punktmængde, naar Koefficientsættene (A, B, C) og (A_1, B_1, C_1) var proportionale. For algebraiske Kurver af 2^{den} Orden er Forholdene ikke fuldt saa simple; her gælder (naturligvis) den Sætning, at to Ligninger $Ax^2 + \ldots + F = 0$ og $A_1x^2 + \ldots F_1 = 0$, hvis Koefficientsæt $(A \ldots F)$ og $(A_1 \ldots F_1)$ er proportionale, hvor altsaa den ene fremgaar af den anden ved Multiplikation med en fra Nul forskellig Konstant, har ganske de samme Løsninger, altsaa fremstiller den samme Punktmængde; derimod gælder <u>ikke</u> den omvendte Sætning, at to algebraiske Ligninger af 2^{den} Grad, der har samme Løsninger (x, y), altsaa fremstiller samme Punktmængde, nødvendigvis har deres Koefficientsæt proportionale, saaledes bestemmer f. Eks. de to Ligninger $x^2 + 2y^2 = 0$ og $x^2 + 3y^2 = 0$ samme Punktmængde (nemlig kun det ene Punkt $(0, 0)$) uden at den ene Ligning fremgaar af den anden ved Multiplikation med en Konstant, ligesom ogsaa de to Ligninger $x^2 + 2y^2 = +1$, $x^2 + 3y^2 = +2$ bestemmer samme Punktmængde (nemlig slet in-

det Punkt) uden at deres Koefficientsæt er proportionale. (Lad os imidlertid straks til Orientering bemærke (se Opg. 69), at et Forhold som det sidstnævnte dog kun kan indtræffe, naar den betragtede algebraiske Kurve af 2den Orden, som ved de nævnte Eksempler, enten slet intet Punkt indeholder eller kun bestaar af et eneste Punkt). — Ved analytisk-geometriske Undersøgelser over algebraiske Kurver af 2den Orden, hvor det analytiske (og ikke det geometriske) Synspunkt er det fremherskende, nøjagtigere talt, hvor vi tænker os den algebraiske Ligning $P(x, y) = 0$ (og ikke den til Ligningen hørende Punktmængde) som det oprindelig givne, vil det være hensigtsmæssigt da og kun da at opfatte to algebraiske Kurver $P(x, y) = 0$ og $Q(x, y) = 0$ som den samme Kurve, naar deres Koefficientsæt er proportionale, altsaa at opfatte to algebraiske Kurver af 2den Orden, hvis Koefficientsæt ikke er proportionale, som indbyrdes forskellige, selv om de indeholder ganske de samme Punkter (ifølge den foregaaende Bemærkning kan dette dog kun ske, naar de enten begge intet Punkt indeholder, eller begge bestaar af kun et Punkt). Denne Vedtagt kan vi ogsaa udtrykke saaledes: „Koordinaterne" (A, B, ... F) til en algebraisk Kurve af 2den Orden, d. v. s. Koefficienterne i Kurvens Ligning er (ligesom Koordinaterne (A, B, C) til en ret Linie) at opfatte som homogene Koordinater, saaledes at to forskellige Sæt Koordinater da og kun da bestemmer samme Kurve, naar de er proportionale.

72. Eksempler paa Keglesnit: Inden vi gaar over til at undersøge et vilkaarligt Keglesnit, d. v. s. en algebraisk Kurve af 2den Orden $P(x, y) = 0$, hvor de 6 Koefficienter A, B, ... F er vilkaarlige Tal, blot underkastet den Betingelse, at ikke

alle tre Tal A, B, C er lig med Nul, vil vi først minde Læseren om nogle velkendte karakteristiske Eksempler paa Kegleснit. Lad os da som et første Eksempel betragte Ligningen

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0,$$

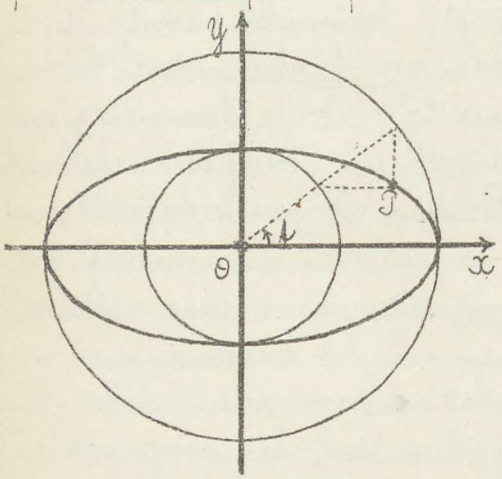
hvor $a^2 + b^2$ antages $> c$; idet denne Ligning jo kan skrives paa Formen $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c$, fremstiller den det geometriske Sted for Punkter (x, y), hvis Afstand fra (a, b) er lig med $\sqrt{a^2+b^2-c}$, altsaa en Cirkel med Centrum i Punktet (a, b) og Radius $\sqrt{a^2+b^2-c}$. Specielt fremstiller Ligningen $x^2 + y^2 = R^2$ $(R > 0)$ en Cirkel med Centrum i Begyndelsespunktet og Radius R; idet den almindelige Løsning til Ligningen $x^2 + y^2 = R^2$ paa Parameterform kan skrives: $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, saaledes at vi faar alle Løsninger med og hver kun een Gang, naar t varierer fra 0 (incl) til 2π (excl), finder vi Koordinaterne til Cirklens Punkter paa Parameterform fremstillet ved Ligningerne $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, hvor $0 \leqq t < 2\pi$; her betyder t iøvrigt Vinklen fra X-Aksen til den rette Linie, der forbinder Begyndelsespunktet O med Cirkelpunktet $P: (x, y)$, orienteret saaledes at OP er positiv.

Lad os som et andet (og almindeligere) Eksempel betragte Ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ,$$

hvor a og b er to vilkaarlige positive Tal; denne Ligning fremstiller som bekendt en Ellipse med Halvakserne

a og b. Idet Polynomiet $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ jo fremkommer af Polynomiet $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{a^2} - 1$ ved den affine Substitution: $x_1 = x$, $y_1 = \frac{a}{b} y$, indses at (x, y) da og kun da er Koordinater til et Punkt paa Ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, naar $(x_1, y_1) = (x, \frac{a}{b} y)$ er Koordinater til et Punkt paa Cirklen $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{a^2} - 1 = 0$. Ellipsen fremkommer altsaa af Cirklen ved at multiplicere Ordinaterne til Cirklens Punkter med den konstante Faktor $\frac{b}{a}$; idet nu den omhandlede Cirkel paa Parameterform fremstilles ved Ligningerne $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, finder vi Ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ paa <u>Parameterform</u> fremstillet ved Ligningerne



$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t \qquad (0 \leqq t < 2\pi)$$

Fig. 26.

Antager vi $a > b$, kan den omhandlede Ordinatmultiplikation, der fører Cirklen over til Ellipsen, udføres derved, at man drejer Cirklens Plan omkring x-Aksen (Ellipsens Storakse), indtil cosinus af Drejningsvinklen har antaget Værdien $\frac{b}{a}$, og derpaa projicerer Cirklen vinkelret paa Ellipsens Plan; herpaa beror den bekendte Punktkonstruktion af Ellipsen (se Fig. 26); denne Konstruktion viser tillige den geometriske Betydning af Parameteren t.

Lad os dernæst betragte Ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

hvor a og b som ovenfor er to positive Konstanter; den herved fremstillede Kurve er som bekendt en Hyperbel med X-Aksen til første Akse, Y-Aksen til anden Akse og Asymptoterne $y = \frac{b}{a}x$ og $y = -\frac{b}{a}x$. Idet der for ethvert Punkt (x, y) paa Hyperblen gælder Uligheden $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geqq 1$, falder Hyperblen i to adskilte Dele, af hvilke den ene indeholder Punkter med $x \geqq a$, den anden Punkter med $x \leqq -a$. Ved Undersøgelser over Hyperblen er det (ligesom ved Ellipsen) ofte bekvemt, i Stedet for at operere med Punkterne (x, y) som Løsninger til den (ulöste) Ligning $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ at have direkte Udtryk for Koordinaterne x og y ved Hjælp af en Variabel t, altsaa at have en Parameterfremstilling for Koordinaterne. Da vi udledte en Parameterfremstilling for Ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, var vort Udgangspunkt at vi kendte en Parameterfremstilling for den specielle Ligning $x^2 + y^2 = 1$, nemlig $x = \cos t$, $y = \sin t$, hvor Parameteren t er indskranket til at variere indenfor et Interval af Længden 2π, f. Eks. $0 \leqq t < 2\pi$; paa tilsvarende Maade vil vi for at finde en Parameterfremstilling for Hyperblen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ begynde med at söge en Parameterfremstilling for den speciellere Ligning $x^2 - y^2 = 1$. Idet vi i dette Øjemed gaar ud fra den (for enhver Værdi af t, for hvilken $\cos t \neq 0$, gyldige) Ligning $\frac{1}{\cos^2 t} - \operatorname{tg}^2 t = 1$, der fremkommer af Ligningen $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ ved Division med $\cos^2 t$, vil vi bevise følgende Sætning: Lader vi i Ligningerne $x = \frac{1}{\cos t}$, $y = \operatorname{tg} t$ Parameteren t gennemløbe et Interval af Længden 2π kun (naturligvis) med Undtagelse af de Værdier, for hvilke $\cos t = 0$, f. Eks. Intervallerne $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$, vil det herved beskrevne variable Talpar (x, y) gennemløbe samtlige Løsninger til Ligningen $x^2 - y^2 = 1$ (og ingen andre Talpar), og saaledes at vi faar enhver Løsning med een og kun een Gang (d. v. s. for een og kun een Værdi af t). Rigtigheden heraf indses saaledes: For det første ved vi, ifølge ovenstaaende Ligning

$\frac{1}{\cos^2 t} - \operatorname{tg}^2 t = 1$, at $x = \frac{1}{\cos t}$, $y = \operatorname{tg} t$ for enhver Værdi af t, for hvilken $\cos t \neq 0$, (altsaa specielt for enhver Værdi af t indenfor de nævnte Intervaller) er en Løsning til Ligningen $x^2 - y^2 = 1$. For dernæst omvendt at vise, at der til en opgiven Løsning (x_0, y_0) i Ligningen $x^2 - y^2 = 1$ findes et Tal $t = t_0$ indenfor de nævnte Intervaller, der tilfredsstiller Ligningerne $x_0 = \frac{1}{\cos t}$, $y_0 = \operatorname{tg} t$, behøver vi blot at bemærke, at af Ligningen $x_0^2 - y_0^2 = 1$ følger (idet $|x_0| \geqq 1$, altsaa specielt $x_0 \neq 0$) ved Division med x_0^2 Ligningen $\left(\frac{1}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 = 1$, saaledes at $\left(\frac{1}{x_0}, \frac{y_0}{x_0}\right)$ er en Løsning til Ligningen $x^2 + y^2 = 1$; thi heraf følger jo Eksistensen af et Tal $t = t_0 \left(\neq \pm \frac{\pi}{2} + p\pi\right)$ indenfor de nævnte Intervaller af Længden 2π, for hvilket $\frac{1}{x_0} = \cos t_0$, $\frac{y_0}{x_0} = \sin t_0$, d. v. s. for hvilket $x_0 = \frac{1}{\cos t_0}$, $y_0 = \operatorname{tg} t_0$, saaledes som vi skulde vise. Og endelig indser man umiddelbart, at ingen Løsning (x, y) kommer med mer end een Gang, naar t gennemløber de nævnte Intervaller; thi to Talpar $\left(\frac{1}{\cos t_1}, \operatorname{tg} t_1\right)$ og $\left(\frac{1}{\cos t_2}, \operatorname{tg} t_2\right)$ er jo kun da det samme Talpar, naar $\cos t_1 = \cos t_2$, $\sin t_1 = \sin t_2$, d. v. s. $t_1 = t_2 + 2p\pi$. — Efter at vi saaledes har fundet en Parameterfremstilling for den specielle (ligesidede) Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$, kan vi nu umiddelbart finde en Parameterfremstilling for Hyperblen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; vi behøver blot at bemærke, at denne sidste Ligning fremgaar af Ligningen $x_1^2 - y_1^2 = 1$ ved den affine Substitution $x_1 = \frac{x}{a}$, $y_1 = \frac{y}{b}$, hvoraf følger at (x, y) da og kun da er et Punkt paa Hyperblen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, naar $(x_1, y_1) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$ tilfredsstiller Ligningen $x_1^2 - y_1^2 = 1$. Vi finder herigennem Resultatet: Gennemløber t Intervallerne $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$ vil Punktet

$$x = \frac{a}{\cos t}, \quad y = b \operatorname{tg} t$$

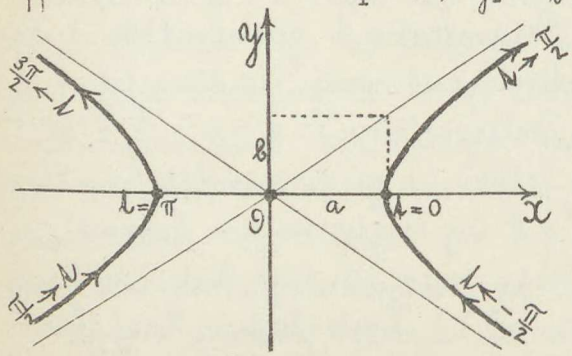


Fig. 27.

derved gennemløbe Hyperblen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, saaledes at vi faar ethvert Punkt paa Hyperblen med een og kun een Gang. Hosstaaende Fig. 27 angiver, hvorledes Punktet $(x, y) = (\frac{a}{\cos t}, b \operatorname{tg} t)$ gennemløber Hyperblen, naar t varierer indenfor de nævnte Intervaller. — Lader vi Punktet (x,y) gennemløbe en af de to Hyperbelgrene (f. Eks. den med $x \geqq a$, og saaledes at Parameteren t derved varierer fra $-\frac{\pi}{2}$ til $\frac{\pi}{2}$) vil som bekendt og som man umiddelbart kan bevise, Afstanden fra den ene Asymptote til det variable Hyperbelpunkt stedse aftage, medens Afstanden fra den anden Asymptote til Hyperbelpunktet stedse vokser; heraf følger, hvad vi senere vil gøre Brug af, at naar vi parallelforskyder de to Asymptoter, saaledes at de begge gaar gennem et fast Punkt P paa Hyperblen (se Fig 28), vil de to Hyperbelgrene være beliggende som angivet paa Figuren, d. v. s. den ene af de to Hyperbelgrene vil ligge helt i det ene (paa Fig. det skraverede) af de fire Vinkelrum, hvori de to parallelforskudte rette Linier gennem P deler Planen, medens den anden (nemlig den der indeholder Punktet P) bortset fra selve Punktet P vil være helt beliggende i de to (indbyrdes modstaaende) Vinkelrum, der støder op til det forrige.

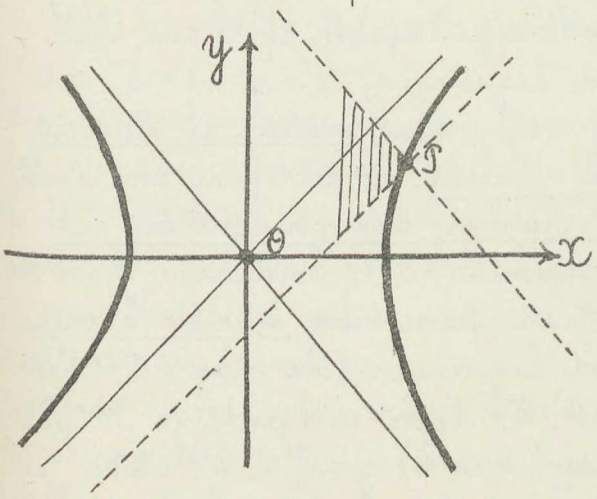


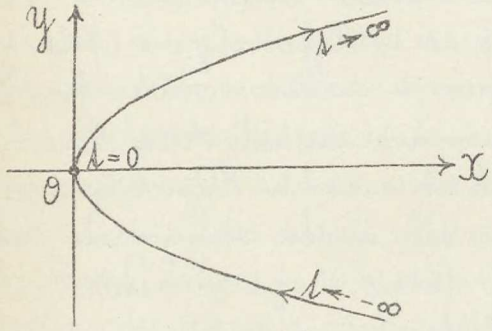
Fig. 28.

Lad os endelig betragte Ligningen

$$y^2 - 2px = 0 \qquad (p > 0),$$

der som bekendt fremstiller en Parabel; idet Ligningen er af første Grad i Koordinaten x, faar vi en bekvem

Parameterfremstilling ved at vælge den anden Koordinat y til Parameter; herved findes



$$y = \lambda, \qquad x = \frac{\lambda^2}{2p},$$

Fig. 29.

hvor λ er en uindskranket Variabel. Fig. 29 viser, hvorledes Punktet $(x, y) = (\frac{\lambda^2}{2p}, \lambda)$ gennemløber Parablen, naar λ varierer.

Foruden Tilfælde som de hidtil omhandlede, hvor den betragtede algebraiske Kurve af 2den Orden bestaar af en eller to sammenhængende krumme Linier, kan der, som vi nu ved nogle Eksempler skal vise, ogsaa indtræffe Tilfælde af anden Art. Det kan f. Eks. ske, som ved Ligningen $x^2 + y^2 + 1 = 0$, at Ligningen slet ingen Løsning (x, y) har, saaledes at Kurven ikke indeholder nogetsomhelst Punkt, og det kan ske, som ved Ligningen $x^2 + y^2 = 0$, at Kurven kun indeholder eet eneste Punkt, her Begyndelsespunktet $(0,0)$. Endvidere kan en algebraisk Ligning af 2den Grad fremstille to rette Linier; dette er saaledes Tilfældet med Ligningen $(Ax + By + C)(A^1x + B^1y + C^1) = 0$, hvor (A, B) og (A^1, B^1) begge er egentlige Talpar (d. v. s. $\neq (0,0)$) og hvor Talsættene (A, B, C) og (A^1, B^1, C^1) ikke er proportionale. Og endelig fremstiller den givne Ligning, hvis den har Formen $k(Ax + By + C)^2 = 0$, hvor $k \neq 0$, en ret Linie,

nemlig den Linie, der bestemmes ved Ligningen $Ax + By + C = 0$ (i dette sidste Tilfælde benytter man sædvanligvis den Sprogbrug, at Kurven bestaar af „to sammenfaldende" rette Linier).

Med de ovenfor betragtede Eksempler (Ellipse, Hyperbel, Parabel, ingen Punkter, et Punkt, to rette Linier, een ret Linie) har vi, som vi i næste Nummer skal se, i Virkeligheden faaet samtlige forskellige Typer af 2den Grads Kurver med. Man kalder de tre første: Ellipse (specielt Cirkel), Hyperbel og Parabel for egentlige Keglesnit, medens man i de andre fire Tilfælde taler om udartede Keglesnit. Navnet „Keglesnit" for „algebraisk Kurve af 2' Orden" er nu forstaaeligt; idet jo de fundne Typer paa algebraiske Kurver af 2den Orden netop er de Kurvetyper, der kan fremkomme ved Skæring mellem en Omdrejningskegleflade (der specielt kan udarte til at bestaa kun af Aksen) og en Plan.

73. Den almindelige algebraiske Kurve af 2den Orden. Lad der være givet en vilkaarlig algebraisk Ligning af 2den Grad

$$(1) \qquad Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

hvor Konstanterne $A, B \ldots F$ er vilkaarlige Tal, blot underkastet den Betingelse, at ikke alle tre Koefficienter til Leddene af 2den Grad er lig med Nul. For at undersøge den Kurve, der fremstilles ved den foreliggende Ligning (1), vil vi begynde med at vise, hvorledes man ved (om fornødent) at foretage en Koordinattransformation, d. v. s. ved at henføre Kurven til et passende valgt retvinklet Koordinatsystem (som vi vil vælge ens orienteret med det oprindelige) kan opnaa, at visse af Koefficienterne bliver Nul. Lad os da først bevise, at man altid kan opnaa, at Produktleddet mangler, d. v. s. at Koefficien-

len til xy er lig med Nul. Idet en vilkaarlig Koordinattransformation jo kan sammensattes af en Drejning af Koordinatsystemet om Begyndelsespunktet og en Parallelforskydning, og idet en Parallelforskydning aabenbart ikke forandrer Koefficienterne til Leddene af 2den Grad, er det klart, at hvis den opstillede Paastand er rigtig, maa Produktleddet kunne bortskaffes alene ved en Drejning af Koordinatsystemet. En saadan Drejning udføres (se 51) ved den egentlig ortogonale Substitution

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= x_1 \cos v - y_1 \sin v \\ y &= x_1 \sin v + y_1 \cos v \end{aligned},$$

hvor v angiver Drejningsvinklen. Det gælder altsaa om at vise, at vi, hvis $C \neq 0$, kan vælge v saaledes, at den kvadratiske Form $Ax^2 + By^2 + 2Cxy$ gennem Substitutionen (2) gaar over til en ny kvadratisk Form $A_1 x_1^2 + B_1 y_1^2$, hvor Produktleddet mangler; men at dette er muligt har vi allerede tidligere vist ved Omtalen af kvadratiske Former med to Variable; vi behøver blot (se 37) for v at vælge en af de fire (mellem 0 og 2π beliggende) Løsninger i Ligningen $\cot 2v = \frac{A-B}{2C}$. Hermed er den opstillede Paastand bevist; tillige ved vi (se 37), at efter Reduktionen vil Kvadratkoefficienterne A_1 og B_1 bestemmes som Rødder i Ligningen $\begin{vmatrix} s-A & -C \\ -C & s-B \end{vmatrix} = 0$, d.v.s. i Ligningen $s^2 - (A+B)s + (AB - C^2) = 0$. Ved den omtalte Drejning af Koordinatsystemet gaar den oprindelige Ligning (1) over til den nye algebraiske Ligning af 2den Grad

$$(3) \qquad A_1 x_1^2 + B_1 y_1^2 + 2D_1 x_1 + 2E_1 y_1 + F_1 = 0,$$

hvor $D_1 = D\cos v + E\sin v$, $E_1 = -D\sin v + E\cos v$, $F_1 = F$.

Idet $A_1 B_1 = AB - C^2$, vil de nye Kvadratkoefficienter A_1 og B_1 beg-

ge være forskellige fra Nul, hvis $AB - C^2 \neq 0$; derimod vil een (og kun een af dem, da jo A_1 og B_1 ikke samtidig kan være Nul) være Nul, dersom $AB - C^2 = 0$. Vi begynder med at betragte det førstnævnte af disse to Tilfælde, d. v. s. vi antager først, at $\underline{AB - C^2 \neq 0}$. Udfører vi her (efter Drejningen) en Parallelforskydning af Koordinatsystemet bestemt ved Transformationsformlerne

$$x_1 = a + x_2 \quad , \quad y_1 = b + y_2 \, ,$$

gaar Ligning (3) derved over til Ligningen

$$(4) \quad A_1 x_2^2 + B_1 y_2^2 + 2x_2(A_1 a + D_1) + 2y_2(B_1 b + E_1) + (A_1 a^2 + B_1 b^2 + 2D_1 a + 2E_1 b + F_1) = 0.$$

Idet $A_1 \neq 0$, $B_1 \neq 0$ kan vi bestemme a og b saaledes, at første Gradsleddene falder bort, nemlig $a = -\frac{D_1}{A_1}$, $b = -\frac{E_1}{B_1}$. Herved gaar Ligning (4) over til

$$(5) \quad A_1 x_2^2 + B_1 y_2^2 + F_2 = 0 \, ,$$

hvor vi til Afkortning har sat $A_1 a^2 + B_1 b^2 + 2D_1 a + 2E_1 b + F_1 = F_2$. Vi skelner nu mellem to Tilfælde:

1) $\underline{AB - C^2 > 0}$, altsaa A_1 og B_1 $\underline{\text{samme}}$ Fortegn. Da vil den ovenstaaende Ligning (5), hvis F_2 er $\neq 0$ og har modsat Fortegn af A_1 og B_1, fremstille en $\underline{\text{Ellipse}}$, nemlig Ellipsen $\frac{x_2^2}{\alpha^2} + \frac{y_2^2}{\beta^2} = 1$, hvor vi har sat $-\frac{F_2}{A_1} = \alpha^2$, $-\frac{F_2}{B_1} = \beta^2$; er derimod $F_2 \neq 0$ med samme Fortegn som A_1 og B_1, har Ligning (5) aabenbart ingensomhelst Løsning, d. v. s. Kurven indeholder $\underline{\text{intet Punkt}}$; er endelig $F_2 = 0$, indeholder Kurven kun $\underline{\text{et Punkt}}$, nemlig Punktet $(0,0)$.

2) $AB - C^2 < 0$, altså A_1 og B_1 modsat Fortegn. Her vil Ligning (5), hvis $F_2 \neq 0$, fremstille en Hyperbel, nemlig en Hyperbel paa Formen $\frac{x_2^2}{\alpha^2} - \frac{y_2^2}{\beta^2} = 1$, hvis F_2 har samme Fortegn som B_1, en Hyperbel paa Formen $\frac{y_2^2}{\beta^2} - \frac{x_2^2}{\alpha^2} = 1$, hvis F_2 har samme Fortegn som A_1. (I begge Tilfælde bestemmes Hyperblens Asymptoter ved Ligningen $A_1 x_2^2 + B_1 y_2^2 = 0$; for Parallelforskydningen bestemmer Ligningen $A_1 x_1^2 + B_1 y_1^2 = 0$ og for Drejningen (d. v. s. i det oprindelige Koordinatsystem) Ligningen $Ax^2 + By^2 + 2Cxy = 0$ følgelig to rette Linier gennem Begyndelsespunktet parallele med Asymptoterne). Er derimod $F_2 = 0$, fremstiller Ligning (5) to hinanden skærende rette Linier, nemlig de to rette Linier $y_2 = +\sqrt{\frac{-A_1}{B_1}}\, x_2$ og $y_2 = -\sqrt{\frac{-A_1}{B_1}}\, x_2$. — Vi er hermed færdige med vor Undersøgelse af den ved den givne Ligning (1) fremstillede Kurve for det Tilfælde at $AB - C^2 \neq 0$, og vender os nu til det resterende Tilfælde:

3) $AB - C^2 = 0$; her er ret af Tallene A_1 og B_1 lig med Nul, det andet forskelligt fra Nul; vi kan aabenbart uden at indskrænke Undersøgelsens Almindelighed antage, at $A_1 = 0$, $B_1 \neq 0$. Udfører vi her, ligesom ovenfor, efter Drejningen en Parallelforskydning: $x_1 = a + x_2$, $y_1 = b + y_2$, gaar Ligning (3), idet $A_1 = 0$, over til Ligningen

$$(6) \qquad B_1 y_2^2 + 2x_2 D_1 + 2y_2(B_1 b + E_1) + (B_1 b^2 + 2D_1 a + 2E_1 b + F_1) = 0.$$

Vi bestemmer her først b saaledes, at Koefficienten $B_1 b + E_1$ til y_2 bliver Nul, altså $b = -\frac{E_1}{B_1}$. Er $D_1 \neq 0$ bestemmer vi derefter a saaledes, at det konstante Led falder bort, altså $a = -\frac{1}{2D_1}(B_1 b^2 + 2E_1 b + F_1)$; herved faar vi Ligningen $B_1 y_2^2 + 2x_2 D_1 = 0$, der idet $B_1 \neq 0$, $D_1 \neq 0$ fremstiller en Parabel. ($B_1 y_2^2 = 0$ bestemmer her Parablens Akse (to i Aksen „sammenfaldende" rette Linier); for

Parallelforskydningen bestemmer Ligningen $B_1 y_1^2 = 0$ og forDrejningen Ligningen $Ax^2 + By^2 + 2Cxy = 0$ følgelig een ret Linie (to sammenfaldende rette Linier) parallel med Parablens Akse og gaaende gennem Begyndelsespunktet). Er derimod $B_1 = 0$, vil Ligning (6), naar vi for b_1 indsætter $-\frac{E_1}{B_1}$ (uafhængigt af hvilken Værdi vi tillægger a), antage Formen $B_1 y_2^2 + F_2 = 0$, hvor $F_2 = B_1 b^2 + 2E_1 b + F_1$; er nu i denne sidste Ligning $F_2 \neq 0$ og med modsat Fortegn af B_1, fremstiller Ligningen to parallele rette Linier, nemlig $y_2 = +\sqrt{\frac{-F_2}{B_1}}$ og $y_2 = -\sqrt{\frac{-F_2}{B_1}}$; er $F_2 \neq 0$ og med samme Fortegn som B_1, har Ligningen ingensomhelst Løsning og Kurven indeholder følgelig intet Punkt; er endelig $F_2 = 0$ faar vi een ret Linie (to sammenfaldende rette Linier), nemlig $y_2 = 0$.

Resumerer vi de fundne Resultater, har vi bevist følgende Hovedsætning: En algebraisk Ligning (1) af 2den Grad fremstiller [1] hvis $AB - C^2 > 0$, enten en Ellipse, intet Punkt eller et Punkt [2] hvis $AB - C^2 < 0$, enten en Hyperbel eller to hinanden skærende rette Linier [3] hvis $AB - C^2 = 0$, enten en Parabel, to parallele rette Linier, een ret Linie (to sammenfaldende rette Linier) eller intet Punkt. Specielt har vi altsaa fundet, at hvis det paa Forhaand ad anden Vej vides om en algebraisk Ligning af 2den Grad, at den fremstiller et egentligt (og ikke et udartet) Keglesnit, da vil dette være en Ellipse, en Hyperbel eller en Parabel, alt efter som $AB - C^2 > 0$, $AB - C^2 < 0$ eller $AB - C^2 = 0$.

74. Geometrisk Betydning af et homogent Polynomium af 2den Grad. Da vi beskæftigede os med den analytisk-geometriske Behandling af en ret Linie, undersøgte vi den geometriske Betydning af et første Grads Polynomium $Ax + By + C$ i de to Variable x, y,

naar vi opfatte de Variable (x, y) som Koordinater til et variabelt Punkt i Planen; vi fandt, at $Ax + By + C$ paa en konstant Faktor nær angav Afstanden fra en fast ret Linie (nemlig Linien $Ax + By + C = 0$) til det variable Punkt (x, y); er det betragtede Polynomium af første Grad specielt et homogent Polynomium af første Grad $Ax + By$, vil dette Polynomium følgelig være Nul i alle Punkter af en ret Linie gennem Begyndelsespunktet (Nullinien) og være positivt i den ene, negativt i den anden af de to Halvplaner, hvori Nullinien deler Planen. Polynomiets Konstanskurver, hvor vi ved Udtrykket „Konstanskurve" betegner det geometriske Sted for Punkter, i hvilket Polynomiet antager en og samme opgivne Talværdi k, vil være rette Linier parallele med Nullinien, og som er beliggende i den ene eller den anden af de nævnte to Halvplaner, eftersom den opgivne Konstant k er positiv eller negativ. Vi gaar nu over til paa tilsvarende Maade at undersøge den geometriske Betydning af et homogent Polynomium af 2den Grad $Ax^2 + By^2 + 2Cxy$, naar vi opfatter de Variable x, y som Koordinater til et variabelt Punkt i Planen. Vi indfører hertil et Hjælpekoordinatsystem $(X_1 Y_1)$ med samme Begyndelsespunkt som det givne Koordinatsystem $(X Y)$, og saaledes at det givne Polynomium $Ax^2 + By^2 + 2Cxy$ ved den lineære Substitution, der bestemmer Koordinattransformationen, gaar over til et nyt Polynomium $A_1 x_1^2 + B_1 y_1^2$, hvor Produktleddet mangler. Betegner (x, y) og (x_1, y_1) Koordinaterne til samme variable Punkt henført til de to Koordinatsystemer $(X Y)$ og $(X_1 Y_1)$, vil da de to Tal $Ax^2 + By^2 + 2Cxy$ og $A_1 x_1^2 + B_1 y_1^2$ være lige store. Vi skelner nu mellem tre Tilfælde.

1) $AB - C^2 > 0$, altsaa A_1 og B_1 samme Fortegn. Her vil $Ax^2 + By^2 + 2Cxy = A_1 x_1^2 + B_1 y_1^2$ aabenbart blive Nul i et og kun et Punkt, nemlig Begyndelsespunktet, medens Polynomiet i alle andre Punkter i

Planen vil antage Værdier med samme Fortegn, nemlig med det for A_1 og B_1 fælles Fortegn. Konstanskurverne $Ax^2 + By^2 + 2Cxy = k$, eller hvad der er det samme $A_1x_1^2 + B_1y_1^2 = k$, er her, naar k gennemløber alle Værdier med samme Fortegn som A_1 og B_1, et System af ligedannede Ellipser, der tilsammen udfylder hele Planen (se Fig. 30.), medens Ligningen $Ax^2 + By^2 + 2Cxy = k$, naar k har modsat Fortegn af A_1 og B_1, ikke har nogensomhelst Løsning.

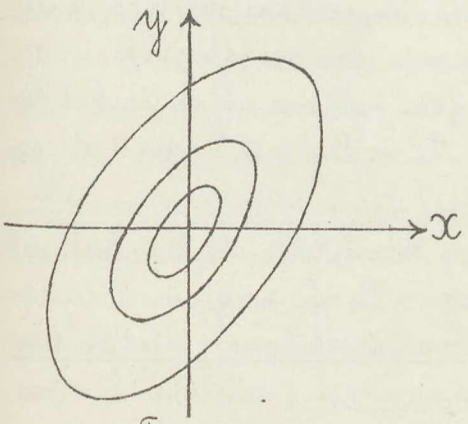


Fig. 30.

3) $AB - C^2 < 0$, altsaa A_1 og B_1 modsatte Fortegn. For her at indse den geometriske Betydning af $Ax^2 + By^2 + 2Cxy = A_1x_1^2 + B_1y_1^2$, skriver vi simplest det sidste Polynomium $A_1x_1^2 + B_1y_1^2$ paa Formen $B_1\left(y_1 + \sqrt{\frac{-A_1}{B_1}}\,x_1\right)\left(y_1 - \sqrt{\frac{-A_1}{B_1}}\,x_1\right)$. Heraf fremgaar, idet vi gør Brug af Betydningen af et homogent Polynomium af første Grad, at Polynomiet $Ax^2 + By^2 + 2Cxy$ paa nær en konstant Faktor er lig med Produktet af Afstandene fra to (forskellige) rette Linier gennem Begyndelsespunktet (nemlig Linierne $y_1 + \sqrt{\frac{-A_1}{B_1}}\,x_1 = 0$ og $y_1 - \sqrt{\frac{-A_1}{B_1}}\,x_1 = 0$) til det betragtede Punkt (x, y). Polynomiet bliver følgelig

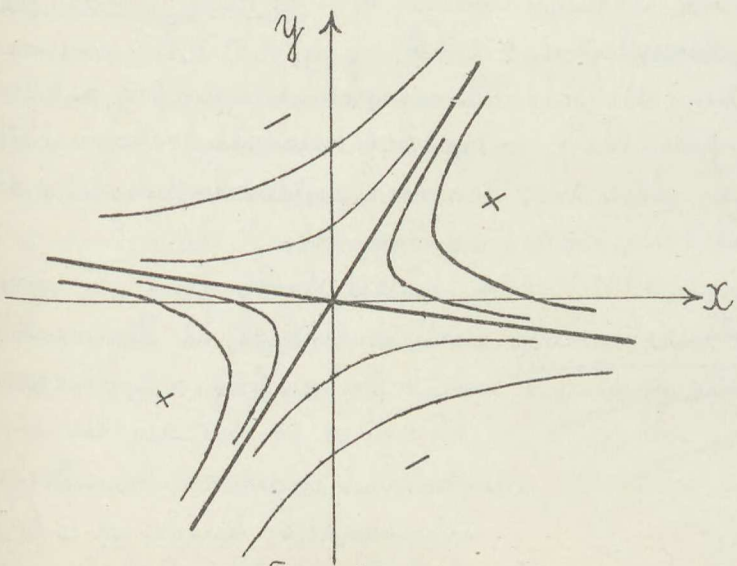


Fig. 31.

Nul i alle Punkter af disse to rette Linier, og af de fire Vinkelrum, hvori disse to Nullinier deler Planen, bliver Polynomiet positivt i to (modstaaende), negativt i de to andre (se Fig. 31). Konstanskurverne $Ax^2 + By^2 + 2Cxy = A_1x_1^2 + B_1y_1^2 = k$ er her for $k \neq 0$ Hyperbler med Nullinierne til Asymptoter; disse Hyperbler vil for positivt k ligge i de to „positive" Vinkelrum, for negativt k i de to „negative" Vinkelrum. Overgangen fra det ene af de to Sæt Hyperbler til det andet sker ved Kurven $Ax^2 + By^2 + 2Cxy = 0$, altsaa ved de to Nullinier.

3) $AB - C^2 = 0$, altsaa et af Tallene A_1 og B_1, f. Eks. A_1 lig Nul, det andet $B_1 \neq 0$. Idet her $Ax^2 + By^2 + 2Cxy = B_1y_1^2$, angiver Polynomiet paa en konstant Faktor nær Kvadratet paa Afstanden fra en ret Linie gennem Begyndelsespunktet (nemlig Linien $y_1 = 0$) til Punktet (x, y); her findes altsaa een Nullinie (eller som man ogsaa siger: to sammenfaldende Nullinier); i alle Punkter udenfor Nullinien har Polynomiet samme Fortegn, nemlig Fortegnet for B_1. Konstanskurverne $Ax^2 + By^2 + 2Cxy = k$ er her, for $k \neq 0$ og med samme Fortegn som B_1, to rette Linier parallele med Nullinien (nemlig $y_1 = +\sqrt{\frac{k}{B_1}}$ og $y_1 = -\sqrt{\frac{k}{B_1}}$), medens Konstanskurverne for $k \neq 0$ og med modsat Fortegn af B_1 ingen Punkter indeholder (se Fig. 32).

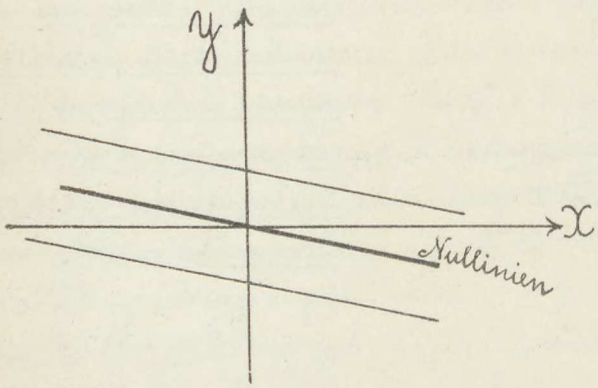


Fig. 32.

I det foregaaende er specielt indeholdt, at Keglesnittet $Ax^2 + By^2 + 2Cxy = 0$, eftersom $AB - C^2$ er positiv, negativ eller Nul, vil indeholde kun Begyndelsespunktet, bestaa af to forskellige rette Linier gennem

Begyndelsespunktet, eller bestaa af to sammenfaldende rette Linier gennem Begyndelsespunktet. Som det fremgaar af Diskussionen i 73, gælder ogsaa den omvendte Sætning, nemlig: Ligningen for et Keglesnit, der enten kun indeholder Begyndelsespunktet, eller som bestaar af to forskellige eller sammenfaldende rette Linier gennem Begyndelsespunktet, vil have Formen $Ax^2 + By^2 + 2Cxy = 0$, hvor $AB - C^2$ er henholdsvis positiv, negativ eller Nul.

75. <u>Skæring mellem ret Linie og Keglesnit.</u> Lad der være givet et vilkaarligt Keglesnit ved Ligningen

$$(1) \qquad Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

samt lad der være givet en vilkaarlig ret Linie, som vi vil skrive paa Parameterform

$$x = a + bt \quad , \quad y = c + dt,$$

hvor (a, c) er Koordinaterne til et Punkt paa Linien, medens Talparret (b, d), (der er proportionalt med Liniens Retningscosinusser) bestemmer Liniens Heldning. For at bestemme Skæringspunkterne mellem den rette Linie og Keglesnittet, d. v. s. for at bestemme de (eventuelle) Punkter, som den rette Linie og Keglesnittet har fælles, indsætter vi $x = a + bt$, $y = c + dt$ i Keglesnittets Ligning (1); herved faar vi, idet vi ordner efter Potenser af t, en Ligning af Formen

$$(7) \qquad Lt^2 + 2Mt + N = 0,$$

hvor Tallene L, M, N er uafhængige af t, d. v. s. kun afhæn-

ger af Keglesnittets Konstanter (A, B ... F) og den rette Linies Konstanter (a, b, c, d). Ligning (7) bestemmer os de Værdier af Parameteren k, der svarer til de søgte Skæringspunkter, d. v. s. er k_1 en Løsning i (7), vil Punktet $(a + bk_1, c + dk_1)$ være et Skæringspunkt, og lader vi k_1 gennemløbe samtlige Løsninger i (7) faar vi paa denne Maade samtlige Skæringspunkter med. Er $b^2 + d^2 = 1$, vil k_1 iøvrigt netop angive Afstanden fra det faste Punkt (a, c) til det omhandlede Skæringspunkt, regnet positiv til den Side, der bestemmes ved Retningscosinusserne (b, d). — Der kan nu indtræffe forskellige Tilfælde: 1) Koefficienten $L \neq 0$; Ligning (7) er da en 2den Grads Ligning i k. Har denne Ligning to forskellige (reelle) Rødder k_1 og k_2, faar vi to Skæringspunkter, nemlig $(a + bk_1, c + dk_1)$ og $(a + bk_2, c + dk_2)$; har Ligning (7) ingen (reelle) Rødder, bliver der intet Skæringspunkt; har Ligningen endelig een (reel) Rod k_1 (to sammenfaldende Rødder) finder vi eet Skæringspunkt $(a + bk_1, c + dk_1)$. 2) $L = 0, M \neq 0$; Ligning (7) er her en første Grads Ligning i k, og har følgelig een (og kun een) Rod k_1; der er i dette Tilfælde eet Skæringspunkt. 3) $L = M = 0, N \neq 0$; Ligning (7) har her øjensynlig ingen Løsning; der er intet Skæringspunkt. Endelig har vi det sidste Tilfælde: 4) $L = M = N = 0$. Venstre Side af Ligning (7) er her et Nulpolynomium i k og Ligningen tilfredsstilles følgelig af enhver Værdi af k. Ethvert Punkt paa den rette Linie er altsaa beliggende paa Keglesnittet, eller som man siger: den rette Linie tilhører helt Keglesnittet; dette Tilfælde kan aabenbart kun indtræffe, naar Keglesnittet er et udartet Keglesnit, der bestaar af to (forskellige eller sammenfaldende) rette Linier.

I det Tilfælde, hvor $L \neq 0$ og Ligning (7) kun har

een Rod t_1 (to sammenfaldende Rødder), hvor Polynomiet $Lt^2+2Mt+N$ altsaa er deleligt med $(t-t_1)^2$, vil det fra et algebraisk Synspunkt være bekvemt at benytte den Sprogbrug, at den rette Linie skærer Keglesnittet i to i Punktet $(a+bt_1, c+dt_1)$ sammenfaldende Punkter, fremfor at sige, at den rette Linie kun skærer Keglesnittet i eet Punkt. (Ved at benytte en saadan Sprogbrug opnaar vi ogsaa at faa det omhandlede Tilfælde: $L \neq 0$, Ligning (7) lige Rødder, tydelig adskilt fra det andet Tilfælde, hvor den rette Linie og Keglesnittet kun har eet Punkt fælles, nemlig det Tilfælde, hvor $L=0$, $M \neq 0$; dette sidste Tilfælde, hvor Koefficienten til t^2 er Nul, vil senere, naar vi indfører uendelig fjerne Punkter og regner med homogene Koordinater, kunne karakteriseres derved, at den rette Linie og Keglesnittet, foruden i Punktet $(a+bt_1, c+dt_1)$ skærer hinanden i et uendelig fjernt Punkt). Foruden det Tilfælde, hvor $L \neq 0$ og Ligning (7) har lige Rødder, hvor altsaa Polynomiet paa venstre Side af (7) har Formen $L(t-t_1)^2$, vil der findes endnu et Tilfælde, hvor Polynomiet $Lt^2+2Mt+N$ er deleligt med $(t-t_1)^2$, nemlig det Tilfælde, hvor $L=M=N=0$, hvor altsaa den rette Linie helt tilhører Keglesnittet; her er Polynomiet paa venstre Side af (7) et Nulpolynomium og følgelig for enhver Værdi af t_1 delelig med $(t-t_1)^2$; vi siger derfor i dette Tilfælde, om ethvert af den rette Linies Punkter P, at den rette Linie skærer Keglesnittet i to i Punktet P sammenfaldende Punkter; (idet et Nulpolynomium jo er delelig ikke blot med $(t-t_1)^2$ men almindeligere med $(t-t_1)^n$ for enhver hel positiv Værdi af n, er Ordet „to" i Udtrykket: to sammenfaldende Punkter, her at forstaa ikke som „to og kun to" men som „flere end eet"). Vi bemærker slutteligt, at den Egenskab ved en ret Linie at skære et Keglesnit i to i Punktet P sammenfaldende Punkter er uafhængig af hvilken Parameterfremstilling vi be-

nytter for den rette Linie, at vi altsaa faar samme Resultat, om vi i Stedet for Parameterfremstillingen $x = a + bt$, $y = c + dt$ benytter en anden Parameterfremstilling $x = a' + b't'$, $y = c' + d't'$; thi for det første er det umiddelbart indlysende, at Mængden af Punkter, der er fælles for Keglesnittet og den rette Linie, maa være uafhængig af den benyttede Parameterfremstilling; naar altsaa den ene Parameterfremstilling giver det ene (og kun det ene) fælles Punkt P, gør den anden det ogsaa, og naar den ene giver ethvert Punkt af den rette Linie som fælles Punkt, gør den anden deb ligeledes; men dernæst kan heller ikke den ene Parameterfremstilling give ovennævnte Tilfælde [1] $\mathfrak{L} \neq 0$, eet Skæringspunkt (to sammenfaldende Skæringspunkter), den anden Tilfældet [2] $\mathfrak{L} = 0$, $\mathfrak{M} \neq 0$; thi idet Talparrene (b, d) og (b', d') begge er Retningstal for Linien, er $b' = kb$, $d' = kd$ hvor $k \neq 0$, og indsætter vi i $\mathfrak{L}$, der med Hensyn til b og d er et homogent Polynomium af 2^{den} Grad (nemlig $\mathfrak{L} = Ab^2 + Bd^2 + 2Cbd$), for (b, d) Talparret $(b', d') = (kb, kd)$ multipliceres $\mathfrak{L}$ blot med Faktoren $k^2 \neq 0$, d. v. s. gaar over til $\mathfrak{L}' = k^2\mathfrak{L}$, saa at vi samtidig har $\mathfrak{L} = 0$, $\mathfrak{L}' = 0$ eller $\mathfrak{L} \neq 0$, $\mathfrak{L}' \neq 0$. — Endvidere bemærker vi, at den nævnte Egenskab er uafhængig af hvilket retvinklet Koordinatsystem vi lægger til Grund (benytter vi i Stedet for Koordinatsystemet (XY) et andet retvinklet Koordinatsystem (X_1Y_1) forstaar vi naturligvis ved Keglesnittets Ligning i det nye System, den Ligning mellem Koordinaterne (x_1y_1), der „svarer til" den givne Ligning (1) i Systemet (XY), altsaa den Ligning, der fremkommer af (1) ved at udføre Koordinattransformationen); thi Mængden af Punkter, der er fælles for Keglesnittet og den rette Linie, er selvfølgelig uafhængig af Koordinatsystemet; og da desuden de to Størrelser $\mathfrak{L}$, der svarer til hver sit Koordinatsystem, øjensynlig har samme Talværdi (naar vi

til Parameterfremstilling for den rette Linie i det nye System vælger de to Ligninger $x_1 = a_1 + b_1 t$, $y_1 = c_1 + d_1 t$, der fremkommer ved i de Formler, der udtrykker x_1 og y_1 ved x og y at indsætte $x = a + bt$, $y = c + dt$), indtræffer Tilfældet [1]) $\Sigma \neq 0$, ét Skærings-punkt (to sammenfaldende Skæringspunkter) samtidig i begge Koordinatsystemer.

76. <u>Dobbeltpunkt paa et Keglesnit. Tangent til et Keglesnit.</u> Lad os betragte et vilkaarligt Keglesnit bestemt ved Ligningen (1), om hvilket vi dog vil antage, at det indeholder Punkter (vi udelukker altsaa saadanne Keglesnit som $x^2 + y^2 = -1$), og lad P: (ξ, η) være et vilkaarligt Punkt paa dette Keglesnit. Vi vil bestemme den eller de (eventuelle) rette Linier, der skærer Keglesnittet i to i Punktet P sammenfaldende Punkter. I dette Øjemed parallelforskyder vi først Koordinatsystemet (xy) saaledes at Begyndelsespunktet falder i det givne Punkt P paa Keglesnittet; idet vi betegner det nye System med $(x_1 y_1)$, bestemmes Koordinattransformationen ved Ligningerne $x = \xi + x_1$, $y = \eta + y_1$. Udfører vi Substitutionen, finder vi Keglesnittets Ligning i det nye System $(x_1 y_1)$

$$(8) \qquad A x_1^2 + B y_1^2 + 2C x_1 y_1 + 2D_1 x_1 + 2E_1 y_1 = 0,$$

hvor vi til Afkortning har sat

$$(9) \qquad A\xi + C\eta + D = D_1 \quad , \quad C\xi + B\eta + E = E_1.$$

Vi skærer nu Keglesnittet med en vilkaarlig ret Linie gennem Begyndelsespunktet P, som vi fremstiller paa Parameterform ved Ligningerne $x_1 = \alpha r$, $y_1 = \beta r$, idet vi med (α, β) betegner Liniens Retningscosinusser (efter at Linien er orienteret), medens

Parameteren r angiver Afstanden fra Begyndelsespunktet P til det variable Punkt (x_1, y_1) paa Linien. Indsætter vi $x_1 = \alpha r$, $y_1 = \beta r$ i Keglesnittets Ligning (8), finder vi, idet vi ordner efter Potenser af r, Ligningen

$$(10) \qquad r^2(A\alpha^2 + B\beta^2 + 2C\alpha\beta) + 2r(D_1\alpha + E_1\beta) = 0.$$

Vi ser, at Ligning (10), uafhængig af hvilken ret Linie gennem P vi betragter, d. v. s. uafhængig af Retningscosinusserne (α, β), har Løsningen $r = 0$, hvad vi jo paa Forhaand vidste maatte være Tilfældet, da det Punkt P, hvorigennem vi har trukket den rette Linie (og som svarer til $r = 0$) jo er beliggende paa Keglesnittet. Skal den rette Linie skære Keglesnittet i to i Punktet P sammenfaldende Punkter (d. v. s. skal venstre Side af Ligning (10) være delelig ikke blot med r men med r^2) kræves herfor som nødvendig og tilstrækkelig Betingelse, at Liniens Retningscosinusser tilfredsstiller Ligningen

$$D_1\alpha + E_1\beta = 0.$$

Vi skelner nu mellem to Tilfælde

1) <u>Begge Tallene D_1 og E_1 er lig med Nul</u>; da er $D_1\alpha + E_1\beta = 0$ for <u>ethvert</u> Sæt Retningscosinusser (α, β), altsaa: <u>enhver ret Linie gennem P skærer Keglesnittet i to i Punktet P sammenfaldende Punkter</u>; P kaldes her et <u>Dobbeltpunkt</u> paa Keglesnittet. Betingelsen $(D_1 = E_1 = 0)$ for at et Punkt P paa et Keglesnit er et Dobbeltpunkt, kan vi ogsaa udtrykke saaledes: Henføres Keglesnittet til et retvinklet Koordinatsystem med Begyndelsespunktet i P, skal ikke blot (selvfølgelig) det konstante Led blive Nul, men ogsaa Leddene af første Grad skal falde bort,

d. v. s. Keglesnittets Ligning skal henført til dette nye Koordinatsystem have Formen $Ax^2 + By^2 + 2Cxy = 0$. Heraf følger atter (se Sætningen af 74), at et Punkt P paa et Keglesnit da og kun da vil være et Dobbeltpunkt, enten [1] naar Keglesnittet kun indeholder det ene Punkt P (svarende til $AB - C^2 > 0$) eller [2] naar Keglesnittet bestaar af to forskellige rette Linier, som skærer hinanden i Punktet P (svarende til $AB - C^2 < 0$), eller [3] naar Keglesnittet bestaar af to sammenfaldende rette Linier, som gaar gennem P (svarende til $AB - C^2 = 0$). Altsaa: Et egentligt Keglesnit (Ellipse, Hyperbel, Parabel) eller et udartet Keglesnit bestaaende af to (forskellige) parallele rette Linier indeholder intet Dobbeltpunkt; et udartet Keglesnit bestaaende af to hinanden skærende rette Linier indeholder eet og kun eet Dobbeltpunkt, nemlig Liniernes Skæringspunkt; et udartet Keglesnit, som enten kun indeholder eet eneste Punkt, eller som bestaar af to sammenfaldende rette Linier, har alle sine Punkter til Dobbeltpunkter.

[2] Tallene D_1 og E_1 er ikke begge lig med Nul; her findes der een og kun een ret Linie gennem P, der skærer Keglesnittet i to i Punktet P sammenfaldende Punkter; thi Ligningen $D_1\alpha + E_1\beta = 0$ har, naar vi opfatter α og β som Ubekendte, den almindelige Løsning $k(-E_1, D_1)$, hvor k er en vilkaarlig Konstant, og vi finder saaledes to og kun to (paa Fortegnet nær overensstemmende) Løsninger (α, β) med Kvadratsummen $\alpha^2 + \beta^2 = 1$; disse to Sæt Retningscosinusser bestemmer imidlertid samme rette Linie, blot med forskellig positiv Retning. Den fundne eneste rette Linie, der skærer Keglesnittet i to i Punktet P sammenfaldende Punkter, kaldes Keglesnittets Tangent i Punktet P. Idet Tangenten paa Parameterform fremstilles ved $x = \alpha r$, $y = \beta r$, hvor r er en uindskrænket Variabel, medens (α, β) er en egentlig

Løsning i Ligningen $D_1\alpha + E_1\beta = 0$, finder vi umiddelbart, at Tangentens Ligning er $D_1 x + E_1 y = 0$; thi denne Ligning har jo netop den almindelige Løsning $(x, y) = r(\alpha, \beta)$. Altsaa: Tangenten i Begyndelsespunktet (0,0) til et gennem Begyndelsespunktet gaaende Keglesnit $Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey = 0$, der ikke har dette Punkt til Dobbeltpunkt (d. v. s. hvor ikke $D = E = 0$), bestemmes simpelthen ved Ligningen $Dx + Ey = 0$, altsaa ved i Keglesnittets Ligning at slette Leddene af 2den Grad ud. For at bestemme Ligningen for Tangenten i et vilkaarligt Punkt $P: (\xi, \varepsilon)$ (som vi antager ikke er et Dobbeltpunkt) paa Keglesnittet

$$(1) \qquad Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

parallelforskyder vi først Koordinatsystemet saaledes at Begyndelsespunktet falder i P; derved gaar Keglesnittets Ligning over til Ligning (8), hvor D_1 og E_1 bestemmes ved Ligningerne (9). Henført til dette nye System $(x_1 y_1)$ har Tangenten i P Ligningen $D_1 x_1 + E_1 y_1 = 0$. Transformerer vi nu tilbage til det oprindelige Koordinatsystem (xy), hvad der jo sker ved at sætte $x_1 = x - \xi$, $y_1 = y - \varepsilon$, finder vi Tangentens Ligning i det oprindelige System at være $D_1(x - \xi) + E_1(y - \varepsilon) = 0$, eller idet vi indsætter Udtrykkene for D_1 og E_1, og gør Brug af at (ξ, ε) tilfredsstiller Keglesnittets Ligning (1), Ligningen

$$(11) \quad x(A\xi + C\varepsilon + D) + y(C\xi + B\varepsilon + E) + (D\xi + E\varepsilon + F) = 0.$$

Eksempelvis finder vi, ved i Ligning (11) for Koefficienterne $A, B \ldots F$ at indsætte Koefficienterne i Ligningerne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad y^2 = 2px,$$

Tangenten i Punktet (ξ, η) til henholdsvis Ellipse, Hyperbel og Parabel (henført til det sædvanlig benyttede, overfor det omhandlede Keglesnit bekvemt beliggende Koordinatsystem) bestemt henholdsvis ved Ligningerne

$$\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} = 1, \quad \frac{x\xi}{a^2} - \frac{y\eta}{b^2} = 1, \quad y\eta = p(x+\xi).$$

77. Tangentens Beliggenhed overfor Keglesnittet. Lad os betragte et vilkaarligt Keglesnit og et vilkaarligt Punkt P paa dette Keglesnit, om hvilket Punkt vi dog vil antage, at det ikke er et Dobbeltpunkt. Antager vi først at Keglesnittet er et udartet Keglesnit, bestaar det, idet vi jo har antaget at P ikke er et Dobbeltpunkt, nødvendigvis af to (ikke sammenfaldende) rette Linier L_1 og L_2, som hvis de skærer hinanden ikke netop har Punktet P til Skæringspunkt; Tangenten i Punktet P er her den af de to rette Linier L_1 og L_2, der gaar gennem P; thi om denne Linie ved vi jo, at den skærer Keglesnittet i to i Punktet P sammenfaldende Punkter, og Tangenten i et Punkt er jo entydig karakteriseret ved denne Egenskab. Lad os dernæst antage at det givne Keglesnit er et egentligt Keglesnit (altsaa en Ellipse, Hyperbel eller Parabel) og Punktet P følgelig et fuldkommen vilkaarligt Punkt paa dette Keglesnit; her vil Tangenten i P ikke have noget andet Punkt end sit „Røringspunkt" P fælles med Keglesnittet; thi af Undersøgelsen i **75** fremgaar, at en ret Linie, der skærer et Keglesnit i to i Punktet P sammenfaldende Punkter, kun da har andre Punkter end P fælles med Keglesnittet, naar Linien helt tilhører Keglesnittet. Vi gaar nu over til nærmere at undersøge, hvorledes Tangenten i et Punkt P af et egentligt Keglesnit ligger overfor Keglesnittet. Vi vælger hertil Koordinatsystemet saadan, at

P er Begyndelsespunktet; det konstante Led i Keglesnittets Ligning (1) er da Nul, og idet vi flytter Leddene af 2den Grad over paa den anden Side af Lighedstegnet, kan vi skrive denne Ligning paa Formen

$$(12) \qquad 2Dx + 2Ey = -(Ax^2 + By^2 + 2Cxy).$$

Idet nu $2Dx + 2Ey = 0$ netop er Ligningen for Tangenten i P, saaledes at det lineære homogene Polynomium $2Dx + 2Ey$, naar vi for de Variable x, y indsætter Koordinaterne til et variabelt Punkt i Planen, paa en konstant Faktor nær fremstiller Afstanden fra den omhandlede Tangent til det variable Punkt, viser Keglesnittets Ligning (12) os, at naar (x, y) er et Punkt paa Keglesnittet (altsaa tilfredsstiller Ligning (12)), vil Afstanden fra Tangenten i P til dette Punkt (x, y) paa en konstant Faktor nær være lig med Tallet $Ax^2 + By^2 + 2Cxy$. Vi skelner nu mellem tre Tilfælde, nemlig det Tilfælde, hvor det givne egentlige Keglesnit er en Ellipse, det Tilfælde, hvor det er en Parabel, og det Tilfælde, hvor det er en Hyperbel.

1) Det givne Keglesnit er en Ellipse, altsaa $AB - C^2 > 0$. Her har Polynomiet $Ax^2 + By^2 + 2Cxy$ (se 74) samme Fortegn i alle fra Begyndelsespunktet P forskellige Punkter i Planen; følgelig har Afstanden fra Tangenten i P til et vilkaarligt fra P forskelligt Punkt paa Ellipsen samme Fortegn uafhængigt af hvor paa Ellipsen Punktet ligger; d. v. s. Ellipsen ligger, bortset fra selve Punktet P, helt paa den ene Side af Tangenten i P. (se Fig. 33).

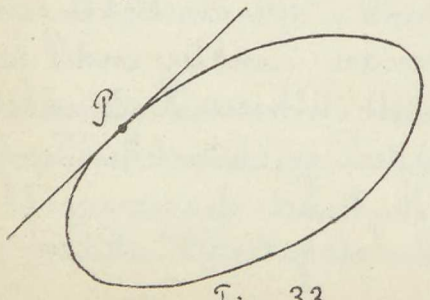


Fig. 33.

2) Det givne Keglesnit er en

Parabel, altsaa $AB - C^2 = 0$. Ogsaa her finder vi, at Keglesnittet (bortset fra selve Punktet P) ligger helt paa den ene Side af Tangenten i P (se Fig. 34); thi Polynomiet $Ax^2 + By^2 + 2Cxy$, der jo ikke kan blive Nul i noget fra P forskelligt Punkt af Parablen (da et saadant Punkt jo maatte have Afstanden Nul fra Tangenten i P, d. v. s. maatte ligge paa denne Tangent) har jo (se 74.) i alle Punkter (x, y) i Planen, for hvilke $Ax^2 + By^2 + 2Cxy \neq 0$, et og samme Fortegn.

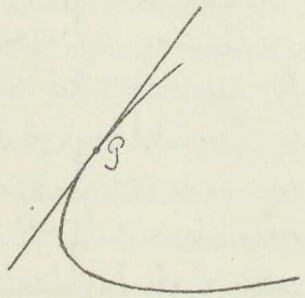


Fig. 34.

3) Keglesnittet er en Hyperbel, altsaa $AB - C^2 < 0$. Her er (se 74.) Polynomiet $Ax^2 + By^2 + 2Cxy$ positivt i to (modstaaende) af de fire Vinkelrum, hvori Nullinierne $Ax^2 + By^2 + 2Cxy = 0$ deler Planen, negativt i de to andre. Nu er imidlertid som tidligere vist Nullinierne $Ax^2 + By^2 + 2Cxy = 0$ netop de to rette Linier L_1 og L_2 gennem Begyndelsespunktet P, der er parallele med Hyperblens Asymptoter. Idet endvidere (se 72.) den ene Hyperbelgren ligger helt i det ene af disse Vinkelrum, den anden (bortset fra Punktet P selv) helt i de to tilgrænsende Vinkelrum, vil Polynomiet $Ax^2 + By^2 + 2Cxy$ (bortset fra selve Punktet P) være positivt i alle Punkter af den ene Hyperbelgren, negativt i alle Punkter af den anden. Tangenten i P ligger altsaa saadan, at den har den ene Hyperbelgren helt paa den ene Side, den anden Gren helt paa den anden Side (se Fig. 35).

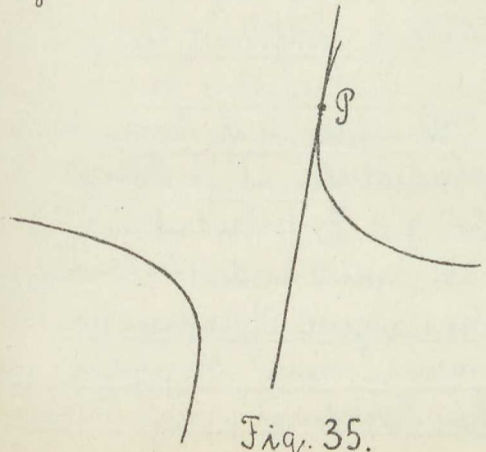


Fig. 35.

78. Keglesnit i homogene Koordinater. I det foregaaende har det Punktomraade, hvori vi har opereret, været Planens „sædvanlige" Punkter; vi gaar nu over til en Behandling af de algebraiske Kurver af 2den Orden, ved hvilken vi vil lægge det gennem Indførelsen af Planens uendelig fjerne Punkter udvidede Punktbegreb til Grund. Ligesom ved de tidligere analytisk-geometriske Undersøgelser, hvor vi opererede med det udvidede Punktbegreb, karakteriserer vi ogsaa her Planens Punkter (de sædvanlige saavel som de uendelig fjerne) ved homogene Koordinater (X, Y, U), idet vi ligesom tidligere lager vort Udgangspunkt i et fastlagt sædvanligt (inhomogent) retvinklet Koordinatsystem (xy). – Lad der i det inhomogene retvinklede Koordinatsystem (XY) være givet et „sædvanligt" (egentligt eller udartet) Keglesnit ved Ligningen

$$(1) \qquad Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

hvor ikke alle tre Tal A, B, C er Nul. Indsætter vi i denne Ligning $x = \frac{X}{U}$, $y = \frac{Y}{U}$ og bortmultiplicerer vi derefter Nævneren U^2, gaar Ligning (1) derved over til den homogene Ligning af 2den Grad

$$(13) \qquad AX^2 + BY^2 + FU^2 + 2CXY + 2DXU + 2EYU = 0.$$

Som det umiddelbart fremgaar af Udledelsen, vil denne homogene Ligning (13) da og kun da tilfredsstilles af et Talsæt (X, Y, U) med $U \neq 0$, naar $x = \frac{X}{U}$, $y = \frac{Y}{U}$ tilfredsstiller den oprindelige inhomogene Ligning (1); med andre Ord: Mængden af sædvanlige Punkter, hvis homogene Koordinater (x, y, u) tilfredsstiller (13), er den samme som Mængden af sædvanlige Punkter, hvis inhomogene Koordinater (x, y) tilfreds-

stiller (1). Foruden de egentlige (d. v. s. fra (0,0,0) forskellige) Løsninger (X, Y, U) med $U \neq 0$, vil Ligning (13) imidlertid ogsaa kunne have andre egentlige Løsninger, nemlig saadanne med $U = 0$; disse sidste (eventuelle) Løsninger $(X, Y, 0)$ kan karakteriseres ved, at (X, Y) skal være en egentlig Løsning til den Ligning $AX^2 + BY^2 + 2CXY = 0$, der fremkommer af (13) ved at sætte $U = 0$. — Vi siger om Ligning (13), at den, naar vi benytter homogene Koordinater (X, Y, U), „svarer til" Ligning (1) i inhomogene Koordinater (x, y), og vi vedtager (i fuldkommen Analogi med den Maade, hvorpaa vi tillagde en sædvanlig ret Linie et uendelig fjernt Punkt), at det „sædvanlige" Keglesnit, der i inhomogene Koordinater fremstilles ved Ligning (1), naar vi benytter det udvidede Punktbegreb skal siges, foruden sine sædvanlige Punkter, at indeholde de (eventuelle) uendelig fjerne Punkter, hvis homogene Koordinater $(X, Y, 0)$ tilfredsstiller den til (1) svarende homogene Ligning (13) (Lad os straks tilføje den Bemærkning, som man let direkte kan bevise (se Opg. 83), men hvis Rigtighed iøvrigt (i hvert Fald for de egentlige Keglesnits Vedkommende) umiddelbart vil fremgaa, naar vi nedenfor nærmere undersøger, hvad det er for uendelig fjerne Punkter, vi tilføjer til de forskellige sædvanlige Keglesnit, at de (eventuelle) uendelig fjerne Punkter, vi gennem denne Vedlagt tillagger et vilkaarligt givet sædvanligt Keglesnit, er de samme uafhængigt af hvilket retvinklet Koordinatsystem (X, Y), der er lagt til Grund). Som vi ovenfor nævnte er de homogene Koordinater $(X, Y, 0)$ til de uendelig fjerne Punkter paa Keglesnittet (13) bestemt ved, at de to første Koordinater (X, Y) skal være en egentlig Løsning til den Ligning

$$AX^2 + BY^2 + 2CXY = 0,$$

der fremkommer af (13) ved at sætte $U = 0$, eller hvad der er det samme, som fremkommer af Ligningen (1) i inhomogene Koordinater ved at slette Leddene paa nær dem af højest Grad (2den Grad) ud. Erindres nu endvidere, at de homogene Koordinater $(X, Y, 0)$ til et uendelig fjernt Punkt jo ifølge Definitionen karakteriseres ved, at (X, Y) er de inhomogene Koordinater til et vilkaarligt fra Begyndelsespunktet O forskelligt (sædvanligt) Punkt paa den rette Linie gennem O, der har den til det betragtede uendelig fjerne Punkt svarende Hældning, finder vi følgende Resultat:

1) Er $AB - C^2 > 0$, indeholder Keglesnittet intet uendelig fjernt Punkt; thi her har Ligningen $AX^2 + BY^2 + 2CXY = 0$ jo ingen som helst egentlig Løsning.

2) Er $AB - C^2 < 0$, indeholder Keglesnittet to uendelig fjerne Punkter, nemlig de to uendelig fjerne Punkter, der svarer til de to ved Nullinierne $Ax^2 + By^2 + 2Cxy = 0$ (i inhomogene Koordinater) bestemte Hældninger.

3) Er $AB - C^2 = 0$, indeholder Keglesnittet ét uendelig fjernt Punkt, bestemt ved Hældningen af Nullinien (de to sammenfaldende Nullinier) $Ax^2 + By^2 + 2Cxy = 0$.

Speciellt ses altsaa, at hvis Keglesnittet er et egentligt Keglesnit, vil det 1) hvis det er en Ellipse, intet uendelig fjernt Punkt indeholde, 2) hvis det er en Hyperbel, indeholde to uendelig fjerne Punkter, bestemte ved Hældningerne af de to Asymptoter, og 3) hvis det er en Parabel, indeholde ét uendelig fjernt Punkt, bestemt ved Hældningen af Parablens Akse.

Da vi ved Behandlingen af de rette Linier i Planen gik over til at operere med det udvidede Punktbegreb, eller fra et analytisk Standpunkt, da vi gik over til at benytte homogene Koordinater, førtes vi naturligt til at udvide Be-

grebet „ret Linie" ved Indførelsen af Planens uendelig fjerne rette Linie. Paa fuldkommen tilsvarende Maade føres vi her ved Behandlingen af Keglesnit i homogene Koordinater til (foruden, som ovenfor sket, at tillægge de „sædvanlige" Keglesnit visse uendelig fjerne Punkter) ogsaa at foretage en Udvidelse af selve Begrebet „Keglesnit" for at naa til et fra det foreliggende Synspunkt naturligt afrundet Begrebsområde. Da Talen var om de rette Linier, vedtog vi, at enhver homogen første Grads Ligning

$$AX + BY + CU = 0 ,$$

hvor ikke alle tre Koefficienter A, B, C var Nul, skulde siges at fremstille en ret Linie; herved fik vi, foruden de sædvanlige rette Linier svarende til de Tilfælde, hvor ikke begge Tallene A og B var Nul, den „uendelig fjerne rette Linie" med, nemlig for $A = B = 0$ (og følgelig $C \neq 0$). Paa tilsvarende Maade vil vi her ved Definition fastsætte, at vi, naar Talen er om et <u>Keglesnit i homogene Koordinater</u>, derved vil forstaa enhver Punktmængde, der er geometrisk Sted for Punkter, hvis Koordinater (X, Y, U) tilfredsstiller en homogen Ligning af <u>2den Grad</u>

$$AX^2 + BY^2 + 2CXY + 2DXU + 2EYU + FU^2 = 0 ,$$

<u>hvor ikke alle 6 Koefficienter A, B...F er Nul</u>. Herved faar vi, foruden de tidligere (sædvanlige) Keglesnit, der svarer til de Tilfælde, hvor ikke alle tre Koefficienter A, B, C er Nul, endnu nogle yderligere Kurver med, nemlig 1) hvis $A = B = C = 0$, men ikke begge Tallene D og E er Nul; Kurven

$$U(2DX + 2EY + FU) = 0,$$

der bestaar af to rette Linier, nemlig den sædvanlige rette Linie $2DX + 2EY + FU = 0$ og Planens uendelig fjerne rette Linie $U = 0$, og [2]) hvis ikke blot $A = B = C = 0$, men ogsaa $D = E = 0$ (og følgelig $F \neq 0$) Ligningen

$$FU^2 = 0,$$

der bestemmer „to sammenfaldende" rette Linier, nemlig Planens uendelig fjerne Linie (taget to Gange med).

79. Skæring mellem ret Linie og Keglesnit i homogene Koordinater. Lad der være givet et vilkaarligt Keglesnit ved Ligningen

$$(13) \qquad AX^2 + BY^2 + FU^2 + 2CXY + 2DXU + 2EYU = 0$$

samt en vilkaarlig ret Linie, som vi fremstiller paa Parameterform ved Ligningerne

$$(14) \qquad \begin{aligned} X &= \xi s + \alpha t \\ Y &= \eta s + \beta t \\ U &= \zeta s + \gamma t, \end{aligned}$$

hvor (ξ, η, ζ) og (α, β, γ) er homogene Koordinater til to vilkaarlige (forskellige) af Liniens Punkter, og hvor (se 54) to egentlige Parameterpar (s_1, t_1) og (s_2, t_2) da og kun da bestemmer samme Punkt paa Linien, naar de er proportionale. For at bestemme (eventuelle) Skæringspunkter mellem Keglesnittet og den rette Linie indsætter vi de i (14) givne Udtryk for X, Y og U i Keglesnittets Ligning (13); herved finder vi en Lig-

ning af Formen

$$(15) \qquad Ls^2 + 2Mst + Nt^2 = 0$$

til Bestemmelse af de til de søgte Skæringspunkter svarende Parameterpar (s, t). Er i Ligning (15) alle tre Koefficienter L, M, N lig med Nul, er Ligningen tilfredsstillet af ethvert Talpar (s,t); den rette Linie (14) har følgelig alle sine Punkter fælles med Keglesnittet; Keglesnittet bestaar af to rette Linier (forskellige eller sammenfaldende, sædvanlige eller uendelig fjerne), hvoraf den givne Linie er den ene. Er ikke alle tre Koefficienter L, M, N lig med Nul, skelner vi mellem følgende tre Tilfælde: 1) $LN - M^2 > 0$; Ligning (15) har her ingen som helst egentlig Løsning (s, t); Keglesnittet har intet Punkt fælles med den rette Linie. 2) $LN - M^2 < 0$; Løsningerne (s, t) til Ligning (15) bestemmer her, naar vi opfatter (s, t) som inhomogene Koordinater til Punkter i Planen, to hinanden skærende rette Linier gennem Begyndelsespunktet; de egentlige (d. v. s. fra $(0,0)$ forskellige) Løsninger (s,t) falder følgelig i to Grupper: $k(s_1, t_1)$ og $k(s_2, t_2)$, hvor k er en vilkaarlig fra Nul forskellig Konstant, medens (s_1, t_1) og (s_2, t_2) ikke er proportionale; her findes altsaa to (forskellige) Skæringspunkter. 3) $LN - M^2 = 0$; Løsningerne (s,t) til Ligning (15) bestemmer, naar vi som før opfatter (s,t) som inhomogene Koordinater til Punkter i Planen, een ret Linie gennem Begyndelsespunktet (to sammenfaldende Linier); de egentlige Løsninger kan her skrives paa Formen $k(s_1, t_1)$, hvor k er en vilkaarlig Konstant $\neq 0$; her findes altsaa eet, eller som vi foretrækker at sige (fordi Ligning (15) bestemmer enhver egentlig Løsning (s,t) „to Gange") to sammenfaldende Skæringspunkter. — Sammenfatter vi de fundne Resultater, har vi bevist, at der, naar vi benytter det

udvidede Punktbegreb (regner med homogene Koordinater) gælder Sætningen: En ret Linie vil enten slet ikke skære et Keglesnit, helt tilhøre Keglesnittet eller skære Keglesnittet i to og kun to (forskellige eller sammenfaldende) Punkter. – Ligesom da Talen var om inhomogene Koordinater, vil vi ogsaa her i det Tilfælde, hvor den rette Linie helt tilhører Keglesnittet (hvor altsaa $Ls^2 + 2Mst + Nt^2$ er et Nulpolynomium i s og t) om ethvert (sædvanligt eller det uendelig fjerne) Punkt P paa den rette Linie sige, at den rette Linie skærer Keglesnittet i to („fler end eet") i P sammenfaldende Punkter. Vi har da her (i Modsætning til hvad der fandt Sted i inhomogene Koordinater) den simple Sætning: Den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for at en ret Linie gennem et vilkaarligt Punkt P paa et vilkaarligt Keglesnit skærer Keglesnittet i to i P sammenfaldende Punkter, er den at Linien er enten helt indeholdt i Keglesnittet eller kun har Punktet P fælles med Keglesnittet.

80. Tangent til et Keglesnit i homogene Koordinater. Lad $P(\xi, \eta, \zeta)$ være et vilkaarligt Punkt paa Keglesnittet (13), om hvilket vi altsaa antager, at det indeholder Punkter (i Modsætning f. Eks. til et Keglesnit som $X^2 + 2Y^2 + 3U^2 = 0$), og lad os søge de rette Linier gennem P, der skærer Keglesnittet i to i P sammenfaldende Punkter. Vi skriver en vilkaarlig ret Linie gennem P paa Formen (14), hvor (α, β, γ) er homogene Koordinater til et vilkaarligt valgt, fra P forskelligt, Punkt paa den betragtede rette Linie; Parameterfremstillingen er altsaa valgt saadan, at $t = 0$ (d. v. s. Parameterparret $(s, 0)$, hvor s er et vilkaarligt Tal $\neq 0$) svarer til Punktet P. Indsætter vi for at søge Skæring mellem Keglesnittet og den rette Linie, Udtrykkene (14) i Keglesnittets Ligning (13), finder vi en Ligning $Ls^2 + 2Mst + Nt^2 = 0$, hvor imidlertid her $L = 0$, da jo (ξ, η, ζ) tilfredsstil-

ler Ligning (13), idet Punktet P er beliggende paa Keglesnittet. Vi faar altsaa til Bestemmelse af Skæringspunkternes Parameterværdier (s, t) Ligningen

$$2Mst + Nt^2 = 0, \tag{16}$$

hvor Koefficienterne M og N foruden af Keglesnittets Konstanter A, B... og de givne Koordinater (ξ, η, ζ) til Punktet P er afhængige af (α, β, γ). Vi ser for det første (hvad vi jo paa Forhaand kunde vide maatte være Tilfældet), at Ligning (16) uafhængigt af Værdierne for (α, β, γ) d. v. s. uafhængigt af hvilken ret Linie gennem P vi betragter, har Løsningen (s, 0), der bestemmer os Punktet P. Skal den rette Linie gennem P skære Keglesnittet i to i P sammenfaldende Punkter kræves hertil, enten at $M = N = 0$ (i hvilket Tilfælde den rette Linie helt tilhører Keglesnittet) eller at $M = 0$, $N \neq 0$ (i hvilket Tilfælde vi faar Parameterværdien (s,0) til Punktet P bestemt to Gange); Betingelsen er følgelig, idet vi sammenfatter de to Tilfælde, den at $\underline{M = 0}$, eller idet vi udregner Værdien for M, at

$$\alpha(A\xi + C\eta + D\zeta) + \beta(C\xi + B\eta + E\zeta) + \gamma(D\xi + E\eta + F\zeta) = 0. \tag{17}$$

Denne Ligning udtrykker altsaa den Betingelse, som (α, β, γ) maa tilfredsstille, for at den rette Linie, der forbinder det givne Punkt $P : (\xi, \eta, \zeta)$ med Punktet (α, β, γ), skal skære Keglesnittet i to i Punktet P sammenfaldende Punkter. Der kan nu indtræffe to forskellige Tilfælde:

1) $\underline{\text{Koefficienterne}}$ $A\xi + C\eta + D\zeta$, $C\xi + B\eta + E\zeta$, $D\xi + E\eta + F\zeta$ til α, β, γ i Ligning (17) $\underline{\text{er alle tre lig med Nul}}$; da vil $\underline{\text{en-hver}}$ ret Linie gennem P skære Keglesnittet i to i Punktet

P sammenfaldende Punkter; Punktet P er et Dobbeltpunkt paa Keglesnittet; er P_1 et vilkaarligt fra P forskelligt Punkt paa Keglesnittet, vil den rette Linie gennem P og P_1 helt tilhøre Keglesnittet; thi en ret Linie, som har to forskellige Punkter P og P_1 fælles med et Keglesnit, vil jo kun da skære Keglesnittet i to i P sammenfaldende Punkter, naar den har alle sine Punkter fælles med Keglesnittet; heraf følger, at Keglesnittet enten indeholder kun det ene Punkt P, eller bestaar af to (forskellige eller sammenfaldende) rette Linier, som begge gaar gennem P. Omvendt indser man umiddelbart, at ethvert Keglesnit, der enten kun bestaar af det ene (sædvanlige eller uendelig fjerne) Punkt P, eller som bestaar af to rette Linier gennem P, har et Dobbeltpunkt i P; thi en vilkaarlig ret Linie gennem P vil jo da enten kun have Punktet P fælles med Keglesnittet eller have alle sine Punkter fælles med Keglesnittet, altsaa i begge Tilfælde skære Keglesnittet i to i Punktet P sammenfaldende Punkter.

2) De tre Koefficienter $A\xi + C\eta + D\zeta$, $C\xi + B\eta + E\zeta$, $D\xi + E\eta + F\zeta$ i Ligning (17) er ikke alle tre lig med Nul. Det Baand, der her er paalagt det fra $P:(\xi,\eta,\zeta)$ forskellige Punkt i Planen $\Omega:(\alpha,\beta,\gamma)$, dersom det skal tilfredsstille (17), er det, at $\Omega:(\alpha,\beta,\gamma)$ skal være beliggende paa den rette Linie

$$(18)\quad X(A\xi+C\eta+D\zeta)+Y(C\xi+B\eta+E\zeta)+U(D\xi+E\eta+F\zeta) = 0.$$

Idet denne rette Linie (18) gaar gennem Punktet P (da Ligningen jo er tilfredsstillet, naar vi for (X,Y,U) indsætter (ξ,η,ζ)), ses umiddelbart, at den ved P og Ω bestemte rette Linie vil være den samme uafhængigt af hvilket fra P forskelligt Punkt paa Linien (18) vi benytter, nemlig vil være Linien (18) selv.

(Anderledes udtrykt: Ligningerne (14) vil, hvilken med (ξ, η, ζ) ikke proportional, egentlig Løsning (α, β, γ) til (18) vi end benytter, fremstille den samme rette Linie, kun paa forskellig Parameterform). – Der findes altsaa her een og kun een ret Linie, nemlig (18), der skærer Keglesnittet i to i Punktet P sammenfaldende Punkter; denne rette Linie (18) kaldes Keglesnittets Tangent i Punktet P. – I det Tilfalde, hvor det givne Keglesnit er et „sædvanligt" Keglesnit og det givne Punkt P (som vi antager ikke er et Dobbeltpunkt) et sædvanligt Punkt, viser Ligning (18) (hvad man ogsaa umiddelbart direkte kunde indse maatte være Tilfældet), at Definitionen paa Tangenten i homogene Koordinater stemmer overens med (d. v. s. bestemmer os samme rette Linie som) den tidligere Definition i inhomogene Koordinater; thi den homogene Tangentligning (18) fremkommer i dette Tilfalde netop af den tidligere fundne inhomogene Tangentligning (11), naar vi gaar over til at benytte homogene Koordinater for saavel det givne Punkt P som for det variable Punkt paa Linien.

Lad os som et Eksempel paa Tangentbestemmelse i homogene Koordinater søge Tangenterne i de to uendelig fjerne Punkter paa en Hyperbel. Vi vælger Koordinatsystemet saaledes, at Hyperblen i inhomogene Koordinater faar Ligningen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, altsaa i homogene Koordinater Ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - u^2 = 0. \tag{19}$$

De to uendelig fjerne Punkter paa Hyperblen, bestemt ved Asymptoternes Heldninger, har til homogene Koordinater henholdsvis $(a, b, 0)$ og $(-a, b, 0)$ (eller naturligvis, hvad der kommer ud paa det samme, dermed proportionale Talsæt). Vi finder føl-

gelig Tangenterne i disse to Punkter ved i Ligning (18) for Keglesnitskoefficienterne $A, B \ldots$ at indsætte Koefficienterne i (19) samt for (ξ, η, ζ) at indsætte henholdsvis $(a, b, 0)$ og $(-a, b, 0)$. Herved faas

$$X \cdot \left(\frac{\pm a}{a^2}\right) + Y \cdot \left(\frac{b}{-b^2}\right) + U \cdot (0) = 0 ,$$

altsaa $Y = \pm \frac{b}{a} X$; <u>Tangenten i et uendelig fjernt Punkt af en Hyperbel er altsaa den gennem Punktet gaaende Asymptote</u>.

Som et andet Eksempel søger vi <u>Tangenten i det uendelig fjerne Punkt af en Parabel</u>. Vi vælger Koordinatsystemet saaledes, at Parablen i inhomogene Koordinater faar Ligningen $y^2 - 2px = 0$, altsaa i homogene Koordinater Ligningen

$$Y^2 - 2pXU = 0 ;$$

det uendelig fjerne Punkt paa Parablen (bestemt ved Heldningen af Parablens Akse) har da Koordinaterne $(1, 0, 0)$ og vi finder ved Indsættelse i (18) Tangenten i dette Punkt bestemt ved Ligningen

$$X \cdot (0) + Y \cdot (0) + U \cdot (-p) = 0 ,$$

altsaa $U = 0$; <u>Tangenten i det uendelig fjerne Punkt af en Parabel er Planens uendelig fjerne rette Linie</u>.

81. <u>Keglesnit i Parallelkoordinater</u>. Ved den foregaaende Undersøgelse af Keglesnittene har vi til Koordinatsystem benyttet et retvinklet Koordinatsystem. Som et Blik paa disse Undersøgelser viser, vilde vi imidlertid have mødt ganske tilsvarende Forhold og have fundet ganske samme Resultater, om vi i Stedet for

et retvinklet Koordinatsystem havde lagt et vilkaarligt Parallelkoordinatsystem til Grund. Saaledes gælder der, ogsaa naar vi benytter vilkaarlige Parallelkoordinatsystemer (ganske som da Talen var om de speciellere retvinklede Koordinatsystemer), den Sætning, at hvis en Punktmængde henført til et Parallelkoordinatsystem fremstilles ved en algebraisk Ligning af 2den Grad, vil den henført til et vilkaarligt andet Parallelkoordinatsystem ligeledes kunne fremstilles ved en algebraisk Ligning af 2den Grad, og Beviset følger (ganske som ved de retvinklede Koordinatsystemer) umiddelbart derudfra, at de Transformationsformler, der fører over fra et Parallelkoordinatsystem til et vilkaarligt andet, danner en linear Substitution. Ogsaa naar det benyttede Koordinatsystem er et Parallelkoordinatsystem, indfører man naturligvis (ganske som ved et retvinklet Koordinatsystem) homogene Koordinater til Brug for saadanne Undersøgelser, ved hvilke man inddrager Planens uendelig fjerne Punkter i Betragtningen; og Undersøgelser som f. Eks. de i **79** og **80** udførte vedrørende Skæring mellem ret Linie og Keglesnit og Bestemmelse af Tangenten i et Punkt af et Keglesnit gælder da ganske uafhængigt af (d. v. s. uden at man behøver at bekymre sig om), hvorvidt det benyttede Koordinatsystem er et retvinklet eller et vilkaarligt Parallelkoordinatsystem; eksempelvis nævner vi, at Tangenten i et vilkaarligt Punkt (ikke Dobbeltpunkt) (ξ, η, ζ) paa et Keglesnit

$$(13) \qquad AX^2 + BY^2 + 2CXY + 2DXU + 2EYU + FU^2 = 0$$

ogsaa naar det benyttede Koordinatsystem er et vilkaarligt Parallelkoordinatsystem udtrykkes ved Ligningen

$$(18)\quad X(A\xi+C\eta+D\zeta)+Y(C\xi+B\eta+E\zeta)+U(D\xi+E\eta+F\zeta)=0.$$

Vi skal ikke gaa nærmere ind paa Omtalen af Keglesnit henført til et Parallelkoordinatsystem, men skal afslutte vore Bemærkninger herom med at bestemme Ligningen for henholdsvis en Parabel og en Hyperbel henført til Parallelkoordinatsystemer, der er beliggende paa speciel, særlig bekvem, Maade overfor henholdsvis Parablen og Hyperblen.

Vi vil begynde med at bestemme Ligningen for en Parabel, henført til det Parallelkoordinatsystem (XY), hvor et vilkaarligt valgt (sædvanligt) Punkt O paa Parablen er Begyndelsespunkt, og hvor Diametren i Punktet (den Linie gennem P, der er parallel med Parablens Akse) er X-Akse, medens Tangenten i P er Y-Akse (se Fig. 36). For at finde Parablens Ligning henført til dette Parallelkoordinatsystem (XY) indfører vi et retvinklet „Hjælpekoordinatsystem" (X_1Y_1) beliggende paa den sædvanlige Maade overfor Parablen (d. v. s. saaledes at Koordinatakserne X_1 og Y_1 er henholdsvis Parablens Akse og Toppunktstangent); henført til dette retvinklede Koordinatsystem (X_1Y_1) har Parablen Ligningen $y_1^2 = 2px_1$.

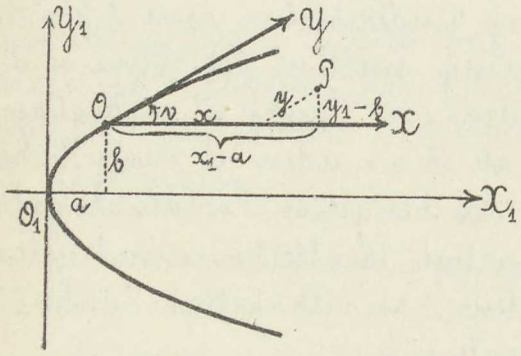


Fig. 36.

Vi søger nu de Transformationsformler, der forbinder Koordinaterne (x, y) og (x_1, y_1) til samme Punkt P, henført henholdsvis til det givne Parallelkoordinatsystem (XY) og det retvinklede System (X_1Y_1); ved Aflæsning paa Figuren fin-

der vi umiddelbart disse Formler udtrykt ved

$$x_1 = a + x + y\cos v \quad , \quad y_1 = b + y\sin v,$$

hvor (a, b) er Koordinaterne til Punktet O henført til det retvinklede System $(x_1\, y_1)$, medens v angiver Aksevinklen i Parallelkoordinatsystemet (xy), altsaa Vinklen fra Diametren i O til Tangenten i O. Udfører vi Koordinattransformationen, d. v. s. indfører vi i Ligningen $y_1^2 = 2px_1$ for x_1 og y_1 deres Udtryk ved x og y, finder vi den søgte Ligning for Parablen henført til Systemet (xy)

$$y^2\sin^2 v - 2px + 2y(b\sin v - p\cos v) + b^2 - 2pa = 0;$$

benytter vi endelig, at $b^2 - 2pa = 0$, samt (som bekendt) at $\operatorname{tg} v = \frac{p}{b}$, altsaa at $b\sin v - p\cos v = 0$, reduceres den fundne Ligning til $y^2\sin^2 v = 2px$, eller idet vi betegner $\frac{p}{\sin^2 v}$ med p_1, til Ligningen $y^2 = 2p_1x$. Parablen fremstilles altsaa henført til det omhandlede Parallelkoordinatsystem ved en Ligning af samme Form, som den vi kender fra det specielle Tilfælde, hvor det til Begyndelsespunkt benyttede Parabelpunkt O netop er Toppunktet. – Til den fundne Ligning $y^2 = 2p_1x$ kan vi imidlertid ogsaa komme paa anden (og elegantere) Maade end ved at gaa ud fra Parablens Ligning i retvinklede Koordinater og derefter udføre en Koordinattransformation, nemlig gennem følgende Betragtning: Idet vi, for ogsaa at kunne inddrage Parablens uendelig fjerne Punkt i Betragtningen, benytter homogene Koordinater (X, Y, U) ved vi, at Parablen henført til det omhandlede Parallelkoordinatsystem fremstilles ved en Ligning

$$(13) \qquad AX^2 + BY^2 + 2CXY + 2DXU + 2EYU + FU^2 = 0,$$

idet jo ethvert Keglesnit henført til et vilkaarligt Parallelkoordinatsystem fremstilles ved en algebraisk Ligning af 2den Grad. For nu at bestemme Konstanterne A, B... i Parablens Ligning (13) benytter vi for det første, at Parablen gaar gennem Begyndelsespunktet (0,0,1), hvoraf følger $\underline{F = 0}$, samt at Parablen indeholder det ved X-Aksens Retning bestemte uendelig fjerne Punkt (1,0,0), hvoraf følger $\underline{A = 0}$. Ved Indsættelse i (18) finder vi dernæst Tangenten i Begyndelsespunktet (0,0,1) bestemt ved $DX + EY + 0U = 0$; da denne Tangent jo skal være Y-Aksen, altsaa have Ligningen $x = 0$, følger $\underline{E = 0}$, $D \neq 0$. For Tangenten i det uendelig fjerne Punkt (1,0,0) finder vi $0.X + CY + DU = 0$; da denne Tangent skal være Planens uendelig fjerne rette Linie, faar vi $\underline{C = 0}$. Parablen har altsaa Ligningen $BY^2 + 2DXU = 0$, eller naar vi gaar over til inhomogene Koordinater og sætter $-\frac{D}{B} = p_1$, Ligningen $y^2 = 2p_1 x$, i Overensstemmelse med det tidligere Resultat.

Som et andet (og vigtigere) Eksempel paa Fremstillingen af et Keglesnit, henført til et specielt, i Forhold til Keglesnittet beliggende Parallelkoordinatsystem, vil vi bestemme Ligningen for <u>en Hyperbel henført til det Parallelkoordinatsystem (XY), hvor Asymptoterne er Koordinatakser</u>. Denne Ligning kunde vi naturligvis finde ved at gaa ud fra Hyperblens kendte Ligning henført til det retvinklede Koordinatsystem, hvor Hyperblens Akser er Koordinatakser, og derefter udføre en Koordinattransformation; vi foretrækker imidlertid, som endnu et Øvelseseksempel i Behandlingen af homogene Koordinater, at benytte en Fremgangsmaade analog med den sidste af de to Maader, hvorpaa vi ovenfor udledte Parablens Ligning: Lad

(13) $AX^2 + BY^2 + 2CXY + 2DXU + 2EYU + FU^2 = 0$

vore Hyperblens Ligning i homogene Koordinater, henført til det nævnte Parallelkoordinatsystem. Idet Hyperblen gaar gennem Punkterne (1, 0, 0) og (0, 1, 0) (de to uendelig fjerne Punkter paa henholdsvis X-Akse og Y-Akse), følger $\underline{A = 0}$, $\underline{B = 0}$. Ved Indsættelse i (18) finder vi dernæst Tangenten i det uendelig fjerne Punkt (1, 0, 0) bestemt ved Ligningen $0 \cdot X + CY + DU = 0$; da denne Tangent skal være Asymptoten $Y = 0$, faas $\underline{D = 0}$, $C \neq 0$; paa tilsvarende Maade faas ved at benytte, at Y-Aksen er Tangent i Punktet (0, 1, 0), at $\underline{E = 0}$. Hyperblens Ligning er altsaa $2CXY + FU^2 = 0$, eller, idet vi gaar over til inhomogene Koordinater og sætter $-\frac{F}{2C} = k$

$$\underline{xy = k},$$

hvor k er en Konstant. – Speciell mærker vi os, at en ligesidet Hyperbel (d. v. s. en Hyperbel, hvis Asymptoter er vinkelrette paa hinanden) henført til det retvinklede Koordinatsystem, hvor Asymptoterne er Koordinatakser, fremstilles ved en Ligning af Formen $xy = k$.

82. Keglesnit i polære Koordinater. En viglig Fremstilling af et egentligt Keglesnit (Ellipse, Hyperbel, Parabel) faar vi ved at benytte et polært Koordinatsystem med et af Keglesnittets Brandpunkter til Pol og Brandpunktsaksen til Akse. Lad os først betragte en Ellipse, som henført til det sædvanlige retvinklede Koordinatsystem, hvor Storaksen er X-Akse, Lilleaksen er Y-Akse, fremstilles ved Ligningen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, eller idet vi sætter $b^2 = a^2(1 - e^2)$, hvor $e < 1$ angiver Eksentriciteten, ved Ligningen

$$x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2). \tag{20}$$

Vi parallelforskyder Koordinatsystemet, saaledes at Begyndel-

sespunktet falder i det negative Brændpunkt $(-\varepsilon a, 0)$, og finder derved Ligningen $(x-\varepsilon a)^2(1-\varepsilon^2)+y^2=a^2(1-\varepsilon^2)$, eller idet vi ordner Leddene, Ligningen

$$x^2(1-\varepsilon^2)+y^2-2x\varepsilon a(1-\varepsilon^2)-a^2(1-\varepsilon^2)^2=0. \tag{21}$$

Betegner vi Parameteren $a(1-\varepsilon^2)$ (d. v. s. Ordinaten i Brændpunktet) med p, kan vi skrive Ligning (21) paa Formen

$$x^2(1-\varepsilon^2)+y^2-2\varepsilon px-p^2=0. \tag{22}$$

Betragter vi dernæst Hyperblen fremstillet ved Ligningen $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; eller idet vi paa sædvanlig Maade sætter $b^2=a^2(\varepsilon^2-1)$, hvor $\varepsilon>1$, ved Ligningen (20), og parallelforskyder vi her Koordinatsystemet, saaledes at Begyndelsespunktet falder i det positive Brændpunkt $(\varepsilon a, 0)$, finder vi øjensynlig Hyperblen, henført til det nye Koordinatsystem, fremstillet ved den Ligning, der fremgaar af (21) ved at skifte Fortegn for Koefficienten til x. Nu har imidlertid Parameteren p (Ordinaten i Brændpunktet) her Værdien $a(\varepsilon^2-1)=-a(1-\varepsilon^2)$; følgelig finder vi slutteligt samme Ligning (22), som den vi ovenfor fandt for Ellipsen.

Den fundne Ligning (22), der for $\varepsilon<1$ bestemmer en Ellipse med Eksentriciteten ε og Parametren p, idet Begyndelsespunktet ligger i det „negative" Brændpunkt, for $\varepsilon>1$ en Hyperbel med Eksentricitet ε og Parameter p, idet Begyndelsespunktet ligger i det „positive" Brændpunkt, fremstiller aabenbart for $\varepsilon=1$ en Parabel med Brændpunkt i Begyndelsespunktet og Parametren p; thi for $\varepsilon=1$ gaar Ligning (22) jo over til Ligningen $y^2=2p(x+\frac{p}{2})$.

Gaar vi nu over til det <u>polære Koordinatsystem</u>, hvor det bebragtede Brændpunkt er Pol og X-Aksen er Akse, finder vi ved i Ligning (22) at indsætte $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ Ligningen

$$(23) \qquad r^2(1-\varepsilon^2\cos^2\theta) - 2pr\varepsilon\cos\theta - p^2 = 0;$$

denne Ligning tilfredsstilles ifølge sin Udledelse (se **56**) af ethvert Sæt polære Koordinater (r,θ) til ethvert Punkt paa det omhandlede Keglesnit, men ikke af noget Sæt polære Koordinater til noget Punkt udenfor Keglesnittet. Ligning (23) kan, som det umiddelbart ses ved at løse Ligningen med Hensyn til r, skrives paa Formen

$$(r(1-\varepsilon\cos\theta)-p)\cdot(r(1+\varepsilon\cos\theta)+p) = 0.$$

Ligningen spalter sig følgelig i de to Ligninger

$$(24^a) \quad r(1-\varepsilon\cos\theta) = p \qquad \text{og} \qquad r(1+\varepsilon\cos\theta) = -p \quad (24^b).$$

Idet den ene af disse to Ligninger (24^a) og (24^b) fremgaar af den anden ved at ombytte r med $-r$ og $\cos\theta$ med $-\cos\theta$, vil der, hvis den ene af Ligningerne tilfredsstilles af et Sæt polære Koordinater (r_0, θ_0) til et Punkt P, findes et andet Sæt polære Koordinater, nemlig $(-r_0, \theta_0+\pi)$, til det samme Punkt P, der tilfredsstiller den anden Ligning. Fordanger vi derfor af Keglesnittets Ligning, ikke at den skal tilfredsstilles af samtlige polære Koordinatsæt til et Punkt paa Keglesnittet, men kun at der blandt Punktets forskellige polære Koordinatsæt skal findes mindst et saadant, der tilfreds-

stiller Ligningen, kan vi nöjes med den ene af de to Ligninger (24), f. Eks. (24^a), og uden videre bortkaste den anden. Vi har herigennem fundet den søgte Ligning: $\underline{r(1-\varepsilon\cos\theta)=p}$, hvor ε er Keglesnittets Eksentricitet, p Keglesnittets Parameter. Man skriver sædvanligvis denne Ligning paa Formen

$$r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\theta} \tag{25}$$

ogsaa i de Tilfælde (Hyperbel og Parabel), hvor $\varepsilon > 1$ og $\varepsilon = 1$, hvor altsaa Nævneren $1-\varepsilon\cos\theta$ bliver Nul henholdsvis for to forskellige Værdier af θ ($\theta = \theta_0 + 2p\pi$ og $\theta = -\theta_0 + 2p\pi$, svarende til Hyperblens to Asymptoteretninger) og for een Værdi af θ ($\theta = 0 + 2p\pi$, bestemmende Parablens Akseretning); man siger da (med en Sprogbrug, der umiddelbart kan gøres korrekt ved at skrive r paa homogen Form: $r = \frac{R}{u}$), at Ligning (25) for de nævnte Værdier af θ bestemmer henholdsvis Hyperblens to uendelig fjerne Punkter og Parablens ene uendelig fjerne Punkt. — For slutteligt at undersøge, hvorledes det ved Ligning (25) bestemte Punkt (r,θ) gennemløber Keglesnittet, naar θ varierer fra 0 (incl.) til 2π (excl.), bemærker vi, at for Ellipsen ($\varepsilon < 1$) er det ved (25) bestemte r positivt for alle Værdier af θ, for Parablen ($\varepsilon = 1$) er r ligeledes positivt for alle Værdier af θ (bortset om man vil fra Værdien $\theta = 0$, der bestemmer Parablens uendelig fjerne Punkt), medens for Hyperblen ($\varepsilon > 1$) r er negativt for $0 \leqq \theta < \theta_0$ og for $2\pi - \theta_0 < \theta < 2\pi$, positivt for $\theta_0 < \theta < 2\pi - \theta_0$, hvor θ_0 betegner den mellem 0 og $\frac{\pi}{2}$ beliggende Løsning til Ligning $\cos\theta = \frac{1}{\varepsilon}$. Heraf følger umiddelbart, at naar θ voksende varierer fra 0 til 2π, vil det ved Ligning (25) bestemte Punkt (r, θ) gennemløbe Keglesnittet som anlydet paa de hosstaaende Figurer (Fig. 37^a 37^b 37^c).

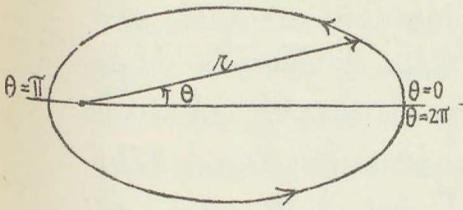


Fig. 37a

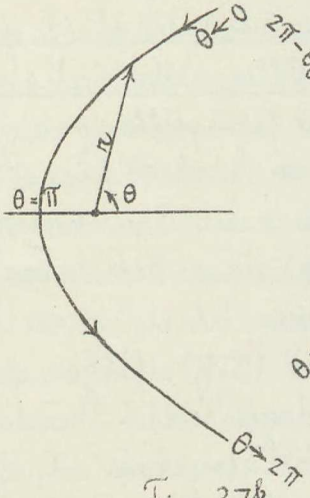


Fig. 37b

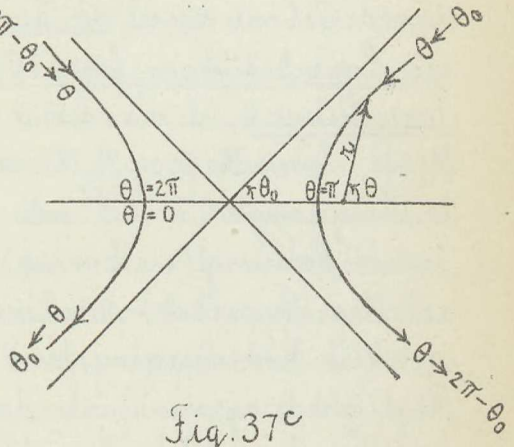


Fig. 37c

83. Ellipse og Hyperbel i rational Parameterfremstilling. Idet vi atter vender tilbage til Fremstillingen af Planens Punkter ved Hjælp af retvinklede (inhomogene) Koordinater (x, y), skal vi afslutte vor Gennemgang af Keglesnittenes Theori med at udlede en for Løsningen af et senere Problem indenfor Integralregningen yiglig Parameterfremstilling for Koordinaterne (x, y) til det variable Punkt paa et egentligt Keglesnit (Ellipse, Hyperbel, Parabel). Vi har allerede tidligere (se 72) fundet Parameterfremstillinger for enhver af disse tre Keglesnitstyper, nemlig for Ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Parameterfremstillingen $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, for Hyperblen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Parameterfremstillingen $x = \frac{a}{\cos t}$, $y = b\operatorname{tg} t$ og for Parablen $y^2 = 2px$ Parameterfremstillingen $y = t$, $x = \frac{t^2}{2p}$. Blandt disse tre Parameterfremstillinger udmærker den for Parablen sig frem for de to andre derved, at enhver af Koordinaterne x og y er udtrykt ved et Polynomium i Parameteren t. For Ellipse og Hy-

perbel eksisterer der, som man uden Vanskelighed kan bevise (se Opg. 80), ingen Parameterfremstilling af denne Form; derimod vil vi vise, at Koordinaterne (x, y) til en Ellipse eller en Hyperbel kan fremstilles ved „rationale" Funktioner i en Parameter t, d. v. s. kan fremstilles paa Formen $x = R(t)$, $y = R_1(t)$, hvor $R(t)$ og $R_1(t)$ er Bröker, hvis Tæller og Nævner begge er Polynomier i t. (Lad os til Orientering bemærke, at hvis denne Sætning er bevist, naar det betragtede Keglesnit (Ellipse eller Hyperbel) henføres til et specielt, bekvemt valgt, retvinklet Koordinatsystem (XY), følger deraf umiddelbart dens Rigtighed ogsaa naar Keglesnittet henføres til et vilkaarligt valgt retvinklet Koordinatsystem $(X_1 Y_1)$; thi er $x = R(t)$, $y = R_1(t)$ en rational Parameterfremstilling for Keglesnittet henført til Systemet (XY), finder vi øjensynlig straks en rational Parameterfremstilling for Keglesnittet i Systemet $(X_1 Y_1)$ ved blot i de Formler, der udtrykker Koordinaterne x_1 og y_1 ved Koordinaterne (x, y), for x og y at indsætte henholdsvis $R(t)$ og $R_1(t)$. Til at begynde med vil vi imidlertid ikke tænke os Koordinatsystemet (XY) valgt paa speciel Maade overfor Keglesnittet, da et saadant Valg af Koordinatsystem ikke vil medføre nogen som helst Forandring (Lettelse) i Ræsonnementet). For at udlede en rational Parameterfremstilling for det egentlige Keglesnit $Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$, som vi for at have en bestemt Figur for Øje f. Eks. vil antage er en Ellipse (altsaa $AB - C^2 > 0$), gaar vi saaledes frem. Vi vælger et vilkaarligt, men efter Valget fastholdt, Punkt $P_0 : (x_0, y_0)$ paa Ellipsen og skærer derefter Ellipsen med en (variabel)

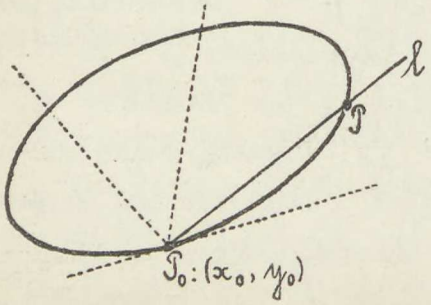


Fig. 38.

ret Linie l gennem P_0; denne Linie skærer Keglesnittet (se Fig 38) foruden i Punktet P_0 i et (og kun et) Punkt P. Lader vi nu Linien l dreje sig om det faste Punkt P_0, saaledes at den efterhaanden faar alle mulige forskellige Heldninger, vil det nævnte Skæringspunkt P derved gennemløbe Ellipsen, saaledes at vi faar ethvert Punkt paa Ellipsen med een og kun een Gang (Punktet P_0 selv kommer med for den Heldning af Linien gennem P_0, der bestemmer Tangenten i P_0; thi Tangenten skærer jo Ellipsen i to i P_0 sammenfaldende Punkter). For at bestemme Koordinaterne til Skæringspunktet P skriver vi den rette Linie l paa Parameterformen $x = x_0 + \alpha r$, $y = y_0 + \beta r$, hvor (α, β) er Linjens Retningscosinusser; indsætter vi disse Udtryk for x og y i Keglesnittets Ligning $Ax^2 + \ldots + F = 0$, faar vi til Bestemmelse af r en Ligning $Lr^2 + Mr + N = 0$, hvor imidlertid $N = 0$, da $P: (x_0, y_0)$ jo er beliggende paa Ellipsen; vi kan følgelig (for enhver Stilling af Linien l, d. v. s. hvilket Sæt Retningscosinusser (α, β) end beregner) bortdividere Faktoren r, der giver Roden $r = 0$ svarende til det faste Punkt P_0, og finder følgelig Parameterværdien r svarende til det andet Skæringspunkt, d. v. s. Afstanden $r = P_0P$, bestemt ved en Ligning af første Grad i r, nemlig $Lr + M = 0$, hvoraf faas $r = \frac{-M}{L}$; her er M en lineær homogen Funktion i α og β, L en homogen Funktion af 2^{den} Grad i α og β (nemlig $L = A\alpha^2 + B\beta^2 + 2C\alpha\beta$). Vi finder sluttelig Koordinaterne (x, y) til Punktet P udtrykt ved $x = x_0 + \alpha\left(\frac{-M}{L}\right) = \frac{Lx_0 - M\alpha}{L}$, $y = \frac{Ly_0 - M\beta}{L}$; de fundne Udtryk for x og y er Brøker, hvis Tællere og Nævner er homogene Polynomier af samme Grad (2^{den} Grad) i Retningscosinusserne (α, β) til Linien l, og hvor (idet vi har tænkt os Keglesnittet værende en Ellipse) Nævnerpolynomiet $L = A\alpha^2 + 2C\alpha\beta + B\beta^2$ er $\neq 0$ for ethvert egentligt

Talpar (α, β). Lader vi i disse Formler: $x = \frac{\Sigma x_0 - M\alpha}{\Sigma}$, $y = \frac{\Sigma y_0 - M\beta}{\Sigma}$ Linien l (d. v. s. Retningscosinusserne (α, β)) efterhaanden gennemløbe alle mulige Heldninger, vil som ovenfor nævnt Punktet $P: (x, y)$ derved gennemløbe Ellipsen, saaledes at vi faar ethvert Punkt paa Ellipsen med een og kun een Gang. Vi finder nu umiddelbart den søgte rationale Parameterfremstilling for det variable Punkt P, nemlig ved blot at dividere begge Brøkerne i Tæller og Nævner med α og derefter vælge Forholdet $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$ (Linien l's Retningskoefficient) til Parameter; vi faar

$$(26) \qquad x = \frac{Q_1(\lambda)}{B\lambda^2 + 2C\lambda + A}, \quad y = \frac{Q_2(\lambda)}{B\lambda^2 + 2C\lambda + A},$$

hvor Q_1 og Q_2 er Polynomier i λ. Gennemløber Parameteren (Retningskoefficienten) λ alle mulige Værdier, vil Punktet $P: (x, y)$ derved gennemløbe Ellipsen. (Hertil er dog at bemærke, at for den Stilling af Linien l, hvori den er lodret, d. v. s. parallel med Y-Aksen, er $\alpha = 0$, saaledes at den foretagne Division med α^2 da er uilladelig; man benytter imidlertid sædvanligvis den Sprogbrug, at der til denne Stilling af Linien l (ligesom ogsaa til det derfra svarende Skæringspunkt $P: (x, y)$) svarer Parameterværdien $\lambda = \infty$; i Virkeligheden er det naturligvis, hvis man vil have en ogsaa for det paa den lodrette Linie gennem P_0 beliggende Punkt P gyldig Fremstilling, det korrekte at blive staaende ved den homogene Fremstilling i (α, β) og ikke ved at foretage Divisionen med α^2 gaa over til den inhomogene Fremstilling i λ). — Den foregaaende Udledelse af en rational Parameterfremstilling gælder naturligvis, som man umiddelbart indser, lige saavel i det Tilfælde, hvor det givne Keglesnit er en Hyperbel (eller en Parabel) som i det behandlede

Tilfælde, hvor vi antog, at det var en Ellipse; den eneste Forskel er, at Nævnerpolynomiet $Bt^2 + 2Ct + A$ ikke som ved Ellipsen stedse er forskelligt fra Nul, men bliver Nul for de to Værdier af t, der som Retningskoefficienter svarer til Hyperblens Asymptoter (eller for den ene Værdi af t, der er Retningskoefficient for Parablens Akse).

Lad os som et Øvelseseksempel gennemføre Udregningen af en rational Parameterfremstilling for et Keglesnit givet ved Ligningen

$$y^2 = ax^2 + 2bx + c, \qquad (a \neq 0) \tag{27}$$

hvilket netop er det Eksempel vi senere vil træffe paa ved det nævnte Problem indenfor Integralregningen. Vi skelner her mellem to Tilfælde

1) $a < 0$. Har Ligningen $ax^2 + 2bx + c = 0$ her ingen reelle Rødder, er Polynomiet $ax^2 + 2bx + c$ negativt for enhver Værdi af x; Keglesnittet indeholder følgelig intet som helst Punkt; har $ax^2 + 2bx + c = 0$ een reel Rod x_0 (to sammenfaldende Rødder) er $ax^2 + 2bx + c$ negativ for alle Værdier af x undtagen for $x = x_0$; Keglesnittet indeholder følgelig kun det ene Punkt $(x_0, 0)$; vi vil derfor i det følgende antage at $ax^2 + 2bx + c = 0$ har to (forskellige) reelle Rødder x_0 og $x_1 > x_0$. Idet Ligningen da kan skrives paa Formen $y^2 - a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{ac - b^2}{a}$ (> 0), er Keglesnittet en Ellipse med Centrum i $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$, X-Aksen til Hovedakse og skærende X-Aksen i Punkterne $(x_0, 0)$, $(x_1, 0)$ (se Fig. 39). Idet vi benytter den ovenfor ud-

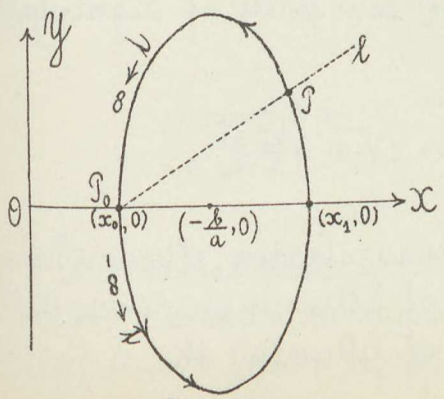


Fig. 39.

viklede Methode til Udledelse af en rational Parameterfremstilling for Ellipsens Punkter (x, y), kan vi finde uendelig mange saadanne Parameterfremstillinger, svarende til at vi til det faste Punkt P_0 kan vælge et vilkaarligt Punkt paa Ellipsen. Vi vælger for Simplheds Skyld det faste Punkt P_0 i et af Ellipsens Skæringspunkter med X-Aksen, f. Eks. i Punktet $(x_0, 0)$. Skærer vi Ellipsen med en vilkaarlig ret Linie gennem dette Punkt paa Formen $x = x_0 + \alpha r$, $y = \beta r$, finder vi til Bestemmelse af r Ligningen $r^2(\beta^2 - a\alpha^2) - 2r\alpha(ax_0 + b) = 0$; vi finder altsaa $r = P_0P = \frac{2(ax_0+b)\alpha}{\beta^2 - a\alpha^2}$ og følgelig Koordinaterne til Skæringspunktet P bestemt ved

$$x = x_0 + \frac{2(ax_0+b)\alpha^2}{\beta^2 - a\alpha^2}, \quad y = \frac{2(ax_0+b)\beta\alpha}{\beta^2 - a\alpha^2},$$

altsaa, idet vi sætter $\frac{\beta}{\alpha} = k$, ved Ligningerne $x = x_0 + \frac{2(ax_0+b)}{k^2 - a}$, $y = \frac{2(ax_0+b)k}{k^2-a}$, der, idet vi benytter at $-\frac{2b}{a} = x_0 + x_1$, kan skrives

$$(28) \qquad x = \frac{x_0k^2 - ax_1}{k^2 - a}, \qquad y = \frac{a(x_0 - x_1)k}{k^2 - a},$$

hvilket er den søgte Parameterfremstilling; varierer Parameteren (Retningskoefficienten) k „fra $-\infty$ til $+\infty$" gennemløber $P:(x,y)$ Ellipsen, som vist paa Figuren (Idet Tangenten i $P_0:(x_0, 0)$ er lodret, svarer $P_0:(x_0, 0)$ til $k = \infty$). Vil vi søge Parameteren k udtrykt ved Abscissen x finder vi umiddelbart af den første af Ligningerne (28)

$$(29) \qquad k^2 = -a \cdot \frac{x_1 - x}{x - x_0}, \qquad k = \pm\sqrt{-a}\,\sqrt{\frac{x_1 - x}{x - x_0}},$$

hvor vi skal læse + eller ÷ foran Kvadratroden, eftersom $P:(x,y)$ er beliggende paa den øverste Halvdel af Ellipsen (d. v. s. over X-Aksen) eller paa den nederste Halvdel af Ellipsen; thi i første

nævnte Tilfælde er jo Retningskoefficienten k for Linien P_0P positiv, i sidste Tilfælde negativ.

2) $a > 0$. Har Ligningen $ax^2 + 2bx + c = 0$ een reel Rod (to sammenfaldende Rødder) fremstiller $y^2 = ax^2 + 2bx + c$ to skærende rette Linier, nemlig Linierne $y = +\sqrt{a}(x - x_0)$ og $y = -\sqrt{a}(x - x_0)$. Vi antager derfor at Ligningen $ax^2 + 2bx + c = 0$ enten har to (forskellige) reelle Rødder eller ingen reelle Rødder; i begge disse Tilfælde er det ved $y^2 = ax^2 + 2bx + c$ fremstillede Keglesnit en Hyperbel med Centrum i $(-\frac{b}{a}, 0)$ og Asymptoterne parallele med Linierne $y = +\sqrt{a} \cdot x$ og $y = -\sqrt{a} \cdot x$; i det første af de to Tilfælde skærer Hyperblen X-Aksen, ligger altså som vist paa Fig. 40 a, medens den i det andet Tilfælde ikke skærer X-Aksen, altså ligger som paa Fig. 40 b.

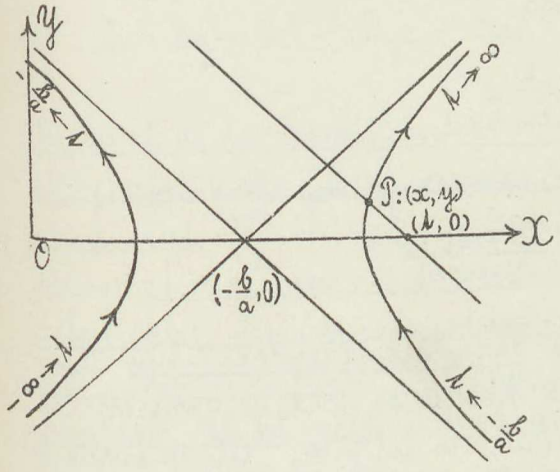


Fig. 40 a.

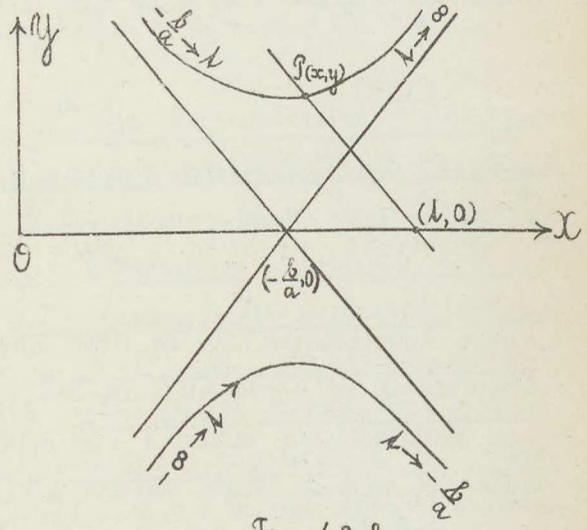


Fig. 40 b.

For her at finde en rational Parameterfremstilling af Keglesnittets Punkter, kunde vi gaa frem ganske som ovenfor, d. v. s. vælge et fast Punkt (x_0, y_0) paa Hyperblen og skære med et Linie-

bundt med Toppunkt i dette Punkt. Vi foretrakker imidlertid her at gaa lidt anderledes frem, nemlig at skære med rette Linier parallele med en af Asymptoterne (hvis vi havde benyttet homogene Koordinater, vilde dette kunne udtrykkes ved, at vi skærer med et Liniebundt gennem et af Hyperblens uendelig fjerne Punkter). Skærer vi f. Eks. med rette Linier parallele med Asymptoten med Retningskoefficient $-\sqrt{a}$, kan vi skrive den variable Linies Ligning paa Formen $y = -\sqrt{a}(x-t)$, hvor vi karakteriserer den med Asymptoten parallele rette Linie ved Abscissen t til Liniens Skæringspunkt med X-Aksen. Skærer vi Keglesnittet $y^2 = ax^2 + 2bx + c$ med denne rette Linie, finder vi, idet vi for y indsætter $-\sqrt{a}(x-t)$ en første Grads Ligning i x (idet Leddene af anden Grad hæver hinanden, svarende til at det ene Skæringspunkt er uendelig fjernt), nemlig $2x(at+b) = at^2 - c$, altsaa

$$(30^a) \qquad x = \frac{at^2 - c}{2(at+b)}.$$

og heraf ved Indsættelse i den rette Linies Ligning $y = -\sqrt{a}(x-t)$

$$(30^b) \qquad y = \sqrt{a}\,\frac{at^2 + 2bt + c}{2(at+b)}$$

Disse Ligninger (30) er den søgte Parameterfremstilling. Paa Figurerne 40 a og 40 b er angivet hvorledes $T:(x,y)$ gennemløber Hyperblen, naar t varierer fra $-\infty$ til $+\infty$. Vil vi finde t udtrykt ved x, kan man opløse Ligningen (30^a) med Hensyn til t; simplere er det dog at benytte Ligningen $y = -\sqrt{a}(x-t)$, der giver

$$t = x + \frac{y}{\sqrt{a}} = x \pm \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{ax^2 + 2bx + c},$$

hvor vi skal benytte Fortegnet + eller Fortegnet – for Kvadratroden, eftersom y er positiv eller negativ, d. v. s. eftersom P: (x, y) ligger over eller under Abscisseaksen.

B. Keglesnitsflader.

84. Indledende Definitioner og Eksempler. Lad der være fastlagt et (inhomogent) retvinklet Koordinatsystem (X Y Z) i Rummet; ved en algebraisk Flade af 2^den Orden eller (som man af Grunde, der senere vil træde klart frem ogsaa siger) ved en Keglesnitsflade forstaas da det geometriske Sted for Punkter, hvis Koordinater (x, y, z) tilfredsstiller en algebraisk Ligning af 2^den Grad

$$(1)\quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0\ ,$$

hvor af de 11 Koefficienter A, B ... K, der karakteriserer Fladen, ikke alle seks Koefficienter til Leddene af 2^den Grad er lig med Nul. Vi tilføjer til denne Definition straks den Bemærkning, at hvis en Punktmængde i Rummet henført til et retvinklet Koordinatsystem (X Y Z) fremstilles ved en algebraisk Ligning af 2^den Grad $F(x, y, z) = 0$, vil Punktmængden henført til et vilkaarligt andet retvinklet Koordinatsystem $(X_1 Y_1 Z_1)$ ligeledes kunne fremstilles ved en algebraisk Ligning af 2^den Grad $F_1(x_1, y_1, z_1) = 0$, idet $F_1(x_1, y_1, z_1)$ er det Polynomium af 2^den Grad i x_1, y_1, z_1, der fremkommer af det givne Polynomium $F(x, y, z)$ ved Anvendelse af den lineære Substitution, der udtrykker Koordinaterne (x, y, z) til et variabelt Punkt i Rummet henført til Koordinatsystemet (X Y Z) ved Koordinaterne (x_1, y_1, z_1) til samme Punkt henført til Systemet $(X_1 Y_1 Z_1)$; vi siger om to

saadanne Ligninger $F(x,y,z) = 0$ og $F_1(x_1, y_1, z_1) = 0$, at de svarer til hinanden indenfor de to Koordinatsystemer (XYZ) og $(X_1 Y_1 Z_1)$. Ligesom ved Keglesnittene (indenfor den plane Geometri) kun det ogsaa ved Keglesnitsfladerne (indenfor Rummets Geometri) indtræffe, at to forskellige Ligninger af 2den Grad $F(x,y,z) = 0$ og $\Phi(x,y,z) = 0$ fremstiller samme Punktmængde, uden at deres Koefficientsæt er proportionale; saaledes fremstiller Ligningerne $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ og $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 0$ samme Punktmængde (nemlig kun det ene Punkt $(0,0,0)$), uden at den ene Ligning fremgaar af den anden ved Multiplication med en Konstant, ligesom f. Eks. Ligningerne $x^2 + y^2 = 0$ og $x^2 + 2y^2 = 0$ fremstiller samme Punktmængde (nemlig Z-Aksens Punkter), og Ligningerne $x^2 + y^2 = -1$, $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = -1$ fremstiller samme Punktmængde (nemlig slet intet Punkt), uden at Koefficientsættene er proportionale; noget saadant kan dog kun (se Opg. 87) indtræffe i saadanne specielle udartede Tilfælde, hvor de to Ligninger $F(x,y,z) = 0$ og $\Phi(x,y,z) = 0$ som ved de nævnte Eksempler enten begge fremstiller Punkterne paa een ret Linie, kun eet Punkt eller slet intet Punkt.

Inden vi gaar over til den fuldstændige Undersøgelse af, hvilke forskellige Fladetyper (svarende til de forskellige Valg af Koefficienterne i Fladens Ligning) de algebraiske Flader af 2den Orden omfatter, vil vi først fremdrage nogle faa specielle og særlig simple Eksempler paa Keglesnitsflader. Lad os da først betragte Ligningen

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz = d, \tag{2}$$

hvor $d > a^2 + b^2 + c^2$; idet denne Ligning kan skrives paa Formen $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = d - (a^2 + b^2 + c^2)$, fremstiller

den det geometriske Sted for Punkter (x, y, z), hvis Afstand fra det faste Punkt (a, b, c) er lig med $\sqrt{d-(a^2+b^2+c^2)}$; Fladen er altsaa en Kugleflade med Centrum i (a, b, c) og Radius $\sqrt{d-(a^2+b^2+c^2)}$. Speciellt fremstiller Ligningen $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(R>0)$ en Kugleflade med Centrum i Begyndelsespunktet og Radius R; en simpel Parameterfremstilling for denne Kugleflade har vi (i Tilknytning til polære Koordinater i Rummet) i $x=R\cos\theta$, $y=R\sin\theta\cos\varphi$, $z=R\sin\theta\sin\varphi$, hvor Parametrene θ og φ er to af hinanden uafhængige Variable; lader vi i disse Ligninger θ og φ (uafhængige af hinanden) gennemløbe henholdsvis Intervallerne $0\leqq\theta\leqq\pi$, $0\leqq\varphi<2\pi$ vil Punktet (x, y, z) derved gennemløbe Kuglefladen, saaledes at vi faar ethvert Punkt paa Kuglefladen med og hvert saadant Punkt (bortset fra de to paa X-Aksen beliggende Punkter $(R,0,0)$ og $(-R,0,0)$, der kommer uendelig mange Gange med, nemlig henholdsvis for $\theta=0$, φ vilkaarlig og for $\theta=\pi$, φ vilkaarlig) kun een Gang.

Lad os som et andet Eksempel betragte en Ligning af 2den Grad, hvori den ene af Koordinaterne x, y, z mangler, f. Eks. Ligningen

$$(3)\qquad Ax^2+By^2+2Fxy+2Gx+2Hy+K=0\,,$$

hvor z mangler (d. v. s. hvor Koefficienterne til de Led, der indeholder z, alle er lig med Nul). Er (x_0, y_0, z_0) en Løsning til (3), har denne Ligning, da z jo slet ikke forekommer i den, ligeledes Løsningen (x_0, y_0, z) for enhver Værdi af z, d. v. s. hvis Fladen indeholder et Punkt $P:(x_0, y_0, z_0)$ indeholder den tillige af sig selv hele den rette Linie, der gaar gennem P og er parallel med Z-Aksen. Hvis Fladen over-

hovedet indeholder Punkter, bestaar den følgelig af rette Linier parallele med Z-Aksen, d. v. s. er en Cylinderflade, hvis Frembringere er parallele med Z-Aksen. For at bestemme denne Cylinderflade nærmere, behöver vi blot at undersöge et Normalsnit, f. Eks. Fladens Skæringskurve med XY-Planen; denne Kurve bestemmes ved Fladens Ligning (3) i Forbindelse med XY-Planens Ligning $z = 0$; henført til det plane retvinklede Koordinatsystem (xy) bestemmes Skæringskurven altsaa simpelthen ved Ligningen (3); Normalsnittet er følgelig et Keglesnit (egentligt eller udartet). Er Normalsnittet et egentligt Keglesnit, kaldes Cylinderen en elliptisk, en hyperbolsk eller en parabolsk Cylinder, eftersom Normalsnittet er en Ellipse, en Hyperbel eller en Parabel, altsaa eftersom $AB - F^2$ er positiv, negativ eller Nul.

Lad os som et tredje Eksempel betragte det Tilfælde, hvor Keglesnitsfladens Ligning er homogen af 2den Grad, altsaa har Formen

$$(4) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 0.$$

Denne Ligning har for det første Løsningen $(0,0,0)$, saaledes at Fladen i hvert Fald indeholder Begyndelsespunktet; endvidere ses, at hvis (x_0, y_0, z_0) er en egentlig Løsning til (4), vil ethvert dermed proportionalt Talsæt (kx_0, ky_0, kz_0) ligeledes være en Løsning, d. v. s. hvis Fladen indeholder det fra Begyndelsespunktet O forskellige Punkt $P: (x_0, y_0, z_0)$, vil Fladen af sig selv indeholde hele den rette Linie, der gaar gennem O og P. Fladen bestaar altsaa, hvis den overhovedet indeholder andre Punkter end O, af rette Linier gennem O; vi kalder Fladen (ogsaa i det Tilfælde, hvor den kun bestaar af det ene Punkt O) for en Kegleflade

af 2den Orden med Toppunktet i O. Svarende til Sætningen: enhver homogen Ligning af 2den Grad i x, y, z fremstiller en Flade, der enten kun indeholder Begyndelsespunktet O, eller som bestaar af rette Linier gennem O, gælder der (som det umiddelbart vil fremgaa af den senere almindelige Diskussion af den ved en vilkaarlig Ligning (1) fremstillede Keglesnitsflade) ogsaa den omvendte Sætning, nemlig: enhver Keglesnitsflade, som enten kun indeholder det ene Punkt O eller som bestaar af rette Linier gennem Punktet O, fremstilles, naar den henføres til et Koordinatsystem med Begyndelsespunkt i O, ved en homogen Ligning af 2den Grad. Vi sammenfatter de to Sætninger saaledes: Den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for at en Keglesnitsflade er en Keglefflade med Toppunktet i O (d. v. s. enten kun indeholder O eller bestaar af rette Linier gennem O) er den, at Fladens Ligning er homogen af 2den Grad. — Lad os gennemføre en fuldstændig Undersøgelse af, hvilke forskellige Keglefladetyper Keglefladen af 2den Orden omfatter. Lad os hertil først bemærke, at vi altid ved et passende Valg af det retvinklede Koordinatsystem (X Y Z) med Begyndelsespunkt i Keglefladens Toppunkt O kan opnaa, at Keglefladens Ligning har Formen

$$A_1 x^2 + B_1 y^2 + C_1 z^2 = 0 ; \qquad (4^a)$$

thi ved en passende Koordinattransformation med Bibeholdelse af Begyndelsespunktet (en orthogonal Substitution) kan vi jo altid (se 38) bortskaffe de tre Produktled i den kvadratiske Form paa venstre Side af Ligning (4). Lad os først skille os af med de Tilfælde, hvor en eller to af Koefficienterne A_1, B_1, C_1 i Ligningen (4a) er Nul. [1] Er to af Koefficienterne f. Eks. B_1 og C_1 lig Nul, den

bredje A_1 følgelig $\neq 0$, faar vi Ligningen $A_1 x^2 = 0$, der fremstiller <u>een Plan</u>, (nemlig YZ-Planen), eller som vi hellere vil sige: <u>to i YZ-Planen sammenfaldende Planer</u> (en „Dobbelplan" gennem O). [2] <u>Er een af Koefficienterne, f. Eks. C_1 lig Nul</u>, de to andre A_1 og $B_1 \neq 0$, faar vi Ligningen $A_1 x^2 + B_1 y^2 = 0$; den herved fremstillede Regleflade bestaar, hvis A_1 og B_1 har samme Fortegn, kun af <u>een ret Linie</u>, nemlig Z-Aksen (idet jo Ligningen ikke har andre Løsninger end $(0, 0, z)$), medens den, hvis A_1 og B_1 har modsatte Fortegn, bestaar <u>af to hinanden i Z-Aksen skærende Planer</u>, nemlig Planerne $y = \pm\sqrt{-\frac{A_1}{B_1}} \cdot x$. [3] Lad os endelig antage, <u>at alle tre Koefficienter A_1, B_1, C_1 er $\neq 0$</u>. Har her A_1, B_1, C_1 alle tre samme Fortegn, vil Reglefladen aabenbart kun indeholde <u>det ene Punkt</u> O: (0,0,0). Vi vender os dernæst (sluttelig) til det Tilfælde, hvor de tre Koefficienter ikke alle har samme Fortegn, hvor altsaa to af dem f. Eks. A_1 og B_1, har eet Fortegn, den tredje C_1 det modsatte Fortegn; her kan vi (efter om fornødent at have multipliceret Ligningen med -1) skrive Ligningen paa <u>Formen</u>

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

<u>hvor a, b og c er positive Tal</u>. Skærer vi denne sidste Regleflade for at faa et Overblik over Fladens Form med en Plan $z = k$ parallel med XY-Planen, finder vi Skæringskurven bestemt ved de <u>to</u> Ligninger $z = k$ og $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (d. v. s. Skæringspunkternes Koordinatsæt bestemmes som Mængden af Løsninger (x, y, z) til de nævnte to Ligninger); indsætter vi $z = k$ i Fladens Ligning $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, finder vi

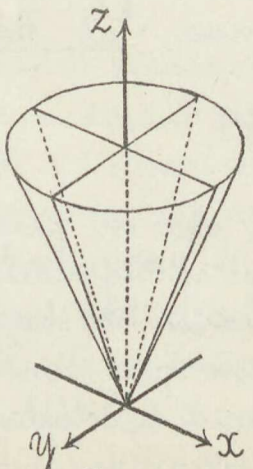


Fig. 41.

den Betingelse, de to første Koordinater x, y til Skæringskurvens Punkter er underkastet, udtrykt ved Ligningen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2}$, hvilken Ligning følgelig bestemmer os Projektionen af Skæringskurven ned paa XY-Planen henført til det plane Koordinatsystem (XY); denne Projektion er imidlertid, da Skæringsplanen $z = k$ er parallel med XY-Planen, kongruent med Skæringskurven selv. Skæringskurven er følgelig for $k \neq 0$ en Ellipse (der, naar k varierer, varierer saaledes at den forbliver ligedannet med den faste Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$), medens vi for $k = 0$ (d. v. s. naar vi skærer med XY-Planen selv) kun faar det ene Skæringspunkt O. Keglefladen skæres af XZ- eller YZ-Planen i to rette Linier, medens Skæringskurven med en Plan parallel med XZ- eller YZ-Planen umiddelbart findes at være en Hyperbel. Er $a = b$, bliver Keglefladen en Omdrejningskegle omkring Z-Aksen. – En Keglefladen af 2^{den} Orden, der er af den sidst behandlede Type (d. v. s. som kan fremstilles ved en Ligning af Formen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$) kaldes en <u>egentlig</u> Keglefladen af 2^{den} Orden, medens man i de øvrige Tilfælde (hvor Keglefladen altsaa enten bestaar af eet Punkt, een ret Linie, een Plan eller to hinanden skærende Planer) taler om en <u>udartet</u> Keglefladen af 2^{den} Orden.

85. <u>Den almindelige algebraiske Flade af 2^{den} Orden.</u> Lad der være givet en vilkaarlig Keglesnitsflade ved Ligningen (1). Vi vil begynde vor Undersøgelse af denne Flade med at vise, at det i alle Tilfælde (d. v. s. hvilke Værdier Koefficienterne $A, \ldots K$ end har) er muligt ved en Koordinattransformation, ved hvilken Begyndelsespunktet fastholdes, at bortskaffe Produktleddene af Fladens Ligning, d. v. s. at skaffe Leddene med yz, zx og xy Koefficienten Nul. Vi behøver hertil blot (som ovenfor ved Behandlingen af den homogene Ligning) at bemærke, for det

første (se 66) at Mængden af Koordinattransformationer, der fører over fra det givne Koordinatsystem (x y z) til de forskellige retvinklede Koordinatsystemer (x_1 y_1 z_1) med samme Begyndelsespunkt, stemmer overens med Mængden af <u>orthogonale</u> Substitutioner i tre Variable og for det andet (se 38), at det altid er muligt ved Anvendelse af en orthogonal Substitution at bortskaffe Produktleddene i en kvadratisk Form $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy$ (I 39 har vi tillige vist, hvorledes man bestemmer den (eller de) orthogonale Substitutioner, der udfører Reduktionen). Lad os betegne Keglesnitfladens Ligning efter Reduktionen, henført til det nye System (x_1 y_1 z_1), med

$$(5) \qquad A_1 x_1^2 + B_1 y_1^2 + C_1 z_1^2 + 2G_1 x_1 + 2H_1 y_1 + 2J_1 z_1 + K_1 = 0;$$

her vil (se 38) Kvadratkoefficienterne A_1 B_1 C_1 bestemmes som Rødder i Ligningen

$$\begin{vmatrix} A-s & F & E \\ F & B-s & D \\ E & D & C-s \end{vmatrix} = 0.$$

Vi skelner nu mellem forskellige Tilfælde

1) <u>A_1, B_1, C_1 alle tre forskellige fra Nul</u> (d. v. s. $\begin{vmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{vmatrix} \neq 0$);

her vil vi ved en Parallelforskydning af Koordinatsystemet bestemt ved Forskydningssubstitutionen $x_1 = x_2 - \frac{G_1}{A_1}$, $y_1 = y_2 - \frac{H_1}{B_1}$, $z_1 = z_2 - \frac{J_1}{C_1}$ kunne bortskaffe Leddene af første Grad; vi kommer derved slutteligt til en Ligning

$$(6) \qquad A_1 x_2^2 + B_1 y_2^2 + C_1 z_2^2 + K_2 = 0.$$

2) En af Kvadratkoefficienterne A_1, B_1, C_1 lig med Nul, de to andre $\neq 0$ (d. v. s. Determinanten $\begin{vmatrix} A & J & \mathfrak{C} \\ J & B & \mathfrak{A} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{A} & C \end{vmatrix}$ er Nul og har Rangen 2); vi kan uden at indskranke Almindeligheden antage $A_1 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $C_1 = 0$, idet vi (om fornødent) kan foretage en Ombytning af Akserne x_1, y_1, z_1. Udfører vi her en Parallelforskydning bestemt ved $x_1 = x_2 - \frac{G_1}{A_1}$, $y_1 = y_2 - \frac{H_1}{B_1}$, $z_1 = z_2 + c$ (hvor c foreløbig er vilkaarlig), falder første Grads Leddene i x og y bort, og vi faar (idet $C_1 = 0$) Ligningen

$$A_1 x_2^2 + B_1 y_2^2 + 2J_1 z_2 + (2J_1 c + K_2) = 0,$$

hvor K_2 er en Konstant (uafhængig af c); er her $J_1 \neq 0$, vælger vi $c = -\frac{K_2}{2J_1}$ og faar da Ligningen

$$A_1 x_2^2 + B_1 y_2^2 + 2J_1 z_2 = 0; \tag{7}$$

er derimod $J_1 = 0$, faar vi (uafhængigt af Værdien for c) Ligningen $A_1 x_2^2 + B_1 y_2^2 + K_2 = 0$, der er indeholdt i den ovenstaaende Ligning (6), nemlig svarende til at vi i denne sætter $C_1 = 0$.

3) Endelig har vi det Tilfælde, hvor to af Koefficienterne i (5) f. Eks. B_1 og C_1 er Nul, den tredje A_1 følgelig $\neq 0$ (her er Determinanten $\begin{vmatrix} A & J & \mathfrak{C} \\ J & B & \mathfrak{A} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{A} & C \end{vmatrix}$ lig med Nul og har Rangen 1). Ligning (5) har altsaa Formen

$$A_1 x_1^2 + 2G_1 x_1 + 2H_1 y_1 + 2J_1 z_1 + K_1 = 0.$$

Er $H_1 = J_1 = 0$, kan vi umiddelbart ved Parallelforskydningen $x_1 = x_2 - \frac{G_1}{A_1}$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$ bringe Ligningen paa Formen $A_1 x_2^2 + K_2 = 0$, der er indbefattet i (6), nemlig for $B_1 = C_1 = 0$. Er derimod ikke begge Tallene H_1 og J_1 lig med Nul, kan vi først ved

(om fornødent) at udføre en Drejning af Koordinatsystemet (X_1 Y_1 Z_1) omkring X_1-Aksen, hvortil jo svarer Transformationsformlerne $x_1 = x_1'$, $y_1 = \alpha y_1' + \beta z_1'$, $z_1 = \gamma y_1' + \delta z_1'$, hvor $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ er Koefficientskemaet i en egentlig orthogonal Substitution i to Variable, bringe Ligningen paa Formen $A_1 x_1'^2 + 2G_1 x_1' + 2J_2 z_1' + K_1 = 0$, idet vi vælger Drejningssubstitutionen saaledes, at den fører første Grads Polynomiet $K_1 y_1 + J_1 z_1$ over til et Polynomium $J_2 z_1'$, d. v. s. idet vi drejer Koordinatsystemet omkring X_1-Aksen, saaledes at den rette Linie i $Y_1 Z_1$-Planen $K_1 y_1 + J_1 z_1 = 0$ bliver den nye Y_1'-Akse (d. v. s. faar Ligningen $J_2 z_1' = 0$). (Anderledes udtrykt: vi kan i det foreliggende Tilfælde ($A_1 \neq 0$, $B_1 = C_1 = 0$) vælge den oprindelige orthogonale Substitution i tre Variable, der reducerer den givne kvadratiske Form (1), saaledes, at denne Substitution yderligere opfylder Betingelsen $K_1 = 0$; at vi her kan paalægge den orthogonale Substitution, foruden den Betingelse at skulle bortskaffe Produktleddene, endnu en Betingelse (nemlig $K_1 = 0$), hænger sammen med, at idet Ligningen $\begin{vmatrix} A-s & F & E \\ F & B-s & D \\ E & D & C-s \end{vmatrix} = 0$ her har en dobbelt Rod ($s = B_1 = C_1 = 0$), vil der (s. 39) findes uendelig mange orthogonale Substitutioner, der reducerer den givne kvadratiske Form). Parallelforskyder vi efter at være kommen til Ligningen $A_1 x_1'^2 + 2G_1 x_1' + 2J_2 z_1' + K_1 = 0$ ($A_1 \neq 0$, $J_2 \neq 0$) Koordinatsystemet, saaledes at det nye Begyndelsespunkt falder i $\left(-\frac{G_1}{A_1}, 0, \frac{-K_1 + \frac{G_1^2}{A_1}}{2J_2}\right)$ faar vi sluttelig Ligningen

$$A_1 x_2^2 + 2J_2 z_2 = 0;$$

denne Ligning er indeholdt i (7), nemlig svarende til at $B_1 = 0$.

Idet vi sammenfatter de fundne Resultater, kommer vi til Hovedsætningen: Enhver algebraisk Flade af 2den Orden

kan ved et passende Valg af Koordinatsystemet fremstilles ved en Ligning af en af de to Typer $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + K = 0$ (hvor ikke $A = B = C = 0$) og $Ax^2 + By^2 + 2Jz = 0$ (hvor ikke $A = B = 0$ og hvor $J \neq 0$). Vi tilføjer, at Ligningen for en given Keglesnitsflade kun kan bringes paa een af disse to Former, altsaa ikke ved et Valg af Koordinatsystemet $(x\,y\,z)$ paa Formen $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + K = 0$ og ved et andet Valg af Koordinatsystemet paa Formen $Ax^2 + By^2 + 2Jz = 0$ $(J \neq 0)$. Rigtigheden heraf er aabenbart bevist, naar vi har eftervist, at det ikke ved nogen Koordinattransformation er muligt udfra en Ligning $Ax^2 + By^2 + 2Jz = 0$ med $J \neq 0$ at komme over til en Ligning, hvori alle tre første Grads Led mangler; og at dette sidste holder Stik indses umiddelbart saaledes: idet en Koordinattransformation med Bibeholdelse af Begyndelsespunktet (der jo sker ved en lineær homogen Substitution) transformerer første Grads Leddene for sig, kan en saadan Transformation ikke føre over til en Ligning, hvori første Grads Leddene mangler, med mindre første Grads Leddene allerede manglede for denne Transformation; følgelig maatte det (da enhver Transformation jo kan sammensættes af en Parallelforskydning og en paafølgende Transformation med Bibeholdelse af Begyndelsespunktet), hvis det overhovedet var muligt at bortskaffe første Grads Leddene af Ligningen $Ax^2 + By^2 + 2Jz = 0$ ved en Koordinattransformation, være muligt at opnaa dette alene ved en Parallelforskydning; men dette er øjensynlig ikke Tilfældet.

Keglesnitsfladerne $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + K = 0$ siges at have et Centrum i Begyndelsespunktet O, fordi en saadan Flade, hvis den gaar gennem Punktet (x_0, y_0, z_0), tillige gaar gennem Punktet $(-x_0, -y_0, -z_0)$, og altsaa er symmetrisk med Hen-

syn til O. Fladerne $Ax^2 + By^2 + 2Jz = 0$ $(J \neq 0)$ kaldes (i Modsætning til de forrige) Keglesnitsflader uden Centrum, idet (som det umiddelbart vil fremgaa af den senere Diskussion) ingen af disse Flader er symmetrisk med Hensyn til noget Punkt i Rummet. — En Keglesnitsflade $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + K = 0$ er symmetrisk med Hensyn til alle tre Koordinatplaner; at den er symmetrisk f. Eks. med Hensyn til XY-Planen følger deraf, at den hvis den indeholder Punktet (x_0, y_0, z_0) tillige indeholder Punktet $(x_0, y_0, -z_0)$. En Keglesnitsflade $Ax^2 + By^2 + 2Jz = 0$ er symmetrisk med Hensyn til XZ- og YZ-Planen.

Idet vi nu gaar over til den nærmere Undersøgelse af de forskellige Keglesnitsflader, vil vi først betragte dem med Centrum, dernæst dem uden Centrum.

36. Keglesnitsflader med Centrum. Vi vil undersøge, hvilke forskellige Fladetyper der kan fremstilles ved en Ligning af Formen

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + K = 0,$$

hvor (A, B, C) er et egentligt Talsæt. Lad os først skille os af med de specielle Tilfælde, hvor et eller flere af Tallene A, B, C, K er lig med Nul.

1) $K = 0$; vi har her en homogen Ligning af 2^{den} Grad $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$; den ved Ligningen fremstillede Flade er altsaa en (egentlig eller udartet) Kegleflade af 2^{den} Orden med Toppunkt i O.

2) $K \neq 0$; en af Kvadratkoefficienterne, f. Eks. $C = 0$. Vi faar her Ligningen $Ax^2 + By^2 + K = 0$, der, idet Ligningen ikke indeholder z, fremstiller en Cylinderflade, hvis Frembringere er vinkelrette paa XY-Planen; er α) A og B begge $\neq 0$, er Fla-

den, hvis A og B har samme Fortegn og dette Fortegn er det modsatte af Fortegnet for K, en elliptisk Cylinderflade, medens Fladen, hvis A og B har samme Fortegn og dette er det samme som Fortegnet for K, intet som helst Punkt indeholder; har A og B modsatte Fortegn, er Normalsnittet en Hyperbel og Fladen en hyperbolsk Cylinderflade; β) er tillige $B = 0$ (og følgelig $A \neq 0$) faar vi Ligningen $Ax^2 + K = 0$, der, eftersom A og K har modsat eller samme Fortegn, fremstiller to indbyrdes forskellige parallele Planer (nemlig $x = +\sqrt{-\frac{K}{A}}$, $x = -\sqrt{-\frac{K}{A}}$) eller intet som helst Punkt indeholder.

Vi er hermed færdige med Diskussionen af de Tilfælde, hvor en eller flere af Koefficienterne i Ligningen $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + K = 0$ er lig med Nul, og gaar nu over til at betragte Hovedtilfældet, hvor alle fire Koefficienter er $\neq 0$. Vi kan antage K negativ, idet vi i modsat Fald blot behøver at multiplicere Ligningen med -1. Idet vi ser bort fra det Tilfælde, hvor A, B, C alle tre er negative, og hvor Fladen øjensynlig ikke indeholder noget som helst Punkt, finder vi, idet vi inddeler efter Fortegnene for Koefficienterne A, B, C følgende tre forskellige Tilfælde: 1) A, B, C alle positive, 2) to af Koefficienterne, f. Eks. A og B, positive, den tredje C negativ, 3) een Koefficient, f. Eks. A, positiv, de to andre negative. I det førstnævnte Tilfælde kan vi, idet vi sætter $+\sqrt{-\frac{K}{A}} = a$, $+\sqrt{-\frac{K}{B}} = b$, $+\sqrt{-\frac{K}{C}} = c$, skrive Ligningen paa Formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{8}$$

I det andet Tilfælde kan vi skrive Ligningen paa Formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1; \tag{9}$$

og endelig kan vi i det tredje Tilfælde skrive Ligningen paa Formen

$$(10) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Størrelserne a, b og c kaldes i alle tre Tilfælde Fladens Halvakser, og disse ligger paa Fladens Hovedakser; de eventuelle Punkter, hvori Hovedakserne skærer Fladen, kaldes dennes Toppunkter. Vi skal nu undersøge Udseendet af enhver af de tre Fladetyper (8), (9) og (10), som (af Grunde, der klart vil fremgaa af det følgende) benævnes henholdsvis Ellipsoide, Hyperboloide med eet Næb og Hyperboloide med to Næb.

I: Ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (se Fig. 42). Idet der for ethvert Punkt (x, y, z) paa Ellipsoiden gælder Ulighederne $|x| \leqq a$, $|y| \leqq b$, $|z| \leqq c$, er Ellipsoiden „beliggende helt i det Endelige" (idet man om en Punktmængde i Rummet siger, at den er beliggende helt i det Endelige, hvis der eksisterer et saadant Tal R (i det foreliggende Tilfælde f. Eks. $R = a+b+c$), at samtlige Mængdens Punkter ligger indenfor Kuglefladen $x^2 + y + z^2 = R^2$). For at faa et Overblik over Fladens Form skærer vi med Planer parallele med en vilkaarlig af Koordinatplanerne f. Eks. med XY-Planen; idet en saadan Plan har Ligningen $z = k$, finder vi Ligningen for Snittets Projektion paa XY-Planen (der

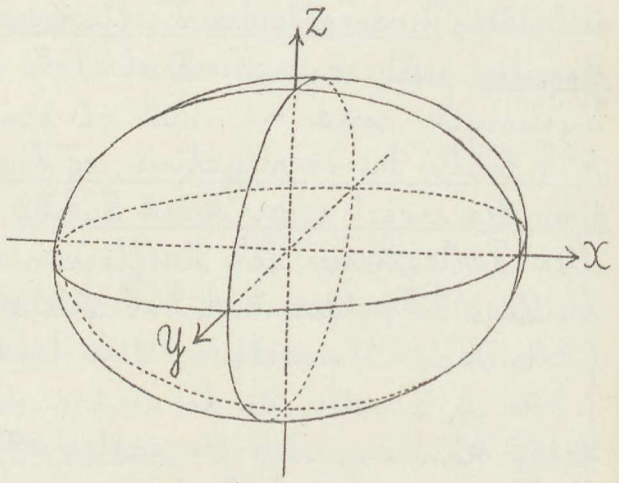


Fig. 42.

er kongruent med Snittet selv) udbrykt ved $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$. Snittet er altsaa for $-c < k < c$ en Ellipse med Halvakserne $a\sqrt{1-\frac{k^2}{c^2}}$ og $b\sqrt{1-\frac{k^2}{c^2}}$, for $k = \pm c$ er Ellipsen svundet ind til et enkelt Punkt, og for $|k| > c$ er der ingen Skæringspunkter. Idet (for $|k| < c$) Forholdet mellem Ellipsens Halvakser er uafhængigt af k, bliver de nævnte Ellipser alle ligedannede. – Er to af Halvakserne lige store, bliver Fladen en Omdrejningsflade; er f. Eks. $a = b$, faar vi en Omdrejningsflade med Z-Aksen til Akse; thi idet Planerne $z = k$ ($-c < k < c$) skærer i Cirkler, kan Fladen frembringes ved at dreje den i XZ-Planen beliggende Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ omkring Z-Aksen.

Vi tilføjer, at idet Ellipsoidens Ligning $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ fremgaar af Kuglefladeligningen $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{a^2} = 1$ ved den affine Substitution $x_1 = x$, $y_1 = \frac{a}{b}y$, $z_1 = \frac{a}{c}z$, og idet vi for den nævnte Kugleflade jo har Parameterfremstillingen $x_1 = a\cos\theta$, $y_1 = a\sin\theta\cos\varphi$, $z_1 = a\sin\theta\sin\varphi$, finder vi for Ellipsoiden <u>Parameterfremstillingen</u>

$$x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta\cos\varphi,\ z = c\sin\theta\sin\varphi,$$

hvor θ og φ er uafhængige Variable; lader vi Parametrene uafhængige af hinanden variere henholdsvis indenfor Intervallerne $0 \leqq \theta \leqq \pi$ og $0 \leqq \varphi < 2\pi$, vil Punktet (x, y, z) derved gennemløbe Ellipsoiden, saaledes at vi faar ethvert Punkt paa Ellipsoiden med een og kun een Gang, undtagen Punkterne $(a, 0, 0)$ og $(-a, 0, 0)$, der kommer uendelig mange Gange med, nemlig henholdsvis for $\theta = 0$, φ vilkaarlig og for $\theta = \pi$, φ vilkaarlig.

<u>II: Hyperboloiden med eet Net $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. (se Fig. 43). Snittet i XY-Planen er en Ellipse (Struebellipsen)</u>, i de to andre Ko-

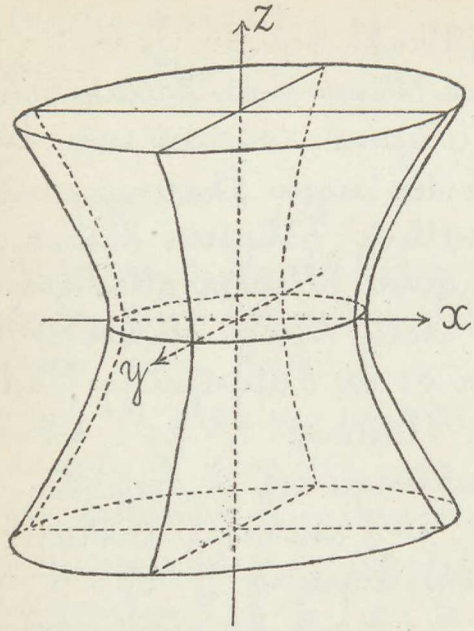


Fig. 43.

ordinalplaner Hyperbler, nemlig henholdsvis Hyperblerne $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ og $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, der begge har Z-Aksen til 2den Akse. Fladen „gaar i det Uendelige" (d. v. s. er ikke beliggende helt i det Endelige). Planer $z = k$ parallele med XY-Planen skærer i indbyrdes ligedannede Ellipser, hvis Projektion paa XY-Planen (der er kongruent med Snittet selv) har Ligningen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$; Struebellipsen (svarende til $k = 0$) er den mindste af disse Ellipser. Er $a = b$ bliver Fladen en Omdrejningsflade, der fremkommer ved at dreje en Hyperbel omkring sin 2den Akse.

III: Hyperboloiden med to Nat $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Fig. 44). Snittene i XY-Planen og i XZ-Planen er Hyperbler, nemlig henholdsvis $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ og $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, der begge har X-Aksen til første Akse. Skærer vi Fladen med Planer $x = k$ parallele med YZ-Planen, finder vi Projektionen paa YZ-Planen bestemt ved Ligningen $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1$; der er altsaa ingen Skæringspunkter for $|k| < a$ (specielt har Fladen alt-

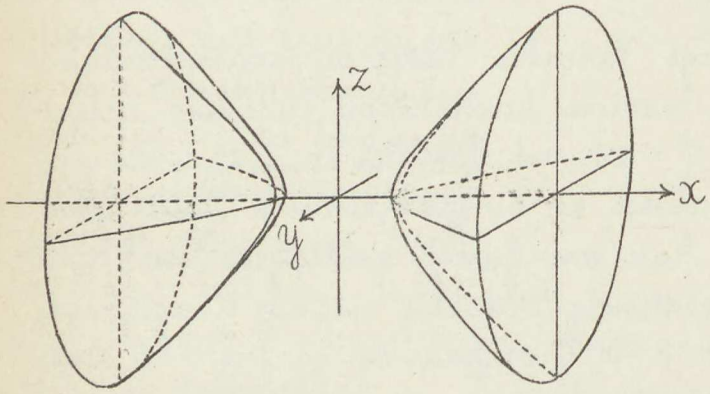


Fig. 44.

saa intet Punkt beliggende i YZ-Planen), medens Skæringskurverne for $|k| > a$ er indbyrdes ligedannede Ellipser, der for $k = \pm a$ trækker sig sammen til et enkelt Punkt. For $b = c$ er Fladen en Omdrejningsflade, der frembringes ved at dreje en Hyperbel omkring sin Brændpunktsakse.

87. Keglesnitsflader uden Centrum. Vi gaar nu over til at undersøge de Flader, der fremstilles ved en Ligning af Formen

$$Ax^2 + By^2 + 2Jz = 0,$$

hvor $J \neq 0$ (og hvor naturligvis ikke begge Tallene A og B er Nul). Vi skiller os først af med det Tilfælde, hvor en af Koefficienterne A og B, f. Eks. A, er lig med Nul; her faar vi Ligningen $By^2 + 2Jz = 0$, der fremstiller en parabolsk Cylinderflade (hvis Frembringere er parallele med X-Aksen, og hvis Normalsnit i YZ-Planen er Parablen $By^2 + 2Jz = 0$). Idet vi dernæst vender os til Hovedtilfældet, hvor alle tre Tal A, B, J er $\neq 0$, bemærker vi for det første, at vi aabenbart uden at indskrænke Almindeligheden kan antage f. Eks. at A er positiv og at J er negativ; thi skulde A være negativ, behøver vi blot at multiplicere Ligningen med -1, og skulde derefter J være positiv, behøver vi blot at skifte positiv Retning paa Z-Aksen, d. v. s. at udføre Transformationen $x = x_1$, $y = y_1$, $z = -z_1$, (ønsker vi at faa et Koordinatsystem ens orienteret med det oprindelige (XYZ), maa vi samtidig med at vi skifter positiv Retning paa Z-Aksen tillige skifte positiv Retning paa en af de andre Akser). Der bliver derfor her kun to Fladetyper at betragte, svarende henholdsvis til det Tilfælde, hvor B er positiv, og til det Tilfælde, hvor B er negativ. Vi kan i disse to Tilfælde skrive Ligningen $Ax^2 + By^2 + 2Jz = 0$ henholdsvis paa Formen

(11) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$$

og paa Formen

(12) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c},$$

hvor a, b og c er positive Tal. Den første af disse Fladetyper kaldes den elliptiske Paraboloide, den anden den hyperbolske Paraboloide. Begyndelsespunktet siges at være Toppunkt for begge Flader.

I. Den elliptiske Paraboloide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$ (Fig. 45). Snittene i XZ- og YZ-Planen er begge Parabler med Toppunkt i Begyndelsespunktet og beliggende over XY-Planen. Snittene i Planer $z = k$ indeholder for $k < 0$ ingen Punkter (Fladen indeholder altsaa intet Punkt under XY-Planen), medens de for $k > 0$ er indbyrdes ligedannede Ellipser, der for $k = 0$ trækker sig sammen til et enkelt Punkt. For $a = b$ er Fladen en Omdrejningsflade, der fremkommer ved at dreje en Parabel omkring sin Akse.

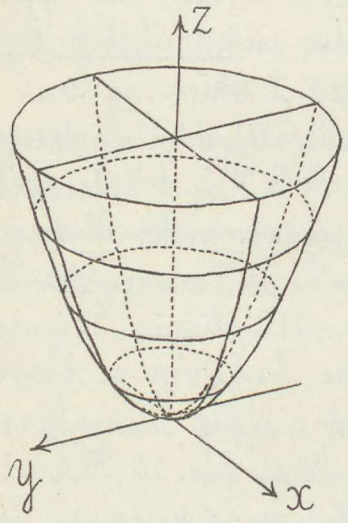


Fig. 45.

II. Den hyperbolske Paraboloide $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$ (Fig. 46). Snittene i XZ- og YZ-Planen er Parabler, der imidlertid her ligger hver paa sin Side af XY-Planen. Snittene i Planer $z = k$ parallele med XY-Planen har deres Projektion paa XY-Planen bestemt ved Ligningen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2k}{c}$; disse Snit

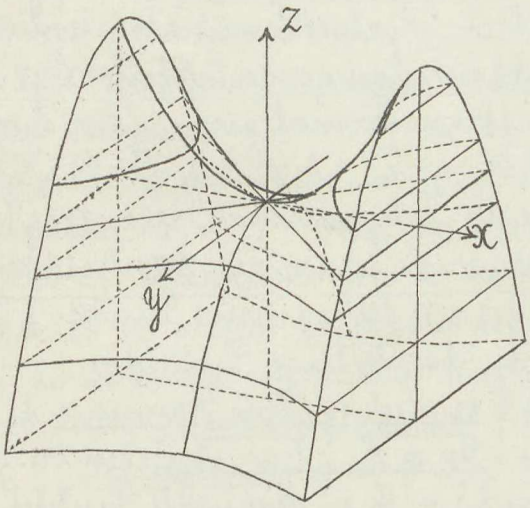


Fig. 46.

er altsaa for $k > 0$ Hyperbler med Brændpunktsakse i xz-Planen, for $k < 0$ Hyperbler med Brændpunktsakse i yz-Planen; Overgangen fra det ene af disse Sæt Hyperbler til det andet sker ved Snittet i xy-Planen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, der bestaar af to rette Linier. De nævnte to Sæt Hyperbler har øjensynlig deres Asymptoter beliggende i de to Planer $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ og $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, der kaldes Paraboloidens Heldningsplaner.

En Keglesnitsflade kaldes egentlig, hvis den er enten en Ellipsoide, en Hyperboloide (med eet eller to Nat) eller en Paraboloide (elliptisk eller hyperbolsk); i de øvrige Tilfælde taler man om en udartet Keglesnitsflade.

88. Geometrisk Betydning af et homogent Polynomium af 2den Grad. Lad der være givet et homogent Polynomium af 2den Grad

$$P(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy$$

i de tre Variable x, y, z. Vi vil undersøge Betydningen af dette Polynomium $P(x, y, z)$, naar vi opfatter de Variable (x, y, z) som Koordinater til et variabelt Punkt i Rummet; specielt vil vi undersøge Polynomiets Konstansflader, idet vi ved

en Konstansflade for $P(x,y,z)$ forstaar det geometriske Sted for Punkter, i hvilke $P(x,y,z)$ antager en og samme opgivne Talværdi k. Vi indfører herlig et Hjælpekoordinatsystem $(x_1 y_1 z_1)$ med samme Begyndelsespunkt som det givne System (xyz) og saaledes at $P(x,y,z)$ ved Koordinattransformationen gaar over til et Polynomium af Formen $P_1(x_1,y_1,z_1) = A_1 x_1^2 + B_1 y_1^2 + C_1 z_1^2$, hvor Produktleddene mangler; de to Polynomier $P(x,y,z)$ og $P_1(x_1,y_1,z_1)$ antager samme Værdi, naar vi indsætter henholdsvis Koordinaterne (x,y,z) og (x_1,y_1,z_1) til samme Punkt i Rummet. Vi skelner nu mellem forskellige Tilfælde.

1) Determinanten $\begin{vmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{vmatrix}$ af Koefficienterne A_1, B_1, C_1, f. Eks. er Nul og har Rangen 1; da er to B_1 og C_1, lig Nul, den tredje $A_1 \neq 0$. Her bliver $P(x,y,z) = P_1(x_1,y_1,z_1) = A_1 x_1^2$ Nul i alle Punkter af en Plan (Nulplanen), nemlig Planen $x_1 = 0$, medens Polynomiet har samme Fortegn i alle andre Punkter af Rummet, nemlig Fortegnet for A_1; Konstansfladerne $P(x,y,z) = k$ (eller hvad der er det samme $P_1(x_1,y_1,z_1) = k$) er her, hvis $k \neq 0$ med samme Fortegn som A_1, to med Nulplanen parallele Planer, nemlig Planerne $x_1 = +\sqrt{\frac{k}{A_1}}$ og $x_1 = -\sqrt{\frac{k}{A_1}}$, medens en Konstansflade $P(x,y,z) = k$, naar k har modsat Fortegn af A_1, indeholder intet som helst Punkt. 2) Determinanten $\begin{vmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{vmatrix}$ er Nul og har Rangen 2; da er een af Koefficienterne A_1, B_1, C_1, f. Eks. $C_1 = 0$, de to andre $\neq 0$. Vi skelner mellem to Tilfælde α) A_1 og B_1 har samme Fortegn; her bliver $P(x,y,z) = P_1(x_1,y_1,z_1) = A_1 x_1^2 + B_1 y_1^2$ Nul i alle Punkter af een ret Linie, nemlig Linien $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, d. v. s. Z_1-Aksen, medens Polynomiet har samme Fortegn i alle andre Punkter i Rummet, nemlig det for A_1 og B_1 fælles Fortegn. Konstansfladerne $P(x,y,z) = P_1(x_1,y_1,z_1) = k$ er, hvis $k \neq 0$ med samme Fortegn som A_1 og B_1, elliptiske Cylinderflader $A_1 x_1^2 + B_1 y_1^2 = k$ omkring Nullinien; me-

dens en Konstansflade $P(x, y, z) = k$, naar k har modsat Fortegn af A_1 og B_1, intet som helst Punkt indeholder. β) A_1 og B_1 har modsat Fortegn; her bliver $P(x, y, z) = P_1(x_1, y_1, z_1) = A_1 x_1^2 + B_1 y_1^2$ Nul i alle Punkter af to hinanden skærende Planer (Nulplanerne), nemlig Planerne $y_1 = +\sqrt{-\frac{A_1}{B_1}} \cdot x_1$ og $y_1 = -\sqrt{-\frac{A_1}{B_1}} \cdot x_1$. Idet $P_1(x_1, y_1, z_1)$ kan skrives paa Formen $B_1 (y_1 - \sqrt{-\frac{A_1}{B_1}} \cdot x_1)(y_1 + \sqrt{-\frac{A_1}{B_1}} \cdot x_1)$ angiver Polynomiet $P(x, y, z) = P_1(x_1, y_1, z_1)$ paa nær en konstant Faktor Produktet af Afstandene fra de to Nulplaner til Punktet (x, y, z); Polynomiet er altsaa positivt i to (indbyrdes modstaaende), negativt i de to andre af de fire Vinkelrum, hvori Nulplanerne deler Rummet. Konstansfladerne $P(x, y, z) = k$ er for $k \neq 0$ hyperbolske Cylinderflader $A_1 x_1^2 + B_1 y_1^2 = k$, der for k positiv ligger helt i de to positive Vinkelrum, for k negativ helt i de to negative Vinkelrum.

3) Determinanten $\begin{vmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{vmatrix}$ er $\neq 0$, altsaa A_1, B_1, C_1 alle tre $\neq 0$.

Har her α) A_1, B_1, C_1 alle tre samme Fortegn, bliver $P(x, y, z) = P_1(x_1, y_1, z_1) = A_1 x_1^2 + B_1 y_1^2 + C_1 z_1^2$ kun Nul i eet Punkt, nemlig Begyndelsespunktet, medens $P(x, y, z)$ har samme Fortegn i alle andre Punkter af Rummet, nemlig det for A_1, B_1, C_1 fælles Fortegn. Konstansfladerne $P(x, y, z) = P_1(x_1, y_1, z_1) = k$ er, for $k \neq 0$ med samme Fortegn som A_1, B_1, C_1, et System af indbyrdes ligedannede Ellipsoider, medens $P(x, y, z) = k$, naar k har modsat Fortegn af A_1, B_1, C_1, intet som helst Punkt indeholder.

β) Har de tre Koefficienter A_1, B_1, C_1 ikke alle samme Fortegn, kan vi (uden nogen virkelig Indskrænkning af Undersøgelsens Almindelighed, idet vi om fornødent betragter $-P(x, y, z)$ i Stedet for $P(x, y, z)$ selv) antage, at to af dem f. Eks. A_1 og B_1 er positive, den tredje C_1 negativ; vi kan da skrive $P_1(x_1, y_1, z_1)$ paa Formen $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2}$; heraf følger for

det første: Polynomiet $P(x, y, z) = P_1(x_1, y_1, z_1)$ bliver Nul i alle Punkter af en egentlig Keglefladе af 2den Orden, nemlig Keglefladen $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2} = 0$.

Lad (ξ, η, ζ) være Koordinaterne til et vilkaarligt Punkt i Rummet, henført til Systemet (X_1, Y_1, Z_1); vi afgjør om dette Punkt ligger „udenfor Keglefladen" eller „indenfor Keglefladen" (smlg. Opg. 87) ved at skære denne med Planen $Z_1 = \zeta$ gennem Punktet, hvorved vi finder en Ellipse, hvis Projektion paa $X_1 Y_1$-Planen er bestemt ved $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{\zeta^2}{c^2}$; ligger nu Punktet (ξ, η) i $X_1 Y_1$-Planen udenfor eller indenfor denne Ellipse, d. v. s. Punktet (ξ, η, ζ) udenfor eller indenfor selve Skæringsellipsen, da ligger Punktet (ξ, η, ζ) henholdsvis udenfor eller indenfor Keglefladen. Men denne Beliggenhed af Punktet (ξ, η) udenfor eller indenfor Ellipsen nede i $X_1 Y_1$-Planen karakteriseres som bekendt algebraisk ved den Omstændighed, at Tallet $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} > \frac{\zeta^2}{c^2}$ eller $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} < \frac{\zeta^2}{c^2}$, d. v. s. ved at $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} > 0$ eller $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} < 0$. $P(x, y, z) = P_1(x_1, y_1, z_1)$ er altsaa Nul i Keglefladens Punkter, negativ indenfor Keglefladen og positiv udenfor Keglefladen. (Dersom vi om $P_1(x_1, y_1, z_1)$ havde antaget, at kun een af Koefficienterne A_1, B_1, C_1 var positiv, de to andre negative, vilde vi naturligvis omvendt have fundet $P(x, y, z) = P_1(x_1, y_1, z_1)$ positiv indenfor den ved $P(x, y, z) = 0$ bestemte Keglefladе, negativ udenfor denne Keglefladе). Konstantsfladerne $P(x, y, z) = P_1(x_1, y_1, z_1) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2} = k$ er for k positiv Hyperboloider med eet Nat, for k negativ derimod Hyperboloider med to Nat ($\frac{z_1^2}{c^2} - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = -k$), der (ligesom Hyperboloiderne med eet Nat) strækker sig ud omkring Z_1-Aksen. Idet $P(x, y, z)$ er positiv udenfor Keglefladen, negativ indenfor Keglefladen, ligger Hyperboloiderne med eet Nat

udenfor Keglefladen, d. v. s. omslutter Keglefladen, medens Hyperboloiderne med to Nat ligger indenfor Keglefladen, d. v. s. omsluttes af Keglefladen; Overgangen fra Hyperboloiderne med eet Nat til dem med to Nat sker ved selve Keglefladen. – Medens Konstansfladerne (Hyperboloider med eet Nat, egentlig Keglefladе af anden Orden, Hyperboloider med to Nat) til et Polynomium $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$, naar vi betragter Fladens Form i Omegnen af Begyndelsespunktet, forandrer sig væsentlig, naar Konstanten k varierer, vil vi bevise, at to hvilke som helst af disse Konstansflader, naar man fjerner sig „i det Uendelige" bort fra Begyndelsespunktet, nærmer sig mere og mere til at falde sammen; vi beviser Rigtigheden heraf ved at eftervise, at enhver af Hyperboloiderne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = k$, hvor k er en Konstant $\neq 0$, nærmer sig mere og mere til at falde sammen med Keglefladen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, naar man fjerner sig bort i det Uendelige. Vi betragter herfra et vilkaarligt Punkt $P: (x_0, y_0, 0)$ beliggende i xy-Planen, (om hvilket vi dog antager, at det, hvis Hyperboloiden kun har eet Nat, d. v. s. hvis $k > 0$, ligger udenfor Strubeellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k$, altsaa at $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} > k$). Skærer vi saavel Hyperboloiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = k$ som Keglefladen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ med en ret Linie gennem P vinkelret paa xy-Planen, finder vi (idet vi paa Grund af Symmetrien med Hensyn til xy-Planen kun tager Hensyn til den Del af Fladerne, der ligger over xy-Planen) til Bestemmelse af de positive z-Koordinater z_1 og z_2 til Skæringspunkterne P_1 og P_2 Ligningerne

$$\frac{z_1^2}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - k, \qquad \frac{z_2^2}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}, \tag{13a, 13b}$$

hvoraf følger $\frac{z_2^2 - z_1^2}{c^2} = k$, altsaa

(14) $$z_2 - z_1 = \frac{c^2 k}{z_2 + z_1}.$$

Fjerner nu Punktet $P: (x_0, y_0)$ nede i XY-Planen sig bort i det Uendelige, vil øjensynlig $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$ vokse i det Uendelige (nøjagtig talt: $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$ vil være større end en vilkaarlig opgiven Konstant K for alle Punkter P, hvis Afstand fra Begyndelsespunktet er tilstrækkelig stor, nemlig for alle Punkter udenfor Ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = K$); ifølge Ligningerne (13a) og (13b) vil derfor de positive Tal z_1 og z_2 vokse i det Uendelige; Differensen $z_2 - z_1$ vil følgelig (som det fremgaar af (14)) aftage mod Nul, naar Projektionspunktet P fjerner sig i det Uendelige. Hermed er Rigtigheden af den opstillede Paastand bevist. At Differensen $z_2 - z_1$ ifølge (14) er positiv eller negativ, eftersom k er positiv eller negativ, er i Overensstemmelse med det tidligere fundne Resultat, at Keglefladen omsluttes af Hyperboloiderne med ét Net, medens den omslutter Hyperboloiderne med to Net; er nemlig $z_2 - z_1$ positiv, vil den rette Linie gennem P vinkelret paa XY-Planen først træffe Hyperboloiden og derefter Keglefladen, medens denne Linie, naar $z_2 - z_1$ er negativ, skærer igennem Keglefladen, førend den naar ind til Hyperboloiden. — Keglefladen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ kaldes Heldningskegle for enhver af Konstansfladerne (Hyperboloiderne) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = k$ $(k \neq 0)$; de i **86** betragtede Hyperboloider $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ og $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ har henholdsvis Heldningskeglerne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ og $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

89. Skæring mellem ret Linie og Keglesnitsflade. Lad os søge de (eventuelle) Punkter, som en vilkaarlig Keglesnitsflade $Ax^2 + By^2 + \ldots + K = 0$ har fælles med en vilkaarlig ret Linie, som vi tænker os givet paa Parameterform ved Ligningerne $x = a + bt$, $y = c + dt$, $z = e + ft$. Indsætter vi i

Keglesnitsfladens Ligning for x, y og z henholdsvis $a+bt$, $c+dt$ og $e+ft$, finder vi til Bestemmelse af Parameterværdien t svarende til de (eventuelle) Skæringspunkter en Ligning af Formen $Lt^2 + 2Mt + N = 0$. Her kan nu (ganske som da vi indenfor den analytiske Plangeometri søgte Skæring mellem ret Linie og Keglesnit) indtræffe forskellige Tilfælde, nemlig 1) $L \neq 0$; vi faar her to, eet eller ingen Skæringspunkter, alt efterson Ligningen $Lt^2 + 2Mt + N = 0$ har to forskellige Rødder, een Rod (to sammenfaldende Rødder) eller ingen (reelle) Rødder; 2) $L = 0$, $M \neq 0$; her er eet Skæringspunkt bestemt ved $t = -\frac{N}{2M}$; 3) $L = M = 0$, $N \neq 0$; her er intet Skæringspunkt; 4) $L = M = N = 0$; Ligningen $Lt^2 + 2Mt + N = 0$ er her tilfredsstillet af enhver Værdi af t, d. v. s. ethvert af den rette Linies Punkter ligger paa Keglesnitsfladen, eller som man siger: den rette Linie ligger helt paa Fladen. — Af det foregaaende følger specielt, at hvis en ret Linie har mere end to Punkter fælles med en Keglesnitsflade, ligger den helt paa Fladen. — I det Tilfælde, hvor $L \neq 0$ og Ligningen $Lt^2 + 2Mt + N = 0$ har een Rod $t = t_1$ (to sammenfaldende Rødder) siger man om den rette Linie, at den skærer Keglesnitsfladen i to i Punktet P sammenfaldende Punkter, idet vi med P betegner det til Parameterværdien $t = t_1$ svarende for den rette Linie og Fladen fælles Punkt. Ligeledes siger man i det Tilfælde, hvor $L = M = N = 0$, hvor altsaa Linien ligger helt paa Fladen, om ethvert af Liniens Punkter P, at Linien skærer Fladen i to (flere end eet) i Punktet P sammenfaldende Punkter.

90. Dobbeltpunkt. Tangentplan til en Keglesnitsflade. Lad os betragte et vilkaarligt Punkt P paa en Keglesnitsflade,

og lad os søge de (eventuelle) rette Linier gennem P, som skærer Fladen i to i Punktet P sammenfaldende Punkter. I dette Øjemed parallelforskyder vi først (om fornødent) Koordinatsystemet saaledes, at det givne Punkt P paa Fladen bliver Begyndelsespunkt; Fladen har da en Ligning af Formen

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + 2Jz = 0,$$

idet jo det konstante Led efter Parallelforskydningen mangler. Skærer vi Fladen med en vilkaarlig ret Linie gennem P: (0, 0, 0) paa Formen $x = \alpha r$, $y = \beta r$, $z = \gamma r$, hvor (α, β, γ) er Liniens Retningscosinusser, finder vi til Bestemmelse af r en Ligning $Lr^2 + 2Mr = 0$, hvor Koefficienterne L og M foruden af Keglesnitsfladens Konstanter A, B ... J tillige afhænger af Liniens Retningscosinusser (α, β, γ). Vi ser, hvad vi paa Forhaand vidste maatte være Tilfældet, at Ligningen $Lr^2 + 2Mr = 0$, hvilken ret Linie gennem P vi end betragter, d. v. s. hvilket Sæt Retningscosinusser (α, β, γ) end betegner, har Roden $r = 0$. Skal Linien skære Fladen i to i Punktet P sammenfaldende Punkter, kræves heraf som nødvendig og tilstrækkelig Betingelse, at $M = 0$, altsaa idet vi udregner Værdien for M, at

$$G\alpha + H\beta + J\gamma = 0. \tag{15}$$

Vi skelner nu mellem to forskellige Tilfælde.

1) $G = H = J = 0$. Da vil Ligning (15) være tilfredsstillet af ethvert Sæt Retningscosinusser (α, β, γ), d. v. s. enhver ret Linie gennem P skærer Fladen i to i Punktet P sammenfaldende Punkter; P kaldes et Dobbeltpunkt paa Fladen. Betingelsen for at et Punkt P paa en Keglesnitsflade er et Dobbeltpunkt paa

Fladen, er ifølge det foregaaende den, at Fladen, naar den henføres til et (ligegyldigt hvilket) retvinklet Koordinatsystem (XYZ) med Begyndelsespunkt i P, faar en Ligning, hvori ikke blot det konstante Led mangler (hvilket jo er selvfølgeligt), men hvori ogsaa alle tre Koefficienter G, H, I til Leddene af første Grad er lig med Nul, altsaa at Ligningen er homogen af 2den Grad; med andre Ord: Betingelsen for at P er et Dobbeltpunkt er den, at Fladen er en (egentlig eller udartet) Keglefladе med Toppunkt i P. Specielt fremgaar, at en egentlig Keglesnitsflade ikke har noget af sine Punkter til Dobbeltpunkt.

2) Koefficienterne G, H, I er ikke alle tre lig med Nul. Betingelsen for at den rette Linie gennem P med Retningscosinusser (α, β, γ) skærer Fladen i to i P sammenfaldende Punkter, altsaa Betingelsen $G\alpha + H\beta + I\gamma = 0$, er her i geometrisk Fortolkning den, at Retningen (α, β, γ) er vinkelret paa den ved Retningstallene (G, H, I) bestemte Heldning, altsaa at Linien ligger i den Plan gennem P: (0, 0, 0), hvis Normal har Retningstallene (G, H, I). Der findes altsaa uendelig mange Linier gennem P, som skærer Fladen i to i P sammenfaldende Punkter, men disse Linier ligger alle i een og samme Plan, nemlig i Planen

$$Gx + Hy + Iz = 0; \tag{16}$$

denne Plan kaldes Fladens Tangentplan i P. Ligningen for Tangentplanen i Begyndelsespunktet P til en gennem P gaaende Keglesnitsflade, der ikke har Punktet P til Dobbeltpunkt, fremkommer altsaa simpelthen af Fladens Ligning ved i denne at slette Leddene paa nær dem af første

Grad (altsaa ved at slette Leddene af 2^{den} Grad ud). Heraf følger atter, at man for at bestemme Ligningen for Tangentplanen i et vilkaarligt Punkt $P:(\xi,\eta,\zeta)$ (der ikke er Dobbeltpunkt) paa en Kegleſnitsflade, kan gaa saaledes frem: først parallelforskydes Koordinatsystemet saaledes, at Begyndelsespunktet falder i P (hvad der sker ved Substitutionen $x=\xi+x_1$, $y=\eta+y_1$, $z=\zeta+z_1$); dernæst bestemmes i det nye Koordinatsystem Tangentplanens Ligning ved i Fladens Ligning at slette Leddene af 2^{den} Grad; og endelig transformerer vi tilbage til det oprindelige Koordinatsystem (hvad der jo sker ved Substitutionen $x_1=x-\xi$, $y_1=y-\eta$, $z_1=z-\zeta$). Betragter vi eksempelvis Kegleſnitsfladen $Ax^2+By^2+Cz^2+K=0$, og søger vi Tangentplanen i et Punkt $P:(\xi,\eta,\zeta)$ paa denne Flade, finder vi først ved Parallelforskydningen $x=\xi+x_1$, $y=\eta+y_1$, $z=\zeta+z_1$ Ligningen $Ax_1^2+By_1^2+Cz_1^2+2A\xi x_1+2B\eta y_1+2C\zeta z_1=0$; henført til Systemet $(x_1y_1z_1)$ har Tangentplanen i P følgelig Ligningen $A\xi x_1+B\eta y_1+C\zeta z_1=0$, og henført til det oprindelige System (xyz) altsaa Ligningen $A\xi(x-\xi)+B\eta(y-\eta)+C\zeta(z-\zeta)=0$, der ogsaa kan skrives $A\xi x+B\eta y+C\zeta z+K=0$. Paa tilsvarende Maade finder vi for Kegleſnitsfladen $Ax^2+By^2+2Jz=0$ Tangentplanens Ligning i (ξ,η,ζ) bestemt ved $A\xi x+B\eta y+J(z+\zeta)=0$.

Vi bemærker slutteligt, at hvis Fladen helt indeholder en ret Linie gennem P, vil Tangentplanen i P gaa gennem denne Linie; thi en ret Linie gennem P, der ligger helt paa Fladen, skærer Fladen i to i P sammenfaldende Punkter, og Tangentplanen i P er jo netop det geometriske Sted for rette Linier med denne sidste Egenskab.

91. Skæring mellem Plan og Kegleſnitsflade. Lad os søge

de (eventuelle) Punkter, som en vilkaarlig given Keglesnitsflade har fælles med en vilkaarlig given Plan. Vi begynder med at transformere Koordinatsystemet saaledes, at den givne Plan bliver XY-Plan, altsaa faar Ligningen $z=0$; lad Keglesnitsfladens Ligning efter Transformationen være

$$(17)\qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + 2Iz + K = 0.$$

Den søgte Skæringskurve mellem Fladen og XY-Planen har da henført til det plane retvinklede Koordinatsystem (xy) Ligningen

$$(18)\qquad Ax^2 + By^2 + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + K = 0,$$

nemlig den Ligning, der fremkommer af Keglesnitsfladens Ligning (17) ved at sætte $z = 0$. Vi maa nu skelne mellem forskellige Tilfælde: 1) De tre Tal A, B, F er ikke alle Nul. Snitkurven (18) er her et (egentligt eller udartet) Keglesnit (en algebraisk Kurve af 2den Orden). 2) $A = B = F = 0$, G og H ikke begge Nul. Snittet er her en ret Linie $2Gx + 2Hy + K = 0$ (en algebraisk Kurve af 1ste Orden). 3) $A = B = F = G = H = 0$, $K \neq 0$. Snittet $K = 0$ (en „algebraisk Kurve af 0te Orden") indeholder intet som helst Punkt. 4) Er endelig $A = B = F = G = H = K = 0$, vil samtlige Punkter i xy-Planen tilhøre Keglesnitsfladen; xy-Planen er helt indeholdt i Fladen, og denne bestaar følgelig (som det fremgaar af den tidligere fuldstændige Diskussion af de forskellige Keglesnitsfladetyper, men hvad der ogsaa umiddelbart ses af Keglesnitsfladens Ligning (17), hvor i det behandlede Tilfælde Faktoren z kan sættes udenfor Parenthes i Ligningens ven-

stre Side) af to (forskellige eller sammenfaldende) Planer, af hvilke $z = 0$ er den ene. – Af det foregaaende følger specielt, at hvis en Plan og en Keglesnitsflade har Punkterne paa et egentligt Keglesnit og desuden endnu et Punkt fælles, eller har to forskellige rette Linier og endnu et Punkt fælles, maa Planen nødvendigvis have alle sine Punkter fælles med Keglesnitsfladen, d. v. s. denne maa bestaa af to (forskellige eller sammenfaldende) Planer, hvoraf den givne er den ene.

Som et specielt særlig vigtigt Øvelseseksempel paa Skæring mellem Keglesnitsflade og Plan, vil vi søge Skæringskurven mellem en vilkaarlig Keglesnitsflade og Tangentplanen Π til Fladen i et vilkaarligt af Fladens Punkter P (om hvilket vi naturligvis antager, at det ikke er et Dobbeltpunkt paa Fladen). Idet vi vælger Punktet P til Begyndelsespunkt og Tangentplanen Π til xy-Plan, faar denne Tangentplan Ligningen $z = 0$, medens Fladens Ligning faar Formen

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy + 2Iz = 0 \qquad (I \neq 0);$$

thi idet Ligningen $(z = 0)$ for Tangentplanen i Begyndelsespunktet jo skal fremkomme af Fladens Ligning ved i denne at slette Leddene af 2^{den} Grad, maa første Grads Leddene i x og y mangle (og Koefficienten I til z være $\neq 0$). Den søgte Skæringskurve mellem Fladen og Tangentplanen $z = 0$, faar følgelig henført til det plane Koordinatsystem xy Ligningen

$$Ax^2 + By^2 + 2Fxy = 0.$$

Heraf følger: 1) Er $A=B=F=0$, vil Tangentplanen helt være indeholdt i Fladen (dette kan kun ske, hvis Fladen bestaar af to Planer, hvoraf den ene – og kun den ene, da P jo ikke er et Dobbeltpunkt – gaar gennem P). 2) Er ikke alle tre Tal A, B, F lig Nul, har Fladen og Tangentplanen enten kun „Röringspunktet" P fælles (nemlig hvis $AB-F^2>0$), eller ogsaa bestaar Skæringskurven enten af to forskellige rette Linier gennem P (nemlig hvis $AB-F^2<0$), eller af een ret Linie (to sammenfaldende rette Linier) gennem P (nemlig hvis $AB-F^2=0$).

Lad os som et andet vigtigt Øvelseseksempel betragte en vilkaarlig Plan, der skærer en given Keglesnitsflade i et egentligt Keglesnit (Ellipse, Hyperbel, Parabel) og lad P være et vilkaarligt Punkt paa dette Keglesnit. P kan da ikke være et Dobbeltpunkt paa Fladen; thi i saa Fald var Fladen jo en Kegleflade med Toppunkt i P, og en saadan Flade skæres jo af en Plan gennem P enten kun i Punktet P selv eller i (een, to eller uendelig mange) rette Linier gennem P, altsaa i hvert Fald ikke i noget egentligt Keglesnit. Endvidere bemærker vi, at den betragtede Snitplan ikke kan være Tangentplan til Fladen i P; thi ingen Tangentplan i noget Punkt af en Keglesnitsflade skærer jo Fladen i et egentligt Keglesnit. Vi vil bevise Sætningen: Den betragtede Snitplan skærer Tangentplanen π til Fladen i Punktet P netop i den rette Linie, der er Tangent i Punktet P til det (ifølge Antagelse egentlige) Keglesnit, hvori Snitplanen skærer Fladen. Rigtigheden heraf indses umiddelbart saaledes: Vælger vi Koordinatsystemet (XYZ) saadan, at Snitplanen bliver XY-Plan og Punktet P Begyndelses-

punkt, saar Snitplanen Ligningen $z = 0$, medens Keglesnitsfladen faar en Ligning af Formen

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + 2Iz = 0,$$

hvor ikke begge Tallene G og H er Nul, da jo Fladens Tangentplan Π i Punktet $P:(0,0,0)$, altsaa Planen $Gx + Hy + Iz = 0$, er forskellig fra Snitplanen $z = 0$. Det i XY-Planen (Snitplanen) beliggende (ifølge Antagelse egentlige) Keglesnit har Ligningen $Ax^2 + By^2 + 2Fxy + 2Gx + 2Hy = 0$; dets Tangent i Punktet $P:(0,0)$ har følgelig Ligningen $Gx + Hy = 0$ (nemlig den Ligning, der fremkommer af Keglesnittets Ligning ved kun at tage Hensyn til Leddene af første Grad); men denne Ligning $Gx + Hy = 0$ i det plane Koordinatsystem (XY) bestemmer jo netop Skæringslinien mellem Tangentplanen $Gx + Hy + Iz = 0$ og Snitplanen $z = 0$. Hermed er den opstillede Sætning bevist. — Den nævnte Sætning er ofte bekvem at benytte til umiddelbart (d. v. s. uden nogen Regning) at bestemme Tangentplanen i et Punkt af en Keglesnitsflade. Lad os som et særlig simpelt Eksempel herpaa søge at bestemme Tangentplanen i et vilkaarligt, fra Toppunktet O forskelligt Punkt $P:(\xi, \varepsilon\xi)$ paa den egentlige Kegleflade af 2den Orden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. Vi ved her for det første om Tangentplanen, at den indeholder den gennem Punktet P gaaende Frembringer $x = \xi t$, $y = \varepsilon t$, $z = \zeta t$; thi Tangentplanen indeholder jo enhver gennem Røringspunktet gaaende paa Fladen beliggende ret Linie. For at bestemme Tangentplanen behøver vi derfor kun at finde endnu een (fra Frembringeren forskellig) ret Linie gennem P, om hvilken vi ved, at den ligger i Tangentplanen. I dette Øjemed betragter vi f. Eks. den paa

Fladen beliggende, gennem P gaaende, Ellipse, hvori Keglefladen skæres af Planen $z = \xi$. Tangentplanen indeholder ifølge den navnte Sætning Tangenten til denne Ellipse i Punktet P, og er altsaa bestemt som den Plan, der indeholder saavel denne Tangent som Frembringeren gennem P. Vi tilføjer den Bemærkning, at Keglefladen øjensynlig har samme Tangentplan i alle, fra Toppunktet O forskellige, Punkter af en og samme Frembringer; thi lader vi Punktet $P(\xi, \eta, \zeta)$ bevæge sig langs en Frembringer, vil jo den betragtede Tangent i P til den i Planen $z = \xi$ beliggende Ellipse variere saaledes, at den bevarer sin Retning uforandret. Idet endvidere Tangenten til den i Planen $z = \xi$ beliggende Punktellipse kun har Punktet P fælles med Ellipsen samt er den eneste i Planen $z = \xi$ beliggende rette Linie gennem P, der kun har et Punkt fælles med Ellipsen, indser man for det første, at Tangentplanen langs en Frembringer (d. v. s. i Punkterne af en Frembringer) kun har Frembringeren fælles med Keglefladen (altsaa skærer Fladen i to i Frembringeren sammenfaldende rette Linier), og for det andet, at det er den eneste Plan gennem Frembringeren, der har denne Egenskab.

Vi bemærker slutteligt, at der ikke gennem noget Punkt P af en Regelsnitsflade kan gaa mere end to forskellige rette Linier, der er helt beliggende paa Fladen, med mindre P enten er et Dobbeltpunkt paa Fladen (altsaa Fladen en Keglefladen og P dens Toppunkt) eller Fladen bestaar af to Planer; thi er P ikke Dobbeltpunkt paa Fladen, har Fladen en Tangentplan i P, om hvilken Tangentplan vi ved, at den vil indeholde enhver ret Linie gennem P beliggende paa Fladen; og er denne Tangentplan

ikke helt indeholdt i Fladen (d. v. s. bestaar Fladen ikke af to Planer), skærer Tangentplanen i P jo Fladen i højst to rette Linier.

92. Rette Linier paa egentlige Regelsnitsflader. Vi bevistе ovenfor, at Tangentplanen i et vilkaarligt Punkt P (ikke Dobbeltpunkt) paa en Regelsnitsflade – hvis da ikke denne Tangentplan helt tilhørte Fladen – enten kun havde eet Punkt (Røringspunktet) fælles med Fladen, eller skar Fladen i to (forskellige eller sammenfaldende) rette Linier gennem P. Vi gaar nu over til for et vilkaarligt Punkt P paa en vilkaarlig egentlig Regelsnitsflade (af hvilke Flader ingen indeholder noget Dobbeltpunkt) at afgøre, hvilken af de nævnte to (foreløbige) Muligheder vedrørende Tangentplanens Skæring med Fladen der virkelig indtræffer.

Vi vil først bevise, at Tangentplanen i ethvert Punkt paa en Ellipsoide, en Hyperboloide med to Nat og en elliptisk Paraboloide kun har Røringspunktet fælles med Tangentplanen. Rigtigheden heraf er aabenbart godtgjort, naar vi har bevist, at der for ingen af disse tre Fladers Vedkommende overhovedet eksisterer nogen ret Linie, der er helt beliggende paa Fladen (og altsaa ifølge en tidligere Bemærkning heller ingen ret Linie, der har mer end to Punkter fælles med Fladen). For Ellipsoidens Vedkommende følger Rigtigheden af denne sidste Paastand umiddelbart deraf, at Ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ jo er beliggende helt i det Endelige, medens enhver ret Linie jo gaar i det Uendelige. Betragter vi dernæst Hyperboloiden med to Nat $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, indser vi for det første, at der ikke paa denne Flade ligger nogen ret Linie, der ikke er parallel med YZ-Planen; thi en ret Linie, der ik-

ke er parallel med YZ-Planen, skærer denne Plan, medens Hyperboloiden jo ikke har noget Punkt beliggende i YZ-Planen; at der imidlertid heller ikke findes nogen ret Linie beliggende paa Hyperboloiden og parallel med den nævnte Koordinatplan, indses straks derigennem, at enhver Plan parallel med YZ-Planen, hvis den overhovedet skærer Hyperboloiden, jo skærer denne i en Ellipse (der specielt kan svinde ind til et enkelt Punkt). Betragter vi skikkelig den elliptiske Paraboloide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$, bemærker vi for det første, at denne Flade ikke indeholder nogen ret Linie, der ikke er parallel med XY-Planen; thi en ret Linie, der ikke er parallel med den nævnte Plan, indeholder Punkter, der ligger under XY-Planen (d. v. s. Punkter med negativ z-Koordinat), medens Paraboloiden jo ikke indeholder noget saadant Punkt; at der imidlertid heller ikke findes nogen ret Linie beliggende paa Fladen og parallel med XY-Planen følger straks deraf, at enhver Plan $z = k$, hvis den da overhovedet skærer Paraboloiden, d. v. s. hvis $k \geqq 0$, jo skærer denne i en Ellipse (specielt i et enkelt Punkt).

Vi vender os derefter til Betragtning af Hyperboloiden med eet Nøt og den hyperbolske Paraboloide. Vi skal om enhver af disse Flader bevise, at Tangentplanen i ethvert af Fladens Punkter P skærer Fladen i to indbyrdes forskellige rette Linier gennem P. Denne Sætning er ifølge **91** ensbetydende med følgende Sætning: Gennem ethvert af Fladens Punkter P gaar der to (og følgelig kun to, da vi jo ved at der findes højst to) rette Linier, der er helt beliggende paa Fladen. Vi beviser først denne Sætning for Hyperboloidens Vedkommende.

I: Hyperboloiden med eet Nøt: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Idet vi

flytter Leddet $\frac{y^2}{b^2}$ over paa höjre Side af Lighedstegnet, kan vi skrive Hyperboloidens Ligning paa Formen

$$(19) \qquad \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{b}\right).$$

Vi betragter nu de to Ligninger

$$(20) \qquad \begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 - \frac{y}{b}\right), \end{cases}$$

hvor (α, β) er et vilkaarligt egentligt (d. v. s. fra (0, 0) forskelligt) Talpar. Disse to Ligninger (20) fremstiller for det förste, for ethvert egentligt Talpar (α, β), <u>en ret Linie</u>; thi skriver vi de to Ligninger (20) paa Formen $Ax + By + Cz + D = 0$ og $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$, er Koefficientsættene $(A, B, C) = \left(\frac{\alpha}{a}, -\frac{\beta}{b}, \frac{\alpha}{c}\right)$ og $(A_1, B_1, C_1) = \left(\frac{\beta}{a}, \frac{\alpha}{b}, -\frac{\beta}{c}\right)$ begge egentlige Talsæt og ikke proportionale (da jo f. Eks. Determinanten $\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{ab}(\alpha^2 + \beta^2)$ er $\neq 0$). Denne rette Linie (20) ses endvidere umiddelbart (for ethvert egentligt Talpar (α, β)) <u>at være beliggende helt paa Hyperboloiden</u>; for $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ følger dette straks deraf, at vi jo ved Multiplikation af de to Ligninger (20) og paafølgende Division med (den fra Nul forskellige) Konstant $\alpha\beta$ kommer til Hyperboloidens Ligning (19), saaledes at ethvert Koordinatsæt (x_0, y_0, z_0), der tilfredsstiller den rette Linies Ligninger (20), ogsaa tilfredsstiller Hyperboloidens Ligning (19); er dernæst $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$, antager Ligningerne (20) Formen $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0$, $1 - \frac{y}{b} = 0$, og det er klart, at enhver Løsning (x_0, y_0, z_0) til disse sidste Ligninger ogsaa tilfredsstiller Hyperboloidens Ligning (19), idet en saadan Løsning (x_0, y_0, z_0) jo indsat i (19) gör

begge Sider af Ligningen til Nul; er endelig $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, gaar Ligningerne (20) over til $1 + \frac{y}{b} = 0$, $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$, og Hyperboloidens Ligning (19) tilfredsstilles aabenbart ogsaa her af enhver Løsning (x_0, y_0, z_0) til disse to Ligninger.

Lader vi i Ligningerne (20) det egentlige Talpar (α, β) variere, faar vi et System af rette Linier, der, som vist, alle er beliggende paa Hyperboloiden. De variable Parametre α, β er herved at opfatte som homogene Parametre, d. v. s. to Ligningssæt (20) svarende til to indbyrdes proportionale Parameterpar (α', β') og (α'', β'') (af hvilke Ligningssæt det ene altsaa fremkommer af det andet ved Multiplikation med en fra 0 forskellig Konstant) opfatter vi som et og samme Ligningssæt. — Der gælder Sætningen: Gennem et vilkaarligt givet Punkt P paa Hyperboloiden gaar der een og kun een af de rette Linier i det ved (20) bestemte Liniesystem, eller anderledes udtrykt: til det givne Punkt P paa Hyperboloiden hører der et, paa nær en Proportionalitetsfaktor eentydig bestemt, egentligt Parameterpar (α, β), saaledes at den ved dette Parameterpar bestemte rette Linie (20) gaar gennem P. (Heraf følger specielt, at to forskellige (d. v. s. til to ikke proportionale Parameterpar (α, β) svarende) rette Linier i Systemet (20) ikke har noget Punkt fælles; thi et saadant fælles Punkt vilde jo være et Punkt paa Hyperboloiden, gennem hvilket der gik mere end een Systemlinie). Rigtigheden af den-

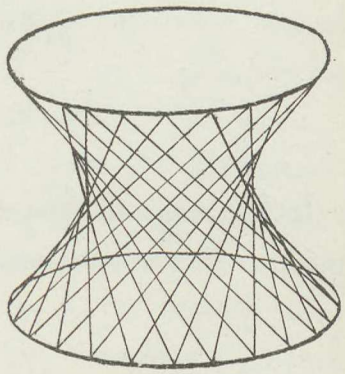


Fig. 47.

ne Sætning indses saaledes: Lad det givne Punkt P paa Hyperboloiden have Koordinaterne (x_0, y_0, z_0); da er $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1$. Den Betingelse, som det egentlige Parameterpar (α, β) skal opfyldes, for at Linien (20) skal gaa gennem Punktet P, udtrykkes ved Ligningerne

$$\text{(21)} \qquad \begin{aligned} \alpha\left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right) &= \beta\left(1 + \frac{y_0}{b}\right) \\ \beta\left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c}\right) &= \alpha\left(1 - \frac{y_0}{b}\right). \end{aligned}$$

Disse to homogene Ligninger i de to Ubekendte α og β har Ligningernes Determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} & -\left(1 + \frac{y_0}{b}\right) \\ -\left(1 - \frac{y_0}{b}\right) & \frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} \end{vmatrix} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} - 1 = 0,$$

uden at alle 4 Koefficienter i Ligningerne (21) er lig med Nul (f. Eks. er Tallene $1 + \frac{y_0}{b}$ og $1 - \frac{y_0}{b}$ ikke samtidig 0); idet Ligningernes Determinant saaledes er Nul og har Rangen 1, har de to Ligninger (21), saaledes som vi skulde vise, for det første egentlige Løsninger (α, β) og for det andet er disse Løsninger alle proportionale. – For nærmere at undersøge Linierne i Systemet (20) betragter vi, samtidig med Hyperboloiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, Hyperboloidens Heldningskegle $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. Ved en Betragtning fuldstændig analog med den, vi ovenfor anstillede for Hyperboloidens Vedkommende, indser man umiddelbart, at denne Kegleflade indeholder samtlige (gennem Begyndelsespunktet gaaende) rette Linier bestemte ved Ligningerne

(22)
$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\frac{y}{b} \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(-\frac{y}{b}\right), \end{cases}$$

hvor (α, β) er et vilkaarligt egentligt Talpar. Endvidere indser man umiddelbart, at der gennem et vilkaarligt fra Toppunktet O forskelligt Punkt (x_0, y_0, z_0) paa Keglefladen gaar een og kun een ret Linie i Systemet (22) (idet nemlig for et saadant Punkt (x_0, y_0, z_0) Determinanten $\left|\begin{matrix} \frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} & \frac{-y_0}{b} \\ \frac{y_0}{b} & \frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} \end{matrix}\right|$ er lig med Nul og har Rangen 1); heraf følger, idet der jo gennem ethvert fra Toppunktet forskelligt Punkt paa Keglefladen gaar een og kun een Keglefrembringer, at Ligningerne (22), naar vi opfatter (α, β) som homogene Parametre, bestemmer os alle Frembringerne i Keglefladen og hver Frembringer kun een Gang. Nu er imidlertid (for samme egentlige Parameterpar (α, β)) den rette Linie (20) parallel med den rette Linie (22), idet de to Linier jo fremkommer som Skæringslinie mellem parvis parallele Planer. Linierne i Systemet (20) kan altsaa parres eentydigt med Frembringerne paa Heldningskeglen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, saaledes at to til hinanden svarende Linier er indbyrdes parallele.

Ved at kombinere Faktorerne paa de to Sider af Hyperboloidens Ligning (19) paa anden Maade end da vi dannede Ligningerne (20), føres vi umiddelbart til foruden Ligningssystemet (20) at betragte Ligningssystemet

(23)
$$\begin{aligned} \gamma\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) &= \delta\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \delta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) &= \gamma\left(1 + \frac{y}{b}\right), \end{aligned}$$

hvor (γ, δ) (ligesom ovenfor (α, β)) er et vilkaarligt egentligt Talpar. Ved en Undersøgelse, der (paa nær af sig selv givne

Ombytninger) er ordret den samme, som den vi ovenfor har gennemført for Ligningerne (20), viser man om Ligningerne (23), for det første at disse Ligninger for ethvert egentligt Parameterpar (γ, δ) fremstiller en ret Linie, der er helt beliggende paa Hyperboloiden, og endvidere, idet vi opfatter (γ, δ) som homogene Parametre, at der gennem et vilkaarligt givet Punkt paa Hyperboloiden gaar een og kun een ret Linie tilhørende Liniesystemet (23). Endelig viser man (stadig ganske som ovenfor, idet man her skriver Heldningskeglens Frembringere paa Formen $\gamma\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \delta\left(-\frac{y}{b}\right)$, $\delta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \gamma\frac{y}{b}$), at Linierne i Systemet (23) kan parres eensbydigt med Frembringerne paa Heldningskeglen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, saaledes at tilsvarende Linier er parallele. Idet saaledes saavel Linierne i Systemet (20) som Linierne i Systemet (23) er parvis parallele med Frembringerne paa Heldningskeglen, er Linierne i de to Systemer selv parvis parallele. Den (ifølge det foregaaende eneste) rette Linie i Systemet (23), der er parallel med den til et givet Parameterpar (α, β) hørende Linie i (20), har øjensynlig sit homogene Parameterpar (γ, δ) bestemt ved $\gamma = k\alpha$, $\delta = -k\beta$, hvor $k \neq 0$; thi for (γ, δ) proportional med $(\alpha, -\beta)$ er de to Keglefrembringere: $\alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\frac{y}{b}$, $\beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(-\frac{y}{b}\right)$ og $\gamma\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \delta\left(-\frac{y}{b}\right)$, $\delta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \gamma\cdot\frac{y}{b}$ (der er parallele med henholdsvis den ene og den anden af de to Systemlinier) sammenfaldende. To parallele Linier tilhørende henholdsvis Systemet (20) og Systemet (23) er altsaa (idet vi f. Eks. indsætter $\gamma = \alpha$, $\delta = -\beta$ og ordner Ligningerne) bestemt henholdsvis ved Ligningerne

$$\begin{cases} \alpha\frac{x}{a} - \beta\frac{y}{b} + \alpha\frac{z}{c} = \beta \\ \beta\frac{x}{a} + \alpha\frac{y}{b} - \beta\frac{z}{c} = \alpha \end{cases} \quad \text{og} \quad \begin{cases} \alpha\frac{x}{a} - \beta\frac{y}{b} + \alpha\frac{z}{c} = -\beta \\ \beta\frac{x}{a} + \alpha\frac{y}{b} - \beta\frac{z}{c} = -\alpha. \end{cases}$$

Idet den ene af disse rette Linier aabenbart gaar gennem $(-x_0, -y_0, -z_0)$, hvis den anden gaar gennem (x_0, y_0, z_0), indses, at en ret Linie i Systemet (20) og den dermed parallele rette Linie i Systemet (23) er symmetrisk beliggende med Hensyn til Begyndelsespunktet O; heraf følger specielt, da jo ingen af Systemlinierne gaar gennem O, at to saadanne parallele Linier tilhørende henholdsvis Systemerne (20) og (23) er indbyrdes forskellige Linier, hvilket atter medfører (da jo to ikke parallele Linier sikkert ikke er en og samme Linie), at der ikke findes nogen Linie i det ene System, der falder sammen med nogen Linie i det andet System; endvidere følger af det ovenstaaende Resultat, at den Plan Π, der er bestemt ved skulle gaa gennem to vilkaarligt givne parallele Linier tilhørende henholdsvis Systemerne (20) og (23), indeholder Begyndelsespunktet og følgelig indeholder hele den Frembringer paa Heldningskeglen, der er parallel med det betragtede Liniepar.

Sluttelig bemærker vi, at der ikke paa Hyperboloiden findes andre rette Linier end de ved (20) og (23) bestemte; thi gennem et Punkt af en saadan, fra Systemlinierne forskellig, paa Hyperboloiden beliggende Linie L vilde der jo gaa tre (fler end to) rette Linier helt beliggende paa Fladen, nemlig foruden to Systemlinier (tilhørende hver sit System) endnu Linien L selv.

II: Den hyperbolske Paraboloide $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$. For at bestemme rette Linier beliggende paa den hyperbolske Paraboloide skriver vi dennes Ligning paa Formen

(24) $$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = z \cdot \frac{2}{c}$$

og betragter de to Ligningssystemer

$$(25)\qquad \begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) = \beta z \\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) = \alpha\cdot\frac{z}{c} \end{cases}$$

og

$$(26)\qquad \begin{cases} \gamma\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) = \delta\cdot\frac{z}{c} \\ \delta\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) = \gamma z\,. \end{cases}$$

Er (α, β) et vilkaarligt egentligt Talsæt med $\beta \neq 0$, fremstiller Ligningerne (25) en ret Linie; thi Ligningerne har jo da Formen $\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z + \mathfrak{D} = 0$ og $\mathfrak{A}_1 x + \mathfrak{B}_1 y + \mathfrak{C}_1 z + \mathfrak{D}_1 = 0$, hvor $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = (\frac{\alpha}{a}, \frac{\alpha}{b}, -\beta)$ og $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1) = (\frac{\beta}{a}, -\frac{\beta}{b}, 0)$ begge er egentlige Talsæt og ikke er proportionale, idet f. Eks. Determinanten $\begin{vmatrix} \mathfrak{B} & \mathfrak{C} \\ \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{C}_1 \end{vmatrix} = -\frac{\beta^2}{b}$ er $\neq 0$. (Grunden til at vi antager $\beta \neq 0$ er naturligvis den, at for $\beta = 0$ bliver $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1) = (0, 0, 0)$, saaledes at den nederste af Ligningerne (25) antager Formen $0x + 0y + 0z = \text{const}$ og følgelig ikke – saa længe vi kun opererer med sædvanlige Punkter og ikke benytter homogene Koordinater – fremstiller nogen Plan). Endvidere er det klart, at den rette Linie (25) for ethvert egentligt Parameterpar (α, β) med $\beta \neq 0$ er beliggende helt paa Paraboloiden; thi er $\alpha \neq 0$ kommer vi ved Multiplikation af Ligningerne (25) og paafølgende Division med $\alpha\beta$ til Paraboloidens Ligning (24), saaledes at ethvert Punkt (x_0, y_0, z_0) paa den rette Linie (25) ogsaa er beliggende paa Paraboloiden; og er $\alpha = 0$, antager Ligningerne (25) Formen $z = 0$, $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, saaledes at ogsaa i dette Tilfælde et Punkt, hvis Koordinater (x_0, y_0, z_0) tilfredsstiller Liniens

to Ligninger, tilfredsstiller Paraboloidens Ligning (24).

Paa fuldkommen tilsvarende Maade viser man, at Ligningerne (26) for ethvert egentligt Parameterpar (γ, δ) med $\gamma \neq 0$ fremstiller en ret Linie, der er helt beliggende paa Paraboloiden.

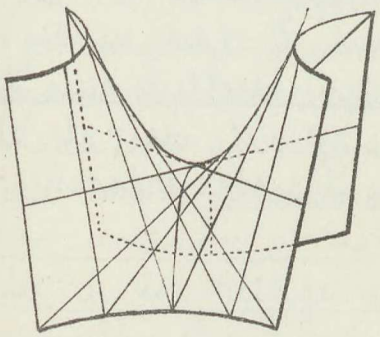


Fig. 48.

Linierne i det første System (25) er alle parallele med Paraboloidens ene Heldningsplan $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ (idet jo den ene af Liniens Ligninger har Formen $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \text{const.}$), medens Linierne i det andet System (26) alle er parallele med den anden Heldningsplan $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$.

Vi vil bevise, idet (α, β) og (γ, δ) opfattes som homogene Parametre, at der gennem et vilkaarligt givet Punkt P paa Paraboloiden gaar een og kun een Linie i Systemet (25) og een og kun een Linie i Systemet (26). Idet vi f. Eks. betragter det første System (25) – Beviset forløber fuldstændigt analogt for det andet Systems Vedkommende – udtrykkes Betingelsen for, at den til det egentlige Parameterpar (α, β) (med $\beta \neq 0$) svarende rette Linie (25) gaar gennem et opgivet Punkt (x_0, y_0, z_0) paa Paraboloiden ved de to homogene Ligninger i α og β

$$\alpha\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right) = \beta z_0 , \qquad \beta\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right) = \alpha \cdot \frac{2}{c} ,$$

og Sætningens Rigtighed følger umiddelbart deraf, at

disse to Ligninger, idet Ligningernes Determinant $\begin{vmatrix} \frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b} & , & -z_0 \\ -\frac{z}{c} & , & \frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b} \end{vmatrix}$ er lig Nul og har Rangen 1, har egentlige Løsninger (α, β) (i hvilke Løsninger β af sig selv er $\neq 0$, da $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$ øjensynlig ikke er en Løsning), der alle er proportionale.

For nærmere at karakterisere Linierne i Systemet (25) betragter vi sammen med dette System Mangden af alle rette Linier beliggende i Heldningsplanen $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ og gaaende gennem Begyndelsespunktet O, idet vi dog undtager Z-Aksen, d. v. s. Skæringslinien mellem de to Heldningsplaner $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ og $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$; vi vil vise, at disse rette Linier kan fremstilles paa Parameterform ved Ligningerne

$$(27) \qquad \begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) = \beta z \\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) = 0 \end{cases},$$

hvor det homogene Parameterpar (α, β) ligesom i Ligningerne (25) er et vilkaarligt egentligt Talpar med $\beta \neq 0$, og at denne Parameterform er saaledes beskaffen, at vi herigennem faar enhver af de nævnte Linier med og hver kun een Gang. Rigtigheden heraf indses umiddelbart derigennem, at (27) for det første aabenbart fremstiller rette Linier (idet $(\frac{\alpha}{a}, \frac{\alpha}{b}, -\beta)$ og $(\frac{\beta}{a}, -\frac{\beta}{b}, 0)$ for $\beta \neq 0$ begge er egentlige Talsæt og ikke proportionale), der gaar gennem $(0,0,0)$ og ligger i Planen $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, men af hvilke ingen er Z-Aksen (idet den første Ligning (27) jo ikke for noget Parameterpar (α, β) med $\beta \neq 0$ tilfredsstilles af $(0,0,z_0)$ hvor $z_0 \neq 0$), medens der for det andet gennem ethvert ikke paa Z-Aksen beliggende Punkt

(x_0, y_0, z_0) i Planen $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ gaar een og kun een af Linierne (27); thi idet Determinanten $\begin{vmatrix} \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}, & -z_0 \\ 0, & \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \end{vmatrix}$ er Nul og har Rangen 1, har Ligningerne (27), naar vi for (x, y, z) indsætter (x_0, y_0, z_0), egentlige Løsninger (α, β) (i hvilke af sig selv $\beta \neq 0$, da $\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \neq 0$) og disse er alle proportionale. Nu er imidlertid (for et og samme Parameterpar (α, β) med $\beta \neq 0$) Linien (25) parallel med Linien (27); heraf følger da, at de rette Linier i Systemet (25) kan parres eenentydigt med de fra Z-Aksen forskellige gennem Begyndelsespunktet gaaende rette Linier i Planen $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, saaledes at tilsvarende Linier er parallele; med andre Ord: Heldningen af Systemlinien (25) gennemløber, naar (α, β) varierer, samtlige Heldninger svarende til de forskellige rette Linier i Paraboloidens Heldningsplan $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ alene med Undtagelse af Z-Aksens Heldning, d. v. s. den Heldning, der svarer til Skæringslinien mellem de to Heldningsplaner. Paa fuldkommen tilsvarende Maade viser man om det andet System (26), at Heldningerne af dette Systems Linier stemmer eenentydigt overens med Heldningerne af de rette Linier i den anden af Paraboloidens Heldningsplaner $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$, alene bortset fra Heldningen af Skæringslinien mellem de to Heldningsplaner.

Af det foregaaende følger specielt, at der ikke findes nogen Linie i Systemet (25), der er parallel med nogen Linie i Systemet (26), altsaa yderligere, at ingen Linie i det ene System falder sammen med nogen Linie i det andet System.

Vi bemærker slutteligt, at der ikke paa Paraboloiden findes andre rette Linier end de, der bestemmes

ved Ligningerne (25) og (26); dette følger umiddelbart deraf, at der jo gennem hvert Punkt paa Paraboloiden gaar een Linie i hvert af de to Systemer, i Forbindelse med Sætningen om at der ikke gennem noget Punkt paa Paraboloiden gaar mer end to rette Linier, der er helt beliggende paa Fladen.

93. Keglesnitsflader i homogene Koordinater. I det foregaaende har det Punktomraade, hvori vi har opereret, været Rummets „sædvanlige" Punkter; vi gaar nu over til en Behandling af de algebraiske Flader af 2den Orden, ved hvilken vi vil lægge det gennem Indførelsen af Rummets uendelig fjerne Punkter udvidede Punktbegreb til Grund; vi karakteriserer da i det følgende Rummets Punkter (de sædvanlige saa vel som de uendelig fjerne) ved homogene Koordinater (X, Y, Z, U), idet vi ligesom tidligere lægger vort Udgangspunkt i et fastlagt (inhomogent) Koordinatsystem (x, y, z). — Lad der i det inhomogene Koordinatsystem (x, y, z) være givet en „sædvanlig" (egentlig eller udartet) Keglesnitsflade ved Ligningen

$$(1) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + 2Iz + K = 0,$$

hvor ikke alle seks Koefficienter $A, B, C, 2D, 2E, 2F$ til Leddene af 2den Grad er Nul. Indsætter vi i denne Ligning $x = \frac{X}{U}$, $y = \frac{Y}{U}$, $z = \frac{Z}{U}$ og bortmultiplicerer vi derefter Nævneren U, gaar Ligning (1) over til den homogene Ligning af 2den Grad

$$(28) \quad AX^2 + BY^2 + CZ^2 + 2DYZ + 2EZX + 2FXY + 2GXU + 2HYU + 2IZU + KU^2 = 0.$$

Som det umiddelbart fremgaar af Udledelsen, vil denne homogene Ligning (28) da og kun da tilfredsstilles af et Talsæt (X, Y, Z, U) med $U \neq 0$, naar $x = \frac{X}{U}$, $y = \frac{Y}{U}$, $z = \frac{Z}{U}$ tilfredsstiller den oprindelige inhomogene Ligning (1); med andre Ord: Mængden af sædvanlige Punkter, hvis homogene Koordinater (X, Y, Z, U) tilfredsstiller (28), er den samme som Mængden af sædvanlige Punkter, hvis inhomogene Koordinater (x, y, z) tilfredsstiller (1). Foruden de egentlige Løsninger (X, Y, Z, U) med $U \neq 0$ vil Ligning (28) imidlertid ogsaa kunne have andre egentlige Løsninger, nemlig saadanne hvor $U = 0$; disse sidste (eventuelle) Løsninger $(X, Y, Z, 0)$ kan karakteriseres derved, at (X, Y, Z) skal være en egentlig Løsning til den Ligning $AX^2 + BY^2 + CZ^2 + 2DYZ + 2EZX + 2FXY = 0$, der fremkommer af (28) ved at sætte $U = 0$. – Vi siger om Ligning (28), at den naar vi benytter homogene Koordinater $(X\,Y\,Z\,U)$ „svarer til" Ligning (1) i inhomogene Koordinater, og vi vedtager, at den „sædvanlige" Keglesnitsflade, der i inhomogene Koordinater fremstilles ved Ligning (1), naar vi benytter det udvidede Punktbegreb, skal siges, foruden sine sædvanlige Punkter, ogsaa at indeholde de (eventuelle) uendelig fjerne Punkter, hvis homogene Koordinater $(X\,Y\,Z\,0)$ tilfredsstiller den til (1) svarende homogene Ligning (28). (Lad os straks tilføje den Bemærkning, at de (eventuelle) uendelig fjerne Punkter, vi gennem denne Vedlægt tillægger en vilkaarligt given sædvanlig Keglesnitsflade, som man let viser (se Opg. 96), er de samme, uafhængigt af hvilket retvinklet Koordinatsystem (x, y, z) der er lagt til Grund). – Ganske som ved tidligere Undersøgelser af tilsvarende Natur føres

vi her ved Behandlingen af Keglesnitsflader i homogene Koordinater til (foruden at tillægge de tidligere „sædvanlige" Keglesnitsflader visse uendelig fjerne Punkter) ogsaa at foretage en Udvidelse af selve Begrebet Keglesnitsflade; vi fastsætter ved Definition, at der, naar Talen er om en Keglesnitsflade i homogene Koordinater, derved skal forstaas enhver Punktmangde, der er geometrisk Sted for Punkter, hvis Koordinater (X, Y, Z, U) tilfredsstiller en homogen Ligning af 2den Grad

$$AX^2+BY^2+CZ^2+2DYZ+2EZX+2FXY+2GXU+2HYU+2IZU+KU^2=0,$$

hvor ikke alle 10 Koefficienter $A, B, \ldots K$ er Nul. Herved faar vi foruden de tidligere (sædvanlige) Keglesnitsflader, der svarer til de Tilfælde, hvor ikke alle 6 Koefficienter A, B, C, D, E, F er Nul, yderligere følgende Flader med, nemlig 1) hvis $A=B=C=D=E=F=0$, men ikke alle tre Tal G, H, I er Nul, Fladen

$$U(2GX+2HY+2IZ+KU)=0,$$

der bestaar af to Planer, nemlig den sædvanlige Plan $2GX+2HY+2IZ+KU=0$ og Rummets uendelig fjerne Plan $U=0$, og 2) hvis ikke blot $A=B=C=D=E=F=0$, men ogsaa $G=H=I=0$ (og følgelig $K\neq 0$) Ligningen

$$KU^2=0,$$

der bestemmer „to sammenfaldende" Planer, nemlig Rummets uendelig fjerne Plan (taget to Gange med). Vi tilføjer,

at vi ved et passende Valg af Koordinatsystemet kan fremstille enhver Keglesnitsflade ved en Ligning enten af Formen $AX^2+BY^2+CZ^2+KU^2=0$ eller af Formen $AX^2+BY^2+2JZU=0$, hvor ikke alle fire Koefficienter A, B, C, K eller alle tre Koefficienter A, B, J er Nul; thi vi ved jo, at enhver sædvanlig Keglesnitsflade kan fremstilles paa en af disse to Former, hvor (A, B, C) henholdsvis (A, B) er egentlige Talsat, og er i den første af de to Ligninger $A=B=C=0$ og følgelig $K \neq 0$, fremstiller denne Ligning Rummets uendelig fjerne Plan taget to Gange med, medens den anden nye Type af Keglesnitsflade – to Planer, hvoraf den ene er en sædvanlig Plan, den anden den uendelig fjerne Plan – er indbefattet i Ligningen $AX^2+BY^2+2JZU=0$, nemlig for $A=B=0, J\neq 0$, svarende til at vi har valgt den sædvanlige i Keglesnitsfladen indeholdte Plan til XY-Plan, hvorved den jo faar Ligningen $Z=0$.

Vi gaar nu over til at undersøge, hvilke uendelig fjerne Punkter de sædvanlige Keglesnitsflader indeholder (eller anderledes udtrykt, hvilke uendelig fjerne Punkter vi gennem den ovenfor brugte Vedtægt har tillagt de sædvanlige Keglesnitsflader). Inden vi gaar over til at behandle de egentlige Keglesnitsflader, vil vi forudskikke en Undersøgelse af Kegleflader og Cylinderflader. Lad os først betragte en Kegleflade, som vi vil antage har sit Toppunkt i Begyndelsespunktet og som følgelig i inhomogene Koordinater fremstilles ved en Ligning af Formen

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy=0;$$

gaar vi over til homogene Koordinater (X, Y, Z, U), faar Keglefladen Ligningen

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 + 2DYZ + 2EZX + 2FXY = 0,$$

hvori Leddene med U alle mangler. Idet de egentlige Løsninger (X, Y, Z) til Ligningen i homogene Koordinater er de samme som de egentlige Løsninger (x, y, z) til Ligningen i inhomogene Koordinater, bestemmer disse egentlige Løsninger (X, Y, Z), opfattet som inhomogene Koordinater, os netop alle, fra Begyndelsespunktet $(0, 0, 0)$ forskellige, sædvanlige Punkter paa Keglefladen; heraf følger umiddelbart (ud fra Definitionen paa de homogene Koordinater $(X, Y, Z, 0)$ til et uendelig fjernt Punkt (**68**)), at Keglefladens uendelig fjerne Punkter er de uendelig fjerne Punkter, der bestemmes ved Keglefrembringernes Heldninger, altsaa netop er Keglefrembringernes uendelig fjerne Punkter.

Vi betragter derefter en Cylinderflade, hvis Frembringerheldning er vinkelret paa XY-Planen, og som følgelig i inhomogene Koordinater fremstilles ved en Ligning af Formen

$$Ax^2 + By^2 + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + K = 0;$$

gaar vi over til homogene Koordinater, faar Cylinderfladen Ligningen

$$AX^2 + BY^2 + 2FXY + 2GXU + 2HYU + KU^2 = 0.$$

Vi ser for det første, at Cylinderfladen indeholder det uendelig fjerne Punkt $P:(0,0,1,0)$ bestemt ved Frembringernes Heldning; endvidere ses, at hvis $Q:(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ er et vilkaarligt (sædvanligt eller uendelig fjernt) fra $P:(0,0,1,0)$ forskelligt Punkt paa Cylinderfladen, vil denne Flade indeholde hele den rette Linie, der gaar gennem Punkterne P og Q; thi et vilkaarligt Punkt paa Linien PQ har jo (se Opg. 65) sine Koordinater bestemt ved

$$X=0\cdot s+\alpha t,\quad Y=0\cdot s+\beta t,\quad Z=s+\gamma t,\quad U=0\cdot s+\delta t,$$

hvor (s,t) er et vilkaarligt egentligt Talpar, og disse Tal X, Y, Z, U ses jo umiddelbart at tilfredsstille den homogene Ligning. Cylinderfladen bestaar følgelig (hvis den da overhovedet indeholder andre Punkter end $(0,0,1,0)$) af rette Linier gennem $(0,0,1,0)$; en Cylinderflade kaldes derfor, naar man benytter homogene Koordinater, d. v. s. regner Rummets uendelig fjerne Punkter med, for en Kegleflade med uendelig fjernt Toppunkt.

Vi vender os nu til Betragtning af de egentlige Keglesnitsflader.

I. Ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ har i homogene Koordinater Ligningen $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}-U^2=0$; den indeholder følgelig intet som helst uendelig fjernt Punkt, da jo Ligningen $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=0$ ikke har nogen egentlig Løsning (X,Y,Z).

II. Hyperboloiden med ret Nat $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ har i homogene Koordinater Ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - u^2 = 0.$$

Hyperboloidens uendelig fjerne Punkter $(x, y, z, 0)$ er følgelig karakteriseret derved, at (x, y, z) er en vilkaarlig egentlig Løsning til Ligningen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. Hyperboloiden indeholder følgelig uendelig mange uendelige fjerne Punkter bestemte ved Heldningerne af Frembringerne paa Hyperboloidens Heldningskegle $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. Idet som vist i 92 de rette Linier i ethvert af de to paa Hyperboloiden beliggende Liniesystemer (20) og (23) er parvis parallele med Frembringerne paa Heldningskeglen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, kan Hyperboloidens uendelig fjerne Punkter ogsaa karakteriseres som de uendelig fjerne Punkter paa de rette Linier i et (ligegyldigt hvilket) af Hyperboloidens to Liniesystemer. Idet der, som nævnt, i hvert af de to Liniesystemer findes een og kun een ret Linie parallel med en given Frembringer paa Heldningskeglen, gaar der gennem ethvert af Hyperboloidens uendelig fjerne Punkter een og kun een ret Linie i hvert af de to Systemer; den almindelige Sætning, vi tidligere (dengang vi kun opererede med Rummets sædvanlige Punkter) bevisk, nemlig: gennem hvert Punkt paa Hyperboloiden gaar der een og kun een Linie i hvert System, forbliver altsaa almengyldig, ogsaa naar vi regner Hyperboloidens uendelig fjerne Punkter med.

III: Hyperboloiden med to Nap $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, har i homogene Koordinater Ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - u^2 = 0;$$

Hyperboloidens uendelig fjerne Punkter bestemmes følgelig

ved Koordinaterne $(X, Y, Z, 0)$, hvor (X, Y, Z) er en vilkaarlig egentlig Løsning til Ligningen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. De uendelig fjerne Punkter paa Hyperboloiden med to Net bestemmes altsaa (ligesom ved Hyperboloiden med eet Net) ved Heldningerne af Frembringerne paa Heldningskeglen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

IV: Den elliptiske Paraboloide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2z}{c} = 0$ har i homogene Koordinater Ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2zu}{c} = 0.$$

Skærer vi med den uendelig fjerne Plan $u = 0$, finder vi Paraboloidens (eventuelle) uendelig fjerne Punkter $(X, Y, Z, 0)$ bestemt derved, at (X, Y, Z) skal være en egentlig Løsning til Ligningen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$; vi finder herigennem $(X, Y, Z) = (0, 0, Z)$, hvor $Z \neq 0$. Den elliptiske Paraboloide indeholder følgelig kun eet uendelig fjernt Punkt, nemlig Punktet $(0, 0, 1, 0)$ bestemt ved Z-Aksens Heldning.

V: Den hyperbolske Paraboloide $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{2z}{c} = 0$ har i homogene Koordinater Ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{2zu}{c} = 0.$$

Paraboloidens uendelig fjerne Punkter bestemmes følgelig ved Koordinaterne $(X, Y, Z, 0)$, hvor (X, Y, Z) er en vilkaarlig egentlig Løsning til Ligningen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, hvoraf fremgaar, at den hyperbolske Paraboloide indeholder uendelig mange uendelig fjerne Punkter, bestemte ved Heldningerne af de rette Linier i de to Heldningsplaner $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ og $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$; med andre Ord: Paraboloidens uendelig fjerne

Punkter er Punkterne paa de to uendelig fjerne rette Linier, der ligger henholdsvis i den ene og den anden af de to Heldningsplaner. Paraboloiden indeholder altsaa (naar vi regner de uendelig fjerne Punkter med) foruden de tidligere fundne (ved Ligningerne (25) og (26) bestemte) sedvanlige rette Linier, der paa homogen Form skrives

$$(31^a)\quad \begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\beta Z \\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=\alpha\frac{2U}{c} \end{cases} \qquad \text{og} \qquad \begin{cases} \gamma\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\delta\frac{2U}{c} \\ \delta\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=\gamma Z, \end{cases} \quad (31^b)$$

og hvor (α,β) og (γ,δ) er egentlige Parameterpar med henholdsvis $\beta\neq 0$ og $\gamma\neq 0$, endnu to rette Linier, nemlig de to uendelig fjerne Linier

$$(32^a)\quad \begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0 \\ U=0 \end{cases} \qquad \text{og} \qquad \begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \\ U=0. \end{cases} \quad (32^b)$$

Disse to Linier (32^a) og (32^b) indordner sig paa naturlig Maade henholdsvis i Systemet (31^a) og (31^b), nemlig svarende henholdsvis til de (tidligere utilladelige) egentlige Parameterpar $(\alpha,0)$ og $(0,\delta)$. I homogene Koordinater gælder altsaa den Sætning, at (31^a) og (31^b) fremstiller samtlige rette Linier paa den hyperbolske Paraboloide og hver Linie kun een Gang, naar de homogene Parameterpar (α,β) og (γ,δ) gennemløber alle mulige egentlige Talpar. — Ligesom for Hyperboloiden med eet Net gælder ogsaa for den hyperbolske Paraboloide stadig Sætningen: gennem ethvert Punkt paa Fladen gaar der een og kun een Linie i hvert af Fladens

to Liniesystemer; thi betragter vi et vilkaarligt af Paraboloidens uendelig fjerne Punkter, f. Eks. et beliggende paa den uendelig fjerne Linie i Heldningsplanen $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$, vil der, hvis det netop er Z-Aksens uendelig fjerne Punkt (altsaa bestemt ved Heldningen af Skæringslinien mellem Heldningsplanerne), igennem dette Punkt gaa Paraboloidens to uendelig fjerne Linier (32^a) og (32^b), tilhørende henholdsvis Systemerne (31^a) og (31^b), og ingen andre Linier af disse Systemer, medens der, hvis Punktet ikke netop er Punktet $(0,0,1,0)$, gaar een sædvanlig ret Linie tilhørende Systemet (31^b), samt den uendelig fjerne rette Linie tilhørende Systemet (31^a), d. v. s. Linien (32^a), igennem det.

94. En Keglesnitsflades Skæring med ret Linie og Plan i homogene Koordinater. Lad os skære en vilkaarlig Keglesnitsflade

$$(33)\quad AX^2+BY^2+CZ^2+2DYZ+2EZX+2FXY+2GXU+2HYU+2IZU+KU^2=0$$

med en vilkaarlig ret Linie, som vi skriver paa Parameterform (se Opg. 65)

$$(34)\quad X=\alpha_1 s+\beta_1 t,\quad Y=\alpha_2 s+\beta_2 t,\quad Z=\alpha_3 s+\beta_3 t,\quad U=\alpha_4 s+\beta_4 t,$$

hvor $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ og $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ er homogene Koordinater til to vilkaarlige af Liniens Punkter, og hvor (s, t) er et egentligt (homogent) Parameterpar. Indsætter vi de ved (34) givne Udtryk for X, Y, Z, U i Keglesnitsfladens Ligning, faar vi til Bestemmelse af det homogene Parameterpar (s, t) svarende til de (eventuelle) Skæringspunkter en Ligning af Formen

(35) $$Ls^2 + 2Mst + Nt^2 = 0.$$

Her kan nu (nøjagtig som da vi i Planen skar et Keglesnit med en ret Linie i homogene Koordinater) indtræffe forskellige Tilfælde, nemlig: 1) Er $L = M = N = 0$, er Ligning (35) tilfredsstillet af samtlige egentlige Parameterpar (s, t); den rette Linie ligger helt paa Keglesnitsfladen. — Er dernæst ikke alle tre Tal L, M, N lig Nul, skelner vi mellem Tilfældene: 2) $LN - M^2 > 0$; her har (35) ingen egentlige Løsninger; Keglesnitsfladen har intet Punkt fælles med den rette Linie. 3) $LN - M^2 < 0$; de egentlige Løsninger (s, t) til (35) falder her i to Grupper $k(s_1, t_1)$ og $k(s_2, t_2)$, hvor (s_1, t_1) og (s_2, t_2) ikke er proportionale; her er to (forskellige) Skæringspunkter. 4) Er endelig $LN - M^2 = 0$ (uden at $L = M = N = 0$), finder vi et fælles Punkt, eller som vi af algebraiske Grunde hellere vil sige, to sammenfaldende Skæringspunkter. — Idet vi sammenfatter de fundne Resultater, kommer vi (nøjagtig som ved Skæring mellem ret Linie og Keglesnit indenfor den plane Geometri) til Sætningen: En ret Linie, der ikke er helt beliggende paa en Keglesnitsflade, har enten intet som helst Punkt fælles med Fladen eller ogsaa skærer den Fladen i netop to (forskellige eller sammenfaldende) Punkter. Idet vi i det Tilfælde, hvor den rette Linie er helt beliggende paa Fladen (hvor altsaa $Ls^2 + 2Mst + Nt^2$ er et Nulpolynomium), om ethvert (sædvanligt eller uendelig fjernt) Punkt P paa den rette Linie siger, at Linien skærer Fladen i to (fler end et) i P sammenfaldende Punkter, gælder der stadig ganske som ved Skæring mellem ret Linie og

Keglesnit indenfor den plane Geometri) Sætningen: Den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for at en ret Linie gennem et vilkaarligt Punkt P paa en Keglesnitsflade skærer Fladen i to i Punktet P sammenfaldende Punkter, bestaar deri, at Linien enten er helt beliggende paa Fladen eller kun har Punktet P fælles med Fladen.

Vi gaar nu over til at søge Skæring mellem en vilkaarlig given Keglesnitsflade og en vilkaarlig given Plan. Idet vi først betragter det Tilfælde, hvor den givne Skæringsplan er en sædvanlig Plan, lader vi os Koordinatsystemet valgt saaledes, at denne Plan er XY-Plan; herved faar Snitplanen Ligningen $Z = 0$, medens vi lader os den givne Keglesnitsflade (henført til det valgte Koordinatsystem) fremstillet ved Ligningen (33). Indsætter vi i Fladens Ligning $Z = 0$, faar vi Ligningen

$$(36) \quad AX^2 + BY^2 + 2FXY + 2GXU + 2HYU + KU^2 = 0,$$

hvilken Ligning øjensynlig bestemmer os de homogene plane Koordinater (X, Y, U) til de søgte Skæringspunkter, henført til det plane Koordinatsystem (XY). Vi skelner nu mellem to Tilfælde: 1) Koefficienterne A, B, F, G, H, K i Ligning (36) er alle Nul; Ligningen tilfredsstilles her af ethvert Koordinatsæt (X, Y, U), d. v. s. Planen er helt indeholdt i Keglesnitsfladen, der følgelig bestaar af to (forskellige eller sammenfaldende) Planer, hvoraf Snitplanen er den ene. 2) Koefficienterne A, B, F, G, H, K er ikke alle Nul. Ligning (36) fremstiller

her et (egentligt eller udartet) Keglesnit. – Der gælder altsaa naar vi regner med homogene Koordinater (i Modsætning til hvad der fandt Sted i inhomogene Koordinater) den simple Sætning: Enhver sædvanlig Plan, der ikke er helt indeholdt i en Keglesnitsflade, skærer Fladen i et Keglesnit. – Betragter vi skulleleg det Tilfælde, hvor Snitplanen er Rummets uendelig fjerne Plan, finder vi, naar vi skærer den vilkaarlige Keglesnitsflade (33) med den nævnte Plan $U=0$, til Bestemmelse af Skæringspunkterne $(X, Y, Z, 0)$ Ligningen

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 + 2DYZ + 2EZX + 2FXY = 0.$$

Er i denne sidste Ligning samtlige Koefficienter A, B, C, D, E, F lig Nul, tilfredsstilles Ligningen af ethvert Koordinatsæt $(X, Y, Z, 0)$, d. v. s. den uendelig fjerne Plan er helt indeholdt i Keglesnitsfladen, der følgelig bestaar af to (forskellige eller sammenfaldende) Planer, af hvilke $U=0$ er den ene. Er derimod ikke alle 6 Koefficienter Nul, vil de søgte uendelig fjerne Skæringspunkter være de uendelig fjerne Punkter paa Keglefladen $AX^2 + BY^2 + CZ^2 + 2DYZ + 2EZX + 2FXY = 0$; idet vi nu naturligt vedtager at kalde Skæringskurven mellem den uendelig fjerne Plan $U=0$ og en Keglefladen af 2den Orden (der ikke helt indeholder den uendelig fjerne Plan) for et i den uendelig fjerne Plan beliggende Keglesnit, kan vi i den ovenfor fundne Sætning vedrørende Skæring mellem en sædvanlig Plan og en Keglesnitsflade uden videre udelade Ordet „sædvanlig", altsaa udtale den almengyldige Sætning: Enhver Plan, der ikke er helt indeholdt i en Keglesnitsflade,

skærer Fladen i et Keglesnit. Man forstaar gennem denne Sætning umiddelbart, hvorfor en algebraisk Flade af 2den Orden har faaet Navnet en Keglesnitsflade.

Som et Prøveseksempel paa Skæring mellem Plan og Keglesnitsflade vil vi undersøge Skæringskurven mellem Hyperboloiden med to Nap $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = U^2$ og en vilkaarlig Plan gaaende gennem et sædvanligt Punkt P paa Hyperboloiden; idet denne Plan ikke er helt indeholdt i Hyperboloiden, ved vi for det første om Skæringskurven, at den er et (egentligt eller udartet) Keglesnit S. For nærmere at undersøge Beskaffenheden af dette Keglesnit betragter vi sammen med Hyperboloiden den Kegleflade K, der fremkommer af Heldningskeglen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ ved at parallelforskyde denne Kegleflade saaledes, at dens Toppunkt falder i det givne Punkt P. Vi skelner nu mellem tre Tilfælde: 1) Skæringsplanen gennem P har ikke andre Punkter fælles med Keglefladen K end dens Toppunkt P; idet Planen følgelig ikke indeholder nogen Linie parallel med nogen Frembringer i Heldningskeglen, vil denne Plan ikke have noget uendelig fjernt Punkt fælles med Hyperboloiden; thi Hyperboloidens uendelig fjerne Punkter er jo netop bestemt ved Heldningerne af Heldningkeglens Frembringere. Snitkeglesnittet S indeholder altsaa intet uendelig fjernt Punkt og er følgelig en Ellipse, der dog specielt (nemlig naar Snitplanen er Tangentplan til Fladen i P) kan udarte til kun at bestaa af det ene Punkt P. 2) Skæringsplanen gennem P skærer Keglefladen K i een og kun een Frembringer F, med andre Ord: Skæringsplanen er Tangentplan til Keglefladen langs Frembringeren F. Planen har her et

uendelig fjernt Punkt Q falles med Hyperboloidens, nemlig det uendelig fjerne Punkt Q, der bestemmes ved Heldningen af Frembringeren F. Det gennem P gaaende Keglesnit I indeholder altsaa et uendelig fjernt Punkt Q og er følgelig (da det jo ikke kan udarte til to – forskellige eller sammenfaldende – rette Linier gennem Q, idet Hyperboloiden jo ingen rette Linier indeholder) en Parabel, hvis Akse er parallel med Frembringeren F. [3] Endelig har vi det Tilfælde, hvor Skæringsplanen gennem P skærer Keglefladen K i to forskellige Frembringere F_1 og F_2. Keglesnittet indeholder her to uendelige fjerne Punkter Q_1 og Q_2, nemlig de to Punkter, der bestemmes henholdsvis ved Heldningen af F_1 og ved Heldningen af F_2; Keglesnittet er følgelig (da det jo ikke bestaar af to rette Linier) en Hyperbel, hvis Asymptoter er parallele med henholdsvis F_1 og F_2. Lad os undersøge denne Hyperbels Beliggenhed lidt nærmere. Vi betragter hertil (se Fig. 49, hvor Papirets Plan tænkes at fremstille Snitplanen) de to gennem Hyperbelpunktet P gaaende i Snitplanen beliggende Frembringere F_1 og F_2 paa Keglefladen K, om hvilke vi ved, at de er parallele med henholdsvis den ene og den anden af Hyperblens to Asymptoter. Af de fire Vinkelrum, hvori F_1 og F_2 deler Planen, tilhører de to modstaaende, paa Figuren f. Eks. de skraverede, det Indre af Keg-

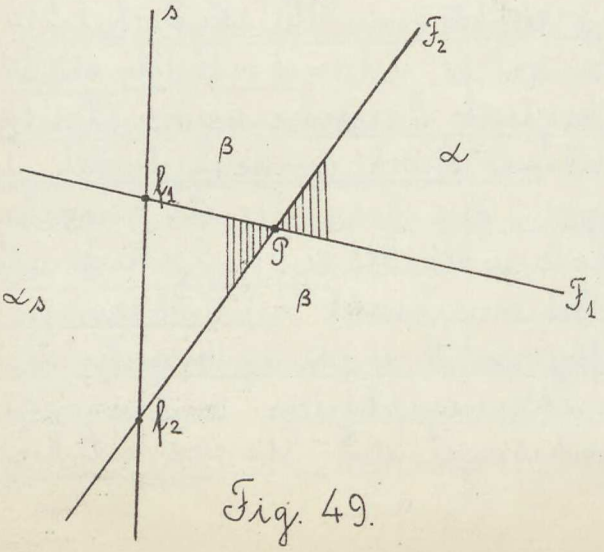


Fig. 49.

kefladen K. Disse to (skraverede) Vinkelrum adskiller vi fra hinanden ved at betragte Skæringslinien s mellem Snitplanen og YZ-Planen (hvilke to Planer ikke er parallele, da en Plan gennem P ∥ YZ-Planen jo kun har Punktet P fælles med Keglefladen K, medens Snitplanen skærer K i to Frembringere); betegner vi de Punkter, hvori denne Skæringslinie s (der ikke er parallel med F_1 eller F_2, da YZ-Planen jo ikke indeholder nogen Linie parallel med nogen af Keglefrembringerne) skærer F_1 og F_2, med henholdsvis f_1 og f_2, vil det endelige Liniestykke $f_1 f_2$ ligge <u>indenfor</u> Keglefladen K, da det jo er Korde i den Ellipse, hvori YZ-Planen skærer Keglefladen; vi betegner nu det af de to skraverede Vinkelrum, der indeholder $f_1 f_2$, ved α_s, det andet ved α, medens de to udenfor Keglen liggende Vinkelrum betegnes ved β. Om de to Hyperbelgrene ved vi (ifølge 72), at den Gren, der indeholder P, G_g, (bortset fra Punktet P selv) er beliggende helt i to indbyrdes modstaaende af de fire Vinkelrum, hvori F_1 og F_2 deler Planen, medens den anden Hyperbelgren, G, ligger helt i et af de to andre Vinkelrum; vi vil bevise, <u>at Hyperbelgrenen G_g (bortset fra Punktet P selv) er beliggende i Vinkelrummene β, medens Grenen G ligger i α_s, udenfor $f_1 f_2$</u>. Vi bemærker hertil først, at da YZ-Planen ikke skærer Hyperboloiden, skærer s heller ikke Hyperbelen, hvis Grene G_g og G følgelig ligger paa hver sin Side af s (hvoraf, i Parenthes bemærket, atter følger, <u>at de ligger paa hvert sit af Hyperboloidens to Net</u>); Grenen G ligger altsaa helt i den ved s afgrænsede Halvplan, der ikke indeholder Punktet P, hvoraf straks følger, at G ikke kan ligge i Vinkelrummet α; men

G_1 kan heller ikke være beliggende i noget af Vinkelrummene β, da en Hyperbelgren, hvis Asymptoter er parallele med F_1 og F_2, øjensynlig ikke kan forløbe helt i noget af disse to Vinkelrum β uden at skære s. Det af de fire Vinkelrum, der helt indeholder Grenen G_1, maa følgelig være Vinkelrummet α_s, og Grenen G_2 maa altsaa (bortset fra Punktet P selv) forløbe i Vinkelrummene β (se Fig. 50). Den Hyperbelgren G_1, der ikke indeholder P (og som følgelig ligger paa det af Hyperboloidens to Kæ, der ikke gaar gennem P) er altsaa beliggende <u>indenfor</u> Keglefladen K, medens den Hyperbelgren G_2, der indeholder P (bortset fra Punktet P selv) ligger <u>udenfor</u> Keglefladen K. Da dette gælder for <u>ethvert</u> Hyperbelsnit gennem P, indser man umiddelbart (f. Eks. ved at skære med alle Planer gennem en fast Linie l, der gaar gennem P og iøvrigt er beliggende i det Indre af Keglefladen K) Rigtigheden af følgende Sætning, som vi senere vil faa Brug for: <u>Parallelforskydes Hyperboloidens Heldningskegle, saaledes at dens Toppunkt falder i et vilkaarligt</u>

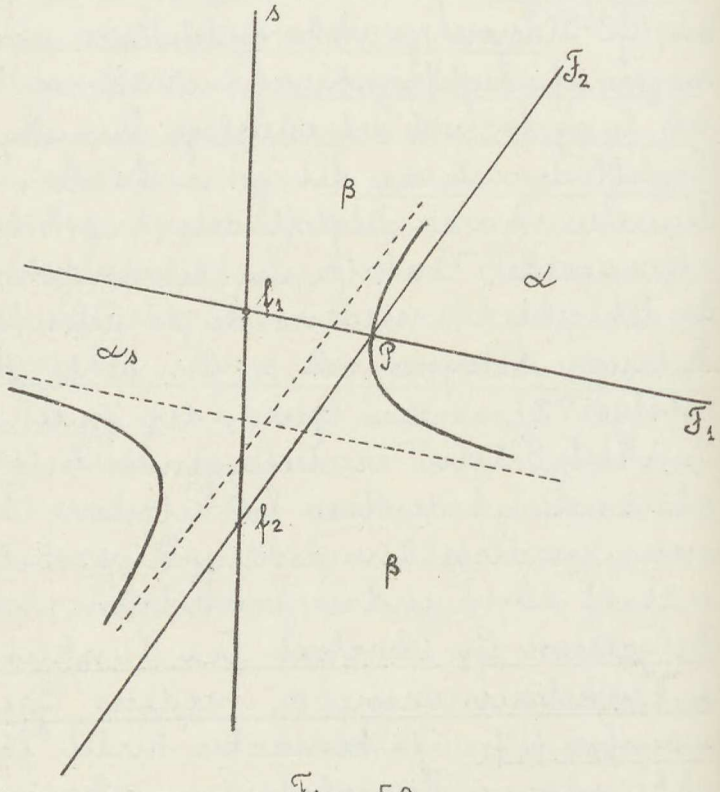


Fig. 50.

(sædvanligt) Punkt P paa Hyperboloiden, vil det af Hyperboloidens to Kat, der ikke indeholder P, være beliggende helt i det Indre af denne Keglefladen, medens det andet Kat (det, der indeholder P) bortset fra Punktet P selv vil ligge helt udenfor Keglefladen.

95. Tangentplan til en Keglesnitsflade i et uendelig fjernt Punkt. Lad $P: (x_0, y_0, z_0, u_0)$ være et vilkaarligt (sædvanligt eller uendelig fjernt) Punkt paa en Keglesnitsflade

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy+2Gxu+2Hyu+2Izu+Ku^2=0,$$

og lad os søge de (eventuelle) rette Linier gennem P, der skærer Fladen i to i Punktet P sammenfaldende Punkter. Vi skriver herlil en vilkaarlig ret Linie gennem P paa Parameterform

$$x=x_0 s+\alpha t, \quad y=y_0 s+\beta t, \quad z=z_0 s+\gamma t, \quad u=u_0 s+\delta t,$$

hvor $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ er Koordinater til et vilkaarligt fra P forskelligt Punkt Q paa den betragtede rette Linie. Indsætter vi disse Udtryk i Keglefladens Ligning, finder vi til Bestemmelse af det homogene Parameterpar (s, t) en Ligning af Formen

$$2Mst + Nt^2 = 0, \tag{37}$$

hvor Koefficienten M øjensynlig er et lineært homogent Polynomium i Koordinaterne $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ til Punktet Q, d. v. s. har Formen

(38) $$M = a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta,$$

hvor Koefficienterne a, b, c, d kun afhænger af Keglesnitsfladens Konstanter $A, B, \ldots$ og af Koordinaterne (x_0, y_0, z_0, u_0) til det givne Punkt P. Den fundne Ligning (37) er, saaledes som vi paa Forhaand vidste at det maatte være Tilfældet, tilfredsstillet af Parameterparret $(s, 0)$ til Punktet P. Skal Linien PQ skære Fladen i to i P sammenfaldende Punkter, kræves hertil som nødvendig og tilstrækkelig Betingelse at $M = 0$, altsaa at

(39) $$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta = 0.$$

Vi skelner nu mellem to Tilfælde. [1] $\underline{a = b = c = d = 0}$; Ligning (39) er her tilfredsstillet af Koordinaterne $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ til ethvert Punkt Q i Rummet; $\underline{\text{Punktet } P \text{ er følgelig et Dobbeltpunkt paa Fladen}}$, d. v. s. Fladen skæres af $\underline{\text{enhver}}$ ret Linie PQ gennem P i to i P sammenfaldende Punkter; idet en ret Linie gennem P da og kun da skærer Fladen i to i Punktet P sammenfaldende Punkter, naar den rette Linie enten kun har Punktet P fælles med Fladen eller er helt beliggende paa Fladen, er Betingelsen for at P er et Dobbeltpunkt geometrisk udtrykt øjensynlig den, at Fladen enten kun indeholder det ene Punkt P eller bestaar af rette Linier gennem P, med andre Ord: $\underline{P \text{ er da og kun da et Dobbeltpunkt, naar Fladen er en Kegleflade med Toppunkt i } P}$. [2] $\underline{\text{Er ikke alle fire Tal } a, b, c, d \text{ lig Nul,}}$ er den Betingelse (39), der er paalagt det fra P forskellige Punkt $Q: (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ for at den rette Linie PQ skal ska-

re Fladen i to i P sammenfaldende Punkter, den at Q skal være beliggende i Planen

$$(40) \qquad aX + bY + cZ + dU = 0.$$

Vi vil bevise, at denne Plan gaar gennem P; dette kunde vi naturligvis bevise ved simpelthen at udregne Koefficienterne a, b, c, d og derefter eftervise, at (40) tilfredsstilles af P's Koordinater (x_0, y_0, z_0, u_0); simplere er det imidlertid at benytte følgende Betragtning, hvorved al Regning undgaas: Er det fra P forskellige Punkt Q et Punkt i Planen (40), altsaa et saadant Punkt, at den rette Linie PQ skærer Fladen i to i P sammenfaldende Punkter, vil et vilkaarligt, fra P forskelligt Punkt Q' paa den rette Linie PQ ligeledes have den samme Egenskab, d. v. s. Linien PQ' vil ogsaa skære Fladen i to i P sammenfaldende Punkter (da jo Linierne PQ og PQ' er den samme Linie); Punktet Q' vil følgelig ogsaa ligge i Planen (40); men heraf følger, at hele den rette Linie PQ ligger i Planen (40), da jo en Plan, hvis den gaar gennem blot to Punkter Q og Q' paa en ret Linie, indeholder hele Linien; altsaa ligger specielt Punktet P i Planen (40), saaledes som vi skulde vise. De rette Linier PQ, der skærer Fladen i to i P sammenfaldende Punkter, er altsaa de rette Linier, der forbinder Punktet P med et vilkaarligt fra P forskelligt Punkt Q i den gennem P gaaende Plan (40); med andre Ord, de omhandlede Linier PQ er netop alle de Linier, der gaar gennem P og ligger i Planen (40); denne sidste Plan kaldes Fladens Tangentplan i det betragtede Punkt P. – I et sædvanligt (d. v. s. ikke uendelig fjernt) Punkt af

en Keglesnitsflade er (som man umiddelbart kan vise udfra Definitionen) den herved bestemte Tangentplan (40) den samme sædvanlige Plan, som den tidligere i inhomogene Koordinater bestemte Tangentplan. – Vi gaar nu over til at bestemme Tangentplanen i de forskellige uendelige fjerne Punkter paa de forskellige egentlige Keglesnitsflader, af hvilke Flader ingen indeholder noget Dobbeltpunkt. Tangentplanen i et saadant Punkt kunde vi naturligvis bestemme (i Analogi med den Maade, paa hvilken vi i den plane Geometri bestemte Tangenten i Hyperblens uendelig fjerne Punkter og i Parablens uendelig fjerne Punkt) ved at udregne Koefficienterne a, b, c, d i Ligningen (40), der bestemmer os Tangentplanen i et vilkaarligt Punkt (ikke Dobbeltpunkt) paa en vilkaarlig Keglesnitsflade, og derefter i denne Ligning for Fladens Konstanter A, B, . . . K indsatte Koefficienterne i den betragtede egentlige Keglesnitsflades Ligning samt for Koordinaterne (x_0, y_0, z_0, u_0) til Punktet P indsatte Koordinaterne til det betragtede uendelig fjerne Punkt. Vi foretrakker imidlertid her, som et Prøvseseksempel i den direkte (geometriske) Behandling af uendelig fjerne Punkter, at bestemme de omhandlede Tangentplaner (altsaa Tangentplanerne i et uendelig fjernt Punkt paa henholdsvis Hyperboloiden med eet Nat, Hyperboloiden med to Nat, den elliptiske og den hyperbolske Paraboloide) gennem simple (geometriske) Betragtninger fremfor ved analytisk Regning.

Lad os begynde med som det simpleste Eksempel at betragte den <u>elliptiske Paraboloide</u> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2zu}{c}$, der kun indeholder <u>eet</u> uendelig fjernt Punkt P, nemlig Z-Aksens uendelig fjerne Punkt P:(0, 0, 1, 0); man indser her

umiddelbart, at Tangentplanen til den elliptiske Paraboloide i dens uendelig fjerne Punkt er den uendelig fjerne Plan $U=0$; thi idet denne Plan kun har det ene Punkt $P:(0,0,1,0)$ fælles med Paraboloiden, vil enhver i denne Plan beliggende gennem P gaaende ret Linie (altsaa enhver uendelig fjern ret Linie gennem P) kun have det ene Punkt P fælles med Fladen og følgelig skære Fladen i to i Punktet P sammenfaldende Punkter.

Vi vender os dernæst til Hyperboloiden med to Net $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=U^2$. Idet P er et vilkaarligt uendelig fjernt Punkt paa Hyperboloiden bestemt ved Heldningen af en Frembringer F paa Hyperboloidens Heldningskegle $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, vil vi bevise, at Tangentplanen til Hyperboloiden i det uendelig fjerne Punkt P netop er Tangentplanen π til Heldningskeglen langs Frembringeren F. Rigtigheden af denne Sætning er øjensynlig bevist (ganske som ovenfor ved den elliptiske Paraboloide), naar vi har eftervist, at den nævnte Tangentplan π til Heldningskeglen langs Frembringeren F ikke har andre (sædvanlige eller uendelig fjerne) Punkter fælles med Hyperboloiden end det uendelig fjerne Punkt P; thi da vil jo enhver ret Linie gennem P beliggende i Planen π kun have det ene Punkt P fælles med Hyperboloiden, altsaa skære denne i to i P sammenfaldende Punkter. At Planen π kun har Punktet P fælles med Hyperboloiden indses saaledes: Idet π er Tangentplan til Heldningskeglen langs en Frembringer, indeholder π intet som helst sædvanligt Punkt indenfor Heldningskeglen, og altsaa yderligere intet sædvanligt Punkt af Hyperboloiden, da denne jo helt omsluttes af sin Heldningskegle; Planen π indeholder imidlertid heller intet

fra P forskelligt uendelig fjernt Punkt P_1 paa Hyperboloiden; thi i saa Fald maatte Π, der jo gaar gennem Begyndelsespunktet, indeholde den Frembringer F_1 paa Heldningskeglen, der har den til Punktet P_1 svarende Heldning, i Modsbrid med at Tangentplanen Π til Heldningskeglen langs Frembringeren F jo ikke indeholder nogen anden Frembringer end F. — Af det foregaaende følger umiddelbart, at den Sætning, som vi tidligere (dengang Talen kun var om Rummets sædvanlige Punkter) beviste for Ellipsoiden, Hyperboloiden med to Nap og den elliptiske Paraboloide, nemlig: Tangentplanen i et vilkaarligt Punkt P af en af disse Flader har kun sit Røringspunkt fælles med Fladen, vedbliver at gælde, ogsaa naar vi regner de uendelig fjerne Punkter med; thi [1] er P et uendelig fjernt Punkt, har vi lige bevist Rigtigheden deraf, og [2] er P et sædvanligt Punkt, ved vi for det første om Tangentplanen Π, at den ikke har andre sædvanlige Punkter fælles med Fladen end Røringspunktet P og for det andet, at de for Fladen og Tangentplanen fælles Punkter danner et Keglesnit (da jo enhver Plan skærer en Keglesnitsflade i et Keglesnit); men heraf følger straks, at P er det eneste for Flade og Tangentplan fælles Punkt, da jo intet Keglesnit, der indeholder eet og kun eet sædvanligt Punkt P, indeholder noget uendelig fjernt Punkt.

Vi vender os dernæst til Betragtning af Hyperboloiden med eet Nap $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = U^2$ og den hyperbolske Paraboloide $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = \frac{2ZU}{c}$. Er P et vilkaarligt uendelig fjernt Punkt paa en af disse to Flader, gaar der gennem dette Punkt (ligesom gennem et hvilket som helst af Fladens Punkter) to og kun to forskellige rette Linier L_1 og L_2, der er

helt beliggende paa Fladen. Heraf følger umiddelbart, at Tangentplanen i P er den Plan, der er bestemt ved at skulle indeholde disse to rette Linier L_1 og L_2; thi idet enhver af disse to Linier gennem P ligger helt paa Fladen og følgelig skærer Fladen i to i P sammenfaldende Punkter, følger umiddelbart af Tangentplanens Definition, at den indeholder dem begge. Vi tilføjer den Bemærkning, at Tangentplanen i det uendelig fjerne Punkt P ikke har noget (sædvanligt eller uendelig fjernt) Punkt udenfor Linierne L_1 og L_2 fælles med Fladen; thi vi ved om Tangentplanen i P (ligesom om enhver Plan), at den skærer Fladen i et Keglesnit, og gennem to hinanden skærende rette Linier og endnu et Punkt i Liniernes Plan kan der ikke lægges noget Keglesnit. — Ogsaa for Hyperboloiden med eet Nøl og den hyperbolske Paraboloide vedbliver altsaa den tidligere (da vi kun opererede med de sædvanlige Punkter) beviste Sætning: Tangentplanen i et vilkaarligt Punkt af Fladen skærer denne i to gennem Røringspunktet gaaende rette Linier, at bevare sin Gyldighed, naar vi lægger det ved Indførelsen af Rummets uendelig fjerne Punkter udvidede Punktbegreb til Grund. — Lad os lidt nærmere betragte Tangentplanen π i et vilkaarligt uendelig fjernt Punkt T af Hyperboloiden med eet Nøl, bestemt ved Heldningen af en Frembringer F paa Hyperboloidens Heldningskegle; gennem Punktet T gaar der to rette Linier beliggende helt paa Fladen, nemlig de to Systemlinier L_1 og L_2, tilhørende hver sit System, der er parallele med Frembringeren F, og ifølge det foregaaende er Tangentplanen π netop den Plan, der gaar gennem disse to Systemlinier. Om denne Plan π har vi tidligere (se **92**) vist, at den gaar gennem Hyperboloidens Centrum, altsaa at den indeholder Frembringeren F; vi vil nu bevise,

at der (i Analogi med hvad vi ovenfor fandt for Hyperboloiden med to Net) gælder den nøjagtigere Sætning: Tangentplanen Π til Hyperboloiden i det uendelig fjerne Punkt P er Tangentplan til Heldningskeglen langs Frembringeren F. Rigtigheden heraf indses umiddelbart saaledes: Dersom Planen Π, om hvilken vi jo ved, at den indeholder Keglefrembringeren F, ikke var Tangentplan til Heldningskeglen langs denne Frembringer, vilde Planen Π skære Heldningskeglen i endnu en Frembringer F_1; følgelig vilde Planen Π foruden Punktet P have endnu et uendelig fjernt Punkt P_1 fælles med Hyperboloiden, nemlig det uendelige fjerne Punkt paa Keglefrembringeren F_1; men dette er i Modstrid med det ovenfor fundne Resultat om at Tangentplanen Π ikke har noget udenfor de to Systemlinier L_1 og L_2 beliggende Punkt P_1 fælles med Hyperboloiden. — For den hyperbolske Paraboloides Vedkommende indser man umiddelbart, at Tangentplanen i det uendelig fjerne Punkt, der bestemmes ved Heldningen af Skæringslinien mellem de to Heldningsplaner, er Rummets uendelig fjerne Plan, (nemlig Planen gennem Fladens to uendelig fjerne rette Linier, hvis Skæringspunkt netop er det omtalte Punkt $(0, 0, 1, 0)$), medens Tangentplanen i ethvert andet uendelig fjernt Punkt paa Paraboloiden er en vis sædvanlig Plan, der er parallel med den ene eller den anden af de to Heldningsplaner, (nemlig gaaende gennem den af Fladens to uendelig fjerne Linier, hvorpaa det givne uendelig fjerne Punkt ligger).

96. Tangentplanens Beliggenhed overfor Keglesnitsfladen. Idet vi atter vender tilbage til kun at operere med Rummets sædvanlige Punkter og følgelig til Benyttelsen af inhomogene Koordinater, afslutter vi vor Gennemgang af Keglesnitsfla-

dernes Theori med (for enhver af de egentlige Regelsnitsfladers Vedkommende) at undersøge, hvorledes Tangentplanen π til Fladen i et vilkaarligt (sædvanligt) af dens Punkter P ligger overfor Fladen. Lad os begynde med at betragte de to Flader, Hyperboloide med ret Axe og hyperbolsk Paraboloide, der indeholder rette Linier. Er P et vilkaarligt Punkt paa en af disse Flader, vil der gennem P gaa to rette Linier L_1 og L_2 helt beliggende paa Fladen og tilhørende hver sit af Fladens to Liniesystemer; Tangentplanen π til Fladen i P er da som bekendt den Plan, der skærer Fladen i disse to rette Linier. Vi vil bevise, at Fladen i den umiddelbare Omegn af Punktet P indeholder Punkter paa begge Sider af Tangentplanen π; herved forstaar vi, nøjagtig udtrykt, at der indenfor enhver selv nok saa lille Kugleflade med Centrum i P findes saa vel Punkter paa Fladen, der er beliggende paa den ene Side af Tangentplanen π, som ogsaa Punkter, der ligger paa den anden Side af Tangentplanen π. Rigtigheden heraf indses umiddelbart saaledes: Lad Q være et vilkaarligt (sædvanligt) Punkt paa en af de to gennem P gaaende Systemlinier L_1 og L_2, f. Eks. paa Linien L_1; da vil der gennem Q foruden L_1 gaa endnu en helt paa Fladen beliggende ret Linie L'_2, nemlig en Linie tilhørende samme System som L_2; denne Linie L'_2 kan ikke være beliggende i Tangentplanen π, da denne Plan jo ikke har andre Punkter fælles med Fladen end de paa L_1 og L_2 beliggende (eller om man vil, fordi L_2 og L'_2 ikke ligger i samme Plan, da de tilhører samme Liniesystem); den paa Fladen beliggende Linie L'_2 skærer følgelig i Punktet Q „igennem" Tangentplanen π, og Fladen indeholder altsaa i den umiddelbare Omegn af Q saa vel Punkter paa den ene som Punkter paa den anden Side af Planen π. Da dette

gælder, hvor nær det paa L_1 beliggende Punkt Q end er valgt ved Punktet P, indeholder Fladen følgelig i enhver nok saa lille Omegn af Punktet P Punkter paa begge Sider af Tangentplanen Π. — Vi skal ikke her gaa nærmere ind paa en Undersøgelse af de to nævnte Keglesnitsfladers Udseende i Omegnen af et vilkaarligt af deres Punkter P, men skal nøjes med som et typisk (omend særlig simpelt) Eksempel at betragte den hyperbolske Paraboloide $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$ i Omegnen af dens Toppunkt O. Idet XY-Planen $z = 0$ skærer denne Flade i de to gennem O gaaende rette Linier $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ og $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, er XY-Planen Fladens Tangentplan i Punktet O; nu er imidlertid Polynomiet $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ positivt i to (indbyrdes modstaaende) Vinkelrum, negativt i de to andre af de fire Vinkelrum nede i XY-Planen, hvori Nullinierne $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ og $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ deler denne Plan; følgelig viser Paraboloidens Ligning $z = \frac{c}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$ umiddelbart, at Paraboloiden ligger over Tangentplanen $z = 0$ i to (indbyrdes modstaaende) af de fire Vinkelrum, under Tangentplanen $z = 0$ i de to andre af de fire Vinkelrum, hvori denne Tangentplan deles af de to rette Linier, i hvilke Paraboloiden skærer Tangentplanen.

Vi vender os derefter til Betragtning af de tre egentlige Keglesnitsflader, Ellipsoide, elliptisk Paraboloide og Hyperboloide med to Nap, for hvilke Tangentplanen Π i et vilkaarligt (sædvanligt) af Fladens Punkter P kun har selve Røringspunktet P fælles med Fladen. For her at undersøge, hvorledes Tangentplanen Π ligger i Forhold til Fladen, benytter vi en Fremgangsmaade, der er fuldstændig analog med den, vi benyttede indenfor den plane Geometri til Undersøgelse af Tangentens Beliggenhed overfor henholdsvis Ellipse, Parabel og Hyperbel. Lad os først betrag-

le Ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Parallelforskyder vi Koordinatsystemet saaledes, at Begyndelsespunktet falder i det vilkaarligt givne Punkt P paa Ellipsoiden, faar Ellipsoiden (da en Parallelforskydning jo ikke forandrer Leddene af 2^{den} Grad) henført til det nye Koordinatsystem en Ligning af Formen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\alpha x+\beta y+\gamma z=0$, eller som vi hellere vil skrive den, idet vi flytter Leddene af anden Grad over paa den anden Side af Lighedstegnet,

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) \tag{40}$$

Her vil Ligningen $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$, som tidligere bevist, fremstille Tangentplanen Π til Ellipsoiden i Begyndelsespunktet P; følgelig vil det lineære Polynomium $\alpha x+\beta y+\gamma z$, naar vi opfatter (x, y, z) som Koordinater til et vilkaarligt Punkt i Rummet, paa en konstant Faktor nær angive Afstanden fra Tangentplanen Π til Punktet (x, y, z). For ethvert Punkt $Q:(x, y, z)$, der tilfredsstiller Ligning (40), d. v. s. som ligger paa Ellipsoiden, vil Afstanden fra Planen Π til Punktet Q derfor paa nær en konstant Faktor være lig med Tallet $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$. Nu er imidlertid Polynomiet $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ positivt i alle Punkter af Rummet alene med Undtagelse af Punktet $P:(0,0,0)$, hvor det er lig med Nul. Polynomiet er altsaa specielt positivt i alle fra P forskellige Punkter paa Ellipsoiden. Afstanden fra Tangentplanen Π til et vilkaarligt fra P forskelligt Punkt Q paa Ellipsoiden har følgelig samme Fortegn, hvilket Punkt Q vi end betragter, d. v. s. Ellipsoiden ligger, bortset alene fra Røringspunktet P, helt paa den ene Side af Tangentplanen Π. — Vi vender os dernæst til den

elliptiske Paraboloide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$; vi parallelforskyder ligesom ovenfor Koordinatsystemet saaledes, at Begyndelsespunktet falder i det vilkaarligt givne Punkt P paa Paraboloiden; henført til dette nye System vil Paraboloiden fremstilles ved en Ligning af Formen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ eller, idet vi flytter Leddene af 2^{den} Grad over paa den anden Side af Lighedstegnet, ved Ligningen

$$(41) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = -\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right),$$

hvor $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ fremstiller Tangentplanen π til Paraboloiden i Begyndelsespunktet P. Følgelig vil for ethvert Punkt Q paa Paraboloiden, d. v. s. for ethvert Punkt Q, hvis Koordinater (x, y, z) tilfredsstiller (41), Afstanden fra Tangentplanen π til Punktet Q paa nær en konstant Faktor være lig med Tallet $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$. Nu er imidlertid Polynomiet $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ positivt i alle de Punkter i Rummet, i hvilke det er $\neq 0$; Tallet $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ er altsaa positivt i ethvert Punkt paa Paraboloiden bortset alene fra de Punkter, der har Afstanden Nul fra Tangentplanen π, d. v. s. som ligger i Tangentplanen π; da nu Røringspunktet P jo er det eneste Punkt paa Paraboloiden, som ligger i Tangentplanen π, vil $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ følgelig være positivt i alle fra P forskellige Punkter paa Paraboloiden. Afstanden fra Tangentplanen π til et vilkaarligt fra P forskelligt Punkt Q paa Fladen har altsaa samme Fortegn, uafhængigt af hvilket Punkt Q paa Fladen vi betragter, d. v. s. den elliptiske Paraboloide ligger, bortset alene fra Røringspunktet P, helt paa en og samme Side af Tangentplanen π. – Endelig vender vi os til Betragtning af Hyperboloiden med to Nat

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; vi parallelforskyder som i de to forrige Tilfælde Koordinatsystemet saaledes, at Begyndelsespunktet falder i det vilkaarligt givne Punkt P paa Fladen; efter Parallelforskydningen faar Hyperboloiden en Ligning af Formen

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = -\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right), \tag{42}$$

hvor $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ bestemmer Tangentplanen π til Hyperboloiden i Begyndelsespunktet P. Afstanden fra Tangentplanen π til et vilkaarligt Punkt $Q:(x, y, z)$ paa Hyperboloiden er følgelig paa en konstant Faktor nær lig med Værdien af Polynomiet $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$. Vi betragter nu samtidig med Hyperboloiden den Keglefflade K, der fremkommer af Hyperboloidens Heldningskegle ved at parallelforskyde denne saaledes, at dens Toppunkt falder i det betragtede Punkt P paa Hyperboloiden; henført til det parallelforskudte Koordinatsystem med Begyndelsespunkt i P har denne Keglefflade K Ligningen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. Som vi tidligere (ved Undersøgelsen af den geometriske Betydning af et homogent Polynomium af 2^{den} Grad) har vist, har Polynomiet $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$, der jo er Nul i alle Punkter af den egentlige Keglefflade af 2^{den} Orden K, et Fortegn (iøvrigt her det positive) indenfor Keglefladen K, det modsatte (altsaa her Fortegnet minus) udenfor Keglefladen K. Heraf følger da udfra det foregaaende, at de Punkter paa Hyperboloiden, der ligger indenfor Keglefladen K, alle ligger paa den ene Side af Tangentplanen π, medens de Punkter paa Hyperboloiden, der ligger udenfor Keglefladen K, alle ligger paa den modsatte Side af Tangentplanen π. Erindrer vi nu (se 94), at

det ene af Hyperboloidens to Nat (nemlig det der ikke indeholder P) ligger helt indenfor den parallelforskudte Heldningskegle, medens det andet Nat (bortset fra Punktet P selv) ligger helt udenfor Keglefladen K, kommer vi slutteling til Sætningen: Tangentplanen π til Hyperboloiden med to Nat i det vilkaarlige Punkt P (hvilken Plan kun har Røringspunktet P fælles med Fladen) ligger saaledes overfor Hyperboloiden, at af Hyperboloidens to Nat det ene ligger helt paa den ene Side af Tangentplanen, medens det andet (bortset fra Punktet P selv) ligger helt paa den modsatte Side af Tangentplanen.

Opg. 69. Vis, at naar to Keglesnit bestaar af den samme Punktmængde, og Koefficienterne i deres Ligninger dog ikke er proportionale, da bestaar Keglesnittene enten af et Punkt eller af intet Punkt.

Opg 70. Et Keglesnit $Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$ siges at have et Centrum i Punktet (a, b), hvis Keglesnittet henført til et (ligegyldig hvilket) retvinklet Koordinatsystem $(x_1\ y_1)$ med Begyndelsespunkt i (a, b) har Ligningen $A_1 x_1^2 + B_1 y_1^2 + 2C_1 x_1 y_1 + F_1 = 0$, hvor første Grads Leddene mangler. Find Betingelsen for at det givne (egentlige eller udartede) Keglesnit $Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$ har et Centrum og angiv Koordinaterne til det eventuelle Centrum (de eventuelle Centre).

Opg. 71. Undersøg og tegn den Kurve, der i retvinklede Koordinater fremstilles ved $3x^2 + 3y^2 - 2xy + 6x - 8 = 0$.

Opg. 72. Samme Opgave som 71, idet Ligningen forandres til $x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{3}\,xy - 2x = 0$.

Opg. 73. Samme Opgave som 71, idet Ligningen forandres til $xy + y^2 = 1$.

Opg. 74. Find Tangenten til Keglesnittet $xy + y^2 = 1$ i Punktet P: (0, 1); bestem dernæst det fra P forskellige Punkt Q, hvori Keglesnittet skæres af Normalen (den paa Tangenten vinkelrette Linie) i Punktet P.

Opg. 75. Udled ved en Koordinattransformation udfra Ligningen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, at Hyperblen henført til det Parallelkoordinatsystem, hvor Asymptoterne er Koordinatakser, har Ligningen $xy = k$, hvor k er en Konstant, og angiv Værdien af k udtrykt ved Halvakserne a og b.

Opg. 76. En ret Linie skærer Hyperblen $xy = k$ og Asymptoteparret $xy = 0$ (Parallelkoordinater); vis at de to Stykker paa Linien, der afskæres mellem Hyperblen og Asymptoterne er lige store.

Opg. 77. To faste Punkter af en Hyperbel forbindes med et bevægeligt Punkt paa Hyperblen; bevis at Forbindelseslinierne paa en Asymptote afskærer et Stykke af konstant Længde.

Opg. 78. Bevis, at der gennem 5 givne Punkter enten kan lægges et og kun et Keglesnit eller uendelig mange Keglesnit.

Opg. 79. Find ved den i **83** angivne Metode en rational Parameterfremstilling for Ellipsen $y^2 = 4x^2 + 12x + 7$, idet det af dens Skæringspunkter med Ordinataksen, der ligger paa

den positive Side af den gennem Punktet $(-\frac{1}{4}, 0)$ gaaende orienterede rette Linie med Retningscosinusserne $(\frac{2}{\sqrt{404}}, \frac{20}{\sqrt{404}})$ valges til det faste Punkt $(x_0\ y_0)$. (Figur).

Opg. 80. Bevis, at der hverken for Ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ eller for Hyperblen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ eksisterer nogen hel rational Parameterfremstilling, d. v. s. at der ikke for nogen af disse Kurver eksisterer to saadanne Polynomier $P(t)$ og $Q(t)$, at Punktet $(P(t), Q(t))$, naar t gennemløber en passende valgt Værdimængde, derved gennemløber Kurven.

Opg. 81. Find (ved at gaa over til homogene Koordinater) Asymptoterne til Hyperblen $xy + 2x^2 - 4y = 0$, og bestem Hyperblens Ligning i det Koordinatsystem, hvor Asymptoterne er Koordinatakser.

Opg. 82. Vis, at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for at Keglesnittet

$$AX^2 + BY^2 + 2CXY + 2DXU + 2EYU + FU^2 = 0$$

indeholder et Dobbeltpunkt (altsaa enten bestaar af to rette Linier eller af kun eet Punkt), er at $\begin{vmatrix} A & C & D \\ C & B & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0$.

Opg. 83. Vis, at de uendelig fjerne Punkter paa et sædvanligt Keglesnit er uafhængige af Koordinatsystemet.

Opg. 84. Gennem et Brændpunkt F i et egentligt Keglesnit drages en orienteret ret Linie, som skærer Kurven i M og M_1. Paa Linien afsættes et Punkt N saaledes, at enten a) $\frac{2}{FN} = \frac{1}{FM} + \frac{1}{FM_1}$

eller b) $\frac{2}{FH} = \frac{1}{FM} - \frac{1}{FM_1}$. Find i hvert af disse to Tilfalde det geometriske Sted for N, naar Linien drejer sig. (Benyt polære Koordinater).

Opg. 85. Givet Cirklerne $(x+c)^2 + y^2 = r_1^2$ og $(x-c)^2 + y^2 = r_2^2$; i den første brakkes en orienteret Radius, der danner Vinklen v med X-Aksen og skærer Cirklen i Punktet M; i den anden brakkes en paa den første vinkelret Radius, der skærer denne Cirkel i Punktet N. Paa Linien MN bestemmes et Punkt P, der deler Linieslykket MN i et givet Forhold μ. Udtryk Punktet P: (x, y) ved Parameteren v og angiv derved det geometriske Sted for P, naar v gennemløber Intervallet $0 \leqq v < 2\pi$. Diskuter den fundne Kurve, naar μ varierer.

Opg. 86. En uforanderlig Trekant ABC bevæger sig, idet A glider paa X-Aksen, C paa Y-Aksen. Idet Trekantens Stilling i hvert Øjeblik af Bevægelsen karakteriseres ved den Vinkel v, som Linien AC, orienteret fra A mod C, danner med X-Aksen, skal man finde Parameterfremstillingen for det variable Punkt B: (x, y) og derved det geometriske Sted for dette Punkt, naar v varierer. Tegn den af B beskrevne Kurve i det specielle Tilfalde, hvor ABC er en ligebenet retvinklet Trekant ($< B$ den rette Vinkel).

Opg. 87. Bevis, at en Ellipse henført til et Parallelkoordinatsystem (xy), hvor et Par konjugerede Diametre er Koordinatakser, fremstilles ved en Ligning af Formen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Opg. 88. Vis, at naar to Keglesnitsflader bestaar af den samme Punktmængde, og Koefficienterne i deres Ligninger dog ikke er proportionale, da bestaar Keglesnitsfladerne enten af <u>een</u> <u>ret</u>

Linie eller af et Punkt eller af intet Punkt.

Opg. 89. Bevis, at et indvendigt og et udvendigt Punkt for en egentlig Kegleflade af 2den Orden kan karakteriseres derved, at man igennem Punktet kan lægge henholdsvis ingen eller to Tangentplaner til Keglefladen.

Opg. 90. Find det geometriske Sted for Midtpunktet af de Korder, der af Kuglen $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ afskæres af Linier gennem Punktet (a, b, c).

Opg. 91. Find det geometriske Sted for Midtpunktet af de Korder, som en vilkaarlig Keglesnitsflade afskærer af et givet Parallelknippe.

Opg. 92. Vis, at Omdrejningskeglefladen $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 v$ af en Plan, der ikke gaar gennem Toppunktet og ikke er parallel med eller vinkelret paa xy-Planen, skæres i et Keglesnit, hvis Projektion paa xy-Planen har Begyndelsespunktet til Brændpunkt og Sporet i xy-Planen til Ledelinie.

Opg. 93. Reducer Ligningerne:
a) $z = xy$; b) $z^2 = xy$; c) $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 2x - 4y = 1$;
d) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz = 9$; e) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 14x + 4y - 2 = 0$. For saa vidt Fladen har et Centrum, der ikke ligger i Begyndelsespunktet, reduceres Ligningen først ved Parallelforskydning af Koordinatsystemet saaledes, at Begyndelsespunktet falder i dette Punkt.

Opg. 94. Vis, at Ligningen paa Normalform for en Tan-

gentplan til Ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ er

$$\alpha x + \beta y + \gamma z \pm \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2} = 0.$$

Vis herved, at det geometriske Sted for Skæringspunktet af tre paa hinanden vinkelrette Tangentplaner til Fladen er en med Fladen koncentrisk Kugleflade.

Opg. 95. Find det geometriske Sted for Centrum af Fladen

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2pxz + 2qyz - 2ax - 2by + 2cz = 0,$$

naar p og q varierer. Specielt søges Stedet for de i Ligningen indbefattede Keglefladers Toppunkter.

Opg. 96. Vis, at de uendelig fjerne Punkter paa en sædvanlig Keglesnitsflade er uafhængig af Koordinatsystemet.

Opg. 97. Find det geometriske Sted for de Punkter, hvis Afstande til to givne Linier har et givet Forhold (vælg et saadant retvinklet Koordinatsystem, at de givne Linier faar Ligningerne: $y = ax$, $z = b$ og $y = -ax$, $z = -b$).

Opg. 98. Bestem de Frembringere paa Hyperboloiden $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, der danner en Vinkel paa 60° med y-Aksen.

Opg. 99. Bestem Snittet mellem Fladen $z^2 + 1 = 3x^2 + 4y^2$ og Planen $y = 2z$ ved at vælge denne Plan til ny xy-Plan.

Opg. 100. Find Ligningen for Tangentplanen til den hyperbolske Paraboloide $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2uz}{c}$ i et vilkaarligt Punkt af den uendelig fjerne rette Linie $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$, $u = 0$.

Opg. 101. Find Stedet for et variabelt Punkt, for hvilket Forholdet mellem dets Afstande fra et givet Punkt og en given Plan er konstant.

Opg. 102. Find Stedet for et variabelt Punkt, for hvilket Forholdet mellem dets Afstande fra et givet Punkt og en given ret Linie er konstant.

Opg. 103. Bevis, idet der benyttes homogene Koordinater (d. v. s. de uendelig fjerne Punkter regnes med), at to vilkaarlige Linier L_1 og L_2 paa en Hyperboloide med eet Nat, tilhørende hver sin af Hyperboloidens to Liniesystemer, skærer hinanden. Gælder denne Sætning ogsaa, naar der benyttes inhomogene Koordinater?

Opg. 104. Samme Opgave som 103, idet „Hyperboloide med eet Nat" forandres til „hyperbolsk Paraboloide".

Algebraiske Kurver og Flader.

A. Algebraiske Kurver i Planen.

97. Indledende Definitioner og Eksempler. Lad der i Planen være fastlagt et (inhomogent) retvinklet Koordinatsystem (XY). Ved en algebraisk Kurve af n^{te} Orden forstaas da det geometriske Sted for Punkter, hvis Koordinater (x, y) tilfredsstiller en algebraisk Ligning af n^{te} Grad, altsaa en Ligning $P(x, y) = 0$, hvor $P(x, y)$ er et Polynomium af n^{te} Grad i de to Variable x og y. Ganske som ved de tidligere behandlede specielle Tilfælde $n = 1$ (rette Linier) og $n = 2$ (Keglesnit) indser man umiddelbart, at hvis en Punktmængde henført til et retvinklet Koordinatsystem (XY) fremstilles ved en algebraisk Ligning af n^{te} Grad $P(x, y) = 0$, vil Punktmængden henført til et vilkaarligt andet retvinklet Koordinatsystem $(x_1\ y_1)$ ligeledes kunne fremstilles ved en algebraisk Ligning af n^{te} Grad, nemlig ved den Ligning $P_1(x_1, y_1) = 0$, hvis venstre Side $P_1(x_1, y_1)$ er det Polynomium af n^{te} Grad i (x_1, y_1), der fremgaar af Polynomiet $P(x, y)$ ved Anvendelse af den lineare Substitution, der bestemmer Ko-

ordinaltransformationen.

Lad os som et specielt, særlig simpelt Eksempel paa en algebraisk Kurve af n^{te} Orden betragte en Kurve fremstillet ved en homogen Ligning $P(x, y) = 0$, d. v. s. en Ligning, hvis venstre Side $P(x, y)$ er et homogent Polynomium af n^{te} Grad; Kurvens Ligning har altsaa her Formen

$$(1) \quad P(x,y) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} y + \ldots A_{n-1} x y^{n-1} + A_n y^n = 0,$$

hvor ikke alle $n+1$ Tal A_0, $A_1 \ldots A_n$ er lig med Nul. Idet denne Ligning öjensynlig har Lösningen $(0, 0)$, indeholder Kurven i alle Tilfælde (d. v. s. hvilke Værdier Koefficienterne $A_0 \ldots A_n$ end har) Begyndelsespunktet O. Endvidere indses umiddelbart, at hvis Ligning (1) tilfredsstilles af det egentlige Talpar (x_0, y_0), tilfredsstilles den ligeledes af ethvert med (x_0, y_0) proportionalt Talpar (kx_0, ky_0), d. v. s. Kurven vil, hvis den gaar gennem det fra Begyndelsespunktet O forskellige Punkt P, af sig selv indeholde hele den rette Linie gennem O og P. Kurven bestaar altsaa, hvis den overhovedet indeholder andre Punkter end Begyndelsespunktet O, af rette Linier gennem O. For nærmere at undersöge den ved den homogene Ligning (1) fremstillede Kurve, vil vi først bevise, at hvis Kurven gaar gennem det fra Begyndelsespunktet O forskellige Punkt $P: (\alpha, \beta)$ (og følgelig indeholder hele den rette Linie $-\beta x + \alpha y = 0$), vil det homogene Polynomium $P(x, y)$ paa venstre Side af Kurvens Ligning (1) være deleligt med $-\beta x + \alpha y$, d. v. s. $P(x, y)$ vil kunne skrives paa Formen $P(x, y) = (-\beta x + \alpha y)\, P_1(x, y)$, hvor $P_1(x, y)$ er et homogent Polynomium af $(n-1)^{te}$ Grad. Rigtigheden heraf kunde man umiddelbart bevise ud fra den kendte Sæt-

ning om, at et Polynomium i een Variabel t, der har Roden γ, er deleligt med $t-\gamma$; vi foretrækker imidlertid som et geometrisk Øvelseseksempel at føre Beviset saaledes: For det Første kun vi øjensynlig (uden at indskrænke Beviselts Almengyldighed) antage, at $\alpha^2+\beta^2=1$, altsaa at Punktet $P:(\alpha,\beta)$ er beliggende paa Enhedscirklen, idet vi i modsat Fald blot behøver at erstatte (α,β) med et dermed proportionalt Talpar, hvis Kvadratsum er 1. Drejer vi nu Koordinatsystemet (xy) om Begyndelsespunktet, saaledes at Aksen x_1 i det nye System (x_1y_1) (henført til det gamle System (xy)) har Retningscosinusserne (α,β) (d. v. s. saaledes at x_1-Aksen gaar gennem P), vil den algebraiske Kurve (1) henført til det nye System (x_1y_1) fremstilles ved Ligningen $Q(x_1,y_1)=0$, hvor $Q(x_1,y_1)$ er det homogene Polynomium af n^{te} Grad, der fremkommer af $P(x,y)$ ved Koordinattransformationen $x=\alpha x_1-\beta y_1$, $y=\beta x_1+\alpha y_1$. Nu har imidlertid Punktet P henført til Systemet (x_1y_1) Koordinaterne $(1,0)$; Kurvens Ligning $Q(x_1,y_1)=0$ har følgelig Løsningen $(1,0)$, d. v. s. det homogene Polynomium $Q(x_1,y_1)$ kan skrives $Q(x_1,y_1)=y_1Q_1(x_1,y_1)$, hvor $Q_1(x_1,y_1)$ er homogen af $(n-1)^{te}$ Grad. Transformerer vi nu tilbage til det oprindelige Koordinatsystem (xy), hvad der sker ved Formlerne $x_1=\alpha x+\beta y$, $y_1=-\beta x+\alpha y$, og hvorved $Q(x_1,y_1)$ føres tilbage til Polynomiet $P(x,y)$, finder vi slutteligt $P(x,y)$ skrevet paa Formen $(-\beta x+\alpha y)P_1(x,y)$, hvor $P_1(x,y)$ er det homogene Polynomium af $(n-1)^{te}$ Grad, der fremgaar af $Q_1(x_1,y_1)$ ved den sidstnævnte Substitution; hermed er den opstillede Sætning bevist. — Ved at anvende denne Sætning et passende Antal Gange efter hinanden (d. v. s. ved at skrive det fundne homo-

gene Polynomium af $(n-1)^{te}$ Grad $P_1(x, y)$, hvis det har det egentlige Rodsæt (α_1, β_1), paa Formen $(-\beta_1 x + \alpha_1 y) \cdot P_2(x, y)$, hvor $P_2(x, y)$ er homogen af $(n-2)^{te}$ Grad, dernæst behandle $P_2(x, y)$ paa samme Maade o. s. v., indtil vi sluttelig naar til et homogent Polynomium $P_r(x, y)$, der intet egentligt Rodsæt besidder) kommer vi umiddelbart til Sætningen: <u>Ethvert homogent Polynomium af n^{te} Grad $P(x, y) = 0$ kan skrives paa Formen</u>

$$(2) \quad P(x, y) = (a_1 x + b_1 y)(a_2 x + b_2 y) \ldots (a_r x + b_r y) P_r(x, y),$$

<u>hvor $0 \leqq r \leqq n$, og hvor $P_r(x, y)$ er et homogent Polynomium af $(n-r)^{te}$ Grad, der intet egentligt Rodsæt besidder</u>. De ved Ligningen $P(x, y) = 0$ fremstillede rette Linier gennem Begyndelsespunktet O er øjensynlig netop de rette Linier $a_1 x + b_1 y = 0$, $a_2 x + b_2 y = 0, \ldots a_r x + b_r y = 0$; heraf følger specielt, <u>at Antallet af de ved Ligningen (1) fremstillede rette Linier gennem O højst er lig med Kurvens Orden n</u>, og at dette Resultat forbliver gyldigt, ogsaa naar vi regner en ret Linie, der forekommer q Gange blandt Linierne $a_1 x + b_1 y = 0, \ldots a_r x + b_r y = 0$, med q Gange. – Idet vi gør Brug af den allerede tidligere nævnte (men endnu ikke beviste) Sætning om, at ethvert Polynomium af <u>ulige</u> Grad i een Variabel t har mindst een Rod, indser man umiddelbart, <u>at ethvert homogent Polynomium af ulige Grad $P(x, y) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} y + \ldots + A_n y^n$ har et egentligt Rodsæt (α, β)</u>; thi er $A_n = 0$, er (0.1) et saadant Rodsæt, og er $A_n \neq 0$, har Polynomiet $P(x, y)$ Rodsættet $(1, \gamma)$, hvor γ er en (ifølge den anførte Sætning

eksisterende) Rod i Polynomiet af ulige Grad $A_0 + A_1 t + \ldots + A_n t^n$. Heraf følger, at det i det ovenstaaende Udtryk (2) for $P(x,y)$ forekommende homogene Polynomium $P_r(x,y)$ af $(n-r)^{te}$ Grad, maa være af lige Grad, altsaa at $n-r$ maa være et lige Tal, thi $P_r(x,y)$ har jo ifølge Forudsætning intet egentligt Rodsæt. Antallet r af første Grads Faktorer i det homogene Polynomium $P(x,y)$ er altsaa, hvis Graden n er et ulige Tal, et af Tallene $1, 3, 5 \ldots n$ (altsaa mindst lig med 1), medens r, hvis n er et lige Tal, er et af Tallene $0, 2, 4 \ldots n$ (altsaa eventuelt lig 0). En homogen Ligning (1) af ulige Grad fremstiller altsaa mindst een ret Linie gennem Begyndelsespunktet O, medens en homogen Ligning af lige Grad eventuelt ikke indeholder andre Punkter end O. Det fundne Resultat indeholder specielt, for $n = 2$, den tidligere beviste Sætning om, at en homogen Ligning af 2^{den} Grad $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$ enten kun fremstiller Begyndelsespunktet O eller fremstiller to (forskellige eller sammenfaldende) rette Linier gennem O.

98. Skæring mellem ret Linie og algebraisk Kurve; Tangent. Lad os skære en vilkaarlig algebraisk Kurve af n^{te} Orden $P(x,y) = 0$ med en vilkaarlig ret Linie, som vi skriver paa Parameterform: $x = a + bt$, $y = c + dt$. Indsætter vi disse Udtryk for x og y i Kurvens Ligning $P(x,y) = 0$, finder vi til Bestemmelse af Parameterværdien t svarende til de (eventuelle) Skæringspunkter en Ligning af Formen

$$(3) \qquad L_0 + L_1 t + \ldots + L_{n-1} t^{n-1} + L_n t^n = 0.$$

Vi skelner nu mellem to Tilfælde 1) Samtlige Koefficienter $L_0, L_1 \ldots L_n$ i Ligning (3) er lig Nul. Ligningen er her

tilfredsstillet af enhver Værdi af t, d. v. s. den rette Linie er helt indeholdt i Kurven. [2] Koefficienterne $L_0, \ldots L_n$ er ikke alle Nul; da er venstre Side af Ligning (3) et egentligt Polynomium af højst n^{te} Grad (nemlig netop af Graden n, hvis $L_n \neq 0$; af Graden $n-1$, hvis $L_n = 0$, $L_{n-1} \neq 0$; ... af 0te Grad, hvis $L_n = L_{n-1} = \ldots = L_1 = 0$, $L_0 \neq 0$). Idet en algebraisk Ligning af r^{te} Grad har højst r (reelle) Rødder, vil den rette Linie følgelig her skære Kurven i højst n Punkter, d. v. s. enten i 0, 1, 2 ... eller n Punkter; dette Resultat forbliver aabenbart gyldigt, ogsaa naar vi regner et for Kurven og den rette Linie fælles Punkt P med q Gange, dersom den tilsvarende Parameterværdi $t = t_1$ er en q-dobbelt Rod i Ligning (3), i hvilket Tilfælde vi om den rette Linie siger, at den skærer Kurven i q i Punktet P sammenfaldende Punkter. — I det Tilfælde, hvor den rette Linie er helt indeholdt i Kurven, hvor altsaa Polynomiet paa venstre Side af (3) er et Nulpolynomium, siger vi om ethvert af Linjens Punkter P og for enhver Værdi af q, at Linien skærer Kurven i q (fler end $q-1$) i Punktet P sammenfaldende Punkter.

Lad P være et vilkaarligt Punkt paa en algebraisk Kurve af n^{te} Orden, og lad os søge at bestemme de (eventuelle) rette Linier gennem P, der skærer Kurven i to (fler end to) i P sammenfaldende Punkter. Vi begynder med at parallelforskyde Koordinatsystemet saaledes, at Begyndelsespunktet falder i det givne Punkt P paa Kurven; herved faar Kurvens Ligning Formen

$$(4) \quad Ax + By + Cx^2 + Dxy + Ey^2 + \ldots + Kx^n + \ldots + Qy^n = 0,$$

hvor det konstante Led mangler. Skærer vi nu Kurven med en vilkaarlig ret Linie gennem Begyndelsespunktet P, som vi skriver paa Formen $x = \alpha t$, $y = \beta t$, hvor (α, β) er Heldningstal (Retningstal) for Linien (altsaa Koordinater til et vilkaarlig valgt fra P forskelligt Punkt paa Linien), finder vi til Bestemmelse af Parameterværdien t svarende til Skæringspunkterne en algebraisk Ligning $F(t) = 0$, hvis venstre Side enten er et Nulpolynomium eller et egentligt Polynomium af højst n^{te} Grad, nemlig Ligningen

$$(5) \quad t(A\alpha + B\beta) + t^2(C\alpha^2 + D\alpha\beta + E\beta^2) + \ldots + t^n(K\alpha^n + \ldots + Q\beta^n) = 0.$$

Denne Ligning har (selvfølgelig) Roden $t = 0$, svarende til Punktet P. Skal den rette Linie skære Kurven i to i P sammenfaldende Punkter, d. v. s. skal Polynomiet paa venstre Side af (5) være deleligt med t^2, kræves hertil som nødvendig og tilstrækkelig Betingelse, at

$$(6) \quad A\alpha + B\beta = 0.$$

Vi skelner nu mellem to Tilfælde. 1) <u>De to Koefficienter A og B til første Grads Leddene i Kurvens Ligning (4) er begge Nul</u>; idet Ligning (6) her er tilfredsstillet af ethvert egentligt Talsæt $(\alpha\beta)$, vil <u>enhver</u> ret Linie gennem P skære Kurven i to i P sammenfaldende Punkter; P siges at være et <u>Dobbeltpunkt</u> paa Kurven. 2) <u>Koefficienterne A og B er ikke begge Nul</u>; her vil samtlige egentlige Løsninger (α, β) til (6) være indbyrdes proportionale (og opfattet som Koordinater til et Punkt i Planen bestemme samtlige fra Begyndelsespunktet P forskellige Punkter paa Linien

$Ax + By = 0$); de egentlige Løsninger (α, β) vil følgelig opfattet som Hældningstal for en Linie gennem P, alle bestemme den samme Linie, nemlig Linien $Ax + By = 0$. Her findes altsaa een og kun een ret Linie gennem P, der skærer Kurven i to i P sammenfaldende Punkter; denne Linie $Ax + By = 0$ kaldes Kurvens Tangent i Punktet P. — Tangenten i Begyndelsespunktet O til en igennem O gaaende algebraisk Kurve (der ikke har et Dobbeltpunkt i O) bestemmes altsaa simpelthen ved den Ligning $Ax + By = 0$, der fremkommer af Kurvens Ligning ved i denne at slette alle Leddene af højere end første Grad. Vil man finde Ligningen for Tangenten i et vilkaarligt Punkt (ikke Dobbeltpunkt) $P: (x_0, y_0)$ paa en given algebraisk Kurve, behøver man blot først at parallelforskyde Koordinatsystemet, saaledes at Begyndelsespunktet falder i P, dernæst udlede Tangentens Ligning i det nye System (hvad der jo umiddelbart sker ved at slette Leddene af højere end første Grad i Kurvens Ligning) og sluttelig transformere den fundne Tangentligning tilbage til det oprindelige Koordinatsystem.

Lad os betragte et Dobbeltpunkt P paa en algebraisk Kurve. Idet vi vælger Koordinatsystemet saaledes, at Begyndelsespunktet falder i P, fremstilles Kurven ved en Ligning

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx^3 + \ldots = 0,$$

idet jo ikke blot det konstante Led, men ogsaa første Grads Leddene mangler. Skærer vi som ovenfor Kurven med en vilkaarlig ret Linie $x = \alpha t$, $y = \beta t$ gen-

nem P, faar vi til Bestemmelse af k Ligningen

$$k^2(A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2) + k^3(D\alpha^3 + \ldots) + \ldots = 0.$$

Lad os søge de (eventuelle) rette Linier gennem Dobbeltpunktet P, der skærer Kurven i tre (d. v. s. flere end to) i P sammenfaldende Punkter. Idet vi ser bort fra det Tilfælde, hvor alle tre Koefficienter A, B, C er Nul (hvor altsaa enhver ret Linie gennem P skærer i tre i P sammenfaldende Punkter), finder vi den Betingelse, Liniens Heldningstal (α, β) maa tilfredsstille, for at Linien skal skære i tre i P sammenfaldende Punkter, udtrykt ved den homogene Ligning af 2den Grad $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$; Betingelsen er med andre Ord den, at Linien skal gaa gennem et fra P forskelligt Punkt (α, β) paa Kurven $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$. Vi maa nu skelne mellem tre Tilfælde: 1) $AB - C^2 > 0$; her har Ligningen $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$ ingen egentlig Løsning (α, β); der findes altsaa ingen ret Linie gennem Dobbeltpunktet P, der skærer Kurven i fler end to i P sammenfaldende Punkter. 2) $AB - C^2 < 0$; her fremstiller den Ligning $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$, som (α, β) skal tilfredsstille, to forskellige rette Linier gennem P; der findes følgelig i dette Tilfælde to forskellige rette Linier gennem Dobbeltpunktet P, som skærer Kurven i fler end to i P sammenfaldende Punkter, nemlig de to ved Ligningen $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$ bestemte Linier; disse to Linier kaldes Kurvens Tangenter i Dobbeltpunktet. 3) $AB - C^2 = 0$; her findes kun een ret Linie (to sammenfaldende rette Linier) gennem P, der skærer Kurven i fler end to i P sammenfaldende Punkter, nemlig den ved Ligningen $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$ bestemte Linie; denne kal-

des Kurvens Tangent (Dobbelttangent) i P.

99. Algebraisk Kurve i homogene Koordinater. Ligesom ved de tidligere behandlede algebraiske Kurver af 1ste og 2den Orden er det, ogsaa naar Talen er om en algebraisk Kurve af vilkaarlig (n^{te}) Orden, ofte bekvemt at gaa over til homogene Koordinater for ogsaa at kunne inddrage Planens uendelig fjerne Punkter i Undersøgelsen. Lad os betragte en algebraisk Kurve, som vi eksempelvis (for at lette Opskrivningen) vil antage er af 3die Orden, altsaa fremstilles ved en Ligning af Formen

$$(7)\quad Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Iy + K = 0,$$

hvor ikke alle 4 Koefficienter til Leddene af 3die Grad er Nul. Indsætter vi i denne Ligning $x = \frac{X}{U}$, $y = \frac{Y}{U}$ og bortmultiplicerer vi derefter Nævneren U^3, gaar Ligning (7) derved over til den homogene Ligning

$$(8)\quad AX^3 + BX^2Y + CXY^2 + DY^3 + EX^2U + FXYU + GY^2U + HXU^2 + IYU^2 + KU^3 = 0,$$

om hvilken vi siger, at den i homogene Koordinater (X, Y, U) „svarer til" Ligningen (7) i inhomogene Koordinater (x, y). Som det umiddelbart fremgaar af Udledelsen af Ligning (8), er de sædvanlige Punkter, hvis homogene Koordinater (X, Y, U) tilfredsstiller (8), de samme som de, hvis inhomogene Koordinater (x, y) tilfredsstiller den oprindelige Ligning (7); foruden disse sædvanlige Punkter vedtager vi imidlertid ved Definition, at den omhandlede algebraiske Kurve, naar vi opererer med homogene Koordinater, skal siges at indeholde de (eventuelle) uendelig fjerne

Punkter $(x, y, 0)$, for hvilke (x, y) er en egentlig Løsning til Ligningen $Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 = 0$.

Lad os skære den algebraiske Kurve (8) med en vilkaarlig ret Linie (sædvanlig eller den uendelig fjerne), som vi skriver paa Parameterform

$$x = \alpha_1 s + \beta_1 t, \qquad y = \alpha_2 s + \beta_2 t, \qquad u = \alpha_3 s + \beta_3 t.$$

Indsætter vi disse Udtryk for x, y og u i Ligning (8), finder vi til Bestemmelse af det homogene Parameterpar (s, t) svarende til de (eventuelle) Skæringspunkter, en Ligning af Formen

$$(9) \qquad A_0 s^3 + A_1 s^2 t + A_2 s t^2 + A_3 t^3 = 0.$$

Ser vi bort fra det Tilfælde, hvor alle 4 Koefficienter A_0, A_1, A_2, A_3 er Nul (hvor altsaa Kurven helt indeholder den rette Linie), kan den fundne homogene Ligning af 3^{die} Grad (9), som vist i Slutningen af **97**, skrives paa en af de to Former

$$(a_1 s + b_1 t)(a_2 s + b_2 t)(a_3 s + b_3 t) = 0 \quad \text{eller} \quad (a_1 s + b_1 t)(c_0 s^2 + c_1 s t + c_2 t^2) = 0,$$

hvor i det sidste Tilfælde det homogene 2^{den} Grads Polynomium $c_0 s^2 + c_1 s t + c_2 t^2$ ikke besidder noget egentligt Rodsæt. I det første af disse to Tilfælde har den rette Linie tre (forskellige eller sammenfaldende) Skæringspunkter med Kurven, nemlig de til Parameterparrene $(-b_1, a_1)$, $(-b_2, a_2)$, $(-b_3, a_3)$ svarende Punkter; i det andet Tilfælde derimod er der kun ét Skæringspunkt bestemt ved Parameterparret $(s, t) = (-b_1, a_1)$. Vi har altsaa fundet følgende Resultat (som umiddelbart kan almindeliggøres til at omfatte al-

gebraiske Kurver af vilkaarlig n^{te} Orden; se Opg. 110): Naar vi benytter homogene Koordinater, vil en algebraisk Kurve af 3^{die} Orden af en ret Linie, der ikke er helt indeholdt i Kurven, skæres enten i 3 (forskellige eller sammenfaldende) Punkter eller i 1 Punkt.

Lad os som et Øvelseseksempel i Regning med homogene Koordinater søge de (eventuelle) uendelig fjerne Punkter paa den specielle algebraiske Kurve af 3^{die} Orden

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

Idet denne Kurve i homogene Koordinater har Ligningen $X^3 + Y^3 - 3aXYU = 0$, bestemmes dens uendelig fjerne Punkter $(X, Y, 0)$ derved, at (X, Y) skal være en egentlig Løsning til Ligningen $X^3 + Y^3 = 0$. Nu er imidlertid $X^3 + Y^3 = (X+Y)(X^2 - XY + Y^2)$, hvor $X^2 - XY + Y^2$ (idet $1 \cdot 1 - (\frac{1}{2})^2 > 0$) intet egentligt Rodsæt besidder; Kurven har følgelig et og kun et uendelig fjernt Punkt, nemlig det ved $(1, -1, 0)$ (eller naturligvis ved et dermed proportionalt Koordinatsæt) bestemte Punkt. — Skærer vi Kurven $X^3 + Y^3 - 3aXYU = 0$ med en ret Linie gennem Kurvens uendelig fjerne Punkt $P: (1, -1, 0)$ og et vilkaarligt andet Punkt i Planen $Q: (\alpha, \beta, \gamma)$, hvilken Linie vi fremstiller paa Formen $X = s + \alpha t$, $Y = -s + \beta t$, $U = \gamma t$, finder vi til Bestemmelse af Parameterparret (s, t) Ligningen

$$0 \cdot s^3 + 3s^2 t(\alpha + \beta + a\gamma) + st^2(3\alpha^2 - 3\beta^2 + 3a\gamma(\alpha - \beta)) + t^3(\alpha^3 + \beta^3 - 3a\alpha\beta\gamma) = 0.$$

Skal Linien skære Kurven i to (fler end et) i P sammenfaldende Punkter, kræves herfor, at Ligningens ven-

skre Side er deleligt ikke blot med t, men med t^2 (idet $t = 0$ jo svarer til Punktet P), altsaa at $\alpha+\beta+a\gamma=0$; d. v. s. det fra P forskellige Punkt $Q:(\alpha, \beta, \gamma)$, hvorigennem Skæringslinien PQ er dragen, skal ligge paa den gennem P gaaende rette Linie $x+y+au=0$. Der findes følgelig <u>een og kun een</u> ret Linie gennem P (Kurvens <u>Tangent</u> i det uendelig fjerne Punkt P, eller Kurvens <u>Asymptote</u>), der skærer Kurven i (mindst) to i P sammenfaldende Punkter, nemlig Linien <u>$x+y+au=0$</u>; vi bemærker slutteligt, at idet Koefficienten $3\alpha^2 - 3\beta^2 + 3a\gamma(\alpha-\beta)$ til st^2 kan skrives $3(\alpha+\beta+a\gamma)(\alpha-\beta)$ og altsaa er Nul, naar $\alpha+\beta+a\gamma=0$, vil Tangenten $x+y+au=0$ i Kurvens (eneste) uendelig fjerne Punkt P skære Kurven i <u>tre</u> i P sammenfaldende Punkter, og ikke (som en Tangent i Almindelighed gør) skære Kurven i kun to i Røringspunktet sammenfaldende Punkter.

Til den foregaaende Undersøgelse af de algebraiske Kurver i henholdsvis inhomogene og homogene Koordinater vil vi knytte nogle Betragtninger af almindelig Karakter, som vi vil indlede med at minde Læseren om nogle karakteristiske Forhold, vi tidligere har truffet paa. Da vi behandlede de algebraiske Kurver af <u>første</u> Orden (rette Linier), førtes vi til at udvide det oprindelige Punktbegreb ved Indførelsen af Planens uendelig fjerne Punkter — eller fra et analytisk Synspunkt ved Indførelsen af homogene Koordinater — med det Formaal at naa frem til et saadant Punktområde, at der, naar vi lagde dette Område til Grund, gjaldt simple og almengyldige Sætninger; og dette opnaaede vi da ogsaa fuldtud ved den foreliggende Udvidelse af

Punktbegrebet; navnlig gjaldt der, naar vi gik over til homogene Koordinater, den almengyldige Sætning: to vilkaarlige rette Linier skærer altid hinanden i eet og kun eet Punkt, medens vi, saa længe vi opererede med det sædvanlige Punktbegreb, kun kunde udsige Sætningen: to rette Linier skærer enten hinanden i eet Punkt eller i intet Punkt. – Ved Behandlingen af de algebraiske Kurver af 2den Orden (Keglesnittene) viste det sig ligeledes, at der, saa længe vi kun opererede med de sædvanlige Punkter, ikke gjaldt simple almengyldige Love, f. Eks. ikke gjaldt nogen almengyldig Sætning vedrørende Antallet af Skæringspunkter mellem et Keglesnit og en i Keglesnittet ikke helt indeholdt ret Linie; vi kunde jo om en saadan ret Linie kun udsige, at den skar Keglesnittet enten i to, eet eller intet Punkt. Da vi ved Behandlingen af de algebraiske Kurver af 2den Orden gik over til homogene Koordinater, altsaa indførte de uendelig fjerne Punkter i Betragtningen, opnaaede vi vel, som det vil erindres, væsentlig simplere Forhold; saaledes gjaldt der her den simplere Sætning: en i et Keglesnit ikke helt indeholdt ret Linie skærer Keglesnittet enten i to eller i intet Punkt; men vi opnaaede ved Indførelsen af de uendelig fjerne Punkter ikke (som da Talen var om de algebraiske Kurver af første Orden) at naa frem til et Punktområde, hvor der for de paagældende Problemer gjaldt fuldtud almengyldige simple Love. Lignende Forhold, som dem vi her har fremdraget for de algebraiske Kurver af 2den Orden, gælder, blot i mere udpræget Grad, for de algebraiske Kurver af højere Orden. Betragter vi saaledes en algebraisk Kurve,

f. Eks. af 6te Orden, gælder der (som vi ovenfor har vist), naar vi benytter inhomogene Koordinater, Sætningen: en ret Linie, der ikke er helt indeholdt i Kurven, skærer denne i højst 6 Punkter, d. v. s. enten i 6, 5, 4, 3, 2, 1 eller 0 Punkter, medens der, naar vi benytter homogene Koordinater, gælder Sætningen (Se Opg. 110): en i Kurven ikke helt indeholdt ret Linie skærer Kurven enten i 6, 4, 2 eller 0 Punkter, hvilken sidste Sætning, skønt den er simplere end den foregaaende, fordi Antallet af Muligheder nu er færre, jo dog ikke kan betegnes som en Sætning af enkel almengyldig Natur. Det nævnte Forhold bevirker, at det, selv efter at vi har indført de uendelig fjerne Punkter og følgelig er gaaet over til at regne med homogene Koordinater, er saa at sige umuligt at opbygge nogen virkelig Theori for saadanne Problemer, hvis Behandling kræver Skæring mellem algebraiske Kurver af vilkaarlig høj Orden og rette Linier, eller for at nævne et almindeligere Omraade, kræver Skæring mellem vilkaarlige algebraiske Kurver; thi Undersøgelsen vil, naar den skal gennemføres i sin Almindelighed blive fuldkommen uoverskuelig, fordi vi paa hvert enkelt Trin bliver nødt til at spalte Undersøgelsen op i en Række adskilte Tilfælde, der maa behandles hvert for sig. – Denne principielle Vanskelighed indenfor de algebraiske Kurvers Theori kan man imidlertid fuldstændig overvinde ved <u>en yderligere Udvidelse af Punktbegrebet</u>, nemlig idet man, som vi i næste Nummer skal omtale, ved Definition indfører Planens saakaldte <u>imaginære</u> Punkter.

100. <u>De komplekse Tals Betydning i den analytiske Ge-</u>

ometri. Grunden til at der (naar vi regner med homogene Koordinater) gælder Sætningen: to algebraiske Kurver af første Orden skærer allid hinanden i eet og kun eet Punkt, medens der for Skæringen mellem en algebraisk Kurve af 2^{den} Orden og en algebraisk Kurve af 1ste Orden (der ikke er helt indeholdt i Kurven af 2^{den} Orden) kun gælder den Sætning, at Antallet af Skæringspunkter enten er to eller er Nul, kan øjensynlig føres tilbage dertil, at et Polynomium af 1ste Grad $At + B$ allid har een og kun een Rod, medens et Polynomium af 2^{den} Grad $At^2 + 2Bt + C$ enten har to (forskellige eller sammenfaldende) Rødder eller ingen Rødder. — Ved Behandlingen af de algebraiske Ligninger af 2^{den} Grad $At^2 + 2Bt + C = 0$ udvider man som bekendt (for at opnaa, at der for Løsningen af Ligningerne af 2^{den} Grad skal gælde en tilsvarende simpel Sætning som for Løsningen af Ligningerne af 1ste Grad) det Talområde, hvori der opereres, fra at være det reelle Talområde til det mere omfattende kompleksе Talområde, idet vi ved Udtrykket „et komplekst Tal" forstaar en Størrelse af Formen $a + ib$, hvor $i = \sqrt{-1}$ er den imaginære Enhed, medens a og b er reelle Tal; som nævnt omfatter de komplekse Tal $a + ib$ speciell de reelle Tal, nemlig svarende til at $b = 0$. Lægger vi det kompleksе Talområde til Grund, gælder der som bekendt den Sætning, at ethvert Polynomium af 2^{den} Grad $At^2 + 2Bt + C$ (hvor altsaa Koefficienterne A, B, C er vilkaarlige komplekse Tal, $A \neq 0$) paa een og kun een Maade kan skrives paa Formen $A(t - \alpha)(t - \beta)$, hvor α og β er komplekse Tal, altsaa, at enhver algebraisk Ligning af 2^{den} Grad $At^2 + 2Bt + C = 0$ har to og kun to (forskellige eller sammen-

faldende) Rødder α og β. For nu at bringe dette Resultat vedrørende de algebraiske Ligninger af 2den Grad til Anvendelse indenfor Læren om algebraiske Kurver af 2den Orden ligger det nær at udvide Begrebet „Punkt i Planen" saaledes, at vi, naar vi taler om Koordinaterne (x, y) til et Punkt (eller i homogene Koordinater om Koordinaterne (x, y, v)) ikke længer kræver, at disse Koordinater skal være reelle Tal, men tillader dem at være vilkaarlige komplekse Tal. Dersom Koordinaterne x og y i et saadant komplekst Koordinatpar $(x, y) = (a + ib,\ c + id)$ begge er reelle (d. v. s. dersom begge Talene b og d er Nul) siger vi om Koordinatparret, at det bestemmer et reelt Punkt, nemlig det Punkt P, der i den sædvanlige analytiske Geometri, hvor vi regner med reelle Tal, bestemmes ved Koordinaterne $(x, y) = (a, c)$; er derimod mindst en af Koordinaterne x og y ikke reel (d. v. s. mindst et af Tallene b og $d \neq 0$), siger vi om Koordinatparret (x, y), at det bestemmer et imaginært Punkt; vi tilføjer straks, at der ikke til et imaginært Punkt (som til et reelt Punkt) er knyttet nogen geometrisk Forestilling; det imaginære Punkt, der er indført udelukkende af Hensyn til de algebraiske Regningers simpelthen at opfatte som defineret ved sit Koordinatpar (x, y). Lægger man ved den analytisk-geometriske Behandling af de algebraiske Kurver af 2den Orden det komplekse Talbegreb til Grund og regner med homogene Koordinater, gælder der (i Modsætning til tidligere, da det benyttede Talbegreb var de reelle Tal), som man umiddelbart kan indse, den almengyldige Sætning, at enhver ret Linie, der ikke er helt

indeholdt i et Keglesnit, skærer dette i to og kun to (forskellige eller sammenfaldende) Punkter; ligeledes vil der, som vi eksempelvis nævner, gælde den almengyldige Sætning, at naar to algebraiske Ligninger af 2den Grad fremstiller den samme Punktmængde, da maa deres Koefficientsæt være proportionale (saaledes vil f. Eks. de to Ligninger $x^2 + y^2 = 0$ og $x^2 + 2y^2 = 0$, hvis Koefficientsæt ikke er proportionale, og som, naar vi kun regner med reelle Punkter, dog fremstiller den samme Punktmængde (nemlig kun det ene Punkt (0, 0)), naar vi benytter komplekse Tal ikke længer fremstille den samme Punktmængde, idet jo f. Eks. den første tilfredsstilles af Koordinaterne (1, i), medens den anden ikke gør det).

Vi vender os dernæst til Betragtning af de algebraiske Kurver af 3die Orden, 4de Orden, o. s. v. Her vilde man maaske paa Forhaand vente, at det for at opnaa en simpel almengyldig Sætning vedrørende Antallet af Skæringspunkter med en vilkaarlig ret Linie var nødvendigt hver Gang at lægge et nyt, for Kurverne af den omhandlede Orden hensigtsmæssigt tilrettelagt, Talområde til Grund. Det forholder sig imidlertid anderledes og simplere, idet det viser sig, at det komplekse Talområde (og det dertil knyttede Punktbegreb), som vi ovenfor indførte af Hensyn til de algebraiske Kurver af 2den Orden, i Virkeligheden danner det naturlige Talområde ogsaa for Behandlingen af de algebraiske Kurver af vilkaarlig, n^{te}, Orden. Dette hidrører fra, at der (som vi i et senere Afsnit skal bevise) gælder følgende Hovedsætning, Algebraens Fundamentalsætning: Lig-

ger vi det komplekse Talomraade til Grund, vil enhver algebraisk Ligning af n^{te} Grad $A_0 + A_1 t + \ldots + A_n t^n = 0$ have n og kun n (forskellige eller sammenfaldende) Rødder. Ved Benyttelse af denne Sætning kan man uden Vanskelighed bevise, at der (naar man benytter homogene Koordinater og komplekse Tal) gælder den almengyldige Sætning: Enhver ret Linie, der ikke er helt indeholdt i en algebraisk Kurve af n^{te} Orden, skærer denne i netop n Punkter. Almindeligere gælder der, som man kan bevise, Sætningen: To algebraiske Kurver af henholdsvis m^{te} og n^{te} Orden har, hvis de ikke er helt eller delvis sammenfaldende (d. v. s. hvis de ikke har uendelig mange Punkter fælles) netop m. n (forskellige eller sammenfaldende) Skæringspunkter. — Vi skal, hvad angaar de algebraiske Kurvers almindelige Theori, nøjes med disse orienterende Bemærkninger; en nærmere Behandling af denne Theori vilde, som ovenfor antydet, kræve en forudgaaende Undersøgelse af de algebraiske Ligningers Theori indenfor det komplekse Talomraade, og vilde falde udenfor Rammen for disse Forelæsninger. Ved de specielle, i Reglen ret simple, algebraiske Kurver, vi i det følgende vil træffe paa, vil vi kunne hjælpe os uden at have en saadan almindelig Theori til Raadighed (og uden derfor at komme ind paa en Undersøgelse af Kurvernes „algebraiske Natur"), nemlig ved at benytte analytiske Metoder, der direkte lager Sigte paa at bestemme Kurvernes Udseende. Saadanne Metoder, hvis Anvendelse iøvrigt i ingen Henseende er begrænset til de algebraiske Kurver, men som lige

saa vel kan anvendes overfor ikke-algebraiske Kurver (d. v. s. Kurver, der ikke kan fremstilles ved en algebraisk Ligning $F(x, y) = 0$), kan være af forskellig Art, idet de dels kan gaa ud paa at bestemme Kurvens Forløb „i det Store og Hele" (f. Eks. ved at bestemme, hvor Kurven „stiger" og hvor den „falder", eller hvor Kurven vender sin hule Side „opad" og hvor den vender sin hule Side „nedad" eller lignende), og dels kan gaa ud paa nærmere at bestemme Kurvens Forhold i den umiddelbare Omegn af saadanne enkelte Punkter, som det er af særlig Vigtighed for de paagældende Problemer at faa undersøgt. I et senere Afsnit, hvor vi har Differentialregningens Hjælpemidler til Raadighed, skal vi udførligt omtale saadanne analytiske Metoder. Vi gaar nu over til at afslutte vor Behandling af de plane algebraiske Kurvers Theori med, som Øvelseseksempler, at undersøge nogle specielle karakteristiske Kurver. Ved Undersøgelsen af disse Kurver vil vi, i Overensstemmelse med hvad vi ovenfor har sagt, kun i ringe Grad anvende en algebraisk Undersøgelsesmetode, men vil væsentlig søge (omend det kun kan blive paa ret mangelfuld Maade, da vi jo endnu ikke har de fornødne Hjælpemidler til Raadighed) direkte at orientere os over Kurvernes Udseende. Ved Behandlingen af disse specielle Eksempler vil vi tillige faa Opmærksomheden henledt paa visse Forhold af almindeligere Karakter (som vi først i et senere Afsnit vil kunne komme nærmere ind paa), f. Eks. at Tangenten i et Punkt P af en algebraisk Kurve (hvilken Tangent vi ovenfor

har defineret ad rent algebraisk Vej, nemlig ved Benyttelse af Begrebet „sammenfaldende Skæringspunkter") ogsaa vil kunne karakteriseres som Grænsestillingen for en variabel Sekant PQ, der foruden i det faste Punkt P skærer Kurven i endnu et (variabelt) Punkt Q, der nærmer sig mere og mere til at falde sammen med P; som et andet Eksempel nævner vi, at Asymptoten i et uendelig fjernt Punkt P paa en algebraisk Kurve, der i det foregaaende er karakteriseret algebraisk derved, at den skærer Kurven i to i P sammenfaldende Punkter, ogsaa vil kunne karakteriseres derved, at et variabelt Punkt Q paa Kurven, der „fjerner sig ud imod P," vil nærme sig mere og mere til at falde paa Asymptoten.

101. Specielle algebraiske Kurver. Lad os som første Eksempel betragte den ved Ligningen af 3die Grad

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \tag{10}$$

fremstillede Kurve, der sædvanligvis kaldes Descartes Blad. Denne Kurve har vi allerede ovenfor benyttet som Eksempel, nemlig i 99, hvor Talen var om algebraiske Kurver i homogene Koordinater; vi viste der, at Kurven havde et og kun et uendelig fjernt Punkt, nemlig Punktet (1, −1, 0), samt at Kurvens Asymptote (Tangenten i det uendelig fjerne Punkt) var bestemt ved Ligningen $x + y + a = 0$, altsaa i inhomogene Koordinater ved Ligningen $x + y + a = 0$. — I det Ligning (10) ikke forandres, naar x og y ombyttes med hinanden, vil Kurven, hvis

den indeholder Punktet (x_0, y_0), tillige indeholde Punktet (y_0, x_0), d. v. s. Kurven er <u>symmetrisk med Hensyn til Linien $y = x$</u>. Endvidere bemerker vi, at Kurven gaar gennem Begyndelsespunktet O (da det konstante Led mangler) samt har et <u>Dobbeltpunkt i O</u> (da ogsaa første Grads Leddene mangler); idet Leddene af 2^{den} Grad sat lig med Nul ($-3axy = 0$) bestemmer to forskellige rette Linier gennem O, nemlig Linierne $x = 0$ og $y = 0$, har Kurven <u>to forskellige Tangenter i Dobbeltpunktet</u>, nemlig de to Koordinatakser. — For nu at orientere os over Kurvens Udseende (og særlig over dens Udseende i Omegnen af Dobbeltpunktet O), er det bekvemt først at udføre en Koordinattransformation, nemlig at gaa over fra det retvinklede Koordinatsystem (XY) til det <u>polære</u> System, hvor Dobbeltpunktet O er Pol og X-Aksen er Akse. Kurvens Ligning, henført til dette polære Koordinatsystem, finder vi umiddelbart ved i (10) at indsætte $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$; herved faas $r^3(\sin^3\theta + \cos^3\theta) - 3ar^2\sin\theta\cos\theta = 0$, eller, idet vi bortdividerer Faktoren r^2 (hvis Tilstedeværelse naturligvis skyldes, at Polen O er et Dobbeltpunkt paa Kurven), Ligningen

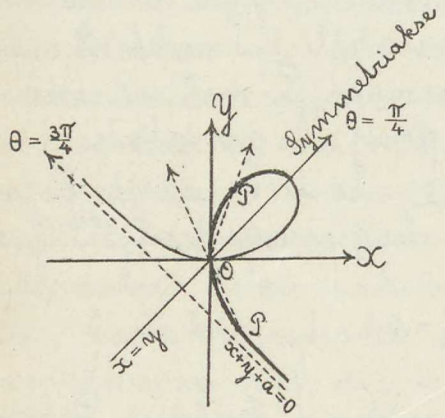


Fig. 51.

$$(11) \qquad r = \frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta},$$

der bestemmer os r entydigt som Funktion af θ. Vi tilføjer den Bemærkning, at medens Ligningen i polare Koordinater før Divisionen med r^2 (ifølge sin Udledelse) var tilfredsstillet af ethvert Sæt polare Koordinater til ethvert Punkt paa Kurven, vil Ligningen efter Divisionen med r^2 (altsaa Ligning (11)) vel være tilfredsstillet af samtlige polare Koordinatsæt til de fra O forskellige Punkter paa Kurven, men derimod ikke mere af samtlige polare Koordinatsæt ($r = 0$, θ vilkaarlig) til dette Punkt, men kun af de særlige Koordinatsæt $r = 0$, $\theta = p\pi$ og $r = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2} + p\pi$, for hvilke Værdierne af θ (i Overensstemmelse med Tangentbestemmelsen i retvinklede Koordinater) svarer til henholdsvis den ene og den anden af de to Tangenter $y = 0$ og $x = 0$ i Dobbeltpunktet. For nu at undersøge Kurvens Forløb behøver vi aabenbart kun (da de to Koordinatsæt (r_0, θ_0) og $(-r_0, \theta_0 + \pi)$ jo bestemmer samme Punkt) at lade θ gennemløbe et Interval af Længden π, f. Eks. Intervallet $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$, og fordi den her betragtede Kurve er symmetrisk med Hensyn til Linien $y = x$ (d. v. s. Linien $\theta = \frac{\pi}{4}$) kan vi endog nøjes med at studere Kurven, naar θ gennemløber den ene Halvdel af dette Interval, f. Eks. Intervallet $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$. Til $\theta = \frac{\pi}{2}$ svarer $r = 0$, medens r øjensynlig er positiv for $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$, negativ for $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}$; den til $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$ svarende Kurvegren (paa Figuren den stærkt optrukne) ligger altsaa, bortset fra Punktet O, helt til højre for Ordinataksen. Idet Radiusvektor OP til det variable Punkt P: (r, θ) gaar imod Nul, naar θ nærmer sig (voksende eller aftagende) til $\frac{\pi}{2}$, vil Grænsestillingen for Sekanten OP,

naar P langs den betragtede Kurvegren (fra den ene eller fra den anden Side) nærmer sig til O, være Ordinataksen (altsaa den ene Tangent i Dobbeltpunktet); den betragtede Kurvegren ligger altsaa i Omegnen af Dobbeltpunktet O som vist paa Figuren. – Gaar θ fra $\frac{\pi}{4}$ til $\frac{\pi}{2}$, vil r gaa fra $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ til 0, medens r, naar θ fra $\frac{\pi}{2}$ vokser ud imod $\frac{3\pi}{4}$, i numerisk Værdi vil vokse ud over alle Grænser, idet jo Nævneren $\sin^3\theta + \cos^3\theta$ gaar mod Nul, naar θ nærmer sig til $\frac{3\pi}{4}$. Vi vil vise, at det variable Punkt $P:(r,\theta)$ paa Kurven, naar θ voksende nærmer sig til $\frac{3\pi}{4}$ (hvorved Punktet P jo fjerner sig saaledes bort i det uendelige, at Linien OP nærmer sig til at have den til Kurvens uendelig fjerne Punkt svarende Heldning) vil nærme sig mere og mere til at falde paa Kurvens Asymptote $x + y + a = 0$. Rigtigheden heraf indses umiddelbart saaledes: Idet Asymptotens Ligning paa Normalform er $\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y+a) = 0$, vil Afstanden d fra Asymptoten til det variable Punkt P bestemmes ved $d = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y + a)$, hvor

$$(x, y) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta) \quad = \quad \left(\frac{3a\sin\theta\cos^2\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}\ ,\ \frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}\right)$$

betegne P's Koordinater; vi finder herigennem den søgte Afstand d bestemt ved

$$d = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y + a) = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{3\sin\theta\cos\theta\,(\cos\theta+\sin\theta)}{\sin^3\theta+\cos^3\theta} + 1\right),$$

altsaa (idet vi i Brøkens Taller og Nævner bortdividerer Faktoren $\cos\theta + \sin\theta$, der er $\neq 0$ for $\theta \neq \frac{3\pi}{4} + p\pi$)

$$d = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{3\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta} + 1\right),$$

hvilket sidste Udtryk umiddelbart ses at gaa mod Nul, naar θ vokser mod $\frac{3\pi}{4}$. — Efter at vi hermed har orienteret os over den ene Halvdel af Kurven (paa Figuren den stærkt optrukne), behersker vi ogsaa den anden Halvdel (paa Figuren den svagt optrukne), der jo er symmetrisk med den første med Hensyn til Linien $x = y$. Det bemærkes, at den anden gennem Dobbeltpunktet gaaende Kurvegren ligger overfor X-Aksen (den anden Tangent i Dobbeltpunktet) ligesom den først betragtede Kurvegren ligger over Y-Aksen. (Vi tilføjer sluttelig den Bemærkning, at den Omstændighed, at <u>begge</u> de to i det uendelige gaaende Kurvegrene, der nærmer sig til Asymptoten, ligger paa <u>samme</u> Side af Asymptoten (og ikke som f. Eks. ved Hyperblen, og som det normalt vil være Tilfældet, hver paa sin Side af Asymptoten) hænger sammen med, at Asymptoten, som vist i **99**, skærer Kurven i <u>tre</u> i det uendelig fjerne Punkt sammenfaldende Punkter (og ikke som normalt i kun to sammenfaldende Punkter). I Sammenhæng hermed staar ogsaa det Forhold (se Opg. 111), at den i det uendelige gaaende Gren af Descartes Blad nærmer sig i væsentlig stærkere Grad til at falde sammen med sin Asymptote end Tilfældet er f. Eks. ved en Hyperbel).

Som andet Eksempel betragter vi den ved Ligningen

$$(12) \qquad (x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$$

fremstillede Kurve af 4de Orden, der kaldes <u>Lemnis-</u>

katen. Idet (12) indeholder enhver af Koordinaterne x og y kun i lige Potenser, vil Kurven, hvis den gaar gennem Punktet (x_0, y_0), tillige gaa gennem Punkterne $(x_0, -y_0)$ og $(-x_0, y_0)$, d. v. s. Kurven er symmetrisk med Hensyn til enhver af Koordinatakserne (Kurven er følgelig ogsaa symmetrisk med Hensyn til Begyndelsespunktet, d. v. s. Punkterne (x_0, y_0) og $(-x_0, -y_0)$ ligger samtidig paa Kurven). Idet saa vel det konstante Led som Leddene af første Grad mangler, gaar Kurven gennem Begyndelsespunktet O og har et Dobbeltpunkt i O. Kurven har i Dobbeltpunktet to forskellige Tangenter, nemlig de ved Ligningen $2a^2(x^2-y^2)=0$ bestemte to Linier $x+y=0$ og $x-y=0$. Kurven indeholder intet uendelig fjernt Punkt (da Leddene af højst Grad $(x^2+y^2)^2$ sat lig med Nul ingen egentlig Løsning besidder). For at undersøge Kurvens Udseende benytter vi ligesom ved det forrige Eksempel polære Koordinater (r, θ), idet vi vælger Polen i Dobbeltpunktet O og X-Aksen til Akse. Vi finder ved i (12) at indsætte $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ Kurvens Ligning i polære Koordinater at være $r^4 = 2a^2r^2\cos 2\theta$, eller efter Division med den (paa Grund af Dobbeltpunktet O optrædende) Faktor r^2,

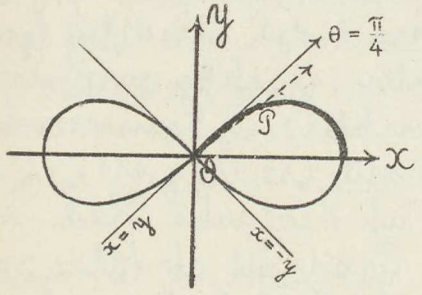


Fig. 52.

$$(13) \qquad r^2 = 2a^2\cos 2\theta.$$

Idet $\cos 2\theta$ er negativ for $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$ og for $\frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4}$, viser Ligning (13) os for det første, at Lemniskaten ikke indeholder noget Punkt indenfor Vinkelrummene $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$ og $\frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4}$; for $\theta = \frac{\pi}{4} + p\pi$ og $\theta = -\frac{\pi}{4} + p\pi$ finder vi (svarende til Heldningerne af de to Tangenter i Dobbeltpunktet) $r = 0$, medens vi for $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ og $\frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{4}$, hvor $\cos\theta$ er positiv, finder to Værdier af r, der er lige store med modsatte Fortegn, i Overensstemmelse med at Kurven er symmetrisk med Hensyn til Punktet O. Idet to Værdier θ_0 og $\theta_0 + \pi$ indenfor henholdsvis det ene og det andet af de sidstnævnte Intervaller bestemmer samme (med Hensyn til O symmetrisk beliggende) Punktpar paa Kurven, behøver vi for det første blot at beskæftige os med Værdien af θ indenfor det ene af disse Intervaller, f. Eks. Intervallet $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$, og paa Grund af Symmetrien med Hensyn til de to Koordinatakser X og Y er det tilstrækkeligt at undersøge den Del af Kurven, der ligger i første Kvadrant, og som bestemmes ved $r = +a\sqrt{2\cos 2\theta}$, idet θ varierer fra 0 til $\frac{\pi}{4}$. Under denne Variation af θ vil r, idet den stedse aftager, gaa fra $a\sqrt{2}$ til 0; det tilsvarende Kurvestykke vil have et Udseende som vist paa Fig. 52 (det stærkt optrukne Kurvestykke), idet det specielt bemærkes, at Grænsestillingen for Sekanten OP, naar P langs den betragtede Kurvegren nærmer sig til Dobbeltpunktet O, vil være Linien $y = x$ (altsaa den ene Tangent til Kurven i Dobbeltpunktet). Efter at vi hermed har bestemt den i første Kvadrant beliggende Del af Lemniskaten, kan vi umiddelbart ved Hjælp af den nævnte Symmetri med Hensyn til

Aksernе tegne den resterende Del af Kurven (den svagt opbrukne Del). De to Tangenter i Dobbeltpunktet O kaldes, paa Grund af deres Beliggenhed overfor henholdsvis den ene og den anden af de to gennem O gaaende Kurvegrene, for Vendetangenter. (At disse to Tangenter begge er Vendetangenter (og ikke som f. Eks. ved Descartes Blad „sædvanlige" Tangenter) hænger sammen med, at enhver af dem, som man umiddelbart ser ved i Kurvens Ligning (12) at indsætte henholdsvis $y = x$ og $y = -x$, skærer Kurven i fire i O sammenfaldende Punkter og ikke (som en Tangent i et Dobbeltpunkt sædvanligvis gør) i kun tre Punkter).

Som et tredje og sidste Eksempel vil vi betragte den saakaldte Konkoide, som vi (i Modsætning til de forrige Eksempler, hvor vi definerede de omhandlede Kurver ved deres Ligninger) vil indføre gennem en geometrisk Definition, nemlig følgende: Lad der (se Fig. 53) være givet en ret Linie L og et Punkt O udenfor Linien samt et Liniestykke a. Gennem det faste Punkt O drages en ret Linie l til Skæring med den faste Linie L i Punktet M og orienteret saaledes, at OM er positiv. Paa Linien l afsættes Punkterne A og B saaledes, at $MA = a$, $MB = -a$. Ved Konkoiden forstaas da det geometriske Sted for Punk-

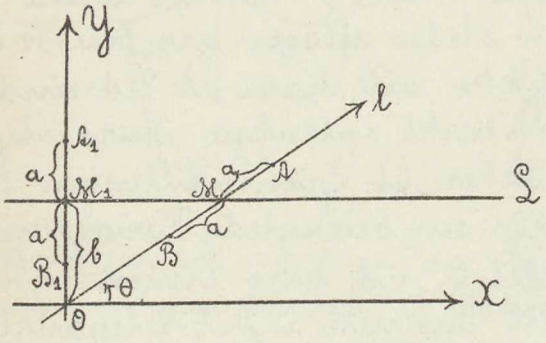


Fig. 53.

lerne A og B, naar Linien L drejer sig omkring Punktet O. — Vi vælger et retvinklet Koordinatsystem med Begyndelsespunkt i O, og hvis Y-Akse er vinkelret paa Linien L og orienteret saaledes, at Afstanden OM_1 fra Begyndelsespunktet O til Y-Aksens Skæringspunkt M_1 med Linien L er positiv; sammen med dette retvinklede Koordinatsystem betragter vi tillige det polære Koordinatsystem, hvor O er Pol og X-Aksen Akse. Lad os først søge Ligningen i polære Koordinater (r, θ) for den af det „øverste" Punkt A beskrevne Kurve K. Idet $OM = OA - MA = r - a$, finder vi umiddelbart, idet vi betegner Afstanden OM_1 med b, at Kurvens Ligning er

$$(r-a)\sin\theta = b,$$

hvor θ varierer fra 0 til π. Kurvens øverste Punkt (d. v. s. det Punkt, hvis Afstand fra L er størst) er øjensynlig det paa Y-Aksen beliggende Punkt A_1. Nærmer θ sig til 0 (eller til π), vil Punktet A's Afstand fra Linien L gaa imod Nul, hvad der dels umiddelbart indses ud fra Kurvens Definition, dels straks fremgaar af Ligningen $r\sin\theta = b + a\sin\theta$, der jo viser, at Punktet A's Afstand $y = r\sin\theta$ fra X-Aksen gaar mod b, naar θ gaar mod Nul. Endelig bemærker vi, at Kurven K (ligesom naturligvis den af Punktet B beskrevne Kurve K) er symmetrisk med Hensyn til Y-Aksen. Man skønner herefter let, at Kurven K har et Udseende som angivet paa Figurerne 54^a, 54^b og 54^c, der svarer henholdsvis til $a < b$, $a = b$ og $a > b$.

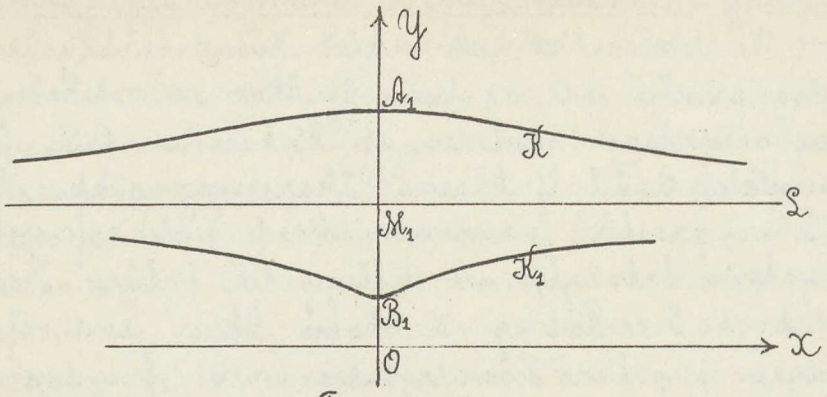


Fig. 54ª

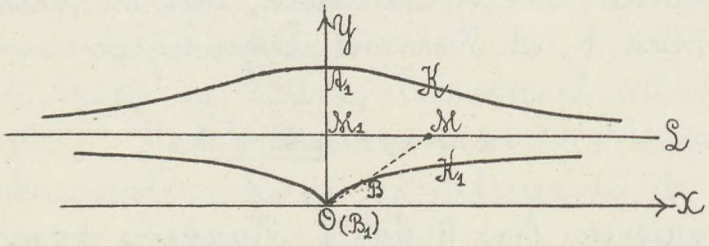


Fig. 54ᵇ

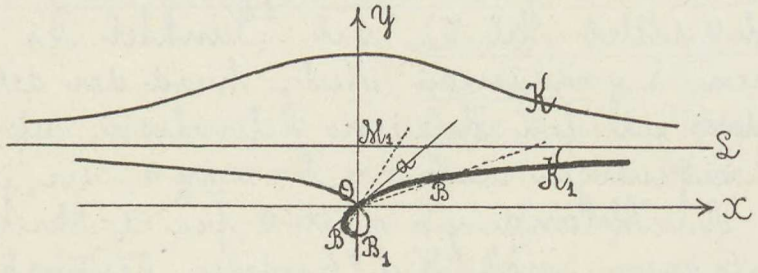


Fig. 54ᶜ

Kurven K er af samme Type i alle tre Tilfælde. – Vi vender os derefter til Betragtning af den af Punktet B beskrevne Kurve K_1. Idet (se Fig. 53) $OM = OB + BM = r + a$, har Kurven i polære Koordinater Ligningen

$$(r + a)\sin\theta = b,$$

hvor θ som ovenfor varierer fra 0 til π. Nærmer θ sig til Nul eller til π, vil Punktet B (ligesom ovenfor Punktet A) aabenbart nærme sig til Linien L; heraf følger umiddelbart Udseendet af den Del af Kurven K_1, der „gaar i det Uendelige" (d. v. s. for hvilken θ ligger nær ved Nul eller ved π). Hvad angaar den øvrige Del af Kurven (den Del, der ikke ligger „langt borte" fra O) vil dennes Udseende være væsentlig forskelligt eftersom $a < b$, $a = b$ eller $a > b$. Vi betragter først det simpleste Tilfælde, hvor $a < b$, Kurvens laveste Punkt, d. v. s. det Punkt, hvis Afstand fra Linien L er størst, altsaa det paa Y-Aksen beliggende Punkt B_1 ligger her over Punktet O, og Kurven faar, som man let skjønner, et Udseende som vist paa Fig 54a. Betragter vi dernæst det Tilfælde, hvor $a = b$, hvor altsaa Kurvens laveste Punkt B_1 falder netop i Punktet O, vil Kurven have et Udseende som vist paa Fig 54b, altsaa som man siger have en Spids i Punktet O, hvad der umiddelbart fremgaar deraf, at Grænsestillingen for Sekanten OB, naar B langs Kurven nærmer sig til O, øjensynlig er Ordinataksen. Betragter vi endelig Tilfældet $a > b$, hvor altsaa Kurvens laveste Punkt B_1 ligger under Punktet O, vil det variable Punkt B for to forskellige Værdier af θ falde i Punktet O, nemlig for de to Stillinger af Linien l, for hvilke $OM = a$; i disse to Stillinger har Linien l (idet $\sin\theta = \frac{b}{a}$) henholdsvis Ligningen $y = \frac{b}{+\sqrt{a^2 - b^2}}x$ og $y = \frac{b}{-\sqrt{a^2 - b^2}}x$. Varierer θ fra 0 til $\frac{\pi}{2}$, vil den af Punk-

det B beskrevne Halvdel af Kurven K_1 øjensynlig have et Udseende som vist paa Fig. 54[c] (det stærkt opbrukne Kurvestykke), idet det specielt bemærkes, at den ovenfor nævnte Linie $y = \frac{b}{+\sqrt{a^2 - b^2}} x$ vil være Grænsestilling for Sekanten OB, naar B langs det betragtede Kurvestykke (ligegyldig fra hvilken Side) nærmer sig til at falde sammen med O. Den anden Halvdel af Kurven K_1 (den, der beskrives af Punktet B, naar θ varierer fra $\frac{\pi}{2}$ til π) kan derefter umiddelbart tegnes, da den jo er symmetrisk med den forrige med Hensyn til Y-Aksen. – Vi skal nu til Slut bestemme Konkoidens Ligning i retvinklede Koordinater (x, y); specielt vil vi derigennem faa bevist, at Konkoiden virkelig er en <u>algebraisk Kurve</u>, d. v. s. at den kan fremstilles ved en Ligning $F(x, y) = 0$, hvor $F(x, y)$ er et Polynomium. Idet vi lader de to Kurvegrene K og K_1 sammen, har Konkoiden i polære Koordinater Ligningen $(r \mp a) \sin\theta = b$ (lader vi som ovenfor θ variere fra 0 til π, vil Fortegnet minus svare til den øverste Kurvegren K, Fortegnet plus til den nederste Kurvegren K_1, medens det derimod aabenbart forholder sig omvendt, naar vi lader θ variere fra π til 2π, altsaa orienterer Linien l modsat af før; Ligningen $(r \mp a) \sin\theta = b$ vil følgelig tilfredsstilles af samtlige polære Koordinatsæt til Konkoidens Punkter – eventuelt med Undtagelse af Punktet O; forlanger vi kun, at Ligningen skal tilfredsstilles af mindst et af Koordinatsættene til Kurvens Punkter, kan vi nøjes med kun det ene Fortegn, f. Eks. benytte Ligningen $(r + a) \sin\theta = b$). Bortskaffer vi af Ligningen

$(r \mp a)\sin\theta = b$ det dobbelte Fortegn ved at isolere Leddet $\mp a\sin\theta$ og opløfte til 2den Potens, faar vi Ligningen $a^2\sin^2\theta = b^2 + r^2\sin^2\theta - 2br\sin\theta$. For nu at komme over til retvinklede Koordinater (x, y), der jo er forbundet med de polære Koordinater (r, θ) ved Ligningerne $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, multiplicerer vi først (for straks at komme til en Ligning i x og y, der er paa hel Form) den ovenstaaende Ligning i polære Koordinater med Faktoren r^2, hvorved vi faar Ligningen $a^2r^2\sin^2\theta = b^2r^2 + r^4\sin^2\theta - 2br^3\sin\theta$. Indfører vi nu $r\cos\theta = x$, $r\sin\theta = y$ (og altsaa $r^2 = x^2 + y^2$), finder vi <u>Konkoidens Ligning i retvinklede Koordinater</u> $a^2y^2 = b^2(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)y^2 - 2b(x^2 + y^2)y$ eller, idet vi ordner,

$$(14) \qquad y^2(x^2+y^2) - 2by(x^2+y^2) + b^2x^2 + (b^2 - a^2)y^2 = 0$$

<u>Konkoiden er altsaa en algebraisk Kurve af 4de Orden.</u> – Vi bemærker, at denne Ligning (14) i <u>alle</u> Tilfælde (d. v. s. for alle Værdier af de positive Tal a og b) tilfredsstilles af Begyndelsespunktets Koordinater $(0, 0)$, altsaa at den ved (14) fremstillede Kurve indeholder Begyndelsespunktet ogsaa i det Tilfælde, hvor $a < b$, og hvor Punktet O jo ikke laa paa Konkoiden, defineret som geometrisk Sted for Punkterne A og B. Grunden til at Punktet O kommer med ogsaa i dette Tilfælde er naturligvis den, at vi ovenfor i Regningerne, hvor vi udførte Overgangen fra polære Koordinater til retvinklede Koordinater, multiplicerede den oprindelige Ligning i polære Koordinater med Faktoren r^2, der jo sat lig med Nul

netop bestemmer Punktet O. Fra et algebraisk Synspunkt hører det faste Punkt O imidlertid virkelig med til Konkoiden, ogsaa naar $a < b$ (i hvilket Tilfælde det er, hvad man kalder et <u>isoleret</u> Punkt paa Kurven), idet det kan bevises, at der ikke findes nogen algebraisk Ligning, der tilfredsstilles af Punkterne paa de to Kurvegrene K og K_1, uden at denne Ligning ogsaa tilfredsstilles af Koordinaterne til Punktet O. (Vi tilføjer, at det overhovedet er af algebraiske Grunde, at vi har taget de to forskellige geometriske Steder K og K_1 sammen til een Kurve, idet de fra et algebraisk (men derimod ikke fra et geometrisk) Synspunkt hører uløseligt sammen, d. v. s. der findes ikke nogen algebraisk Ligning $F(x, y) = 0$, der tilfredsstilles af Koordinaterne til den ene af disse Kurver, uden at den ogsaa tilfredsstilles af Koordinaterne til den anden).

— Konkoiden, fremstillet i retvinklede Koordinater ved Ligningen (14), har et <u>Dobbeltpunkt i O</u>, idet jo ikke blot det konstante Led, men ogsaa Leddene af første Grad mangler. For <u>$a > b$</u> (hvor Kurven har et „sædvanligt" Dobbeltpunkt i O) finder vi (ved at sætte Leddene af 2den Grad lig med Nul) <u>to forskellige Tangenter i Dobbeltpunktet</u>, nemlig de to ovenfor betragtede Linier $y = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} x$; for $a = b$ (hvor Konkoidens „Løjfe" har trukket sig sammen til det ene Punkt O, der derved er blevet en Spids paa Kurven) har Kurven to i Ordinataksen $x = 0$ <u>sammenfaldende Tangenter</u> i Dobbeltpunktet; og endelig for <u>$a < b$</u> (hvor Kurven K_1 helt har fjernet sig fra Punktet O og kun har efterladt dette Punkt som et isoleret Punkt) har Kurven <u>ingen Tangenter</u> i Dobbeltpunktet, idet jo her b^2 og $b^2 - a^2$ har samme Fortegn.

B. Algebraiske Flader og Kurver i Rummet.

102. *Definition af en algebraisk Flade.* Lad der i Rummet være fastlagt et retvinklet Koordinatsystem (XYZ); ved en algebraisk Flade af n^{te} Orden forstaas da det geometriske Sted for Punkter, hvis Koordinater (x,y,z) tilfredsstiller en algebraisk Ligning af n^{te} Grad, altsaa en Ligning $P(x,y,z)=0$, hvor $P(x,y,z)$ er et Polynomium af n^{te} Grad i de tre Variable x,y,z. Ganske som ved de tidligere behandlede specielle Tilfalde $n=1$ (Planer) og $n=2$ (Regelsnitsflader) følger umiddelbart ud fra Sætningen om, at Overgangen fra et retvinklet Koordinatsystem (XYZ) til et vilkaarligt andet $(X_1Y_1Z_1)$ sker ved en linear Substitution, at hvis en Punktmangde henført til et retvinklet Koordinatsystem (XYZ) fremstilles ved en algebraisk Ligning af n^{te} Grad $P(x,y,z)=0$, vil Punktmangden henført til et vilkaarligt andet retvinklet Koordinatsystem $(X_1Y_1Z_1)$ ligeledes kunne fremstilles ved en algebraisk Ligning af n^{te} Grad $P_1(x_1,y_1,z_1)=0$.

Idet en algebraisk Flade fremstilles ved kun *een* Ligning mellem de *tre* Koordinater x,y,z, vil man, naar Talen er om en *Parameterfremstilling* for Fladens Punkter (x,y,z), i Almindelighed (idet vi ser bort fra saadanne specielle udartede Flader som f. Eks. de ved Ligningerne $(x^2+y^4+2z^6)((x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2)=0$ eller $(x^2+y^2)(y^2+2z^2)=0$ fremstillede, der er sunket ind til kun at bestaa af enkelte Punkter eller Linier) have at gøre med en Fremstilling: $x=f(u,v)$, $y=g(u,v)$, $z=h(u,v)$ i *to* uafhangige Variable (Parametre) u og v; saaledes fandt vi f. Eks. i 61 for en algebraisk Flade af første Orden (en Plan) $Ax+By+Cz+D=0$ en Parameterfremstilling af Formen $x=a+a_1s+a_2t$, $y=b+b_1s+b_2t$,

$z = c + c_1 s + c_2 t$, hvor s og t er to af hinanden uafhængige uindskrænkede Variable, ligesom vi, for at nævne et speciellere Eksempel, for Ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ har fundet Parameterfremstillingen $x = a \cos u$, $y = b \sin u \cos v$, $z = c \sin u \sin v$, hvor u og v er to af hinanden uafhængige Variable, der imidlertid her (hvis vi vil have hvert Punkt paa Ellipsoiden med kun een Gang) maa indskrænkes til at variere indenfor passende valgte Intervaller. Vi tilføjer, at det i saadanne Tilfælde, hvor een af Koordinaterne, f. Eks. z, kun forekommer i 1ste Potens i Fladens Ligning (som ved Paraboloidens Ligning $z = Ax^2 + By^2$), eller almindeligere hvor man ved at løse denne Ligning med Hensyn til z kan faa z udtrykt paa simpel Maade ved x og y, sædvanligvis er bekvemt til de to uafhængige Parametre at vælge selve de to Koordinater x og y, hvorved den tredie Koordinat z jo da bliver en Funktion af dem.

Som et særlig simpelt Eksempel paa en algebraisk Flade af n^{te} Orden vil vi betragte en Flade fremstillet ved en Ligning $P(x, y, z) = 0$, hvor $P(x, y, z)$ er et homogent Polynomium af n^{te} Grad i x, y og z. Idet denne Ligning øjensynlig har Løsningen $(0, 0, 0)$, indeholder Fladen i alle Tilfælde (d. v. s. hvilke Værdier Ligningens Koefficienter end har) Begyndelsespunktet O; endvidere indses umiddelbart, at hvis den homogene Ligning $P(x, y, z) = 0$ har den egentlige Løsning (x_0, y_0, z_0), vil den ligeledes have et hvert med (x_0, y_0, z_0) proportionalt Talsæt (kx_0, ky_0, kz_0) til Løsning, d. v. s. Fladen vil, hvis den gaar gennem det fra Begyndelsespunktet O forskellige Punkt P, af sig selv indeholde hele den rette Linie OP. Fladen bestaar altsaa (hvis den da overhovedet indeholder andre Punkter end O) af rette Linier gennem O og kaldes en Kegleflade af n^{te} Orden med Toppunkt i O. — Som et andet simpelt Eksempel paa en algebraisk Flade nævner vi, at en Flade, i hvis Ligning den

<u>ene af de tre Koordinater, f. Eks. z, ikke forekommer</u> (hvis Ligning altsaa har Formen $P(x,y)=0$, hvor $P(x,y)$ er et Polynomium i x og y) <u>er en Cylinderflade med Frembringerne parallele med z Aksen</u>; thi idet Fladens Ligning $P(x,y)=0$, hvis den har Løsningen (x_0, y_0, z_0), jo ligeledes har Løsningen (x_0, y_0, z) for enhver Værdi af z, vil Fladen, hvis den gaar gennem Punktet P, af sig selv indeholde hele den rette Linie gennem P, der er parallel med z-Aksen.

103. <u>Algebraisk Kurve i Rummet</u>. Lad der være givet <u>to algebraiske Flader</u> ved Ligningerne $P_1(x,y,z)=0$ og $Q_1(x,y,z)=0$, og lad os søge de Punkter, der er beliggende paa <u>begge</u> disse to Flader, d. v. s. hvis Koordinater (x,y,z) tilfredsstiller <u>begge</u> de to Ligninger $P_1(x,y,z)=0$ og $Q_1(x,y,z)=0$. Vi søger hertil først <u>største fælles Maal</u> for de to Polynomier $P_1(x,y,z)$ og $Q_1(x,y,z)$; er Polynomiet $R(x,y,z)$ dette største fælles Maal, og sætter vi $P_1(x,y,z)=R(x,y,z)\cdot P(x,y,z)$ og $Q_1(x,y,z)=R(x,y,z)\cdot Q(x,y,z)$, vil der da ikke findes noget Polynomium (af højere end 0te Grad), der gaar op baade i $P(x,y,z)$ og i $Q(x,y,z)$. De søgte fælles Punkter for de to algebraiske Flader $P_1(x,y,z)=0$ og $Q_1(x,y,z)=0$ er da dels Punkterne paa Fladen $R(x,y,z)=0$ og dels de Punkter, hvis Koordinater (x,y,z) tilfredsstiller begge Ligningerne $P(x,y,z)=0$ og $Q(x,y,z)=0$. Disse sidste Punkter danner hvad man kalder <u>en algebraisk Kurve i Rummet</u>, idet man ved en algebraisk Kurve i Rummet i Følge Definitionen forstaar <u>Skæringskurven mellem to algebraiske Flader $P(x,y,z)=0$ og $Q(x,y,z)=0$, om hvilke det er forudsat, at de to Polynomier $P(x,y,z)$ og $Q(x,y,z)$ ikke</u> (specielt) <u>er delelige med et og samme Polynomium af mindst 1ste Grad</u>.

I det specielle Tilfælde, hvor den ene af Kurvens to Ligninger $P(x,y,z)=0$ og $Q(x,y,z)=0$, f. Eks. $P(x,y,z)=0$, er af <u>1ste Grad</u> og altsaa fremstiller en Plan, vil den i denne Plan helt beliggende Kurve netop være, hvad vi tidligere har kaldt <u>en plan al-</u>

gebraisk Kurve; thi tanker vi os Koordinatsystemet (X,Y,Z) valgt saaledes, at den nævnte Plan er XY-Planen og altsaa har Ligningen $z=0$, vil Kurven henført til det plane Koordinatsystem (XY) jo fremstilles ved den Ligning, der fremkommer af $Q(x,y,z)=0$ ved at sætte $z=0$, altsaa ved en algebraisk Ligning $q(x,y)=0$ i Koordinaterne x og y. Omvendt indser man umiddelbart, at enhver plan algebraisk Kurve $P(x,y)=0$ nede i XY-Planen kan opfattes som Skæringskurve mellem to algebraiske Flader i Rummet, nemlig f. Eks. mellem den algebraiske Cylinderflade $P(x,y)=0$ og Planen $z=0$.

En algebraisk Kurve i Rummet kan paa mangfoldig Maade fremstilles som Skæringskurve mellem to algebraiske Flader, d. v. s. <u>for en og samme algebraiske Kurve kan de to Ligninger $P(x,y,z)=0$ og $Q(x,y,z)=0$, der fremstiller Kurven, valges paa mangfoldig Maade</u>; saaledes vil f. Eks. de to Par Ligninger

$$\begin{cases} P(x,y,z)=0 \\ Q(x,y,z)=0 \end{cases} \quad \text{og} \quad \begin{cases} a.P(x,y,z)+b.Q(x,y,z)=0 \\ c.P(x,y,z)+d.Q(x,y,z)=0, \end{cases}$$

hvor a, b, c, d er Konstanter og $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, øjensynlig fremstille samme Kurve, idet den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse, for at (x_0, y_0, z_0) er en Løsning til de to sidste Ligninger, jo er den, at begge Tallene $P(x_0,y_0,z_0)$ og $Q(x_0,y_0,z_0)$ er Nul. — Eliminerer man mellem en algebraisk Kurves to Ligninger $P(x,y,z)=0$ og $Q(x,y,z)=0$ en af Koordinaterne, f. Eks. z, vil den derved fremkomne Ligning $R(x,y)=0$ (om hvilken man i Ligningernes Theori viser, at den atter er en algebraisk Ligning) øjensynlig, naar den opfattes som Ligningen for en Kurve nede i XY-Planen, fremstille Kurvens Projektion paa XY-Planen; thi Betingelsen for at (x_0, y_0) er en Løsning til den

ved Eliminationen fremkomne Ligning $R(x, y) = 0$ er jo netop den, at der til Talparret (x_0, y_0) findes et tredie Tal z_0, saaledes at (x_0, y_0, z_0) tilfredsstiller Kurvens to Ligninger; den ved Elimination af z fremkomne Ligning vil følgelig, opfattet som Ligning for en Flade i Rummet, fremstille Kurvens „projicerende Cylinder" paa XY-Planen. Undertiden er det bekvemt at opfatte en algebraisk Kurve som Skaringskurve mellem dens projicerende Cylindre ind paa to af Koordinatplanerne; hertil maa dog bemærkes, at saadanne to af Kurvens projicerende Cylindre i Reglen vil skære hinanden i en Kurve, hvoraf den givne Kurve kun udgør en Del. (Smlg. f. Eks. Opg. 118). Lad os som et specielt simpelt Eksempel paa Fremstillingen af en algebraisk Kurve i Rummet søge Ligningerne for en Cirkel, som vi vil tænke os givet ved Tallene $x_0, y_0, z_0, R, A, B, C$, hvori (x_0, y_0, z_0) er Centrums Koordinater, R angiver Cirklens Radius, medens (A, B, C) er et Sæt Hældningstal for Normalen til Cirklens Plan. I det denne Cirkel kan dannes som Skaringskurve mellem en Kugleflade med Centrum i (x_0, y_0, z_0) og Radius R og en Plan gennem (x_0, y_0, z_0) vinkelret paa den ved (A, B, C) bestemte Hældning, kan Cirklen øjensynlig fremstilles ved de to Ligninger

$$(1) \qquad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2, \quad A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$$

Et andet Sæt Ligninger for den samme Cirkel kommer vi til ved at opfatte Cirklen som Skaringskurve mellem Planen $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$ og den cirkulære Cylinder, der har Cirklen til Normalsnit; idet denne Cylinder jo er det geometriske Sted for Punkter, hvis Afstand fra Linien $\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}$ er lig med R, har den Ligningen $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 - (\alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0) + \gamma(z-z_0))^2 = R^2$,

hvor $(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \cdot (A,B,C)$ er Cylinderaksens Retningscosinusser (se 66), Cirklen faar altsaa Ligningerne

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-(\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0))^2 = R^2, \quad A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

der øjensynlig (saaledes som vi jo paa Forhaand vidste, at det maatte vare Tilfaldet) har ganske de samme Løsninger (x,y,z) som de to ovenfor fundne Ligninger (1).

Idet en algebraisk Kurve fremstilles ved to Ligninger mellem de tre Koordinater x,y,z, vil man i Almindelighed (idet vi ser bort fra saadanne specielle udartede Tilfalde, hvor Kurven f. Eks. kun bestaar af enkelte Punkter) naar Talen er om en Parameterfremstilling for Kurven, have at gøre med en Fremstilling $x=f(t)$, $y=g(t)$, $z=h(t)$ i kun een Variabel t; saaledes fandt vi f. Eks. for den simpleste af alle algebraiske Kurver, nemlig den rette Linie (der jo er Skaringskurve mellem to algebraiske Flader, der begge er af første Orden) en Parameterfremstilling paa Formen $x=a+bt$, $y=c+dt$, $z=e+ft$, hvor Parameteren t er en uindskranket Variabel. (Idet man saaledes kan karakterisere Punkterne paa en Kurve ved kun een Parameter t, medens man for at karakterisere Punkterne paa en Flade maa benytte to af hinanden uafhængige Parametre u og v, benytter man undertiden den Sprogbrug, at en Kurve indeholder en „enkelt Uendelighed" af Punkter, medens en Flade indeholder en „dobbelt Uendelighed" af Punkter, om samtlige Punkter i Rummet (eller om samtlige Punkter tilhørende en ved en given Flade afgrænset Del af Rummet, f. Eks. Punkterne indenfor Kuglefladen $x^2+y^2+z^2=R^2$) siger man da, at de danner en „tredobbelt Uendelighed" af Punkter, fordi disse Punkter jo karakteriseres ved tre indbyrdes uafhængige Parametre, f. Eks. Punkternes tre Koordinater x,y og z; man siger ogsaa om en Kurve, at den har kun een Dimension,

om en Flade, at den har to Dimensioner, og om hele Rummet (eller en afgranset Del af Rummet), at det har tre Dimensioner).

104. Skæring mellem ret Linie og algebraisk Flade. Tangentplan. Lad os søge de (eventuelle) Skæringspunkter mellem en vilkaarlig algebraisk Flade af n^{te} Orden $F(x, y, z) = 0$ og en vilkaarlig ret Linie, som vi tænker os givet paa Parameterform ved Ligningerne $x = a + bt$, $y = c + dt$, $z = e + ft$. Indsætter vi disse sidste Udtryk for x, y og z i Fladens Ligning $F(x, y, z) = 0$, finder vi til Bestemmelse af Skæringspunkternes Parameterværdier en Ligning af Formen

$$(2) \qquad L_0 + L_1 t + L_2 t^2 + \cdots\cdots + L_{n-1} t^{n-1} + L_n t^n = 0 .$$

Er i denne sidste Ligning alle $n+1$ Koefficienter $L_0, \ldots\ldots L_n$ lig Nul, vil Ligningen være tilfredsstillet af enhver Værdi af t, d. v. s. den rette Linie er helt beliggende paa Fladen. Er derimod ikke alle $n+1$ Koefficienter Nul, vil Polynomiet paa venstre Side af (2) være et egentligt Polynomium af højst n^{te} grad, og Ligning (2) vil følgelig have højst n Rødder. En ret Linie, der ikke er helt indeholdt i en algebraisk Flade af n^{te} Orden, vil altsaa skære Fladen i højst n Punkter, d. v. s. enten i $0, 1, 2, \ldots$ eller n Punkter, og dette Resultat forbliver aabenbart gyldigt, ogsaa naar vi regner et Skæringspunkt P, hvis tilsvarende Parameterværdi t_1 er q-dobbelt Rod i (2), q Gange med.

Idet vi paa sædvanlig Maade siger om den rette Linie $x = a + bt$, $y = c + dt$, $z = e + ft$, at den skærer den algebraiske Flade $F(x, y, z) = 0$ i to (flere end ét) i $P: (a + bt_1, c + dt_1, e + ft_1)$ sammenfaldende Punkter, hvis Polynomiet paa venstre Side af Ligning (2) er deleligt med $(t - t_1)^2$ (altsaa hvis dette Polynomium enten er et Nulpolynomium eller et egentligt Polynomium, der har t_1 til Rod mindst to Gange), vil vi søge de (eventuelle) rette Linier

gennem et givet Punkt P paa Fladen, der skærer denne i to i P sammenfaldende Punkter. Vi parallelforskyder hertil først Koordinatsystemet saaledes, at dets Begyndelsespunkt falder i det givne Punkt P paa Fladen; herved faar Fladen en Ligning af Formen

$$(3) \qquad Ax + By + Cz + Dx^2 + Ey^2 + Fz^2 + Gyz + \cdots\cdots + Hx^m + \cdots + Iz^m = 0 .$$

Skærer vi denne Flade med en vilkaarlig ret Linie $x = \alpha t,\ y = \beta t,\ z = \gamma t$ gennem Begyndelsespunktet P, finder vi til Bestemmelse af Parameterværdierne t (svarende til Skæringspunkterne) Ligningen

$$t(A\alpha + B\beta + C\gamma) + t^2(D\alpha^2 + E\beta^2 + F\gamma^2 + G\beta\gamma + \cdots) + \cdots\cdots + t^m(H\alpha^m \cdots + I\gamma^m) = 0.$$

Denne Ligning har (selvfølgelig) Roden $t = 0$, svarende til Punktet P; skal Linien skære Fladen i to (flere end ét) i P sammenfaldende Punkter, kræves hertil som nødvendig og tilstrækkelig Betingelse, at

$$(4) \qquad A\alpha + B\beta + C\gamma = 0.$$

Vi skelner nu mellem to Tilfælde: 1) <u>De tre Koefficienter A, B, C til første Grads Leddene i Fladens Ligning (3) er alle Nul</u>; her vil <u>enhver</u> ret Linie gennem Begyndelsespunktet P skære Fladen i to i P sammenfaldende Punkter. P kaldes et <u>Dobbeltpunkt</u> paa Fladen. 2) <u>Koefficienterne A, B, C er ikke alle tre Nul</u>. Betingelsen (4) for at den rette Linie (α, β, γ) gennem P skærer Fladen i to i P sammenfaldende Punkter, udsiger her i geometrisk Fortolkning, at Retningen (α, β, γ) skal være vinkelret paa den ved Heldningstallene (A, B, C) bestemte Heldning,

altsaa at den betragtede rette Linie gennem P skal være beliggende i Planen $Ax + By + Cz = 0$, hvilken Plan kaldes Fladens Tangentplan i P. Ligningen for Tangentplanen i Begyndelsespunktet O til en gennem O gaaende algebraisk Flade, der ikke har dette Punkt O til Dobbeltpunkt (d. v. s. hvori ikke alle tre første Grads Led mangler), fremgaar altsaa simpelthen af Fladens Ligning ved at slette alle Leddene paa nær dem af første Grad.

105. Tangent til en algebraisk Kurve. Idet en algebraisk Kurve er bestemt ved to Ligninger mellem de tre Koordinater x, y, z, vil to vilkaarlige algebraiske Kurver, bestemte henholdsvis ved Ligningerne $P(x, y, z) = 0$, $Q(x, y, z) = 0$ og $P_1(x, y, z) = 0$, $Q_1(x, y, z) = 0$ „i Almindelighed" ikke skære hinanden, idet der jo i Almindelighed ikke vil findes noget Talsæt (x_0, y_0, z_0), der indsat i Kurvernes Ligninger tilfredsstiller dem alle fire; heri er specielt indeholdt, at en algebraisk Kurve og en ret Linie i Almindelighed ikke skærer hinanden. Lad os søge Betingelsen for at den rette Linie $x = a + bt$, $y = c + dt$, $z = e + ft$ skærer (d. v. s. har mindst eet Punkt fælles med) den algebraiske Kurve $P(x, y, z) = 0$, $Q(x, y, z) = 0$. Vi indsætter heri $x = a + bt$, $y = c + dt$, $z = e + ft$ i henholdsvis den ene og den anden af den givne Kurves to Ligninger $P(x, y, z) = 0$ og $Q(x, y, z) = 0$, hvorved vi finder to algebraiske Ligninger i t

$$(5) \qquad p(t) = 0 \qquad \text{og} \qquad q(t) = 0,$$

hvor $p(t)$ og $q(t)$ er Polynomier af højst m^{te} og n^{te} Grad, dersom Polynomierne $P(x, y, z)$ og $Q(x, y, z)$ er henholdsvis af netop m^{te} og n^{te} Grad. Den søgte Betingelse for, at den fin-

des et Punkt $(a+bt_1, c+dt_1, e+ft_1)$ paa den rette Linie, der tillige er beliggende paa den givne Kurve, er aabenbart den, at der findes et Tal $t=t_1$, der tilfredsstiller begge de to Ligninger (5), altsaa at de to Polynomier $p(t)$ og $q(t)$ har en fælles Rod. Er de to Polynomier $p(t)$ og $q(t)$ begge delelige ikke blot med $t-t_1$, men begge delelige med $(t-t_1)^2$, siger vi om den rette Linie, at den skærer den givne algebraiske Kurve i to i Punktet $P:(a+bt_1, c+dt_1, e+ft_1)$ sammenfaldende Punkter, som det umiddelbart fremgaar af denne Definition, er Betingelsen for, at en ret Linie skærer en algebraisk Kurve $P(x,y,z)=0$, $Q(x,y,z)=0$ i to i Punktet P sammenfaldende Punkter, den at den rette Linie skærer enhver af de to Flader $P(x,y,z)=0$ og $Q(x,y,z)=0$, (som ved Skæring bestemmer den givne algebraiske Kurve) i to i P sammenfaldende Punkter. Lad P være et vilkaarligt Punkt paa den algebraiske Kurve! $P(x,y,z)=0$, $Q(x,y,z)=0$, om hvilket Punkt vi dog vil antage, at det ikke er et Dobbeltpunkt paa nogen af de to Flader $P(x,y,z)=0$ og $Q(x,y,z)=0$, og lad os søge de (eventuelle) rette Linier gennem P, der skærer Kurven i to i P sammenfaldende Punkter. I Følge den foregaaende Bemærkning er Betingelsen for, at en ret Linie har den omhandlede Egenskab, den, at den rette Linie skærer enhver af Fladerne $P(x,y,z)=0$ og $Q(x,y,z)=0$ i to i P sammenfaldende Punkter, altsaa den, at Linien ligger i begge Tangentplanerne til de to Flader i Punktet P. Vi skelner nu mellem to Tilfælde. 1) De to Flader $P(x,y,z)=0$ og $Q(x,y,z)=0$ har samme Tangentplan i P; her vil der findes uendelig mange Linier gennem P, der skærer Kurven i to i P sammenfaldende Punkter, nemlig alle de Linier gennem P, der ligger i den for Fladerne fælles Tangentplan i P; Punktet P kaldes her et Dobbeltpunkt paa Kurven. 2) De to Flader $P(x,y,z)=0$ og $Q(x,y,z)=0$ har forskellige Tangentplaner i P; her findes

der <u>een og kun een</u> Linie gennem P, der skærer Kurven i to i P sammenfaldende Punkter, nemlig <u>Skæringslinien mellem de to Tangentplaner</u>; denne Linie kaldes Kurvens <u>Tangent</u> i Punktet P. <u>Skæringskurven mellem to algebraiske Flader har altsaa sin Tangent i et vilkaarligt Punkt P bestemt som Skæringslinie mellem Fladernes Tangentplaner i P.</u>

106. <u>En Plans Skæring med algebraisk Flade og algebraisk Kurve.</u> Lad os søge Skæring mellem en given <u>algebraisk Flade af n^{te} Orden</u> og <u>en given Plan</u>. Vi tænker os Koordinatsystemet (x, y, z) valgt saadan, at den givne Plan er XY-Plan, altsaa har Ligningen $z = 0$, medens vi betegner Ligningen for den givne algebraiske Flade henført til dette Koordinatsystem ved $P(x, y, z) = 0$, hvor $P(x, y, z)$ altsaa er et Polynomium af n^{te} Grad. Indsætter vi $z = 0$ i Fladens Ligning $P(x, y, z) = 0$, vil den derved fremkomne Ligning $p(x, y) = 0$ aabenbart fremstille Skæringskurven, henført til det plane Koordinatsystem (XY); her vil $p(x, y)$ være et Polynomium af højst n^{te} Grad (d. v. s. enten et Nulpolynomium eller et egentligt Polynomium, hvis Grad er $\leqq n$). 1) <u>Er $p(x, y)$ et Nulpolynomium</u>, vil Ligningen $p(x, y) = 0$ være tilfredsstillet af <u>ethvert</u> Koordinatsæt (x, y), d. v. s. <u>Snitplanen $z = 0$ vil være helt indeholdt i den givne Flade</u>. Idet i dette Tilfælde Faktoren z aabenbart kan sættes udenfor Parenthes i Polynomiet $P(x, y, z)$ paa venstre Side af Fladens Ligning (d. v. s. $P(x, y, z)$ kan skrives $P(x, y, z) = z \cdot P_1(x, y, z)$, hvor $P_1(x, y, z)$ er et Polynomium af $(n-1)^{te}$ Grad), <u>vil den givne Flade $P(x, y, z) = 0$ af n^{te} Orden dele sig op i Planen $z = 0$ og en algebraisk Flade $P_1(x, y, z) = 0$ af $(n-1)^{te}$ Orden</u>. 2) <u>Er $p(x, y)$ et egentligt Polynomium</u> (af højst n^{te} Grad) vil Skæringskurven $p(x, y) = 0$ nede i XY-Planen være <u>en plan algebraisk Kurve af</u>

højst n^{te} Orden. Altsaa: en Plan, der ikke er helt indeholdt i en algebraisk Flade af n^{te} Orden, skærer denne i en plan algebraisk Kurve af højst n^{te} Orden. (Smlb. iøvrigt Opg. 131).

Vi gaar dernæst over til at søge Skæring mellem en vilkaarlig given algebraisk Kurve og en vilkaarlig Plan; vi vælger ligesom ovenfor Koordinatsystemet (X, Y, Z) saaledes, at den givne Plan faar Ligningen $Z = 0$, medens vi tænker os Kurven henført til dette Koordinatsystem fremstillet ved de to Ligninger $P(x, y, z) = 0$ og $Q(x, y, z) = 0$. Vi finder her til Bestemmelse af de søgte Skæringspunkter nede i XY-Planen to Ligninger $p(x, y) = 0$ og $q(x, y) = 0$, hvor $p(x, y)$ og $q(x, y)$ er de to Polynomier i x og y, der fremkommer af henholdsvis $P(x, y, z)$ og $Q(x, y, z)$ ved at sætte $z = 0$. Her kan de to Polynomier $p(x, y)$ og $q(x, y)$ ikke begge være Nulpolynomier (d. v. s. Snitplanen $z = 0$ kan ikke være indeholdt baade i Fladen $P(x, y, z) = 0$ og i Fladen $Q(x, y, z) = 0$); thi i saa Fald vilde jo de to Polynomier $P(x, y, z)$ og $Q(x, y, z)$ være delelige med et ogsammme Polynomium, nemlig z, i Modstrid med Definitionen paa en algebraisk Kurve. 1) Er det ene af de to Polynomier $p(x, y)$ og $q(x, y)$, f. Eks. $p(x, y)$, et Nulpolynomium (det andet $q(x, y)$ følgelig et egentligt Polynomium), d. v. s. er Snitplanen $z = 0$ indeholdt i Fladen $P(x, y, z) = 0$, men ikke i Fladen $Q(x, y, z) = 0$, vil Snitplanen med den givne algebraiske Kurve have alle Punkter paa Kurven $q(x, y) = 0$ fælles, altsaa have hele den Kurve fælles, hvori den i Fladen $P(x, y, z) = 0$ indeholdte Snitplan $z = 0$ skærer den anden Flade $Q(x, y, z) = 0$. 2) Er begge de to Polynomier $p(x, y)$ og $q(x, y)$ egentlige Polynomier, vil de søgte Skæringspunkter være de Punkter nede i XY-Planen, hvori de to plane algebraiske Kurver $p(x, y) = 0$ og $q(x, y) = 0$ skærer hinanden. Saadanne to Kur-

ver vil imidlertid (som omtalt i 100), hvis de ikke er helt eller delvis sammenfaldende, skære hinanden i kun et endeligt Antal Punkter. — Idet vi resumerer det foregaaende, har vi altsaa fundet Resultatet: En algebraisk Kurve, der ikke er helt eller delvis beliggende i en Plan, vil af denne Plan skæres i kun et endeligt Antal Punkter (speciellt i slet ingen Punkter).

Til den foregaaende Behandling af de algebraiske Flader og Kurver i Rummet og af deres Skæring med henholdsvis ret Linie og Plan vil vi knytte den Bemærkning, at det ogsaa her (ganske som da Talen var om algebraiske Kurver i Planen) vilde være nødvendigt, dersom man vilde naa frem til en Theori, hvori der gjaldt simple almengyldige Sætninger, at indføre saavel uendelig fjerne som imaginære Punkter d. v. s. at operere med homogene Koordinater (X, Y, Z, W), og lade disse Koordinater være vilkaarlige komplekse Tal. Vi nævner eksempelvis, at der da vilde gælde Sætningen: enhver ret Linie, der ikke er helt indeholdt i en algebraisk Flade af n^{te} Orden, skærer denne i netop n (forskellige eller sammenfaldende) Punkter, ligesom der vilde gælde Sætningen: En algebraisk Kurve, bestemt som Skæringskurve mellem to algebraiske Flader af henholdsvis m^{te} og n^{te} Orden, skæres af enhver Plan, der ikke helt eller delvis indeholder Kurven, i netop $m \cdot n$ Skæringspunkter. (Vi tilføjer, at det herved vilde blive muligt at definere et Fundamentalbegreb for en algebraisk Kurve i Rummet, nemlig Kurvens Orden, idet man derved netop forstaar det omtalte Tal $m \cdot n$, der i Følge den nævnte Sætning vilde vise sig uafhængigt af Kurvens analytiske Fremstilling og uafhængig af Koordinatsystemet). — Vi skal ikke her komme ind paa en nærmere Behandling af de algebraiske Kurvers og Fladers Theori, hvortil der, som ovenfor antydet, maatte kræves en forudgaaende Be-

handling af Læren om algebraiske Ligninger indenfor det komplekse Talområde, men skal nöjes med som endnu et Eksempel (som vi senere vil faa Brug for) paa de Fordele, man fra et algebraisk Synspunkt opnaar ved at operere med komplekse Tal i Stedet for med reelle Tal, at anföre följende: Medens der, naar vi regner med reelle Tal, vel gælder den Sætning, at hvis $P(x,y,z)$ er et homogent Polynomium, vil Ligningen $P(x,y,z)=0$, dersom den har den egentlige Løsning (x_0, y_0, z_0) nödvendigvis tillige have ethvert med (x_0, y_0, z_0) proportionalt Talsæt $k(x_0, y_0, z_0)$ til Løsning, gælder der (indenfor det reelle Talområde) ikke den omvendte Sætning, d.v.s. fordi et Polynomium $P(x, y, z)$ har den Egenskab, at hvis (x_0, y_0, z_0) er et egentligt Rodsæt, er ethvert dermed proportionalt Talsæt $k(x_0, y_0, z_0)$ ligeledes et Rodsæt, behöver Polynomiet ikke derfor nödvendigvis at være homogent; saaledes har f. Eks. Polynomiet $(x^2+y^2-z^2)(1+x^2+y^4+z^6)$ öjensynlig den nævnte Egenskab (da jo Faktoren $1+x^2+y^4+z^6$ overhovedet intet Rodsæt har), uden at Polynomiet dog er homogent. Benytter vi derimod det komplekse Talbegreb, gælder der (som man i Ligningernes Teori uden Vanskelighed beviser) ikke blot Sætningen: Et homogent Polynomium $P(x, y, z)$ har, hvis det har det egentlige Rodsæt (x_0, y_0, z_0) tillige ethvert dermed proportionalt Talsæt $k(x_0, y_0, z_0)$ (hvor k er et vilkaarligt komplekst Tal) til Rodsæt, men der gælder ogsaa den omvendte Sætning: Et Polynomium, der, hvis det har (x_0, y_0, z_0) til Rodsæt, tillige har ethvert dermed proportionalt Talsæt til Rodsæt, er nödvendigvis homogent. Vi udtrykker det nævnte Forhold (i en let forstaaelig geometrisk Iklædning) saaledes: Regner vi med komplekse Tal, vil den nödvendige og tilstrækkelige Betingelse for at en algebraisk Flade er en Kegleflade med Toppunkt i Begyndelsespunktet være den, at Fladens Ligning er

homogen i x, y og z, medens denne Betingelse, naar vi kun regner med reelle Tal, vel er tilstrækkelig, men ikke nødvendig.

107. En Flade frembragt af et System af Kurver. Lad der være givet to algebraiske Ligninger $P(x,y,z)=0$ og $Q(x,y,z)=0$, hvis Koefficienter vi vil tænke os ikke som givne Tal, men som Funktioner af en og samme Parameter λ, f. Eks. (for at blive indenfor det algebraiske Omraade) som Polynomier i λ; vi udtrykker Tilstedeværelsen af denne Parameter λ i Ligningernes Koefficienter ved at skrive Ligningerne paa Formen: $P(x,y,z,\lambda)=0$, $Q(x,y,z,\lambda)=0$. Holder vi λ fast, d.v.s. tildeler vi λ en bestemt Talværdi, vil disse to Ligninger (dersom de da ikke specielt begge er delelige med et og samme Polynomium $R(x,y,z)$ af mindst 1ste Grad) fremstille en Kurve; lader vi Parameteren λ variere (indskrænket eller underkastet visse indskrænkende Betingelser) faar vi, idet vi tænker os efterhaanden indsat de uendelig mange forskellige Værdier for λ, bestemt en uendelig Samling af Kurver; man siger om de to Ligninger $P(x,y,z,\lambda)=0$, $Q(x,y,z,\lambda)=0$, at de bestemmer et enkelt uendeligt System af Kurver, idet man ved Betegnelsen „enkelt uendeligt" giver Udtryk for, at der i Ligningens Koefficienter kun indgaar een Parameter λ. Et saadant enkelt uendeligt System af Kurver $P(x,y,z,\lambda)=0$, $Q(x,y,z,\lambda)=0$ vil i Almindelighed (idet vi ser bort fra specielle udartede Tilfælde) som man siger „frembringe" en Flade, d.v.s. sammenholder man de (enkelt) uendelig mange Kurvers (enkelt) uendelig mange Punkter til en Helhed, vil den herved bestemte (dobbelte) Uendelighed af Punkter netop være Punkterne paa en Flade. Ligningen for denne Flade finder vi øjensynlig ved at eliminere Parameteren λ mellem den

variable Kurves to Ligninger $P(x,y,z,\lambda)=0$ og $Q(x,y,z,\lambda)=0$, thi/ den ved Eliminationen af λ fremkomne Ligning $F(x,y,z)=0$ (der, som man i Ligningernes Theori viser, atter er en algebraisk Ligning) vil jo netop til Løsning have ethvert saadant Talsæt (x_0,y_0,z_0), hvortil der eksisterer et Tal λ_0 med den Egenskab, at (x_0,y_0,z_0,λ_0) indsat for (x,y,z,λ) tilfredsstiller begge de to Ligninger $P(x,y,z\lambda)=0$ og $Q(x,y,z,\lambda)=0$ (d.v.s. hvortil der eksisterer et Tal λ_0 saaledes at Punktet (x_0,y_0,z_0) ligger paa den til Parameterværdien λ_0 svarende Kurve). – Undertiden er et enkelt uendeligt System af Kurver givet ved to Ligninger $P=0$ og $Q=0$, hvori der indgaar ikke een, men flere Parametre, f.Eks. 3 Parametre λ,μ,ν, idet der da tillige er opgivet saa mange Betingelsesligninger (i det nævnte Tilfalde, 2) mellem disse Parametre, at vi i Virkeligheden kun har at gøre med een uafhængig Parameter. Her finder man Ligningen for den af det enkelt uendelige System af Kurver frembragte Flade ved at eliminere samtlige Parametre mellem Kurvens to Ligninger $P=0$ og $Q=0$ i Forbindelse med de givne Betingelsesligninger; thi er $R(x,y,z)=0$ den Ligning, der fremkommer ved Elimination af λ,μ,ν mellem den variable Kurves to Ligninger $P(x,y,z,\lambda,\mu,\nu)=0$ og $Q(x,y,z,\lambda,\mu,\nu)=0$ og de to Betingelsesligninger $f_1(\lambda,\mu,\nu)=0$, $f_2(\lambda,\mu,\nu)=0$, da vil denne Ligning $R(x,y,z)=0$ jo (smlg. 5) netop tilfredsstilles af de Punkter (x_0,y_0,z_0), hvortil der svarer et Sæt Parameterværdier (λ_0,μ_0,ν_0) saaledes at $(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0,\nu_0)$ er en Løsning til de fire Ligninger, d.v.s. hvor (x_0,y_0,z_0) er et Punkt paa en af Kurverne (nemlig den til Parameterværdierne λ_0,μ_0,ν_0 svarende) i det givne enkelt uendelige System.

Vi siger om tre Ligninger, $x=f(\lambda,t)$, $y=g(\lambda,t)$, $z=h(\lambda,t)$, at de giver os en Parameterfremstilling for den „variable" Kurve $P(x,y,z,\lambda)=0$, $Q(x,y,z,\lambda)=0$ i et enkelt uendeligt Kurvesystem,

hvis disse tre Ligninger, naar vi holder λ fast og opfatter t som en variabel Parameter, netop bestemmer os Punkterne paa den til den fastholdte Værdi af λ svarende Kurve; de tre Ligninger $x = f(\lambda, t)$, $y = g(\lambda, t)$, $z = h(\lambda, t)$ kan øjensynlig ogsaa opfattes som givende en Parameterfremstilling for den af Kurverne frembragte Flade, nemlig naar vi opfatter λ og t som uafhængige Variable.

Det er ofte bekvemt ved de Flader, man træffer paa ved Anvendelserne, at tænke sig disse Flader ikke umiddelbart givet som det geometriske Sted for (en dobbelt Uendelighed af) Punkter, men derimod som frembragt af (et enkelt uendeligt System af) Kurver. Saaledes kan en Plan f. Eks. tænkes frembragt af en ret Linie, der drejer sig om et givet Punkt, saaledes at den hele Tiden forbliver vinkelret paa en given ret Linie, eller vi kan tænke os en Hyperboloide med eet Net $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ frembragt f. Eks. af de rette Linier i et (ligegyldigt hvilket) af Fladens to Liniesystemer, eller f. Eks. – hvad der ved andre Lejligheder kan være bekvemt – frembragt af det enkelt uendelige System af indbyrdes ligedannede Ellipser, hvori Hyperboloiden skæres af Planer parallelle med Enubellipsens Plan; betegner vi i det sidste Eksempel den variable Snitplan med $z = \lambda$, kan den variable Ellipse bestemmes ved Ligningerne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{\lambda^2}{c^2}$, $z = \lambda$, altsaa paa Parameterform ved Ligningerne

$$x = a\sqrt{1+\tfrac{\lambda^2}{c^2}} \cdot \cos t, \quad y = b\sqrt{1+\tfrac{\lambda^2}{c^2}} \cdot \sin t, \quad z = \lambda \qquad (0 \leqq t < 2\pi);$$

disse tre Ligninger vil følgelig, naar vi opfatter λ og t som to af hinanden uafhængige Variable, give os en Parameterfremstilling for Hyperboloiden med eet Net, og en saadan, at vi faar hvert Punkt paa Hyperboloiden med en og kun een

gang, naar vi lader x variere uindskranket, medens t underkastes Betingelsen $0 \leqq t < 2\pi$.

108. Flader frembragt af et System af rette Linier. Vi gaar nu over til at betragte nogle specielle vigtige Fladetyper, der naturligt tankes frembragt af et enkelt uendeligt System af Kurver. Vi skal begynde med at betragte tre Fladetyper, nemlig Kegleflader, Cylinderflader og Konoider, hvor Frembringerkurverne er rette Linier.

I: Kegleflade frembragt af et enkelt uendeligt System af rette Linier gennem eet og samme Punkt (Keglefladens Toppunkt). Vi vælger Koordinatsystemet (X, Y, Z) saaledes, at Begyndelsespunktet O falder i Keglefladens Toppunkt. En vilkaarlig ret Linie gennem dette Punkt (0, 0, 0) kan fremstilles ved Ligningerne $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$, hvor (l, m, n) er et Sæt Heldningstal for Linien (altsaa Koordinater til et vilkaarligt fra O forskelligt Punkt paa Linien). Mangden af samtlige Linier gennem O danner følgelig et dobbelt uendeligt System af Linier, d. v. s. disse rette Linier afhanger afhanger af to indbyrdes uafhængige Parametre, nemlig de to Forhold mellem de tre Heldningstal l, m, n. Skal vi have at gøre med kun et enkelt uendeligt System af rette Linier gennem O, maa der derfor være opgivet en Betingelsesligning $F(l, m, n) = 0$ mellem Retningstallene, hvilken Ligning vi (for at blive indenfor det algebraiske Omraade) vil tænke os er en algebraisk Ligning i l, m, n; idet imidlertid denne algebraiske Betingelsesligning $F(l, m, n) = 0$, dersom den har den egentlige Løsning (l_0, m_0, n_0), jo tillige har ethvert med (l_0, m_0, n_0) proportionalt Talsæt til Løsning (idet jo to Sæt proportionale Heldningstal bestemmer den samme Linie), maa denne Ligning nødvendigvis (idet vi af

algebraiske Grunde naturligt forlanger, at den skal have den nævnte Egenskab, ogsaa naar vi lader Heldningstallene være komplekse Tal) være homogen i l, m, n. Man indser nu umiddelbart, at Ligningen for den omhandlede Kegleflade d. v. s. den Flade, der frembringes af de rette Linier $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$, hvis Heldningstal (l, m, n) tilfredsstiller den homogene Ligning $F(l, m, n) = 0$, simpelthen er den i x, y, z homogene Ligning $F(x, y, z) = 0$, der fremkommer af Betingelsesligningen $F(l, m, n) = 0$, ved at ombytte l, m, n med henholdsvis x, y og z; thi denne homogene Ligning $F(x, y, z) = 0$ tilfredsstilles jo for det første af Toppunktets Koordinater $(0, 0, 0)$, medens for det andet dens egentlige (d. v. s. fra $(0, 0, 0)$ forskellige) Løsninger bestemmer Frembringernes Heldningstal (l, m, n), altsaa, hvad der jo kommer ud paa det samme, bestemmer Koordinaterne til de fra O forskellige Punkter paa Frembringerne.

Ved Opgaver, hvor det drejer sig om at finde Ligningen for en given Kegleflade med Toppunkt i O, vil Keglefrembringerne i Reglen ikke være karakteriserede derved, at der direkte er opgivet os den (homogene) Betingelsesligning $F(l, m, n) = 0$, der til egentlige Løsninger har Frembringernes Heldningstal; men disse Frembringere vil som oftest være karakteriserede paa anden (mere geometrisk) Maade, f. Eks. derved, at der er opgivet en „Ledekurve" for Keglefladen, d. v. s. en Kurve, som Frembringerne alle skal skære, eller f. Eks. derved, at der er opgivet en Flade, som Frembringerne alle skal berøre (d. v. s. skære i sammenfaldende Punkter) altsaa en Flade, hvorom den givne Kegleflade er „omskreven". I det Tilfælde, hvor der er opgivet en Ledekurve, f. Eks. ved de algebraiske Ligninger $P(x, y, z) = 0$ og $Q(x, y, z) = 0$, finder man øj-

ensynlig Betingelsesligningen $F(l, m, n) = 0$ mellem Kegle-frembringernes Heldningstal ved at eliminere x, y og z mellem Ledekurvens to Ligninger i Forbindelse med de to Ligninger $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ for en vilkaarlig Linie gennem O; thi den ved Eliminationen fremkomne algebraiske Ligning $F(l, m, n) = 0$, der (idet den jo, hvis den har den egentlige Løsning (l_0, m_0, n_0), øjensynlig har ethvert dermed proportionalt Talsat til Løsning) er homogen i l, m, n, angiver jo netop den Betingelse, som Liniens Heldningstal (l, m, n) maa tilfredsstille, for at der skal findes et Punkt (x_0, y_0, z_0) beliggende saavel paa den rette Linie som paa Ledekurven, d. v. s. Betingelsen for at den rette Linie og Ledekurven skærer hinanden.

Dersom vi ikke havde valgt Koordinatsystemet (X, Y, Z) saaledes, at Keglefladens Toppunkt faldt i Begyndelsespunktet, men havde ladet dette Toppunkt have en vilkaarlig Beliggenhed (a, b, c) i Forhold til Koordinatsystemet, vilde vi øjensynlig have faaet Keglefladen fremstillet ved en Ligning $F(x-a, y-b, z-c) = 0$, der er homogen i $x-a, y-b, z-c$; thi parallelforskyder vi først Koordinatsystemet saaledes, at Begyndelsespunktet falder i Toppunktet, ved vi om Keglefladen, at den henført til dette nye System (X_1, Y_1, Z_1) fremstilles ved en Ligning $F(x_1, y_1, z_1) = 0$, der er homogen i x_1, y_1, z_1, og ud fra denne Ligning kommer vi jo umiddelbart til Keglefladens Ligning i det oprindelige System ved blot at udføre Koordinattransformationen $x_1 = x-a$, $y_1 = y-b$, $z_1 = z-c$. — Omvendt indser man umiddelbart, at enhver Ligning $F(x-a, y-b, z-c) = 0$, der er homogen i $x-a, y-b, z-c$ fremstiller en Kegleflade med Toppunkt i (a, b, c); thi parallelforskyder vi Koordinatsystemet, saaledes at Begyn-

delsespunktet falder i (a, b, c), faar den omhandlede Flade, henført til det nye System (X_1, Y_1, Z_1) jo Ligningen $F(x_1, y_1, z_1) = 0$, og denne Ligning, der er homogen i Koordinaterne x_1, y_1, z_1, vides jo at fremstille en Kegleflade med Toppunkt i Begyndelsespunktet. Eksempelvis fremstiller Ligningen $(x-1)^3 + 3(x-1)^2(y-2) - 5(y-2)^3 + 4(x-1)(y-2)(z-3) = 0$ en Kegleflade af 3die Orden med Toppunkt i $(1, 2, 3)$.

Som et Øvelseseksempel vil vi bevise, at en Kegleflade, der er bestemt ved et givet Toppunkt og ved at skulle have et givet Keglesnit til Ledekurve, er en Kegleflade af 2den Orden, d. v. s. henført til et (ligegyldigt hvilket) Koordinatsystem (X, Y, Z) med Begyndelsespunkt i Toppunktet fremstilles ved en homogen Ligning af 2den Grad i x, y og z. Vi vælger Koordinatsystemet saaledes, at Toppunktet falder i Begyndelsespunktet, medens Keglesnittets Plan (som vi antager ikke gaar gennem Toppunktet) er parallel med Xy-Planen. Keglesnittet fremstilles da ved to Ligninger af Formen

$$z = k, \qquad Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Vi søger først Betingelsen for, at den rette Linie $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ skærer det givne Keglesnit. Denne Betingelse, der faas ved at eliminere x, y, z mellem den rette Linies to Ligninger og Keglesnittets to Ligninger (hvilken Elimination vi let kan udføre ved i den anden af Keglesnittets to Ligninger at indsætte $x = \frac{l}{n} \cdot k$, $y = \frac{m}{n} \cdot k$ og derefter bringe Ligningen paa hel Form) bliver øjensynlig $Ak^2l^2 + Bk^2m^2 + 2Ck^2lm + 2Dlnk + 2Emnk + Fn^2 = 0$, hvorefter Keglefladens Ligning umiddelbart findes ved i denne sidste i (l, m, n) homogene Ligning at indsætte (x, y, z) for (l, m, n), hvilket giver den homogene 2den Grads Ligning

$$Ak^2x^2 + Bk^2y^2 + 2Ck^2xy + 2Dkxz + 2Ekyz + Fz^2 = 0.$$

Vi tilføjer den Bemærkning, at den fundne Kegleflade (der, som man umiddelbart ser ved Indsættelse af $z = k$ og Division med $k^2 \neq 0$, af Planen $z = k$ netop (selvfølgelig) skæres i det givne Keglesnit) foruden de Frembringere (l, m, n), der fremkommer ved at forbinde Toppunktet O med de (sædvanlige) Punkter paa det givne Keglesnit (for hvilke Frembringere $n \neq 0$, da en saadan Frembringer jo ikke ligger i XY-Planen), aabenbart indeholder endnu 2, 1 eller 0 Frembringere $(l, m, 0)$, nemlig de 2, 1 eller 0 Linier i XY-Planen, der bestemmes ved Ligningen $Ax^2 + By^2 + 2Cxy = 0$; Grunden til at vi har faaet disse (saalange vi regnet med inhomogene Koordinater, d. v. s. kun tager Hensyn til Keglesnittets sædvanlige Punkter) for Opgavens Løsning „fremmede" Frembringere med, er den, at vi under Udførelsen af Eliminationen, efter Indsættelsen af $x = \frac{l}{n}k$, $y = \frac{m}{n}k$, har multipliceret Betingelsesligningen med n^2 (for at bringe den paa hel Form), hvorved denne Ligning foruden de (egentlig medhørende) Løsninger med $n \neq 0$ har faaet endnu 2, 1 eller 0 (fremmede) Løsninger med $n = 0$, nemlig de Talsæt $(l, m, 0)$, for hvilke (l, m) er en egentlig Løsning til Ligningen $Al^2 + Bm^2 + 2Clm = 0$. Det korrekte havde naturligvis været at udføre Regningerne i homogene Koordinater X, Y, Z, N, hvorved de nævnte 2, 1 eller 0 Frembringere $Ax^2 + By^2 + 2Cxy = 0$ i XY-Planen (der fra et algebraisk Synspunkt hører med til Keglefladen) var kommet med paa berettiget Maade (nemlig forbindende Toppunktet O med de 2, 1 eller 0 uendelig fjerne Punkter paa det givne Keglesnit) og ikke som ovenfor indsmuglet gennem Regningerne (ved Multiplikationen

med n^2). – Vi bemærker sluttelig, at dersom det givne Keglesnit er et egentligt Keglesnit (Parabel, Ellipse, Hyperbel) er den fundne Kegleflade øjensynlig en egentlig Kegleflade af 2den Orden (d. v. s. kan ved passende Valg af Koordinatsystemet bringes paa Formen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$; thi en udartet Kegleflade af 2den Orden skæres ikke af nogen Plan i et egentligt Keglesnit.

II: Cylinderflade frembragt af et enkelt uendeligt System af indbyrdes parallele rette Linier. Lad os betragte en Cylinderflade, hvis Frembringere er parallele med den (gennem Begyndelsespunktet gaaende) rette Linie: $Ax+By+Cz=0$, $A_1x+B_1y+C_1z=0$, hvor Talsættene (A, B, C) og (A_1, B_1, C_1) ikke er proportionale. En vilkaarlig ret Linie parallel med den givne Linie kan fremstilles ved to Ligninger: $Ax+By+Cz=\lambda$, $A_1x+B_1y+C_1z=\mu$. Mængden af samtlige Linier i det ved den givne Linies Heldning bestemte Parallelknippe danner følgelig et dobbelt uendeligt System af rette Linier, idet disse Linier jo karakteriseres ved to indbyrdes uafhængige (uindskrænkede) Variable λ og μ. Cylinderfladens enkelt uendelige System af Frembringere maa følgelig være karakteriseret ved en Betingelsesligning $F(\lambda,\mu)=0$ mellem Parametrene λ og μ, hvilken Betingelsesligning vi vil tænke os værende en algebraisk Ligning. Vi finder nu umiddelbart Cylinderfladens Ligning ved at eliminere Parametrene λ og μ mellem den rette Linies to Ligninger $Ax+By+Cz=\lambda$, $A_1x+B_1y+C_1z=\mu$ og Betingelsesligningen $F(\lambda,\mu)=0$, hvorved vi finder Ligningen

$$F(Ax+By+Cz,\ A_1x+B_1y+C_1z)=0.$$

Omvendt indser man umiddelbart, at enhver algebraisk Ligning af Formen $F(Ax+By+Cz,\ A_1x+B_1y+C_1z)=0$, hvor Tals-

sattene (A, B, C) og (A_1, B_1, C_1) ikke er proportionale, altsaa en Ligning, hvis venstre Side kan skrives som et Polynomium i de to Størrelser $(Ax + By + Cz,\ A_1x + B_1y + C_1z)$ fremstiller en Cylinderflade, hvis Frembringere er parallele med Linien $Ax + By + Cz = 0,\ A_1x + B_1y + C_1z = 0$; thi en saadan Ligning vil jo, hvis den har Løsningen (x_0, y_0, z_0) af sig selv tilfredsstilles af ethvert Talsat (x, y, z), for hvilket $Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0$, $A_1x + B_1y + C_1z = A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0$, d. v. s. den ved Ligningen fremstillede Flade vil, hvis den gaar gennem et Punkt P, af sig selv indeholde hele den rette Linie gennem P parallel med Linien $Ax + By + Cz = 0,\ A_1x + B_1y + C_1z = 0$.

Er Cylinderfladens Frembringerheldning bestemt, ikke som ovenfor derved at der er opgivet to Ligninger til Bestemmelse af en ret Linie (gennem Begyndelsespunktet) parallel med Frembringerne, men derved at der er opgivet et Sat Heldningstal (a, b, c) for Frembringerne, kan man umiddelbart henføre dette Tilfalde til det forrige derigennem, at man først udleder to Ligninger til Bestemmelse af en ret Linie gennem O med den givne Heldning (a, b, c); antager vi f. Eks. (hvad der jo ikke indskranker Undersøgelsens Almindelighed, da jo ikke alle tre Heldningstal a, b, c kan være Nul) at $c \neq 0$, altsaa at Linien ikke er parallel med XY-Planen, kan vi skrive en ret Linie gennem O med Heldningstallene (a, b, c) paa Formen $cx - az = 0,\ cy - bz = 0$ og finder da i Følge det foregaaende Cylinderfladen bestemt ved en algebraisk Ligning af Formen $F(cx - az,\ cy - bz) = 0$. — Valger vi specielt Koordinatsystemet (X, Y, Z) saaledes, at Z-Aksen er parallel med Frembringerne, altsaa saaledes, at Frembringernes Heldning har Heldningstallene $(0, 0, 1)$ (eller naturligvis et dermed proportionalt Talsat), finder vi (ved i Ligningen $F(cx - az,$

$cy - bz) = 0$ at sætte $a = b = 0$, $c = 1$) Cylinderfladen bestemt ved en Ligning af Formen $F(x, y) = 0$, altsaa en Ligning, hvori z mangler.

Ogsaa her gælder det, ligesom for Keglefladerne, at en Cylinderflades Frembringere $Ax + By + Cz = \lambda$, $A_1x + B_1y + C_1z = \mu$ i Reglen ikke er karakteriserede direkte ved en Betingelsesligning mellem λ og μ, men derved, at der f. Eks. er opgivet en „Ledekurve", som Frembringerne skal skære, eller en Flade, som Frembringerne skal berøre. Lad os som et simpelt Øvelseseksempel udlede Ligningen for en Cylinderflade, hvis Frembringere har Hældningstallene (1, 2, 1) og som er omskrevet om Kuglefladen $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Vi skriver en vilkaarlig ret Linie med den givne Hældning paa Formen $\frac{x-\lambda}{1} = \frac{y-\mu}{2} = \frac{z}{1}$ (idet vi karakteriserer den ved Koordinaterne (λ, μ) til det Punkt i (XY)-Planen, hvori Linien skærer XY-Planen), eller paa Parameterform: $x = \lambda + t$, $y = \mu + 2t$, $z = t$. Indsætter vi disse sidste Udtryk i Kuglefladens Ligning $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, finder vi til Bestemmelse af Parameterværdierne t svarende til Liniens eventuelle Skæringspunkter med Kuglen Ligningen

$$6t^2 + 2t(\lambda + 2\mu) + \lambda^2 + \mu^2 - R^2 = 0.$$

Skal Linien skære Kuglefladen i to sammenfaldende Punkter, d. v. s. skal den fundne 2^{den} Grads Ligning i t have lige Rødder, kræves hertil, at

$$(\lambda + 2\mu)^2 - 6(\lambda^2 + \mu^2 - R^2) = 0,$$

hvilken Ligning følgelig er den Betingelsesligning, som

Parametrene λ og μ er understreget, for at den rette Linie skal være Frembringer paa Cylinderfladen. Vi finder nu umiddelbart Cylinderfladens Ligning ved at eliminere Parametrene λ og μ mellem den rette Linies to Ligninger $x-z=\lambda$, $y-2z=\mu$ og den fundne Betingelsesligning, hvorved faas

$$(x+2y-5z)^2 - 6(x^2+y^2+5z^2-2xz-4yz-R^2) = 0.$$

Vi kunde naturligvis ogsaa finde Betingelsesligningen mellem Parametrene λ og μ i den rette Linies Ligninger $\frac{x-\lambda}{1} = \frac{y-\mu}{2} = \frac{z}{1}$ ved først at bestemme en Ledekurve for Cylinderen, hvortil man naturligt vil valge Rôringskurven, d.v.s. det geometriske Sted for de Punkter paa Kuglefladen, hvori Frembringerne berører denne Flade; idet Betingelsen for at $(\xi, \varepsilon, \zeta)$ er et Punkt paa Rôringskurven jo er den, at dette Punkt for det første skal ligge paa Kuglefladen, d.v.s. at $\xi^2+\varepsilon^2+\zeta^2=R^2$, medens for det andet Tangentplanen til Kuglen i dette Punkt: $\xi x+\varepsilon y+\zeta z = R^2$ skal indeholde en Linie med Frembringerheldningen (1,2,1), altsaa at $1.\xi + 2\varepsilon + 1.\zeta = 0$, finder vi den søgte Ledekurve (Rôringskurven) bestemt ved de to Ligninger

$$x^2+y^2+z^2 = R^2, \quad x+2y+z = 0.$$

(hvilke to Ligninger i Parenthes bemærket viser, at Rôringskurven er den Storcirkel paa Kuglefladen, hvis Plan er vinkelret paa Frembringerheldningen). Efter at vi har fundet en Ledekurve, kan vi nu umiddelbart finde den Betingelse, som Parametrene λ og μ i den rette Linies to Ligninger $\frac{x-\lambda}{1} = \frac{y-\mu}{2} = \frac{z}{1}$ maa tilfredsstille, for at Linien skal være en Frembringer, nemlig derved, at vi eliminerer x, y og z

mellem Ledekurvens to Ligninger og den rette Linies to Ligninger; vi finder herigennem (idet vi löser de tre første Grads Ligninger i x, y og z med Hensyn til x, y og z, hvorved faas $z = \frac{-\lambda+2\mu}{6}$, $x = \frac{5\lambda-2\mu}{6}$, $y = \frac{2\mu-2\lambda}{6}$ og derefter indsætter disse Udtryk i 2^{den} Grads Ligningen) Betingelsesligningen

$$(5\lambda-2\mu)^2 + (2\mu-2\lambda)^2 + (\lambda+2\mu)^2 = 36R^2,$$

der naturligvis er den samme Betingelsesligning, som den vi ovenfor fandt. Bruger vi denne sidste Fremgangsmaade, hører der til den stillede Opgave: at finde Cylinderfladens Ligning, to Eliminationsproblemer, nemlig 1) Udledelsen af Betingelsesligningen mellem Parametrene λ og μ ved Elimination af x, y og z (i denne Regning er (x, y, z) det Punkt, hvori den betragtede Linie (λ, μ) skærer Ledekurven) og 2) Udledelsen af Fladens Ligning ved Elimination af Parametrene λ og μ (i denne Regning er (x, y, z) et variabelt Punkt paa den vilkaarlige Frembringer (λ, μ), d. v. s. et vilkaarligt Punkt paa Fladen).

III.: Ved en Konoide forstaas en Flade, der frembringes af et enkelt uendeligt System af rette Linier, der alle er parallele med en given Plan (Konoidens Heldningsplan) og som alle skærer en given ret Linie (Konoidens Ledelinie). Vi tænker os Koordinatsystemet (XYZ) valgt saadan, at Konoidens Heldningsplan er XY-Plan, medens det Punkt, hvori Ledelinien (om hvilken vi antager, at den hverken er beliggende i eller parallel med Heldningsplanen) skærer Heldningsplanen, er Begyndelsespunkt. Heldningsplanen har da Ligningen $Z = 0$, medens den rette Ledelinie kan fremstilles ved de to Ligninger $x = az$, $y = bz$, der

bestemmer dens Projektioner ind paa henholdsvis XZ- og YZ-Planen. En vilkaarlig ret Linie parallel med Heldnings-planen og skarende Ledelinien kan, idet vi betegner det Punkt, hvori den skærer Ledelinien med $(a\lambda, b\lambda, \lambda)$, skrives paa Formen $z = \lambda$, $\frac{x - a\lambda}{l} = \frac{y - b\lambda}{m}$, hvor (l, m) er Heldningstal (nede i XY-Planen) for Liniens (med Linien parallele) Projektion paa XY-Planen. Samlingen af alle rette Linier, der er parallele med Heldningsplanen og som skærer Ledelinien, danner følgelig et dobbelt uendeligt System af rette Linier, idet der jo i de ovenstaaende to Ligninger for en saadan Linie indgaar to uafhængige Parametre, nemlig λ og Forholdet mellem Heldningstallene l og m. For Konoidens enkelt uendelige System af rette Linier maa der følgelig eksistere en Betingelsesligning $F(\lambda, l, m) = 0$ mellem λ, l og m, hvilken Ligning, da (l, m) er et homogent Parameterpar, maa være homogen i l og m (naar λ betragtes som Konstant). Vi finder nu umiddelbart Konoidens Ligning ved at eliminere λ og det homogene Parameterpar (l, m) mellem den rette Linies to Ligninger og Betingelsesligningen $F(\lambda, l, m) = 0$; herved faas Ligningen

$$F(z, x - az, y - bz) = 0,$$

der (idet det paa første Plads staaende z betragtes som konstant) er homogen i $x - az$, $y - bz$. — Er den rette Ledelinie vinkelret paa Heldningsplanen $z = 0$, kaldes Konoiden for en ret Konoide; idet Ledelinien her har Ligningerne $x = 0$, $y = 0$, finder vi (ved i den foregaaende Ligning $F(z, x - az, y - bz) = 0$ at sætte $a = b = 0$) den rette Konoide fremstillet ved en Ligning $F(z, x, y) = 0$, der er homogen i x og y. Omvendt indser man umiddelbart, at en-

hver algebraisk Ligning $P(x,y,z)=0$, der er homogen i x og y, fremstiller en ret Konoide med xy-Planen til Heldningsplan og z-Aksen til Ledelinie; thi en saadan Ligning vil jo, hvis den har Løsningen (x_0, y_0, z_0), tillige have Løsningen (kx_0, ky_0, z_0), hvori k er en vilkaarlig Konstant, d. v. s. dermed Ligningen fremstillede Flade vil, hvis den gaar gennem et (ikke paa z-Aksen $x=0$, $y=0$ beliggende) Punkt $P:(x_0, y_0, z_0)$, af sig selv indeholde hele den rette Linie $\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0}$, $z=z_0$, der gaar gennem Punktet P, skærer z-Aksen og er parallel med xy-Planen.

En Konoide vil i Reglen være opgivet derved, at der foruden Heldningsplanen og den rette Ledelinie er opgivet endnu en Ledekurve $P(x,y,z)=0$, $Q(x,y,z)=0$, som Frembringerne skal skære; den ovenfor omtalte (i l og m homogene) Betingelsesligning $F(\lambda, l, m)=0$ findes da ved at eliminere x, y og z mellem de 4 Ligninger: $z=\lambda$, $\frac{x-a\lambda}{l} = \frac{y-b\lambda}{m}$, $P(x,y,z)=0$, $Q(x,y,z)=0$. Angaaende de to Eliminationsproblemer, der paa denne Maade hører til Bestemmelsen af Konoidens Ligning, gælder analoge Bemærkninger til dem, vi før gjorde ved Omtalen af Cylinderflader. — Et simpelt Eksempel paa en Konoide har vi i den hyperbolske Paraboloide $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$, der jo kan betragtes som frembragt af et enkelt uendeligt System af rette Linier — nemlig Frembringerne i det ene af Paraboloidens to Liniesystemer — der alle er parallele med en af Paraboloidens Heldningsplaner, og som alle skærer en (ligegyldig hvilken) af de rette Linier i Paraboloidens andet Liniesystem; til den anden Ledekurve kan vi her vælge en vilkaarlig (fra den før benyttede forskellig) ret Linie i Paraboloidens andet Liniesystem.

109. Flade frembragt ved et System af Cirkler. Som en sidste simpel Type paa en Flade frembragt af et System af Kurver vil vi betragte en Flade, hvor Frembringerkurverne ikke som ved de foregaaende Eksempler er rette Linier, men er Cirkler, nemlig:

IV: en Omdrejningsflade, frembragt af et enkelt uendeligt System af Cirkler, hvis Centre alle ligger paa en given ret Linie L, og hvis Planer alle er vinkelrette paa L. Lad den givne Linie L (Omdrejningsfladens Akse) være bestemt ved at skulle gaa gennem et givet Punkt $(\xi, \varepsilon, \zeta)$ og have Heldningstallene (a, b, c). Vi fremstiller en vilkaarlig Cirkel med Centrum paa Linien L og hvis Plan er vinkelret paa L (idet vi opfatter denne Cirkel som Skæringskurve mellem en Kugleflade med Centrum i $(\xi, \varepsilon, \zeta)$ og en Plan vinkelret paa L) ved de to Ligninger

$$(x-\xi)^2+(y-\varepsilon)^2+(z-\zeta)^2=\lambda, \quad ax+by+cz=\mu.$$

Disse Ligninger fremstiller, naar vi opfatter λ og μ som to uafhængige Variable (af hvilke iøvrigt μ kan variere uindskrænket, medens λ maa underkastes den indskrænkende Betingelse: $\lambda \geqq 0$), samtlige Cirkler, der ligger paa den nævnte Maade, af hvilke Cirkler der altsaa er en dobbelt Uendelighed. Det enkelt uendelige System af Cirkler, der frembringer den givne Omdrejningsflade, maa følgelig være karakteriseret ved en Betingelsesligning $F(\lambda, \mu)=0$ mellem Parametrene λ og μ. Kender vi denne Betingelsesligning, finder vi umiddelbart Omdrejningsfladens Ligning ved simpelthen at eliminere λ og μ mellem Cirklens to Ligninger i Forbindelse med Betingelsesligningen $F(\lambda, \mu)=0$, hvilket giver os Ligningen

$$F\left((x-\xi)^2+(y-\varepsilon)^2+(z-\zeta)^2,\ ax+by+cz\right)=0.$$

Omvendt indser man umiddelbart, <u>at enhver Ligning af denne Form</u> (d. v. s. hvis venstre Side kan skrives som et Polynomium i de to Størrelser $(x-\xi)^2+(y-\varepsilon)^2+(z-\zeta)^2$ og $ax+by+cz$) <u>fremstiller en Omdrejningsflade med Linien $\frac{x-\xi}{a}=\frac{y-\varepsilon}{b}=\frac{z-\zeta}{c}$ til Akse</u>; thi idet en saadan Ligning, hvis den har Løsningen (x_0, y_0, z_0), jo tillige tilfredsstilles af ethvert Talsæt (x, y, z), der er Løsning til de to Ligninger

$$(x-\xi)^2+(y-\varepsilon)^2+(z-\zeta)^2=(x_0-\xi)^2+(y_0-\varepsilon)^2+(z_0-\zeta)^2;\quad ax+by+cz=ax_0+by_0+cz_0,$$

vil den ved Ligningen fremstillede Flade, hvis den gaar gennem Punktet P, af sig selv indeholde hele den Cirkel, der er bestemt ved at skulle gaa gennem P, have sit Centrum paa Linien $\frac{x-\xi}{a}=\frac{y-\varepsilon}{b}=\frac{z-\zeta}{c}$ og have sin Plan vinkelret paa denne Linie.

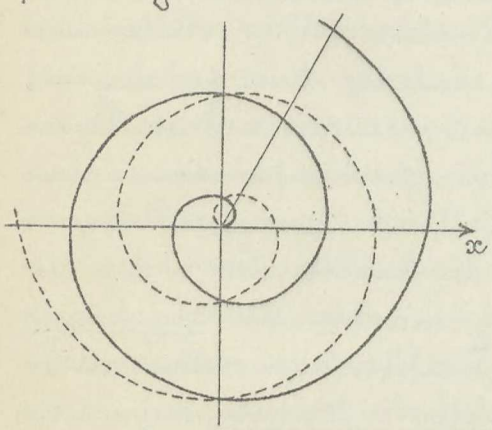
Lad os som et Øvelseseksempel (ved hvilket vi møder de to sædvanlige Eliminationsprocesser) søge Ligningen for den Omdrejningsflade, der fremkommer ved at dreje Kurven $x=y$, $x=z^2$ omkring Z-Aksen. Vi fremstiller en vilkaarlig Cirkel med Centrum paa Z-Aksen og hvis Plan er parallel med xy-Planen (idet vi til Afveksling opfatter Cirklen som Skæringskurve mellem en cirkulær Cylinder og en Plan) ved de to Ligninger: $x^2+y^2=\lambda$, $z=\mu$. Betingelsen for at denne Cirkel er en Frembringercirkel paa Omdrejningsfladen, d. v. s. for at skære den givne Kurve, finder vi ved at eliminere x, y og z mellem Cirklens to Ligninger $x^2+y^2=\lambda$, $z=\mu$ og den givne Kurves to Ligninger $x=y$, $x=z^2$, hvorved vi finder Betin-

gelsesligningen $2\mu^4 = \lambda$. Eliminerer vi sluttelig λ og μ mellem Cirklens to Ligninger og den fundne Betingelsesligning, finder vi Omdrejningsfladens Ligning $2z^4 = x^2 + y^2$. – Vi bemærker sluttelig, at det i Reglen vil være hensigtsmæssigt at karakterisere en Omdrejningsflade (saaledes som vi har gjort i det sidste Eksempel) ved at opgive dens Akse, samt en <u>Meridiankurve</u>, d. v. s. en Kurve, hvori Fladen skæres af en Plan gennem Aksen.

110. <u>Eksempler paa ikke-algebraiske Kurver og Flader</u>. Idet vi hermed er færdige med vor Gennemgang af de algebraiske Kurvers og Fladers Theori, skal vi til Slut – som en Overgang til det følgende Afsnit, hvor vi skal undersøge ogsaa andre Funktioner end Polynomier $P(x, y)$ og i Sammenhæng dermed skal beskæftige os ogsaa med andre Ligninger end de algebraiske Ligninger $P(x, y) = 0$ – nævne nogle Eksempler paa <u>ikke-algebraiske Kurver og Flader</u> (d. v. s. saadanne), der <u>ikke</u> kan bestemmes som geometriske Steder for Punkter, hvis Koordinater (henført til et retvinklet Koordinatsystem) tilfredsstiller algebraiske Ligninger; disse Eksempler vil tilligetjene til at vise, hvorledes der ogsaa udenfor det algebraiske Omraade findes overmaade simple og for Anvendelserne vigtige Kurver og Flader.

Som første Eksempel vil vi betragte en <u>ikke-algebraisk plan Kurve</u>, nemlig den saakaldte <u>Arkimedes' Spiral</u>, der, henført til et fastlagt polart Koordinatsystem, defineres ved en Ligning af Formen $r = a\theta$, hvor a er en positiv Konstant, og hvor vi tænker os, at Koordinaten θ er en uindskrænket Variabel. Idet to Punkter P_1 og P_2 med henholdsvis Koordinaterne (r_0, θ_0) og $(-r_0, -\theta_0)$ jo er symmetrisk beliggende med Hensyn til den paa Aksen X vinkelrette Linie Y,

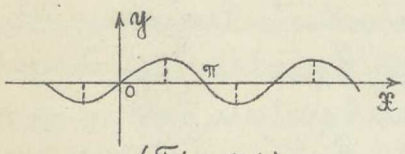
behöver vi kun at betragte den Halvdel af Kurven, der svarer til positive Værdier af θ, idet den anden Halvdel af Kurven (den, der svarer til $\theta < 0$) jo i Følge den foregaaende Bemærkning er symmetrisk med den førstnævnte Halvdel med Hensyn til Linien Oy. Lader vi θ vokse fra Nul ud imod Uendelig, vil r ligeledes vokse ud fra Nul i det Uendelige, og Kurvepunktet (r, θ) vil øjensynlig gennemløbe en Spiral som angivet paa Figur 55 (d. v. s. den optrukne Del, den punkterede Del svarer til $\theta < 0$). For at orientere os over Spiralens Udseende behöver vi blot at bemærke, at den til $\theta \geqq 0$ svarende Halvdel af Spiralen af en vilkaarlig ret Linie gennem Polen O skæres i uendelig mange Punkter, og saaledes at Afstanden mellem to paa hinanden følgende Skæringspunkter er den samme (nemlig $2a\pi$) uafhængig saavel af hvilke to paa hinanden følgende Skæringspunkter paa Linien vi betragter som af hvilken ret Linie gennem O vi betragter. — For at bevise, at Arkimedes' Spiral er en ikke-algebraisk Kurve (altsaa at den henført til et retvinklet Koordinatsystem (XY) ikke kan fremstilles ved nogen algebraisk Ligning $F(x, y) = 0$), behöver vi blot at bemærke, at Spiralen af en ret Linie gennem O (f. Eks. af Aksen X i det polare System) skæres i uendelig mange Punkter, uden at Linien dog helt tilhører Kurven; thi om en algebraisk Kurve ved vi jo, at den af en ret Linie, der ikke er helt indeholdt i Kurven, skæres i højst et endeligt Antal Punkter. Lad os til-



(Fig. 55)

føje den vidergaaende Bemærkning, at den omhandlede Spiral (om hvilken vi lige har bevist, at den ikke er nogen algebraisk Kurve, altsaa at der ikke findes nogen algebraisk Ligning $P(x,y)=0$, saaledes at Spiralens Punkter stemmer overens med Mangden af Punkter, hvis Koordinater (x,y) tilfredsstiller $P(x,y)=0$) heller ikke er <u>nogen Del af en algebraisk Kurve</u>, d. v. s. at der overhovedet ikke findes nogen algebraisk Ligning $P(x,y)=0$ (hvor $P(x,y)$ er et <u>egentligt</u> Polynomium), saaledes at de(retvinklede) Koordinater (x,y) til Spiralens Punkter tilfredsstiller denne Ligning; dette indses umiddelbart saaledes: hvis der eksisterede nogen algebraisk Kurve $P(x,y)=0$ med den nævnte Egenskab (d. v. s. som helt indeholdt Spiralen), vilde denne Kurve med enhver ret Linie gennem Polen O have uendelig mange Punkter fælles (nemlig i hvert Fald de Punkter, hvori den rette Linie skares af Spiralen); følgelig maatte den <u>algebraiske Kurve</u> $P(x,y)=0$ indeholde <u>samtlige</u> Punkter paa enhver ret Linie gennem O, d. v. s. <u>samtlige Punkter i Planen</u>; men dette er umuligt, idet jo intet egentligt Polynomium $P(x,y)$ bliver Nul for alle mulige Værdisæt (x,y).

Som et andet simpelt Eksempel paa en <u>ikke-algebraisk Kurve i Planen</u> nævner vi den ved Ligningen <u>$y=\sin x$</u> (i retvinklede Koordinater) fremstillede Kurve, der er angivet paa Fig. 56; at denne Kurve ikke er nogen algebraisk Kurve fremgaar umiddelbart f. Eks. deraf, at den <u>af X-Aksen $y=0$ skares i uendelig mange Punkter</u> (nemlig Punkterne $x=p\pi$) <u>uden at X-Aksen dog er helt indeholdt i Kurven</u>.



(Fig 56)

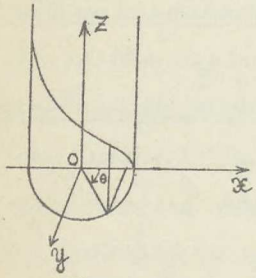
Ogsaa her vil vi bevise den almindelige Sætning, <u>at Kurven $y=\sin x$ heller ikke udgør nogen Del af en algebraisk Kurve</u>, altsaa at der ikke findes noget egentligt Polynomium $P(x,y)$, der

har Talparret $(x, \sin x)$ til Rodsat for enhver Værdi af x; dette bviser man f. Eks. saaledes: dersom en algebraisk Kurve $P(x,y)=0$ helt indeholdt Kurven $y=\sin x$, maatte denne Kurve $P(x,y)=0$ nødvendigvis helt indeholde enhver ret Linie $y=k$, hvor $-1 \leqq k \leqq +1$, thi enhver saadan ret Linie skærer jo Kurven $y=\sin x$ (og følgelig yderligere Kurven $P(x,y)=0$) i uendelig mange Punkter. Kurven $P(x,y)=0$ maatte følgelig indeholde samtlige Punkter indenfor Parallelstrimlen $-1 \leqq y \leqq 1$; men heraf følger atter, at Kurven $P(x,y)=0$ maatte indeholde ethvert Punkt (x_0, y_0) i Planen; thi tænker vi os gennem et saadant Punkt (x_0, y_0) trukket en ret Linie L vinkelret paa X-Aksen, vilde denne Linie L jo have uendelig mange Punkter fælles med den algebraiske Kurve $P(x,y)=0$ (nemlig alle de Punkter paa L, for hvilke $-1 \leqq y \leqq 1$), hvoraf følger, at Linien L helt maa tilhøre Kurven, altsaa specielt at Punktet (x_0, y_0) maa ligge paa Kurven. Hermed er Beviset ført; thi vi ved jo, at der ikke eksisterer nogen algebraisk Kurve, der indeholder samtlige Punkter i Planen.

Som Eksempel paa en ikke-algebraisk Flade i Rummet skal vi nøjes med at nævne Cylinderen (Bølgefladen) $y=\sin x$; at denne Flade ikke er en algebraisk Flade, fremgaar umiddelbart deraf, at den af en Plan parallel med XY-Planen (f. Eks. selve XY-Planen) skæres i en ikke-algebraisk Kurve; thi om en algebraisk Flade ved vi jo, at den af enhver Plan, der ikke er helt indeholdt i Fladen, skæres i en plan algebraisk Kurve.

Endelig nævner vi som Eksempel paa en ikke-algebraisk Rumkurve den saakaldte Skruelinie, d. v. s. den Kurve, der beskrives af et variabelt Punkt P, der bevæger sig saaledes, at dets Projektion paa en given fast Plan med jævn Hastighed

gennemløber en Cirkel, samtidig med at Punktet bevæger sig med jævn Hastighed i en Retning vinkelret paa denne Plan. Henført til et retvinklet Koordinatsystem (XYZ), hvor den givne Plan er XY-Plan, hvor den givne Cirkels Centrum er Begyndelsespunkt, og hvor X-Aksen gaar igennem det Punkt paa Skruelinien, hvori denne skærer XY-Planen, kan Skruelinien ojensynlig paa Parameterform fremstilles ved Ligningerne



(Fig. 57).

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta, \quad z = k\theta,$$

hvor R og k er Konstanter, medens θ er en uindskrænket Parameter (vil man indføre „Skruehøjden" H, d. v. s. den Forskydning i Z-Aksens Retning, der svarer til en hel Omdrejning, behøver man aabenbart blot for Konstanten k at indsætte $k = \frac{H}{2\pi}$). Vi vil bevise, at Skruelinien er en ikke-algebraisk Kurve, altsaa at den ikke kan dannes som Skæringskurve mellem to algebraiske Flader. Vi tilføjer straks, at der hermed ikke er sagt, at der overhovedet ikke eksisterer nogen algebraisk Flade, der indeholder Skruelinien, og dette vilde heller ikke være rigtigt, da Skruelinien jo ojensynlig er helt beliggende paa den (algebraiske) cirkulære Cylinder $x^2+y^2 = R^2$. Den opstillede Paastand om, at Skruelinien ikke kan dannes som Skæringskurve mellem to algebraiske Flader, er ojensynlig bevist, naar vi har bevist, at enhver algebraisk Flade, der indeholder Skruelinien, nødvendigvis indeholder hele den fornævnte cirkulære Cylinder $x^2+y^2 = R^2$, at dette sidste er Tilfældet, følger imidlertid straks deraf, at enhver algebraisk Flade, der gaar gennem Skruelinien, med en vilkaarlig Frembringer paa Cylinderen $x^2+y^2 = R^2$ har uendelig mange Punkter fælles (nemlig i hvert Fald Frembringerens uendelig mange Skæringspunkter med Skruelinien) og følgelig indeholder hele Frembringeren, idet jo en algebraisk Flade af en ret Linie, der ikke er helt beliggende paa Fladen, skæres i højst et endeligt Antal Punkter.

Opg. 105. Find det geometriske Sted for Fodpunkterne af vinkelrette fra en ligesidet Hyperbels Centrum paa Tangenterne. (Figur).

Opg. 106. Find ved Anvendelse af homogene Koordinater Asymptoterne til Kurven

$$(x+y)(2x+y)(3x+y) + 17x^2 + 11xy + 2y^2 + 12x + 10y + 36 = 0.$$

Opg. 107. Undersög og tegn Kurven $y^2 = x^2 + x^4$.

Opg. 108. Undersög Kurven $x^2y + (x^2+y^2)^2 = 0$ i Nærheden af Begyndelsespunktet. (Benyt polære Koordinater).

Opg. 109. Givet Cirklen $x^2 + y^2 = ay$. Fra Begyndelsespunktet O trækkes en variabel Radiusvektor, der skærer Cirklen i M og den rette Linie $y = 2a$ i N. Bestem det geometriske Sted (Kissoiden) for et Punkt P paa den omtalte Radiusvektor, bestemt saaledes at $PN = OM$ (i Størrelse og Retning). Undersög og tegn Kurven.

Opg. 110. Hvorledes lyder den almindelige Sætning, som man ved Anvendelse af homogene Koordinater kan opstille om Antallet af Skæringspunkter mellem en algebraisk Kurve af n^{te} Orden og en ikke i Kurven indeholdt ret Linie?

Opg. 111. Idet den reelle Variable t gaar mod 0, gaar t^m mod 0, naar m er positiv. Er y en Funktion af t (d. v. s. entydig bestemt ved t), siges y at gaa mod 0 som t^m eller at gaa mod Nul „af m^{te} Orden" i Forhold til t, hvis $\frac{y}{t^m}$, idet t gaar mod 0, gaar mod en endelig, fra 0 forskellig, Grænseværdi. Idet

M er et variabelt Punkt af Hyperblen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, hvis Projektion paa Asymptoten $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ er M_1, skal man bestemme den Orden, hvoraf $M_1 M$ gaar mod 0 i Forhold til $\frac{1}{OM_1}$, naar M_1 fjerner sig i det uendelige paa Asymptoten. Er M et variabelt Punkt af Descartes's Blad, hvis Projektion paa Asymptoten er M_1, medens O's Projektion paa Asymptoten er O_1, skal man ligeledes angive den Orden, hvoraf $M_1 M$ gaar mod 0 i Forhold til $\frac{1}{O_1 M_1}$, naar M_1 fjerner sig i det uendelige paa Asymptoten.

Opg. 112. Bestem Tangenten til Lemniskaten $(x^2 + y^2) = 2a^2(x^2 - y^2)$ i et af de Punkter, hvori den skærer x-Aksen. Idet Rø-ringspunktet er A, M et nærliggende Punkt af Kurven, hvis Projektion paa Tangenten i A er M_1, skal man finde den Orden, hvoraf $M_1 M$ gaar mod 0 i Forhold til AM_1, naar M_1 nærmer sig ubegrænset til A. Løs den samme Opgave for en af de to gennem Begyndelsespunktet gaaende Kurvegrene, idet A erstattes med Begyndelsespunktet.

Opg. 113. Undersøg og tegn Kurven

$$y^2 = (x-a)(x-b)(x-c),$$

hvor a, b, c er tre givne reelle Tal. Undersøg dernæst, hvorledes Kurven varierer, naar a er konstant, medens b og c varierer.

Opg. 114. Find Tangentplanen til Fladen $x \cdot y \cdot z = a^3$ i et vilkaarligt givet Punkt af Fladen, og find det geometriske Sted for Begyndelsespunktets Projektion paa Tangentplanen, naar

dennes Røringspunkt gennemløber den givne Flade.

Opg. 115. Vis, at Keglesnitsfladerne $y(y+1) - z(x+2) = 0$ og $y(x-1) - z(y-z)$ begge indeholder X-Aksen; find dernæst en rational Parameterfremstilling for den algebraiske Kurve, hvori de iøvrigt skærer hinanden, idet Parameteren er k, bestemt ved $y = kz$.

Opg. 116. Givet Linieparret $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ i XY-Planen og et System af parallele Korder med Endepunkterne paa Linieparret. Over hver af disse Korder som Diameter tegnes en Cirkel i en Plan vinkelret paa XY-Planen. Vis, at den af disse Cirkler frembragte Flade er en egentlig Keglefflade af 2den Orden med Toppunkt i Begyndelsespunktet.

Opg. 117. I Ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ bestemmes en Diameter af Længden $2c$. Over en variabel Korde, parallel med denne, som Diameter tegnes en Cirkel i en Plan vinkelret paa XY-Planen. Find den af denne variable Cirkel frembragte Flade.

Opg. 118. I Planen $y = x$ ligger en Ellipse med Halvakserne $a\sqrt{2}$ og a beliggende henholdsvis paa Skæringslinien med XY-Planen og paa Z-Aksen. Find denne Ellipses projicerende Cylindre paa YZ- og XZ-Planen og vis, at disse to Cylindre skærer hinanden i endnu en Ellipse.

Opg. 119. Find en Parameterfremstilling for den Rumkurve, der bestemmes ved de algebraiske Ligninger

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad\qquad y^2 = bz.$$

Find dernæst Rumkurvens Skæringspunkter med Planerne $y = x$ og $y = -x$, samt dens Tangent i et vilkaarligt Punkt.

Opg. 120. Find en Parameterfremstilling for den algebraiske Flade, hvis Ligning er

$$(x^2 + y^2 - z)^2 + z^2 = 1$$

(eller, hvad der er det samme, angiv denne algebraiske Lignings Løsninger paa Parameterform).

Opg. 121. Find en Parameterfremstilling og derefter Ligningen for en Cylinderflade, hvis Spor i xy-Planen er Cirklen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

og hvis Frembringere har Heldningsvinklene α, β, γ.

Opg. 122. Karakteriser en Cylinderflade analytisk, naar Frembringerne har Retningscosinusserne α, β, γ og berører Kuglefladen

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Opg. 123. Find en Parameterfremstilling for den Kurve i xy Planen, hvis Ligninger er

$$y^2 = x^3 \quad , \quad z = 0$$

Find derved en Parameterfremstilling og derefter Ligningen for en Regleflade med Toppunkt i Punktet (a, b, c), hvis Spor i xy-Planen er den nævnte Kurve.

Opg. 124. Bestem en Regleflade analytisk, naar den geometrisk er bestemt ved at være omskrevet om Fladen

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

og have Toppunkt i (a, b, c).

Opg. 125. Find Ligningen for en Kuglering (Tore), der dannes ved at dreje en Cirkel:

$$(x-a)^2 + z^2 = R^2, \quad y = 0$$

om Z-Aksen.

Opg. 126. Find Ligningen for den Flade, der frembringes, naar Kurven $xz = a^2$, $y = 0$ drejer sig om Linien $x = y = z$.

Opg. 127. Find Parameterfremstilling og Ligning for en ret Konkoide, hvis rette Ledelinie er Z-Aksen, og hvis Ledeplan er xy-Planen, naar Frembringeren stadig skal skære Ellipsen $x = a$, $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Bestem de Planer, vinkelrette paa X-Aksen, der skærer Fladen i Cirkler.

Opg. 128. En variabel ret Linie bevæger sig saaledes, at den stadig skærer Z-Aksen og Hyperblen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = m^2$, $z = 0$ og desu-

den langerer den hyperbolske Paraboloide $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$. Find Parameterfremstilling og Ligning for den af den variable Linie frembragte Flade og angiv Fladens Art.

Opg. 129. Hvilken Flade beskrives af en ret Linie, der drejer sig om en anden ret Linie, der ikke ligger i Plan med den første? (Vælg den sidste Linie til Z-Akse og de to Liniers korteste Afstand til X-Akse).

Opg. 130. Find Betingelsen for, at den hyperbolske Paraboloide $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$ er en ret Konkoide, og vis i det fundne Tilfælde, at Ligningen for Paraboloiden ved en Koordinattransformation kan bringes paa Formen $F(x\,y\,z) = 0$, hvor $F(x\,y\,z)$ er homogen i x og y.

Opg. 131. Bevis, at der i homogene Koordinater gælder Sætningen: En algebraisk Flade af n^{te} Orden skæres af en Plan, der ikke er helt indeholdt i Fladen, i en plan algebraisk Kurve af netop n^{te} Orden (og ikke som i inhomogene Koordinater i en Kurve af højst n^{te} Orden).

Indholdsfortegnelse.

Side

Indledning. 1

1. Konstant og Variabel ---- 1
2. Polynomium i een Variabel ---- 3
3. Polynomium i flere Variable ---- 5
4. Løsning til et System af algebraiske Ligninger ---- 9
5. Elimination ---- 10

Kapitel I.

Determinanterne og deres Anvendelse ---- 12

Determinanter ---- 12

6. Indledende Bemærkninger ---- 12
7. Permutationer af Tallene 1, 2, . . . n. ---- 14
8. Definition af en Determinant ---- 18
9. Forandring af Rækker til Søjler og Søjler til Rækker 22
10. Komplementer; Determinantens Afhængighed af Elementerne i en Række ---- 25
11. Komplementer udtrykt ved Underdeterminanter ---- 31
12. Eksempel paa Beregning af en Determinant ---- 35

Side

13. Multiplikation af to Determinanter ---------- 40
14. Symmetrisk Determinant ---------- 48
15. Rangen af en Determinant med Værdien Nul - 50

De lineære Ligninger ---------- 58

16. Indledende Bemærkninger ---------- 58
17. Ligningernes Determinant forskellig fra Nul --- 59
18. Lagranges og Newtons Interpolationsformler --- 63
19. Homogene Ligninger ---------- 67
20. Fuldstændig Løsning af et homogent System -- 68
21. Et fuldstændigt Sæt af uafhængige Løsninger --- 73
22. m homogene Ligninger med n Ubekendte --- 79
23. Elimination ---------- 87
24. Inhomogene Ligninger med Ligningernes Determinant lig med Nul ---------- 90

Lineære Substitutioner og kvadratiske Former 98

25. Eneentydig Afhængighed mellem to Systemer af Variable ---------- 98
26. Lineære Substitutioner ---------- 99
27. Omvendt Substitution til en given Substitution 101
28. Sammensætning af Substitutioner ---------- 103
29. Eksempler paa Substitutioner med Determinanten 1 ---------- 105
30. Et Polynomium overfor en lineær Substitution ---------- 107
31. Lineære homogene Substitutioner ---------- 109
32. Kvadratiske Former ---------- 110

Side

33. Invariant _____ 115
34. Orthogonale Substitutioner _____ 115
35. Orthogonalinvarianter _____ 118
36. Orthogonal Substitution med to Variable _____ 121
37. Reduktion af en kvadratisk Form med to Variable _____ 124
38. Reduktion af en kvadratisk Form med tre Variable _____ 127
39. Diskussion af den orthogonale Substitution, der reducerer en kvadratisk Form med tre Variable _____ 134

Kapitel II.

Grundtræk af den analytiske Geometri _____ 143

Lineære Problemer i analytisk-geometrisk Fremstilling _____ 143

40. Indledende Bemærkninger _____ 143

A. Den rette Linies analytiske Geometri _____ 146

41. Koordinatsystem _____ 146
42. Uendelig fjernt Punkt _____ 147
43. Homogene Koordinater _____ 151

B. Planens analytiske Geometri _____ 153

44. Retvinklet Koordinatsystem _____ 154
45. Retning og Retningscosinusser _____ 155
46. Den rette Linies Parameterfremstilling _____ 159

Side

47. Den rette Linies Ligning ---------- 161
48. Den rette Linies Ligning paa Normalform --- 164
49. Positiv Omløbsretning i Planen ---------- 166
50. Arealet af en Trekant ---------- 169
51. Koordinattransformation ---------- 171
52. Uendelig fjerne Elementer ---------- 181
53. Homogene Koordinater ---------- 184
54. En ret Linies Parameterfremstilling i homogene Koordinater ---------- 191
55. Parallelkoordinatsystem ---------- 193
56. Polære Koordinater ---------- 198

C. Rummets analytiske Geometri ---- 204

57. Retvinklet Koordinatsystem ---------- 204
58. Retning og Retningscosinusser ---------- 206
59. Den rette Linies Parameterfremstilling ------ 209
60. Planens Parameterfremstilling ---------- 213
61. Planens Ligning ---------- 215
62. Planens Ligning paa Normalform ---------- 219
63. Den rette Linies Ligninger ---------- 221
64. Positiv Drejningsretning i Rummet ---------- 223
65. Volumen af et Tetraeder ---------- 230
66. Koordinattransformation ---------- 233
67. Uendelig fjerne Elementer ---------- 246
68. Homogene Koordinater ---------- 249
69. Parallelkoordinatsystem ---------- 257
70. Polære Koordinater ---------- 259

Side

Keglesnit og Keglesnitsflader ----- 273

A. Keglesnit ---------- 273

71. Indledende Definitioner og Bemærkninger --- 273
72. Eksempler paa Keglesnit ---------- 276
73. Den almindelige algebraiske Kurve af 2den Orden - 283
74. Geometrisk Betydning af et homogent Polynomium af 2den Grad ---------- 287
75. Skæring mellem ret Linie og Keglesnit ----- 291
76. Dobbeltpunkt paa et Keglesnit. Tangent til et Keglesnit ---------- 295
77. Tangentens Beliggenhed overfor Keglesnittet --- 299
78. Keglesnit i homogene Koordinater ----- 302
79. Skæring mellem ret Linie og Keglesnit i homogene Koordinater ---------- 306
80. Tangent til et Keglesnit i homogene Koordinater 308
81. Keglesnit i Parallelkoordinater ---------- 312
82. Keglesnit i polære Koordinater ---------- 317
83. Ellipse og Hyperbel i rationat Parameterfremstilling ---------- 321

B. Keglesnitsflader ---------- 329

84. Indledende Definitioner og Eksempler ----- 329
85. Den almindelige algebraiske Flade af 2den Orden 335
86. Keglesnitsflader med Centrum ---------- 340
87. Keglesnitsflader uden Centrum ---------- 345
88. Geometrisk Betydning af et homogent Polynomium af 2den Grad ---------- 347

Side

89. Skæring mellem ret Linie og Keglesnitsflade _ _ 352
90. Dobbeltpunkt. Tangentplan til en Keglesnits-flade _ 353
91. Skæring mellem Plan og Keglesnitsflade _ _ _ 356
92. Rette Linier paa egentlige Keglesnitsflader _ _ _ 362
93. Keglesnitsflader i homogene Koordinater _ _ _ 374
94. En Keglesnitsflades Skæring med ret Linie og Plan i homogene Koordinater _ _ _ _ _ _ _ _ 383
95. Tangentplan til en Keglesnitsflade i et vendelig fjernt Punkt _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 391
96. Tangentplanens Beliggenhed overfor Keglesnits-fladen _ 398

Algebraiske Kurver og Flader _ _ _ _ 411

A. Algebraiske Kurver i Planen _ _ _ 411

97. Indledende Definitioner og Eksempler _ _ _ _ 411
98. Skæring mellem ret Linie og algebraisk Kur-ve; Tangent _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 415
99. Algebraisk Kurve i homogene Koordinater _ _ _ 420
100. De komplekse Tals Betydning i den analytiske Geometri _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 425
101. Specielle algebraiske Kurver _ _ _ _ _ _ _ _ _ 431

B. Algebraiske Flader og Kurver i Rummet. 445

102. Definition af en algebraisk Flade _ _ _ _ _ _ 445
103. Algebraisk Kurve i Rummet _ _ _ _ _ _ _ _ _ 447
104. Skæring mellem ret Linie og algebraisk Flade; Tan-

Side
genkplan _ 451
105. Tangent til en algebraisk Kurve _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 453
106. En Plans Skæring med algebraisk Flade og algebraisk Kurve _ 455
107. En Flade frembragt af et System af Kurver _ _ _ 459
108. Flader frembragt af et System af rette Linier _ _ 462
109. Flade frembragt ved et System af Cirkler _ _ _ 474
110. Eksempler paa ikke-algebraiske Kurver og Flader _ 476