DTU Bibliotek
Danmarks Tekniske Universitet
Anker Engelunds Vej 1
2800 Kgs. Lyngby
Tlf. 45 25 72 50
bibliotek@dtu.dk
www.bibliotek.dtu.dk

FEJLENES THEORI.

KORT FREMSTILLET EFTER
DE MINDSTE KVADRATERS METHODE MED SÆRLIGT HENSYN
TIL DEN ØKONOMISKE LANDMAALING.

AF

E. MØLLER.

KJØBENHAVN.
AUGUST BANGS BOGHANDELS FORLAG.
TRIERS BOGTRYKKERI (H. J. SCHOU).
1886.

Forord.

Mit Formaal med Udarbejdelsen af dette lille Skrift har været at tilvejebringe en kort Fremstilling af Fejlenes Theori efter de mindste Kvadraters Methode for dem — særlig Landinspektører —, der ikke have tilstrækkelige Kundskaber i Mathematik til at kunne benytte de allerede foreliggende Skrifter af denne Art. Af Hensyn til, at der er forudsat forholdsvis faa Forkundskaber, har jeg stundom maattet afvige fra de exakte Methoder, og navnlig har jeg ikke taget noget Hensyn til de Forbedringer i Begrundelsen, som ere paapegede af Hr. Geheime-Etatsraad Andræ i hans Afhandling: „Om den rette Begrundelse af de mindste Kvadraters Methode“ i den danske Gradmaaling, 1ste Bind.

Til Slutning maa jeg udtale en Tak til Hr. Lektor Freuchen, som har vist mig den Velvillie at gjennemse Manuskriptet og udtalt følgende:

„Det forekommer mig, at Hr. Møller er kommet saa „nær ved Løsningen af den vanskelige Opgave at frem„stille Fejltheorien for Læsere, som ikke have de nød„vendige Forkundskaber til at forstaa den i dens fuld„stændig correkte Udvikling, som det overhovedet kan

„gjøres; og jeg tvivler ikke om, at hans Arbejde vil „kunne afhjælpe et Savn for de Landinspektører og „andre praktiske Landmaalere saasom Civilingeniører „og Forstmænd, der kunne ønske nærmere Oplysning „om de deri behandlede Forhold, end der kan gives ved „den almindelige Undervisning.“

Kjøbenhavn i April 1886.

E. Møller.

Indhold.

Tredie Kapitel.

Afhængige Observationsstørrelser.

Fjerde Kapitel.

Fejlen i Bestemmelsen af et Punkt i et Plan.

RETTELSER.

Side 49 Lin. 12 f. o. $a^n\ b^n$ rettes til $a_n\ b_n$.

„ 54 „ 19 f. o. 0,0931 — — 0,0961.

„ 57 „ 12 f. n. læses:

$k_1\, a_r\, a_s\, u_r\, u_s,\ k_2\, a_r\, b_s\, u_r\, u_s,\ k_3\, a_r\, c_s\, u_r\, u_s,$ o. s. v.

Side 67 Lin. 11 f. n. + udslettes.

„ 81 „ 5 f. n. —0',01 rettes til —0',11.

Indledning.

Ingen Observation (Maaling), med hvormegen Omhu den end er udført, vil være fejlfri. Der er stedse mangfoldige Aarsager til Fejl tilstede. Man skjelner mellem

1. Uagtsomhedsfejl.
2. Lovmæssige Fejl.
3. Tilfældige Fejl.

1. *Uagtsomhedsfejl* eller *grove Fejl* hidrøre fra Observators Skjødesløshed eller Udygtighed; de have ingen Grændser, men kunne ved tilbørlig Omhu undgaas, og vi ville derfor i det følgende antage, at Observationerne ikke have saadanne Fejl.

2. *Lovmæssige Fejl* (konstante Fejl) kaldes saadanne, der efter en bestemt Lov ere afhængige af de Omstændigheder, hvorunder Maalingen er udført; ved gjentagen Maaling under samme Omstændigheder faa de samme Værdi. Observationerne kunne i Almindelighed frigjøres for saadanne Fejl, idet disse enten beregnes, eller man anordner Observationerne paa en saadan Maade, at de ikke komme til at influere paa Resultatet af Maalingen, d. v. s. saaledes, at de blive eliminerede.

Fejlene hidrøre hyppigt fra Unøjagtigheder i Instrumenternes Bygning; som Exempler mærkes:

En Fejl i en Kjædes Længde vil i Maalingen af en Linie medføre en Fejl, der er proportional med Liniens Længde. Er Fejlen i Kjædens Længde f, og er Linien n Kjædelængder, vil Fejlen i hele Linien være nf.

Er Sigtelinien i et Vinkelinstrument ikke vinkelret paa Horizontalaxen, men danner en Vinkel $90^{0} - f$ med den, vil den derfra hidrørende Fejl i Maalingen af en Vinkel kunne beregnes som Funktion af Fejlen f i Sigteliniens Stilling og af Højdevinklerne for hvert af Vinklens Ben. Ved Forsøg kan man bestemme f, og man kan derfor beregne Fejlen i Vinklen, naar man maaler de to Højdevinkler. Er Kikkerten i Instrumentet til at slaa igjennem, kan man, som bekjendt, ogsaa eliminere Fejlen ved at maale Vinklen to Gange og tage Middeltallet af de to Iagttagelser, idet man slaar Kikkerten igjennem, inden man maaler anden Gang.

De lovmæssige Fejls Theori henhører nærmest under Læren om de Instrumenter, ved Brugen af hvilke de fremkomme, og vi ville derfor forbigaa dem her og antage, at Observationerne ikke ere behæftede med Fejl af denne Art.

3. *Tilfældige Fejl* ere saadanne, der ikke ere lovmæssigt afhængige af de Omstændigheder, hvorunder Observationen er udført. De kunne ikke beregnes, men ved omhyggelige Observationer med gode Instrumenter kunne de bringes ned til meget smaa Størrelser, uden at det dog er muligt helt at undgaa dem. Der vil i Almindelighed med samme Sandsynlighed kunne tillægges dem en positiv som den tilsvarende negative Værdi, idet vi ved en positiv Fejl forstaa en saadan, der formindsker Observationsstørrelsens sande Værdi, medens den negative forøger den.

Disse Fejl hidrøre navnlig fra vore Sandsers Ufuldkommenhed, fra Luftsittringer, Mangel paa Fasthed i Instrumenterne eller fra Vejrligets Indflydelse.

Ved enhver Observation er der i Reglen mange Aarsager til Fejl tilstede; hver saadan Aarsag frembringer en Fejl — kaldet Partielfejl — i Observationen. Resultatet af samtlige Fejlaarsager kaldes Observationsfejlen eller Totalfejlen, der er lig den algebraiske Sum af samtlige Partielfejl. Ved Maalingen af en Linies Længde paa vandret Grund, begaas saaledes, foruden den ovenfor nævnte lovmæssige Fejl, endvidere Fejl hidrørende fra — at Maalingen ikke er udført nøjagtigt i Linien, at Kjæden ikke er tilbørligt udstrammet, at Kjæden er elastisk, saa at den bliver længere ved Stramning, at Formanden ikke sætter sin Stikke nøjagtigt lodret, at Bagmandens Stikke giver efter, naar Formanden strammer Kjæden o. s. v.

Har man observeret en Størrelse x flere Gange, vil man paa Grund af de tilfældige Fejl i Almindellghed faa forskjellige Værdier o_1, o_2, o_3, $\ldots o_n$; at betragte en hvilkensomhelst af disse Værdier som den rette vilde være meget vilkaarligt; thi det vil aabenbart være rigtigst at lade alle Værdierne faa Indflydelse paa Bestemmelsen af den søgte Størrelse, og navnlig falder det naturligt at benytte Middeltallet af de observerede Værdier, altsaa at sætte

$$x = \frac{o_1 + o_2 + o_3 + \ldots\ldots + o_n}{n}.$$

Har man mere almindeligt observeret flere Størrelser, end en foreliggende Opgave nødvendigt kræver, ville de observerede Værdier i Almindelighed være i Strid med hverandre, hvilket røber Tilstedeværelsen af tilfældige Fejl. Har man observeret n Størrelser, medens Opgaven kun kræver e, hvor $e < n$, kan man iblandt de n Observationer udtage e og lade dem bestemme den foreliggende Opgave; men en saadan Fremgangsmaade bærer Præget af Vilkaarlighed; man bør aabenbart, ligesom i ovennævnte Exempel, lade alle de observerede Værdier faa Indflydelse paa Resultatet af Opgaven og søge at bestemme saadanne smaa Tilvæxter, — kaldede de sandsynligste Fejl — der føjede til de observerede Værdier, dels ophæve Striden imellem dem, saaledes at man kommer til samme Resultat, hvilkesomhelst e af de n Observationer, man lægger til Grund for Beregningen, dels saaledes, at de ved Tilvæxterne berigtigede Observationer have størst Sandsynlighed for sig. Den Regning, ved hvilken man finder saadanne Værdier, kaldes Udjevning. — Har man f. Ex. maalt alle Vinklerne o_1, o_2 og o_3 i en plan Trekant, saa vil Betingelsen, at deres Sum skal være 180^0, i Reglen ikke nøjagtigt være opfyldt; man føjer derfor til Vinklerne Tilvæxterne v_1, v_2 og v_3, saaledes at

$$o_1 + v_1 + o_2 + v_2 + o_3 + v_3 = 180^0.$$

Blandt de uendelig mange Værdier af v_1, v_2 og v_3, der tilfredsstille denne Betingelse, søger man nu det System, der er sandsynligst; de sande Værdier af Fejlene er det derimod selvfølgeligt ikke muligt at finde.

Havde man indskrænket sig til kun at observere netop saa mange Størrelser, som vare nødvendige til Bestemmelsen af det foreliggende Problem, saa vil der ikke være nogen Strid imellem Iagttagelserne, og Fejlene — ja selv store Uagtsomhedsfejl — ville ikke røbe deres Tilstedeværelse. Der bliver altsaa kun Tale om Udjevning, naar man har observeret flere Størrelser, end Problemet fordrer d. v. s., naar det er overbestemt.

De Methoder, ad hvilke Udjevningen kan foretages, ville blive omtalte nedenfor; for at begrunde dem er det nødvendigt at fremsætte nogle Hovedsætninger af Sandsynlighedsregningen, og disse tilligemed Taylors Formel ville vi derfor gjøre til Gjenstand for første Kapitel.

Første Kapitel.

Nogle forudgaaende Sætninger.

§ 1. Taylors Formel.

1. *Taylors Formel.* Antages i Funktionen

$$u = F(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) \qquad (1)$$

x'erne at faa Tilvæxterne

$$h_1, h_2, h_3, \ldots h_n,$$

ændres u til

$$u + k = F(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3, \ldots x_n + h_n)$$
$$= A_0 + A_1 h_1 + A_2 h_2 + A_3 h_3 + \ldots + A_n h_n + R, \quad (2)$$

idet Funktionen tænkes udviklet i Række efter stigende Potenser af h'erne. R betegner Summen af Leddene af anden og højere Orden (Resten af Rækken).

Sættes i (2) alle h'er lig nul, faas

$$u = F(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) = A_0,$$

saa at (2) bliver til

$$u + k = F(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3, \ldots x_n + h_n)$$
$$= F(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n) + A_1 h_1 + A_2 h_2 + A_3 h_3 + \ldots + A_n h_n + R. \quad (3)$$

Sættes heri $h_1, h_2, h_3, \ldots h_{r-1}, h_{r+1}, \ldots h_n$ lig nul, faas

$$u + k = F(x_1, x_2, x_3, \ldots x_{r-1}, x_r + h_r, x_{r+1} \ldots x_n)$$
$$= F(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) + A_r h_r + R,$$

som giver

$$A_r = \frac{F(x_1, x_2, x_3, \ldots x_{r-1}, x_r + h_r, x_{r+1} \ldots x_n) - F(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)}{h_r} - \frac{R}{h_r}.$$

Gjør man heri h_r uendelig lille, faas

$$A_r = \frac{du}{dx_r},$$

idet $\frac{R}{h_r}$ bliver nul, da R kun indeholder anden og højere Potenser af h_r.

Rækken bliver altsaa

$$u + k = F(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3, \ldots x_n + h_n)$$
$$= F(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n) + \frac{du}{dx_1}h_1 + \frac{du}{dx_2}h_2 + \frac{du}{dx_3}h_3 + \ldots$$
$$+ \frac{du}{dx_n}h_n + R. \qquad (4)$$

Ere h'erne meget smaa Størrelser, som f. Ex. Fejl, kan man ofte bortkaste R, som forsvindende, og man har da meget nær

$$u + k = F(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3, \ldots x_n + h_n)$$
$$\doteq F(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) + \frac{du}{dx_1}h_1 + \frac{du}{dx_2}h_2 + \frac{du}{dx_3}h_3 + \ldots$$
$$+ \frac{du}{dx_n}h_n. \qquad (5)$$

$$k = \frac{du}{dx_1}h_1 + \frac{du}{dx_2}h_2 + \frac{du}{dx_3}h_3 + \ldots + \frac{du}{dx_n}h_n. \qquad (6)$$

Er t. Ex. a, b og C henholdsvis to Sider og den mellemliggende Vinkel i en plan Trekant, bliver Arealet

$$T = \frac{1}{2}\,ab\sin C,$$

og tillægges a, b og C henholdsvis Tilvæxterne h_a, h_b og h_C, ændres Arealet til

$$T + k = \frac{1}{2}\,ab\sin C + \frac{dT}{da}h_a + \frac{dT}{db}h_b + \frac{dT}{dC}h_C + R,$$

og da

$$\frac{dT}{da} = \frac{1}{2}\,b\sin C, \quad \frac{dT}{db} = \frac{1}{2}\,a\sin C, \quad \frac{dT}{dC} = \frac{1}{2}\,ab\cos C,$$

faar man

$$k = \frac{1}{2}\,b\sin C h_a + \frac{1}{2}\,a\sin C h_b + \frac{1}{2}\,ab\cos C h_C + R.$$

§ 2. Sandsynlighedsregning.

2. *Den mathematiske Sandsynlighed. Ved en Begivenheds mathematiske Sandsynlighed forstaas Forholdet imellem Antallet af de Tilfælde, som ere gunstige for Begivenhedens Indtræffen og Antallet af alle mulige Tilfælde; forudsat at alle Tilfælde indtræffe lige let.*

Ere g Tilfælde gunstige for Begivenhedens Indtræffen, og er det hele Antal mulige Tilfælde m, bliver Sandsynligheden

$$s = \frac{g}{m}. \tag{7}$$

Trækker man t. Ex. et Kort ud af et velblandet Spil, vil Sandsynligheden, for at det er et Billedkort, være

$$\frac{12}{52} = \frac{3}{13},$$

og Sandsynligheden, for at det er en Ruder,

$$\frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

Da g ikke kan være større end m, maa man stedse have

$$0 \leqq s \leqq 1.$$

Er $g = 0$, bliver $s = 0$
– $g = m$ – $s = 1$.

Altsaa betegnes en Begivenheds *Umulighed* ved Sandsynligheden nul; hvorimod *Vished* betegnes ved Sandsynligheden en.

To Begivenheder G og U kaldes modsatte, naar alle de Tilfælde, der ere gunstige og ugunstige for den ene af disse Begivenheders Indtræffen, ere henholdsvis ugunstige og gunstige for den andens. Naar den ene af Begivenhederne indtræffer, vil den anden følgelig ikke indtræffe.

Er g og u henholdsvis Antallet af gunstige og ugunstige Tilfælde for Begivenheden G's Indtræffen, vil Antallet af samtlige mulige Tilfælde være

$$m = g + u. \tag{8}$$

Sandsynligheden for G's Indtræffen bliver

$$s = \frac{g}{m},$$

og for U's Indtræffen (G's Ikke-Indtræffen)

$$s' = \frac{u}{m}, \tag{9}$$

saa at

$$s + s' = \frac{g + u}{m} = 1 \tag{10}$$

ɔ: Summen af Sandsynlighederne for to modsatte Begivenheder er lig en.

Sandsynligheden for at trække en Ruder af et vel blandet Spil er som ovenfor nævnt

$$\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

og Sandsynligheden for at trække en Ikke-Ruder d. v. s. en Hjærter, Klør eller Spader

$$\frac{39}{52} = \frac{3}{4}.$$

Disse to Sandsynligheder ere tilsammen lig en.

Skjønt Sandsynligheden efter (7) har Form af en Brøk, kan den dog blive irrational derved, at Antallet af gunstige og mulige Tilfælde bliver uendeligt.

Et Gulv er belagt med lige mange lyse og mørke Fliser. De lyse have Form af Kvadrater, de mørke derimod af ligesidede Trekanter, hvis Sider ere lig Kvadraternes. Der spørges om Sandsynligheden for, at en udkastet Kugle falder paa en mørk Flise.

Her vil aabenbart Antallet af gunstige og ugunstige Tilfælde være proportionalt med Arealet af henholdsvis de mørke og lyse Fliser. Kaldes den for Kvadraterne og de ligesidede Trekanter fælles Side a, kan man sætte

$$g = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \quad \text{og} \quad u = a^2.$$

Antallet af samtlige mulige Tilfælde bliver

$$m = g + u = \frac{a^2}{4}(4 + \sqrt{3}),$$

saa at den søgte Sandsynlighed bliver

$$s = \frac{\frac{a^2}{4}\sqrt{3}}{\frac{a^2}{4}(4 + \sqrt{3})} = \frac{4\sqrt{3} - 3}{13}.$$

3. *Første Hovedsætning.* Er en Begivenhed A's Indtræffen betinget af, at en af flere Begivenheder

$$G_1, G_2, G_3, \ldots\ldots G_n$$

indtræffer, og have disse Begivenheder henholdsvis

$$g_1, g_2, g_3, \ldots\ldots g_n$$

gunstige Tilfælde, vil A have $g_1 + g_2 + g_3 + \ldots\ldots + g_n$ gunstige Tilfælde. Er det hele Antal mulige Tilfælde m, blive G'ernes Sandsynligheder

$$s_1 = \frac{g_1}{m}, \; s_2 = \frac{g_2}{m}, \; s_3 = \frac{g_3}{m} \ldots\ldots s_n = \frac{g_n}{m},$$

og Sandsynligheden for A bliver

$$S = \frac{g_1 + g_2 + g_3 + \ldots + g_n}{m} = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n. \quad (11)$$

Heraf læres, at *Sandsynligheden, for at en af flere Begivenheder indtræffer, er Summen af Sandsynlighederne for disse Begivenheder,* forudsat at de ikke kunne indtræffe samtidig.

Er

$$s_1 = s_2 = s_3 = \ldots = s_n = s$$

bliver

$$S = ns. \quad (12)$$

Sandsynligheden, for at et af et vel blandet Spil udtrukket Kort er et Es, er

$$\frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

Sandsynligheden, for at det er et Billedkort, er

$$\frac{12}{52} = \frac{3}{13}.$$

Følgelig er Sandsynligheden, for at det enten er et Es eller Billedkort,

$$\frac{1}{13} + \frac{3}{13} = \frac{4}{13}.$$

Af Sandsynligheden $^1/_4$, for at Kortet er en Ruder, og $^3/_{13}$, for at det er et Billedkort, kan man derimod *ikke* slutte, at Sandsynligheden, for at Kortet enten er en Ruder eller et Billedkort, er $\frac{1}{4} + \frac{3}{13} = \frac{25}{52}$; thi de to Begivenheder indtræffe i tre Tilfælde samtidig, nemlig naar Kortet er Ruder-Konge, Dame eller Knægt. Man ser let, at den omspurgte Sandsynlighed kun er

$$\frac{22}{52} = \frac{11}{26}.$$

4. Anden Hovedsætning. Sandsynligheden for en Begivenhed A, hvis Indtræffen er betinget af, at flere af hverandre uafhængige Begivenheder G_1, G_2, G_3, ... G_n alle indtræffe, findes paa følgende Maade.

Have Begivenhederne

$$G_1,\ G_2,\ G_3,\ \ldots\ G_n$$

henholdsvis

$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ \ldots\ g_i$$

gunstige og

$$m_1,\ m_2,\ m_3,\ \ldots\ m_n$$

mulige Tilfælde,

saa ere G'ernes Sandsynligheder

$$s_1 = \frac{g_1}{m_1},\ s_2 = \frac{g_2}{m_2},\ s_3 = \frac{g_3}{m_3}\ \ldots\ldots\ s_n = \frac{g_n}{m_n}.$$

Da hvert enkelt Tilfælde for G_1 kan indtræffe sammen med hvert af G_2, G_3 .... G_n, faar den sammensatte Begivenhed A ialt $m_1\ m_2\ m_3\ \ldots\ m_n$ mulige Tilfælde.

A faar et gunstigt Tilfælde hver Gang et af G_1's gunstige Tilfælde indtræffer sammen med et af G_2's, G_3's, ... og G_n's. Det hele Antal gunstige Tilfælde er altsaa

$$g_1\ g_2\ g_3\ \ldots\ g_n.$$

Sandsynligheden for Begivenheden A vil følgelig være

$$S = \frac{g_1\ g_2\ g_3\ \ldots\ldots\ g_n}{m_1\ m_2\ m_3\ \ldots\ldots m_n} = s_1\ s_2\ s_3\ \ldots\ s_n. \quad (13)$$

Heraf læres, at *Sandsynligheden, for at flere af hverandre uafhængige Begivenheder alle indtræffe, er Produktet af Sandsynlighederne for de enkelte Begivenheder.*

Sandsynligheden, for at en Begivenhed, hvis Sandsynlighed er s, skal gjentage sig n Gange, er

$$S = s^n. \quad (14)$$

Ex. 1. Sandsynligheden for at slaa 12 ved et Kast med to Tærninger er

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}.$$

Ex. 2. Sandsynligheden for at slaa 6 en Gang ved to Kast med en Tærning findes saaledes. Sandsynligheden for at slaa sex ved det første Kast er $\frac{1}{6}$, og for at slaa Ikke-sex ved det andet $\frac{5}{6}$. Sandsynligheden, for at begge disse Begivenheder indtræffe, er derfor

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36},$$

og da Sandsynligheden for at slaa Ikke-sex ved det første Kast og sex ved det andet er ligesaa stor, bliver Sandsynligheden for *enten* at slaa sex ved det første Kast og Ikke-sex ved det andet *eller* omvendt

$$\frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{5}{18}.$$

Sandsynligheden, for at *mindst* det ene Kast giver sex, er Summen af Sandsynlighederne, for at det ene Kast giver sex, og at begge give sex, og er altsaa

$$\frac{5}{18} + \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

Denne Sandsynlighed kan ogsaa findes paa en anden Maade. Den modsatte Begivenhed, nemlig at begge Kast give Ikke-sex, har ifølge (14) Sandsynligheden

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36},$$

saa at den søgte Sandsynlighed ifølge (10) bliver

$$1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}.$$

Ex. 3 Trækker man to Gange et Kort af et Spil, vil Sandsynligheden, for at det begge Gange er et Es, være

$$\frac{1}{13^2} = \frac{1}{169}$$

Trækker man *derimod samtidig* to Kort af et Spil, er vel Sandsynligheden, for at hvert enkelt af disse er et Es, $\frac{1}{13}$; men Sandsynligheden, for at de begge ere Esser, er ikke $\frac{1}{13^2}$; thi Begivenhederne ere ikke uafhængige af hinanden. Er nemlig det ene Kort et Es, vil Sandsynligheden, for at det andet er et Es, ikke længere være $\frac{1}{13}$; thi naar Spillet har mistet det ene Es, er der kun tre Esser tilbage iblandt 51 Kort, og Sandsynligheden er altsaa $\frac{3}{51}$ under den nævnte Forudsætning, saa at den omspurgte Sandsynlighed bliver

$$\frac{1}{13} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}.$$

Sandsynligheden, for at 5 af et Spil samtidig udtrukne Kort ere Esser, er ikke $\frac{1}{13^5}$, men

$$\frac{1}{13} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49} \cdot \frac{0}{48} = 0,$$

der betegner Umuligheden af, at alle 5 Kort kunne være Esser.

5. *Sandsynligheden, for at en Begivenhed indtræffer r Gange i Løbet af n Forsøg*, findes saaledes.

Begivenhedens Sandsynlighed være s og den modsatte Begivenheds Sandsynlighed $s' = 1 - s$.

Sandsynligheden, for at Begivenheden indtræffer i alle de r første af de n Forsøg, er

$$s^r,$$

og Sandsynligheden, for at Begivenheden ikke indtræffer i noget af de paafølgende $n - r$ Forsøg,

$$s'^{\,n-r},$$

saa at Sandsynligheden, for at Begivenheden indtræffer i de r første, men ikke i noget af de paafølgende Forsøg, er

$$s^r \, s'^{\,n-r}. \tag{15}$$

Da der imidlertid i den foreliggende Opgave kun er spurgt om Sandsynligheden, for at Begivenheden indtræffer r Gange i Løbet af n Forsøg, uden Hensyn til *hvilke* af Forsøgene, der ere gunstige for Begivenhedens Indtræffen, og da alle Kombinationer af r Forsøg, der kunne tages som gunstige, have Sandsynligheden $s^r \, s'^{\,n-r}$, bliver denne Sandsynlighed at multiplicere med Antallet af Kombinationerne, som er

$$K_{n,r} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,r},$$

saa at den søgte Sandsynlighed bliver

$$S = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots.(n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,r}\,s^r\,s'^{\,n-r}. \quad (16)$$

Sandsynligheden for to Gange at slaa 6 ved 5 Kast med en Tærning er

$$\frac{5.4}{1.2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{3888}.$$

6. *Det sandsynligste Udfald af en Forsøgsrække.* Har en Begivenhed Sandsynligheden s, og har man anstillet n Forsøg, vil den sandsynligste Værdi for Antallet af gunstige Tilfælde kunne findes af (7)

$$s = \frac{g}{n},$$

der giver

$$g = ns \quad (17)$$

Man maa dog ikke vente, at g bestemt ved (17) kommer til at stemme nøjagtigt med Forsøgene, ja der er endog Mulighed, for at de gunstige Forsøgs Antal kan faa en hvilkensomhelst (hel) Værdi fra 0 til n; til hver af disse Værdier svarer en Sandsynlighed, der bestemmes af (16) for $r = g$; udføres Regningen, vil det stedse vise sig, at jo mere g afviger fra ns, desto mindre bliver Sandsynligheden, saa at ns er den sandsynligste Værdi for g. Det sandsynligste Udfald af Forsøgene er altsaa, at Forholdet mellem de gunstige Forsøgs Antal og samtlige Forsøgs Antal er lig Begivenhedens mathematiske Sandsynlighed Dette betragtes her som umiddelbart indlysende.

7. *Sandsynligheden, for at en allerede indtruffen Begivenhed skyldes en vis Aarsag.*

Er en Begivenhed A's Indtræffen betinget af, at en af Begivenhederne

$$G_1,\ G_2,\ G_3\ \ldots.\ G_n$$

indtræffer, og er A allerede indtruffen, da vil Sandsynligheden, for at dette skyldes

$$G_1\text{'s},\ G_2\text{'s},\ G_3\text{'s}\ \ldots\ G_n\text{'s}$$

Indtræffen være proportional med disse Begivenheders Sandsynligheder

$$s_1,\ s_2,\ s_3\ \ldots\ s_n,$$

eller med andre Ord: Sandsynligheden, for at en allerede indtruffen Begivenhed skyldes enhver af dens mulige Aarsager, er proportional med Sandsynligheden for Begivenhedens Indtræffen formedelst denne Aarsag.

Sandsynligheden, for at Begivenheden A overhovedet indtræffer, er ifølge Art. 3

$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n.$$

Kaldes Sandsynligheden, for at Begivenheden A's Indtræffen skyldes G_r, for S_r, da vil Sandsynligheden, for at baade A indtræffer, og at dette skyldes G_r's Indtræffen, være

$$(s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n)\ S_r;$$

men denne Sandsynlighed er tillige lig s_r, saa at

$$s_r = (s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n)\ S_r,$$

hvoraf faas

$$\left.\begin{array}{c} S_r = \dfrac{s_r}{s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n} \\ \dfrac{S_1}{s_1} = \dfrac{S_2}{s_2} = \dfrac{S_3}{s_3} = \ldots = \dfrac{S_n}{s_n} = \dfrac{1}{s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n} \end{array}\right\} \quad (18)$$

Hermed er Sætningen bevist.

Exempel. Man har to Bunker Kort, hvoraf den ene iblandt m_1 Kort indeholder r_1 Ruder og den anden blandt m_2 Kort r_2 Ruder. Af en af Bunkerne (man veed ikke af hvilken) er udtrukket et Kort, som var en Ruder. Der spørges om Sandsynligheden, for at Kortet er udtrukket af den første eller af den anden Bunke.

Begivenheden at trække en Ruder af den første Bunke er sammensat af de to Begivenheder 1⁰ at trække af denne Bunke $\left(\text{Sands. } \frac{1}{2}\right)$ og 2⁰ at det udtrukne Kort er en Ruder $\left(\text{Sands. } \frac{r_1}{m_1}\right)$. Sandsynligheden er derfor

$$\frac{1}{2}\,\frac{r_1}{m_1}.$$

Ligesaa er Sandsynligheden for at trække en Ruder af den anden Bunke

$$\frac{1}{2}\,\frac{r_2}{m_2}.$$

Sandsynlighederne S_1 og S_2, for at Kortet er trukket henholdsvis af den første og anden Bunke, findes nu af

$$\frac{S_1}{\frac{1}{2}\frac{r_1}{m_1}} = \frac{S_2}{\frac{1}{2}\frac{r_2}{m_2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{m_1}+\frac{r_2}{m_2}\right)} = 2\,\frac{m_1 m_2}{r_1 m_2 + r_2 m_1},$$

der giver

$$S_1 = \frac{r_1 m_2}{r_1 m_2 + r_2 m_1}, \quad S_2 = \frac{r_2 m_1}{r_1 m_2 + r_2 m_1}.$$

Indeholdt den ene Bunke 3 Ruder iblandt 20 Kort, og udgjorde den anden Bunke Resten af Spillet, altsaa 10 Ruder blandt 32 Kort, blev Sandsynlighederne

$$S_1 = \frac{3\,.\,32}{3\,.\,32 + 10\,.\,20} = \frac{96}{296} = \frac{12}{37}$$

$$S_2 = \frac{10\,.\,20}{3\,.\,32 + 10\,.\,20} = \frac{200}{296} = \frac{25}{37}.$$

Andet Kapitel.

Uafhængige Observationsstørrelser.

§ 1. Fejlen paa en Observationsstørrelse.

8. *Fejlloven for en Observationsstørrelse.* Er ds Sandsynligheden for, at Fejlen i en Observationsstørrelse ligger mellem v og $v + dv$, vil, naar dv og dermed ds ere uendelig smaa Størrelser (Differentialer), Forholdet mellem ds og dv aabenbart være en Funktion af v, saa at vi kunne sætte

$$\frac{ds}{dv} = \varphi(v) \tag{19}$$

og altsaa

$$ds = \varphi(v)\, dv \tag{20}$$

Tænkes dv konstant, bliver ds proportional med $\varphi(v)$; denne Funktion, der kaldes *Fejlloven*, er derfor en Maalestok for Fejlens Sandsynlighed og maa derfor, efter hvad der ovenfor er nævnt, blandt mere opfylde følgende Betingelser.

1⁰ $\varphi(v)$ maa aftage, naar den numeriske Værdi af v voxer.

2⁰ Naar v bliver større end en vis Størrelse (Grændsen for Fejlen), maa $\varphi(v)$ blive nul.

3⁰ Da lige store positive og negative Fejl have samme Sandsynlighed, maa man endelig have

$$\varphi(v) = \varphi(-v). \tag{21}$$

Disse Betingelser ere imidlertid ikke tilstrækkelige til at bestemme Funktionen; thi der gives uendelig mange Funktioner, der opfylde dem, og i Virkeligheden have de forskjellige Arter af Observationsstørrelser vistnok ogsaa noget forskjellige Fejllove; men tilnærmelsesvis gives der dog en Form for Fejlloven, som er fælles for dem alle.

Det er allerede ovenfor anført, at der ved enhver Observation i Reglen er et større Antal Fejlkilder tilstede; ved et Nivellement f. Ex. vil et aflæst Sigte være behæftet med en Fejl i Aflæsningen, en Fejl i Indstillingen af Libellen, en Fejl hidrørende fra Luftsittringer o.fl.a. De to førstnævnte Fejlkilder ere omtrent lige betydelige, fordi man ved Instrumentets Forfærdigelse altid sørger for, at Kikkertens Forstørrelse svarer til Libellens Finhed. Det er nemlig forkasteligt at forsyne et Instrument, som har en kun lidet forstørrende Kikkert, med en fin Libelle; thi det vilde kun fordyre Instrumentet og gjøre det tidsspildende at arbejde med, uden at man opnaar nogen kjendelig større Nøjagtighed.

Det vil heraf være klart, at hvis der gives en for alle Arter af Observationsstørrelser fælles Form for Fejlloven, maa den være af en saadan Beskaffenhed, at Observationsfejlen kan tænkes at være en Sum af uendelig mange Partielfejl, hvoraf hver enkelt omtrent har samme Maximumsværdi. Naar der er uendelig mange Partielfejl, maa hver enkelt være uendelig lille, og da saaledes den enkelte Partielfejl ikke faar nogen Indflydelse paa Totalfejlen, synes det ikke at være uberettiget at forudsætte, at Partielfejlens Lov er ligegyldig, naar blot den er symmetrisk. Holde disse Forudsætninger Stik, maa man kunne finde den almindelige Fejllov gjennem det specielle Tilfælde, hvor alle Partielfejlene ere numerisk lige store og enten $+ d$ eller $- d$, hver med Sandsynligheden $1/2$. I saa Fald vil den største Værdi, Totalfejlen kan faa, naar der er n Partielfejl, være

$$a = nd. \qquad (22)$$

Ere r Fejl positive og $n-r$ negative, bliver Totalfejlen

$$v = rd - (n - r)\, d = (2r - n)\, d,$$

hvoraf man faar

$$r = \frac{v + nd}{2d}. \qquad (23)$$

Sandsynligheden for denne Totalfejl — eller Sandsynligheden, for at r Fejl ere positive og $n - r$ negative — er ifølge (16)

$$s_v = \frac{n(n-1)\ (n-2) \ldots \left(n - \frac{v+nd}{2d} + 1\right)}{1 . 2 . 3 \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{v+nd}{2d}} \cdot \frac{1}{2^n}. \qquad (24)$$

Ere $r + 1$ Fejl positive og $n - r - 1$ negative, bliver Totalfejlen

$$v + 2d$$

og dens Sandsynlighed

$$s_{v+2d} = \frac{n(n-1)(n-2) \ldots \left(n - \frac{v+nd}{2d}\right)}{1 . 2 . 3 \ldots\ldots \left(\frac{v+nd}{2d} + 1\right)} \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$= s_v \frac{n - \frac{v+nd}{2d}}{\frac{v+nd}{2d} + 1}. \qquad (25)$$

Af denne Ligning udledes

$$s_{v+2d} - s_v = s_v \left(\frac{n - \frac{v+nd}{2d}}{\frac{v+nd}{2d} + 1} - 1 \right)$$

$$= -2s_v \frac{v+d}{nd + v + 2d} = -2s_v \frac{v+d}{a+v+2d}. \qquad (26)$$

Tænkes a at være uendelig stor og d uendelig lille, altsaa $n = \infty$, faas, idet d forsvinder imod v og v imod a,

$$s_{v+2d} - s_v = -2s_v \frac{v}{a} \qquad (27)$$

eller

$$\frac{s_{v+2d} - s_v}{2d} = -\frac{s_v v}{ad} = -\frac{s_v v}{m^2}; \qquad (28)$$

hvor vi have sat den konstante Størrelse

$$ad = nd^2 = m^2. \qquad (29)$$

Da $2d$ er en uendelig lille Tilvæxt til v, medens $s_{v+2d} - s_v$ er den tilsvarende Tilvæxt til s_v, kan (28) skrives saaledes

$$\frac{ds_v}{dv} = -\frac{s_v v}{m^2}; \qquad (30)$$

men da

$$\frac{d \,.\, ls_v}{ds_v} = \frac{1}{s_v},$$

vil

$$ds_v = s_v d \,.\, ls_v,$$

saa at man faar

$$\frac{d \,.\, ls_v}{dv} = -\frac{v}{m^2}, \qquad (31)$$

der giver

$$ls_v = \int -\frac{v}{m^2}\, dv = -\frac{v^2}{2m^2} + lc \qquad (32)$$

eller

$$l\,\frac{s_v}{c} = -\frac{v^2}{2m^2}, \qquad (33)$$

hvor c er en ubestemt Konstant.

Man har nu

$$s_v = c e^{-\frac{v^2}{2m^2}}. \qquad (34)$$

I Virkeligheden ere Partielfejlene ikke konstante, men variere mellem visse Grændser $+\delta$ og $-\delta$; hvilket imidlertid netop vil bevirke, at man kun behøver et ringere Antal Fejlkilder, for at Fejlen v's Sandsynlighed kan betragtes som værende proportional med $e^{-\frac{v^2}{2m^2}}$.

(34) angiver Sandsynligheden for den enkelte Fejl v. Sandsynligheden ds, for at Fejlen ligger imellem v og $v + dv$, er dels proportional med $e^{-\frac{v^2}{2m^2}}$ og dels med dv, altsaa er

$$ds = k e^{-\frac{v^2}{2m^2}} dv, \qquad (35)$$

hvor k er en Konstant, som nedenfor skal bestemmes. Sandsynligheden for, at Fejlen ligger imellem $-v$ og $+v$, er ifølge Art. 3

$$s = k \int_{-v}^{+v} e^{-\frac{v^2}{2m^2}} dv = 2k \int_0^v e^{-\frac{v^2}{2m^2}} dv. \qquad (36)$$

Sættes

$$\left.\begin{aligned} \frac{v^2}{2m^2} &= t^2, \\ \text{hvorved} & \\ v &= \sqrt{2}\, mt \\ dv &= \sqrt{2}\, mdt, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

faas ved at indsætte disse Værdier i (36)

$$s = 2\sqrt{2}\, km \int_0^t e^{-t^2} dt = 2\sqrt{2}\, km \int_0^{\frac{v}{m\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt. \tag{38}$$

Konstanten k bestemmes deraf, at til $v = \infty$ skal svare $s = 1$ (Vished). Man har altsaa

$$1 = 2\sqrt{2}\, km \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt. \tag{39}$$

Til Bestemmelse af det heri forekommende vanskelige Integral har man

$$e^{-t^2} = 1 - \frac{t^2}{1} + \frac{t^4}{1.2} - \frac{t^6}{1.2.3} + \ldots, \tag{40}$$

hvoraf faas

$$\int_0^t e^{-t^2} dt = t - \frac{1}{1}\frac{t^3}{3} + \frac{1}{1.2}\frac{t^5}{5} - \frac{1}{1.2.3}\frac{t^7}{7} + \ldots \tag{41}$$

Denne Række er konvergent for alle endelige t. Til Bestemmelse af $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$ kan den derimod vel ikke direkte bruges; men man kan dog finde dette Integral med saa stor Tilnærmelse, man vil, ved at indsætte et stort Tal for t i (41), ja endog $t = 3$ vil give stor Tilnærmelse.

Man finder paa denne Maade

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 0{,}8862 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \tag{42}$$

hvilket indsat i (39) giver

$$k = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}};$$

hvorved Formlerne (35), (36) og (38) blive

$$ds = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2m^2}} dv \tag{43}$$

og

$$s = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^v e^{-\frac{v^2}{2m^2}} dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{v}{m\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt. \quad (44)$$

(43) bestemmer Sandsynligheden, for at Fejlen ligger imellem v og $v + dv$ eller, som man kortere udtrykker det, Sandsynligheden for Fejlen v.

Den fundne Fejllov er altsaa en exponentiel Funktion af v^2 og kaldes derfor *den exponentielle Fejllov.*

9. Middelfejlen. Til Bedømmelse af en Maalings Nøjagtighed tjener Middelfejlen, hvorved forstaas den Størrelse, hvis Kvadrat er Middelværdien af samtlige Fejlkvadrater.

Er Totalfejlen v sammensat af n Partielfejl $f_1, f_2, f_3 \ldots f_n$, vil man have

$$v = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n,$$

hvoraf man danner

$$\begin{aligned} v^2 &= f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \ldots + f_n^2 + 2f_1 f_2 + 2f_1 f_3 + \ldots + 2f_{n-1} f_n \\ &= [f^2] + 2\,[f_r f_s].^{*)} \qquad (45) \end{aligned}$$

Middelværdien af v^2 findes ved i (45) for hvert Led at indføre dets Middelværdi. Er hver af Partielfejlene med samme Sandsynlighed enten $+d$ eller $-d$, bliver Middelværdien af f_r^2

$$\frac{(+d)^2 + (-d)^2}{2} = d^2,$$

medens Middelværdien af $f_r f_s$ bliver

$$\frac{(+d)(+d) + (+d)(-d) + (-d)(+d) + (-d)(-d)}{4} = 0.$$

Middelværdien af v^2 eller Middelfejlens Kvadrat er følgelig

$$nd^2$$

eller formedelst (29)

$$m^2,$$

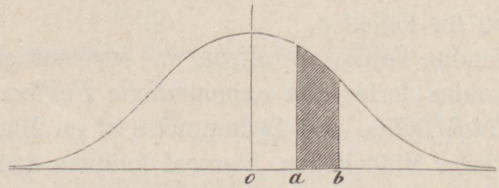
saa at den med m betegnede Konstant i Formlerne i forrige Art. betyder Middelfejlen.

10. Fejlkurven. Grafisk fremstilles Fejlloven ved Fejlkurven, som er den Kurve, hvis Ligning er

$$y = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2m^2}}, \qquad (46)$$

*) Ved en Størrelse indesluttet i [ ] betegnes Summen af alle Led af den anførte Form.

hvor v er Abscissen og y Ordinaten til Kurven. Da man af (46) kan finde Koordinaterne til ligesaa mange Punkter, man vil, kan Kurven uden Vanskelighed konstrueres. Den er fremstillet i hosstaaende Figur



Kurven er symmetrisk med Hensyn til Ordinataxen; thi v's Fortegn har ingen Indflydelse paa y. Endvidere viser (46), at y aftager, naar v voxer uden Hensyn til Fortegnet; saa at den sandsynligste Fejl er nul.

Nedenstaaende Tavle viser nærmere, hvorledes y aftager, naar v voxer.

v	y
0	$\frac{1}{m\sqrt{2\pi}} = 1 \cdot \frac{1}{m\sqrt{2\pi}}$
m	$\frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} = 0{,}607 \cdot \frac{1}{m\sqrt{2\pi}}$
$2m$	$\frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-2} = 0{,}135 \cdot \frac{1}{m\sqrt{2\pi}}$
$3m$	$\frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{2}} = 0{,}011 \cdot \frac{1}{m\sqrt{2\pi}}$
$4m$	$\frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-8} = 0{,}00034 \cdot \frac{1}{m\sqrt{2\pi}}$
∞	0.

Naar v er større end m, aftager y stærkt, naar v voxer. For $v = 4m$ er y kun $\frac{1}{3000}$ af sin Maximumsværdi.

Den exponentielle Fejllov tilfredsstiller nøjagtigt den 1ste og 3die af de i Art 8 fremsatte Betingelser; den 2den er derimod vel ikke fuldkommen tilfredsstillet; men store

v gjøre dog, som Tavlen viser, y saa lille, at ogsaa denne Betingelse kan betragtes som opfyldt.

Da Sandsynligheden, for at Fejlen ligger imellem Grændserne a og b, er

$$\frac{1}{m\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{v^2}{2m^2}} dv,$$

fremstilles denne Sandsynlighed ved det Areal, der er begrændset af Kurven, Abscisseaxen og to Ordinater svarende til Abscisserne a og b; i Figuren er det skraveret.

11. Tavle over s. Til Beregning af s tjener (44), hvor det deri forekommende Integral findes ved Hjælp af (41), idet man for t indsætter $\frac{v}{m\sqrt{2}}$. Man ser, at s kun er afhængig af *Forholdet* mellem v og m, saa at der til samme Sandsynlighed svarer desto mindre v jo mindre m er.

Resultatet af Beregningen af s svarende til forskjellige Værdier af $\frac{v}{m}$ er angivet i nedenstaaende Tavle.

$\frac{v}{m}$	s	Diff.	$1 - s$
0,1	0,080		0,920
		0,079	
0,2	0,159		0,841
		0,077	
0,3	0,236		0,764
		0,075	
0,4	0,311		0,689
		0,072	
0,5	0,383		0,617
		0,068	
0,6	0,451		0,549
		0,065	
0,7	0,516		0,484
		0,060	
0,8	0,576		0,424
		0,056	
0,9	0,632		0,368
		0,051	
1,0	0,683		0,317
		0,087	
1,2	0,770		0,230
		0,068	
1,4	0,838		0,162
		0,028	
1,5	0,866		0,134
		0,024	
1,6	0,890		0,110
		0,038	
1,8	0,928		0,072
		0,026	
2,0	0,954		0,046
		0,034	
2,5	0,988		0,012
		0,0093	
3,0	0,9973		0,0027
		0,0022	
3,5	0,9995		0,0005
		0,00044	
4,0	0,99994		0,00006
		0,00006	
∞	1		0

Denne Tavle viser, at af 1000 Fejl ere de 683 rimeligvis mindre og 317 større end Middelfejlen. Kun 46 ere større end det dobbelte af Middelfejlen; ikke 3 ere større end $3m$, og større end $3{,}5m$ er ingen

12. Den sandsynlige Fejl. Ved den sandsynlige Fejl forstaas den numeriske Grændse, indenfor hvilken og udenfor hvilken Fejlen ligger med samme Sandsynlighed, saa at man har

$$s = 1 - s,$$

der giver

$$s = \frac{1}{2}.$$

Af Tavlen i forrige Art. ses, at til $s = \frac{1}{2}$ svarer en Værdi af $\frac{v}{m}$ beliggende imellem $0{,}6$ og $0{,}7$. Ved Interpolation finder man

$$\frac{r}{m} = 0{,}675,$$

hvor r betegner den sandsynlige Fejl. Større Tavler give

$$r = 0{,}6745\ m. \tag{47}$$

Den sandsynlige Fejl er altsaa temmelig nær $^2/_3$ af Middelfejlen.

13. Den exponentielle Fejllovs Overensstemmelse med Erfaringerne. For at paavise Rigtigheden af den i Art. 8 paa Grundlag af nogle dristige Forudsætninger udviklede Fejllov har man anstillet talrige Forsøg, som stedse have bekræftet Fejllovens Rigtighed. Her skulle vi kun hidsætte følgende Exempel.

Et Areal er maalt 50 Gange med et Planimeter (Amslers); de maalte Arealer ere anførte i anden Kolonne af nedenstaaende Tavle.

Observ. Nr.	Areal o i □ Alen efter Kortet i 1:4000	v	v^2
1	217 100	1 260	1 587 600
2	215 680	160	25 600
3	216 170	330	108 900
4	216 250	410	168 100
5	215 510	330	108 900
6	215 720	120	14 400
7	215 430	410	168 100
8	216 370	530	280 900
9	215 840	0	0
10	215 760	80	6 400
11	215 230	610	372 100
12	215 310	530	280 900
13	216 170	330	108 900
14	215 760	80	6 400
15	215 510	330	108 900
16	216 090	250	62 500
17	216 860	1 020	1 040 400
18	216 050	210	44 100
19	215 720	120	14 400
20	215 590	250	62 500
21	216 250	410	168 100
22	215 640	200	40 000
23	216 210	370	136 900
24	215 590	250	62 500
25	215 230	610	372 100
26	216 130	290	84 100
27	216 290	450	202 500
28	216 290	450	202 500
29	214 950	890	792 100
30	214 990	850	722 500
31	215 590	250	62 500
32	214 260	1 580	2 496 400
33	216 450	610	372 100
34	216 570	730	532 900
35	216 130	290	84 100
36	215 760	80	6 400
37	215 880	40	1 600
38	215 310	530	280 900
39	215 430	410	168 100
40	216 410	570	324 900
41	216 050	210	44 100
42	215 680	160	25 600
43	215 880	40	1 600
44	215 310	530	280 900
45	215 720	120	14 400
46	216 860	1 020	1 040 400
47	215 190	650	422 500
48	215 190	650	422 500
49	216 130	290	84 100
50	216 330	490	240 100
Sum	10 791 820		14 259 400

Kjendte man Arealets sande Størrelse, kunde man finde de sande Fejl, som Forskjellen mellem det sande og det maalte Areal; men da det sande Areal er ubekjendt, benytter man istedet derfor Middeltallet af Observationerne, hvilket aabenbart maa ligge det meget nær. Middeltallet er

$$\frac{10\,791\,820}{50} = 215\,840.$$

Subtraheres de maalte Arealer herfra, faas Fejlene, hvilke uden Fortegn ere opførte i tredie Kolonne i Tavlen. For at finde Middelfejlen kvadrerer man samtlige Fejl og adderer disse Kvadrater, hvis Sum bliver

$$14\,259\,400,$$

saa at Middelfejlen bliver

$$m = \sqrt{\frac{14\,259\,400}{50}} = 534 \ \square \ \text{Alen.}$$

Nu er

$$\begin{aligned} 0{,}3\ m &= 160\ \square\ \text{Al.} \\ r = 0{,}6745\ m &= 360\ \text{„}\ \text{—} \\ 1\ m &= 534\ \text{„}\ \text{—} \\ 1{,}5\ m &= 801\ \text{„}\ \text{—} \\ 2\ m &= 1068\ \text{„}\ \text{—} \\ 2{,}5\ m &= 1335\ \text{„}\ \text{—} \end{aligned}$$

I tredie Kolonne i nedenstaaende Tavle er angivet det Antal Fejl, som efter Maalingerne ligge imellem disse Grændser. Det tilsvarende Antal efter den exponentielle Fejllov findes paa følgende Maade.

Ifølge Tavlen i Art. 11 er Sandsynligheden, for at Fejlen er mindre end

$$0{,}3\ m,\ r,\ m,\ 1{,}5\ m,\ 2\ m \text{ og } 2{,}5\ m,$$

henholdsvis

$$0{,}236,\ 0{,}5,\ 0{,}683,\ 0{,}866,\ 0{,}954,\ 0{,}988.$$

Multipliceres disse Tal med 50, faas det rimeligste Antal Fejl indenfor Grændserne; det bliver

$$11{,}8,\ 25{,}0,\ 34{,}2,\ 43{,}3,\ 47{,}7,\ 49{,}1.$$

Subtraheres hvert af disse Tal fra det følgende, faas Antallet af Fejl mellem de tilsvarende Grændser — efter Fejlloven.

Disse Antal ere opførte i fjerde Kolonne i hosstaaende Tavle.

Fejlenes Grændser		Antal Fejl		Forskjel
udtr. ved m og r	i □ Al.	efter Maalingerne	efter den exp. Fejllov	
$0 - 0{,}3m$	0 — 160	11	11,8	0,8
$0{,}3m - r$	160 — 360	14	13,2	0,8
$r - m$	360 — 534	12	9,2	2,8
$m - 1{,}5m$	534 — 801	7	9,1	2,1
$1{,}5m - 2m$	801 — 1068	4	4,4	0,4
$2m - 2{,}5m$	1068 — 1335	1	1,7	0,7
over $2{,}5m$	over 1335	1	0,6	0,4

Tavlen viser, at Fejlene fordele sig temmelig nøje efter den exponentielle Fejllov; den største Afvigelse findes i Intervallet fra r til m, hvor Forskjellen mellem Antallet af Fejlene er 2,8. Jo flere Observationer man anstiller, desto tydeligere vil man kunne faa Overensstemmelsen til at vise sig. Bessel har foretaget en saadan Beregning for 470 Observationer (Vinkler) og fundet Fejlenes Fordeling i god Overensstemmelse med Fejlloven.

Af disse og en Mængde andre Forsøg maa det nu betragtes som godtgjort, at Observationsfejlen kan betragtes som følgende den exponentielle Fejllov, og paa Grundlag af denne ville vi derfor i det følgende udvikle vort Udjevningsprincip.

14. Sandsynligheden for et System af Fejl paa uafhængige Observationsstørrelser. Ere Middelfejlene paa Observationsstørrelserne

$$o_1,\ o_2,\ o_3,\ \ldots\ldots\ o_n$$

henholdsvis

$$m_1,\ m_2,\ m_3,\ \ldots\ldots\ m_n,$$

vil Sandsynligheden, for at Fejlen paa o_1 er v_1, paa o_2 er v_2 . . . . . . og paa o_n er v_n ifølge Art. 4 være

$$\frac{1}{m_1 m_2 m_3 \ldots m_n (2\pi)^{\frac{n}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v_1^2}{m_1^2}+\frac{v_2^2}{m_2^2}\cdots+\frac{v_n^2}{m_n^2}\right)} dv_1\, dv_2 \ldots dv_n$$

$$= \frac{1}{m_1 m_2 \ldots m_n (2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{v^2}{m^2}\right]} dv_1 \, dv_2 \ldots dv_n$$

og altsaa proportional med

$$e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{v^2}{m^2}\right]},$$

der bliver Maximum, naar

$$\left[\frac{v^2}{m^2}\right] \text{ er Minimum,}$$

hvilket indtræffer, naar

$$v_1 = 0, \; v_2 = 0, \; v_3 = 0, \ldots\ldots \; v_n = 0.$$

Er

$$m_1 = m_2 = m_3 = \ldots = m_n = m,$$

bliver Sandsynligheden proportional med

$$e^{-\frac{[v^2]}{2m^2}},$$

som bliver Maximum, naar

$$[v^2] \text{ er Minimum.}$$

---

§ 2. Fejlen paa en Funktion af uafhængige Observationsstørrelser.

15. *Fejlen paa Funktionen udtrykt ved Fejlene paa Observationsstørrelserne.* Ere i Funktionen

$$u = F\,(o_1, o_2, o_3 \ldots o_n) \qquad (48)$$

Observationsstørrelserne $o_1, o_2, o_3 \ldots o_n$ behæftede med Fejlene $v_1, v_2, v_3 \ldots v_n$, saa vil den sande Værdi af Funktionen ikke være u, men

$$u + k = F\,(o_1 + v_1, \; o_2 + v_2, \; o_3 + v_3 \; \ldots \; o_n + v_n) \quad (49)$$

eller ifølge Taylors Formel

$$u + k = F(o_1, o_2, o_3 \ldots o_n) + A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3 + \ldots + A_n v_n, (50)$$

hvor anden og højere Potenser af v'erne ere bortkastede som forsvindende, og hvor

$$A_r = \frac{du}{do_r}.$$

Fejlen paa u er

$$k = A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3 + \ldots + A_n v_n. \qquad (51)$$

Ex. 1. I en Trekant ABC har man maalt

$$a = 2000 \text{ Alen}$$
$$b = 3000 \text{ —}$$
$$C = 60^0\ 00'.$$

Der søges Trekantens Areal T og Fejlen k herpaa udtrykt ved Fejlene v_a, v_b og v_C paa a, b og C.

Af Formlen

$$T = \frac{1}{2}\, ab \sin C$$

udledes (som Side 6 anført)

$$\frac{dT}{da} = \frac{1}{2}\, b \sin C, \quad \frac{dT}{db} = \frac{1}{2}\, a \sin C, \quad \frac{dT}{dC} = \frac{1}{2}\, ab \cos C.$$

Følgelig er

$$k = \frac{1}{2}\, b \sin C v_a + \frac{1}{2}\, a \sin C v_b + \frac{1}{2}\, ab \cos C v_C.$$

Men heri er Vinkelfejlen v_C udtrykt i Forholdsmaal; man sætter derfor istedetfor denne Størrelse $v_C \sin 1'$, hvor da v_C er udtrykt i Minutter; man faar derved

$$k = \frac{1}{2}\, b \sin C v_a + \frac{1}{2}\, a \sin C v_b + \frac{\sin 1'}{2}\, ab \cos C v_C.$$

Indføres heri ovenstaaende Værdier for a, b og C, erholdes

$$k = 1299\, v_a + 866\, v_b + 436\, v_C.$$

Stundom kan man finde A'erne ad en simplere Vej end ved Differentiation; er navnlig Funktionen logarithmisk, anvendes med Fordel de i Tavlen indeholdte Differenser til Fremstilling af A'erne. — Som Exempel herpaa anføres følgende.

Ex. 2. I en Trekant ABC har man maalt

$$a = 3215{,}7 \text{ Alen}$$
$$A = 52^0\ 30'$$
$$B = 62^0\ 30'.$$

Der søges Siden c samt Fejlen derpaa udtrykt ved Fejlene paa de observerede Størrelser.

c findes af

$$c = \frac{a \sin (A + B)}{\sin A}.$$

Kaldes Fejlene paa c, a, A og B henholdsvis k, v_a, v_A og v_B, faas

$$\log(c+k) = \log(a+v_A) + \log\sin(A+B+v_A+v_B) - \log\sin(A+v_A)$$

eller ved at indsætte de maalte Værdier

$$\log(c+k) = \log(3215{,}7 + v_a) + \log\sin(115^0\,00' + v_A + v_B) - \log\sin(52^0\,30' + v_A).$$

Lalandes Tavle giver

$$\log(3215{,}7 + v_a) = 3{,}50728 + \frac{14}{10^5}\,v_a\text{*)}$$

$$\log\sin(115^0\,00' + v_A + v_B) = 9{,}95728 - \frac{6}{10^5}\,(v_A + v_B)$$

$$\log((3215{,}7 + v_a)\sin(115^0 00' + v_A + v_B)) = 3{,}46456 + \frac{14v_a - 6v_A - 6v_B}{10^5}$$

$$\log\sin(52^0\,30' + v_A) = 9{,}89947 + \frac{10}{10^5}\,v_A$$

$$\log(c+k) = 3{,}56509 + \frac{14v_a - 16v_A - 6v_B}{10^5}$$

$$c + k = 3673{,}6 + \frac{14v_a - 16v_A - 6v_B}{12}.$$

c er altsaa funden at være $3673{,}6$ og behæftet med en Fejl

$$k = \frac{14v_a - 16v_A - 6v_B}{12} = 1{,}17v_a - 1{,}33v_A - 0{,}5\,v_B,$$

hvor v_a er udtrykt i Alen, v_A og v_B i Minutter.

Af Koefficienterne til v_A og v_B ser man, at medens en Fejl af 1′ i Vinklen A bevirker en Fejl af $1^1/_3$ Alen paa c, bevirker den samme Fejl i Vinklen B kun $^1/_2$ Alen i c. Det er derfor af særlig Vigtighed at faa Vinklen A nøjagtigt bestemt.

16. Middelfejlen paa en Funktion af uafhængige Observationsstørrelser. Ifølge forrige Art. er Fejlen paa en Funktion af n Observationsstørrelser udtrykt ved

$$k = A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3 + \ldots + A_n v_n.$$

Ved Kvadrering erholdes

$$k^2 = A^2_1 v^2_1 + A^2_2 v^2_2 + \ldots + A^2_n v^2_n + 2A_1 A_2 v_1 v_2 + \ldots + 2A_{n-1} A_n v_{n-1} v_n. \qquad (52)$$

---

*) Da Differensen i Tavlen er 14 eller rettere $\frac{14}{10^5}$, vil nemlig til en Tilvæxt v_a i Tallet svare en Tilvæxt $\frac{14}{10^5}\,v_a$ i Logarithmen. I Praxis er det ikke nødvendigt at nedskrive Nævneren 10^5.

Middelværdien μ^2 af k^2 ɔ: Middelfejlens Kvadrat, vil erholdes ved istedetfor hvert Led i (52) at sætte dets Middelværdi. Er

$$m_1,\ m_2,\ m_3,\ \ldots\ m_n$$

Middelfejlene paa

$$o_1,\ o_2,\ o_3,\ \ldots\ o_n,$$

saa vil Middelværdien af

$$A_1^2 v_1^2,\ A_2^2 v_2^2,\ A_3^2 v_3^2,\ \ldots\ A_n^2 v_n^2$$

henholdsvis være

$$A_1^2 m_1^2,\ A_2^2 m_2^2,\ A_3^2 m_3^2,\ \ldots\ A_n^2 m_n^2,$$

medens Middelværdien af $2A_1 A_2 v_1 v_2$ maa være nul; thi da v_1 og v_2 ere uafhængige af hinanden og med samme Sandsynlighed kunne tillægges en positiv som den tilsvarende negative Værdi, maa ogsaa Leddet $2A_1 A_2 v_1 v_2$ med samme Sandsynlighed have ligestore Værdier med modsatte Tegn, og følgelig maa Summen af alle Værdierne for Leddet være lig nul, saa at Middelværdien bliver nul. Det samme gjælder om hvert af de følgende Led, saa at man har

$$\mu^2 = A_1^2 m_1^2 + A_2^2 m_2^2 + \ldots + A_n^2 m_n^2 = [A^2 m^2], \qquad (53)$$

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \sqrt{A_1^2 m_1^2 + A_2^2 m_2^2 + \ldots + A_n^2 m_n^2} = \sqrt{[A^2 m^2]} \\ &\text{eller} \\ \mu &= \sqrt{\left(\frac{du}{do_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{du}{do_2}\right)^2 m_2^2 + \ldots + \left(\frac{du}{do_n}\right)^2 m_n^2} \\ &= \sqrt{\left[\left(\frac{du}{do}\, m\right)^2\right]}. \end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

Ex. 1. Er i Exempel 1 i forrige Art. Middelfejlen i a 0,18, i b 0,22 og i C 0',25, vil Middalfejlen μ i Trekantens Areal være bestemt ved

$$\mu^2 = (1299 \,.\, 0{,}18)^2 + (866 \,.\, 0{,}22)^2 + (436 \,.\, 0{,}25)^2$$
$$= 54670 + 36300 + 11880 = 102850,$$

saa at

$$\mu = 321 \ \square \ \text{Alen}.$$

Ex. 2. Er

$$u = \pm o_1 \pm o_2 \pm o_3 \pm \ldots \pm o_n,$$

og ere Middelfejlene paa o'erne

$$m_1,\ m_2,\ m_3,\ \ldots\ m_n,$$

bliver Middelfejlen paa u

$$\mu = \sqrt{m^2_1 + m^2_2 + \ldots + m^2_n}.$$

Er $m_1 = m_2 = m_3 = \ldots = m_n = m$, bliver

$$\mu = m\sqrt{n}.$$

Ex. 3. To Punkter ere bestemte ved deres retvinklede Koordinater x_1, y_1 og x_2, y_2, hvis Middelfejl ere m_{x1}, m_{y1}, m_{x2} og m_{y2}. Der søges Middelfejlen i Punkternes Afstand u.

Man har

$$u = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

og naar Fejlene i u, x_1, y_1, x_2 og y_2 betegnes henholdsvis ved k, v_{x1}, v_{y1}, v_{x2} og v_{y2}, haves endvidere

$$u + k = \sqrt{(x_1 - x_2 + v_{x1} - v_{x2})^2 + (y_1 - y_2 + v_{y1} - v_{y2})^2}$$

$$= \sqrt{\begin{array}{l}(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)v_{x1} - 2(x_1 - x_2)v_{x2} \\ \quad + 2(y_1 - y_2)v_{y1} - 2(y_1 - y_2)v_{y2}\end{array}}$$

$$u + k = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$+ \frac{(x_1 - x_2)v_{x1} - (x_1 - x_2)v_{x2} + (y_1 - y_2)v_{y1} - (y_1 - y_2)v_{y2}}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}},$$

hvor anden og højere Potenser af v'erne ere udeladte, og hvor Kvadratroden er udviklet i Række (jfr. Steen. Ren Math. Art. 116).

Den søgte Middelfejl bliver

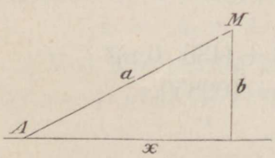
$$\mu = \sqrt{\frac{(x_1 - x_2)^2(m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2) + (y_1 - y_2)^2(m_{y_1}^2 + m_{y_2}^2)}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

Er

$$m_{x1} = m_{x2} = m_{y1} = m_{y2} = m,$$

faas

$$\mu = m\sqrt{2}.$$



Ex. 4. Har man til Bestemmelse af Punktet M's retvinklede Koordinater x og y (se hosstaaende Figur) maalt Punktets Afstand fra Abscisseaxen (Ordinaten) og fra Koordinatsystemets Begyndelsespunkt A*), og ere de ved Maalingen

*) Opgaven finder Anvendelse ved Prøve af Kort efter den af Professor L. Oppermann angivne Methode. (Tidsskrift for Krigsvæsenet 1858).

fundne Værdier for disse Afstande henholdsvis b og a, begge maalte med en Middelfejl m, vil man med sædvanlige Betegnelser have

$$x^2 = a^2 - b^2$$

$$(x + k)^2 = (a + v_a)^2 - (b + v_b)^2$$

$$x^2 + 2xk = a^2 + 2av_a - b^2 - 2bv_b,$$

hvoraf

$$k = \frac{a}{x} v_a - \frac{b}{x} v_b,$$

saa at Middelfejlen paa x bliver

$$\mu_x = \sqrt{\frac{a^2}{x^2} m^2 + \frac{b^2}{x^2} m^2} = m \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}},$$

medens Middelfejlen paa y er m, da

$$y = b.$$

Er $\frac{a}{b} = 1$, bliver $x = 0$, $\mu_x = \infty . m$, d. v. s. den i dette Exempel anvendte Methode at bestemme x paa er ubrugelig, naar Abscissen er nul.

Er $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$, bliver $\mu_x = 1{,}6\ m$

— $\frac{a}{b} = 2$ — $\mu_x = 1{,}3\ m$

— $\frac{a}{b} = 2^1/_2$ — $\mu_x = 1{,}2\ m$

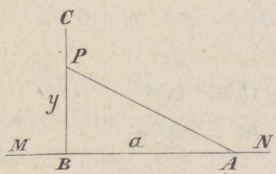
— $\frac{a}{b} = 3$ — $\mu_x = 1{,}1\ m$

— $\frac{a}{b} = 4$ — $\mu_x = 1{,}06\ m.$

Man ser heraf, at Afstanden fra A maa være mindst dobbelt saa stor som Ordinaten for at faa Abscissen nøjagtigt bestemt.

Den Vej, som her er fulgt til Fremstilling af k som Funktion af v_a og v_b, er ofte fordelagtig; den kunde f. Ex.

med Fordel have været anvendt ved Løsningen af forrige Opgave.



Ex. 5. Punktet P — se hosstaaende Figur — ligger nøjagtigt i Perpendikulæren $B\ C$ paa en ret Linie $M\,N$. For at bestemme P's Afstand y fra Linien har man fra et Punkt A i denne maalt Vinklen $B\,A\,P = A$ med en Middelfejl m. Distancen $B\,A = a$ antages ikke at være behæftet med Fejl. Der spørges om, hvor man skal vælge Punktet A for at opnaa den nøjagtigste Bestemmelse af y, samt om y's Middelfejl i dette Tilfælde.

Man har

$$y = a\ tg\ A,$$

hvoraf findes ved Differentiation

$$\frac{dy}{dA} = a\,(1 + tg^2\ A) = \frac{a}{\cos^2 A}.$$

Middelfejlen μ paa y bliver

$$\mu = \frac{am}{\cos^2 A}$$

eller, da

$$a = y \cot A,$$

$$\mu = \frac{2ym}{\sin 2\,A}.$$

μ bliver Minimum (y konstant), naar

$$\sin 2\ A = 1$$
$$A = 45^0.$$

Den nøjagtigste Bestemmelse af y erholdes altsaa ved at vælge Punktet A i en Afstand y fra Perpendikulærens Fodpunkt.

Middelfejlen bliver i dette Tilfælde

$$\mu = 2\ ym,$$

hvor m er udtrykt i Forholdsmaal; er den derimod angivet i Minutter, faas

$$\mu = 2\,ym \sin 1'.$$

17. Fejlloven. Enhver Funktion af Observationsstørrelser er den exponentielle Fejllov underkastet. Det samme Raisonnement, som vi anvendte i Art. 8, lader sig nemlig anvende her med saa meget mere Ret, som her ere flere Fejlkilder tilstede.

Tredie Kapitel.

Afhængige Observationsstørrelser.

§ 1. Udjevningsprincippet.

18. Sandsynligheden for et System af Fejl paa afhængige Observationsstørrelser. Udjevningsprincippet. Det er allerede ovenfor omtalt, at, naar man har anstillet flere Observationer, end en foreliggende Opgave nødvendigt kræver, maa der være en Afhængighed tilstede imellem Observationsstørrelserne, og disse komme paa Grund af de tilfældige Fejl i Strid med hverandre. Har man f. Ex. maalt alle tre Vinkler i en plan Trekant, saa vil Afhængigheden bestaa i, at Summen af Vinklerne skal være 180^{0}. Denne Betingelse vil kun undtagelsesvis være nøjagtigt opfyldt, og Vinkelsummen bliver ikke 180^{0}, men

$$180^{0} - d,$$

hvor d er en lille Størrelse. Kaldes Fejlene paa Vinklerne v_A, v_B og v_C, maa man have

$$v_A + v_B + v_C = d. \qquad (a)$$

Da de to af Fejlene i (a) kunne vælges vilkaarligt, uden at (a) ophører at være tilfredsstillet, gives der uendelig mange Systemer af Fejl, der fyldestgjøre Afhængighedsfordringen; men disse Systemer ere ikke lige sandsynlige.

Ifølge Art. 7 er Sandsynligheden, for at en indtruffen Begivenhed (at Summen af Fejlene er d) skyldes enhver af dens mulige Aarsager (de forskjellige Fejlsystemer) proportional med Sandsynligheden for Begivenhedens Indtræffen formedelst disse Aarsager. Altsaa er Sandsynligheden for et Fejlsystem af afhængige Observationsstørrelser proportional med den Sandsynlighed, som Fejlsystemet vilde have, hvis Observationsstørrelserne vare uafhængige, og altsaa ifølge Art. 14 proportional med

$$e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{v^2}{m^2}\right]}. \tag{55}$$

Den her nævnte Sætning gjælder uden Hensyn til, hvormange Betingelser Observationsstørrelserne skulle tilfredsstille, eller hvilken Form Afhængighedsfordringen har.

Det sandsynligste Fejlsystem er ifølge (55) det, der gjør

$$\left[\frac{v^2}{m^2}\right]$$

til Minimum; eller specielt, hvis alle Observationsstørrelser have samme Middelfejl, det, der gjør

$$[v^2]$$

til Minimum.

Det sandsynligste System af Fejl paa lige nøjagtige Observationsstørrelser er altsaa det, der gjør Summen af Fejlkvadraterne til Minimum. Den Udjevning, der støtter sig paa denne Sætning, kaldes „de mindste Kvadraters Methode“.

Have Observationsstørrelserne ikke samme Middelfejl, skal

$$\left[\frac{v^2}{m^2}\right] = \frac{v_1^2}{m_1^2} + \frac{v_2^2}{m_2^2} + \frac{v_3^2}{m_3^2} + \ldots + \frac{v_n^2}{m_n^2} \tag{56}$$

være Minimum. Man sætter

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{m_1^2} = \dfrac{p_1}{m^2}, \quad \dfrac{1}{m_2^2} = \dfrac{p_2}{m^2}, \ldots \dfrac{1}{m_n^2} = \dfrac{p_n}{m^2}, \\ \text{saa at} \\ p_1 m_1^2 = p_2 m_2^2 = p_3 m_3^2 = \ldots = p_n m_n^2 = m^2. \end{array}\right\} \tag{57}$$

Størrelserne p, der ere omvendt proportionale med Middelfejlenes Kvadrater, kaldes *Vægtene*. m er Middelfejlen paa Vægtenheden; thi til $p_r = 1$ svarer $m_r = m$

Indføres Vægtene i (56), faas

$$\left[\frac{v^2}{m^2}\right] = \frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \ldots p_n v_n^2}{m^2} = \frac{[pv^2]}{m^2}, \tag{58}$$

saa at

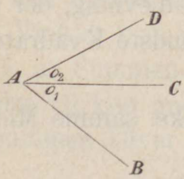
$$[pv^2]$$

skal være Minimum.

Det sandsynligste Fejlsystem er altsaa det, der gjør Summen af Produkterne af Fejlkvadraterne og de tilsvarende Vægte mindst mulig.

Anm. Da det nys fundne Princip for Udjevningen er støttet paa den i Art. 4 fremsatte Sætning, hvis Anvendelse fordrer, at Begivenhederne ere uafhængige af hverandre, maa det her forlanges, at Fejlene paa Observationsstørrelserne ere uafhængige af hverandre. Dette kan man vel stedse forudsætte, forsaavidt angaar de tilfældige Fejl, om hvilke her kun er Tale, naar samtlige Observationer ere anstillede uafhængige af hverandre. Derimod holder Forudsætningen kun undtagelsesvis Stik, naar man af selve Observationerne beregner visse Funktioner af disse og betragter dem som Observationsstørrelser.

Ere f. Fx. i hosstaaende Figur Vinklerne o_1 og o_2 maalte hver for sig, maa deres Fejl være uafhængige af hinanden, og Vinklerne kunne betragtes som Observationsstørrelser, selv om de ere dannede som Differensen af to observerede Størrelser (o_1 som Aflæsningen for Sigtet til B minus Aflæsningen for Sigtet til C). Ere Vinklerne derimod maalte under et, ved Satsmaaling, ville Fejlene være afhængige af hinanden; thi en Fejl i Sigtet AC indvirker baade paa o_1 og o_2, og Sandsynligheden for en Fejl v_1 paa o_1 vil derfor være afhængig af Fejlen paa o_2. Saadanne Vinkler kunne derfor ikke betragtes som Observationsstørrelser, naar man vil foretage en streng Udjevning efter de mindste Kvadraters Methode. Herom nærmere nedenfor i § 5.



§ 2. Den sandsynligste Værdi af en flere Gange maalt Størrelse.

A. *Maalingerne ere alle udførte med samme Nøjagtighed.*

19. Bestemmelse af den sandsynligste Værdi for Observationsstørrelsen. Antages Størrelsen x at være maalt n Gange, og ere de maalte Værdier

$$o_1,\ o_2,\ o_3\ .\ .\ .\ o_n,$$

saa ville Fejlene være

$$v_1 = x - o_1,\ v_2 = x - o_2,\ v_3 = x - o_3, \ldots v_n = x - o_n, \tag{59}$$

hvoraf

$$[v^2] = (x - o_1)^2 + (x - o_2)^2 + \ldots + (x - o_n)^2 \tag{60}$$

$$[v^2] = nx^2 - 2\,[o]\,x + [o^2]. \tag{61}$$

Ifølge Sætningen i forrige Art. skal $[v^2]$ være Minimum, følgelig maa

$$\frac{d\,.\,[v^2]}{dx} = 2nx - 2\,[o] = 0, \tag{62}$$

hvoraf

$$x = \frac{[o]}{n} = \frac{o_1 + o_2 + o_3 + \ldots + o_n}{n}. \tag{63}$$

Den sandsynligste Værdi af en flere Gange med samme Nøjagtighed maalt Størrelse er altsaa det arithmetiske Middeltal af Observationsstørrelserne.

Af (59) og (62) faas

$$[v] = nx - [o] = 0, \tag{64}$$

saa at Summen af de sandsynligste Fejl er lig nul.

Indsættes $x = \dfrac{[o]}{n}$ i (61), faas

$$[v^2] = [o^2] - \frac{[o]^2}{n}. \tag{65}$$

20. Middeltallets Nøjagtighed bedømmes ved dets Middelfejl μ, som bestemmes ved at anvende Formel (54) paa (63)*).

---

*) Rigtigheden af Formel (54) er rigtignok i dette Skrift kun bevist for Funktioner af uafhængige Observationsstørrelser; men en nøjere Undersøgelse vil vise, at Formlen ogsaa kan bruges til at bestemme Middelfejlen paa den sandsynligste Værdi af en Funktion af afhængige Observationsstørrelser.

Man finder

$$\left.\begin{aligned}\mu^2 &= \frac{m^2}{n}\\ \mu &= \frac{m}{\sqrt{n}}\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Sammenholdes dette Udtryk med (57), ses, at Middeltallet af n Observationer af Vægten 1 har Vægten n. Omvendt kan en Observationsstørrelse af Vægten p betragtes som Middeltallet af p Observationer af Vægten 1.

21. Middelfejlen paa de observerede Værdier.

I Modsætning til de sandsynligste Fejl v_1, v_2 . . . v_n ville vi for de *sande* Fejl benytte Betegnelserne

$$u_1,\ u_2,\ u_3\ .\ .\ .\ u_n.$$

Middelfejlen m bliver

$$m = \sqrt{\frac{[u^2]}{n}}; \tag{67}$$

men da man ikke kjender u'erne, søger man et Udtryk for m ved v'erne.

Er x_0 Fejlen paa x, bliver dennes sande Værdi

$$X = x + x_0.$$

Subtraheres o_r herfra, faas

$$u_r = v_r + x_0,$$

hvoraf

$$u_r^2 = v_r^2 + 2v_r x_0 + x_0^2.$$

Lader man heri r gjennemløbe samtlige Værdier fra 1 til n og adderer, faas

$$[u^2] = [v^2] + 2\,[v]\,x_0 + nx_0^2 = [v^2] + nx_0^2.$$

Da man ikke kjender x_0^2, maa man lade sig nøje med dens Middelværdi, som ifølge (66) er $\frac{m^2}{n}$. Indsættes fremdeles nm^2 istedetfor $[u^2]$, faas

$$nm^2 = [v^2] + m^2,$$

der giver

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}. \tag{68}$$

Middelfejlen paa Middeltallet bliver

$$\mu = \sqrt{\frac{[v^2]}{n\,(n-1)}}. \qquad (69)$$

22. *Exempel* En Vinkel er maalt 8 Gange med samme Instrument. De maalte Værdier ere angivne i nedenstaaende Tavle.

Nr.	Maalt Vinkel o		Fejl v		v^2
	°	′		′	
1	16	45,7	+	0,1	0,01
2		45,8		0,0	0,00
3		45,8		0,0	0,00
4		45,9	—	0,1	0,01
5		45,4	+	0,4	0,16
6		45,7	+	0,1	0,01
7		46,3	—	0,5	0,25
8		45,7	+	0,1	0,01
Sum		366,3	+	0,1	0,45

$$\text{Middeltallet er } 16^0 + \frac{366{,}3}{8} = 16^0\ 45'{,}8.$$

Trækkes hvert enkelt o herfra, findes Fejlen, som er opført i Tavlens tredie Kolonne. Som Prøve paa Regningens Rigtighed har man $[v] = 0$: den ringe Uoverensstemmelse hidrører fra Afrundingen af Middeltallet. Efterat Fejlene ere kvadrerede, finder man Middelfejlen

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}45}{7}} = 0'{,}25.$$

Middelfejlen paa Middeltallet bliver

$$\mu = \frac{0'{,}25}{\sqrt{8}} = 0'{,}09.$$

B. *Maalingerne ere udførte med forskjellig Nøjagtighed.*

23. *Den sandsynligste Værdi for Observationsstørrelsen.* Størrelsen x antages at være maalt n Gange og de maalte Værdier

$$o_1,\ o_2,\ o_3,\ \ldots\ldots\ o_n$$

at have Middelfejlene

$$m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots m_n$$

og Vægtene

$$p_1 = \frac{m^2}{m_1^2},\ p_2 = \frac{m^2}{m_2^2},\ p_3 = \frac{m^2}{m_3^2}, \ldots\ldots p_n = \frac{m^2}{m_n^2}.$$

Fejlene ere

$$v_1 = x - o_1,\ v_2 = x - o_2, \ldots\ldots v_n = x - o_n. \quad (70)$$

Man faar

$$[pv^2] = p_1 (x - o_1)^2 + p_2 (x - o_2)^2 + \ldots + p_n (x - o_n)^2$$

$$[pv^2] = [p]\, x^2 - 2\,[po]\, x + [po^2]. \quad (71)$$

Ifølge Art. 18 skal $[pv^2]$ være Minimum; altsaa maa

$$\frac{d.\,[pv^2]}{dx} = 2\,[p]\, x - 2\,[po] = 0, \quad (72)$$

der giver

$$x = \frac{[po]}{[p]} = \frac{p_1\, o_1 + p_2\, o_2 + p_3\, o_3 \ldots + p_n\, o_n}{p_1 + p_2 + p_3 \ldots + p_n}. \quad (73)$$

Af (70) og (72) faas

$$[pv] = [p]\, x - [po] = 0 \quad (74)$$

Indsættes $x = \frac{[po]}{[p]}$ i (71), faas

$$[pv^2] = [po^2] - \frac{[po]^2}{[p]}. \quad (75)$$

Disse to Formler (74) og (75) benyttes som Kontrol for Regningen.

24. Nøjagtigheden af den sandsynligste Værdi. Anvendes Formel (53) paa (73), som kan skrives saaledes

$$x = \frac{p_1}{[p]}\, o_1 + \frac{p_2}{[p]}\, o_2 + \frac{p_3}{[p]}\, o_3 + \ldots\ldots + \frac{p_n}{[p]}\, o_n,$$

findes Middelfejlen paa x. Man faar

$$\mu^2 = \frac{p_1^2}{[p]^2}\, m_1^2 + \frac{p_2^2}{[p]^2}\, m_2^2 + \frac{p_3^2}{[p]^2}\, m_3^2 + \ldots + \frac{p_n^2}{[p]^2}\, m_n^2$$

eller formedelst (57)

$$\mu^2 = \frac{p_1\, m^2}{[p]^2} + \frac{p_2 m^2}{[p]^2} + \frac{p_3 m^2}{[p]^2} + \ldots + \frac{p_n m^2}{[p]^2} = \frac{m^2}{[p]},$$

hvoraf

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{[p]}}. \tag{76}$$

Vægten bliver

$$\frac{m^2}{\mu^2} = [p]. \tag{77}$$

Vægten paa x er altsaa Summen af Vægtene paa o'erne.

25. *Middelfejlen paa Vægtenheden.* Sandsynligheden, for at Fejlene (de sande) have Værdierne u_1, u_2, u_3 .... u_n, er ifølge Art. 14 og 18 proportional med

$$\frac{1}{m_1\, m_2\, m_3\, \ldots\ldots\, m_n}\, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{u^2}{m^2}\right]}$$

eller med

$$\frac{1}{m^n}\, e^{-\frac{[pu^2]}{2m^2}}. \tag{78}$$

Vi antage nu, at u'erne ere bekjendte, men at m er ubekjendt. Til forskjellige Værdier af m svare forskjellige Sandsynligheder. Sandsynligheden for enhver af disse m er ifølge Art. 7 proportional med den dertil svarende Værdi af (78); følgelig er den sandsynligste Værdi af m den, der gjør (78) og altsaa tillige dens naturlige Logarithme

$$-\, n\, l\, m - \frac{[pu^2]}{2m^2}$$

til Maximum; dette bestemmes (ved Differentiation m. H. t. m) af

$$-\frac{n}{m} + \frac{[pu^2]}{m^3} = 0,$$

der giver

$$\left.\begin{aligned} m^2 &= \frac{[pu^2]}{n} \\ m &= \sqrt{\frac{[pu^2]}{n}}, \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

hvori (67) er indbefattet for samtlige p lig 1.

Man har — jfr. Art. (21) —

$$u_r^2 = v_r^2 + 2v_r x_o + x_o^2$$

$$p_r u_r^2 = p_r v_r^2 + 2p_r v_r x_o + p_r x_o^2$$

og altsaa

$$[pu^2] = [pv^2] + 2\,[pv]\, x_o + [p]\, x_o^2.$$

Ombytte vi $[pu^2]$ med nm^2 og $[p]\, x_0{}^2$ med dets Middelværdi bestemt ved (76) m^2, faas, idet $[pv] = 0$ (74),

$$nm^2 = [pv^2] + m^2,$$

der giver

$$\left.\begin{aligned} m^2 &= \frac{[pv^2]}{n-1} \\ m &= \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}. \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Middelfejlen paa Middeltallet bliver

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{[p](n-1)}}. \tag{81}$$

26. Exempel. En Vinkel er maalt 3 Gange. De maalte Værdier, hvis Vægte ere 1, 2 og 4, ere opførte i hosstaaende Tavle.

Vægt p	Maalt Vinkel o		po	po^2	v	pv	v^2	pv^2
	°	'						
1	55	20,5	0,5	0,25	+ 0,34	+ 0,34	0,1156	0,1156
2		21,1	2,2	2,42	− 0,26	− 0,52	0,0676	0,1352
4		20,8	3,2	2,56	+ 0,04	+ 0,16	0,0016	0,0064
Sum			5,9	5,23		− 0,02		0,2572

Den sandsynligste Værdi for Vinklen er

$$x = 55^0\ 20 + \frac{5,9}{7} = 55^0\ 20',84.$$

v findes som Forskjellen mellem x og o. Prøven $[pv] = 0$ stemmer paa 0,02 nær. Endvidere har man som Kontrol for Regningen

$$[pv^2] = [po^2] - \frac{[po]^2}{[p]} = 5,23 - \frac{5,9^2}{7} = 0,2571,$$

der stemmer tilfredsstillende med ovenstaaende Værdi. Middelfejlen paa Vægtenheden er

$$m = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,2572}{2}} = o',36,$$

og Middelfejlen paa Middeltallet er

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{[p]}} = \frac{0{,}36}{\sqrt{7}} = 0',14.$$

Da her kun er tre Observationer til Bestemmelse af Middelfejlen, er denne temmelig usikker. —

27. *Observationsstørrelsernes Vægte.* Ere *o*'erne ikke direkte observerede Værdier, men Middeltal af flere lige nøjagtige Observationer, saa vil Antallet af disse angive Vægten.

o'erne kunne have forskjellige Vægte, fordi man har anvendt forskjellige og ulige nøjagtige Instrumenter ved Maalingen. Man skaffer sig i dette Tilfælde Oplysning om den Middelfejl, man erholder ved Brugen af hvert af disse Instrumenter, f. Ex. ved at maale en Størrelse flere Gange og bestemme Middelfejlen paa den Maade, som er vist i Art. 22. Derefter beregnes Vægten ved (57), efterat man har valgt en Værdi for m, helst saaledes, at saa mange Observationsstørrelser som muligt faa Vægten en.

Er det ikke, som i det foregaaende, den samme, men forskjellige Størrelser, der ere maalte, er Vægten ofte afhængig af dem. Ved Længdemaaling f. Ex. er — alt andet lige — Vægten omvendt proportional med den maalte Længde.

Ere Observationsstørrelserne af forskjellig Art, som f. Ex. Længder og Vinkler, ville de i Almindelighed ikke have samme Vægte; disse bestemmes af Middelfejlene, hver udtrykt i sin Enhed.

Endelig kunne Observationerne være udførte under ulige gunstige Omstændigheder, hidrørende fra Vejrligets Indflydelse eller lignende. Ved Længdemaaling afhænger Nøjagtigheden af Jordoverfladens Beskaffenhed (Grønjord, Stubjord eller Pløjejord) og Form (bakket eller fladt). I saadanne Tilfælde er det vanskeligt at bestemme Vægten; ofte nøjes man med et Skjøn.

§ 3. Elementudjevning.

28. *De sandsynligste Værdier for Elementerne, naar Observationerne ere lige nøjagtige.*

Afhængigheden mellem Observationsstørrelserne

$$o_1,\ o_2,\ o_3,\ \ldots\ o_n$$

kan være givet under en saadan Form, at hver af o'erne er udtrykt som Funktion af visse Størrelser X, Y, Z . . ., e i Antal. Man har i saa Fald n Ligninger — kaldede *Fundamentalligninger*, nemlig:

$$\left.\begin{aligned} o_1 &= F_1(X,\ Y,\ Z\ \ldots) \\ o_2 &= F_2(X,\ Y,\ Z\ \ldots) \\ o_3 &= F_3(X,\ Y,\ Z\ \ldots) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ o_n &= F_n(X,\ Y,\ Z\ \ldots) \end{aligned}\right\} \quad (82)$$

Størrelserne X, Y, Z . . . kaldes Elementer, og den i denne § omhandlede Udjevning Elementudjevning.

Er $e > n$, er Opgaven ubestemt.

Er $e = n$, har man netop det nødvendige Antal Ligninger til Bestemmelse af X, Y, Z . . ., men der er ingen Overbestemmelse, og Observationsstørrelserne ere altsaa uafhængige af hverandre. Er $e < n$, bliver Opgaven overbestemt; thi man behøvede kun at have observeret e Størrelser. Antallet af Overbestemmelser er altsaa $n - e$. Paa Grund af de tilfældige Fejl vil der i Almindelighed ikke gives nogen Værdi for Elementerne, der nøjagtigt tilfredsstiller alle de n Ligninger; men vi ville søge de sandsynligste Værdier for dem.

Ere Fundamentalligningerne ikke paa lineær Form, bringes de dertil paa følgende Maade. Man søger først tilnærmende Værdier for Elementerne, hvilket f. Ex. kan ske ved at udvælge e af Ligningerne (82) og bestemme X, Y, Z... af dem. Kaldes disse Tilnærmelsesværdier

$$X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ \ldots$$

og deres Fejl

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,$$

og tillægges o'erne Fejlene

$$v_1,\ v_2,\ v_3\ .\ .\ .\ v_n,$$

saa haves ifølge Taylors Formel

$$\begin{aligned}
o_1 + v_1 &= F_1\,(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ .\ .\ .) + a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ .\ .\ . \\
o_2 + v_2 &= F_2\,(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ .\ .\ .) + a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ .\ .\ . \\
o_3 + v_3 &= F_3\,(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ .\ .\ .) + a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ .\ .\ . \\
&.\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ . \\
&.\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ . \\
o_n + v_n &= F_n\,(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ .\ .\ .) + a_n x + b_n y + c_n z + \ .\ .\ .,
\end{aligned}$$

hvor

$$a_r = \frac{d\,.\,F_r(X_0, Y_0, Z_0\ldots)}{dX_0},\ b_r = \frac{d\,.\,F_r(X_0, Y_0, Z_0\ldots)}{dY_0},\ \text{o.s.v.}$$

Sætte vi fremdeles

$$\left.\begin{aligned}
F_1\,(X_0,\ Y_0,\ Z_0\ .\ .\ .) - o_1 &= l_1 \\
F_2\,(X_0,\ Y_0,\ Z_0\ .\ .\ .) - o_2 &= l_2 \\
F_3\,(X_0,\ Y_0,\ Z_0\ .\ .\ .) - o_3 &= l_3 \\
.\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ . & \\
.\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ . & \\
F_n\,(X_0,\ Y_0,\ Z_0\ .\ .\ .) - o_n &= l_n,
\end{aligned}\right\} \quad (83)$$

faas følgende n Ligninger, der benævnes *de lineære Betingelsesligninger*:

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= l_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ .\ .\ . \\
v_2 &= l_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ .\ .\ . \\
v_3 &= l_3 + a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ .\ .\ . \\
&.\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ . \\
&.\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ . \\
v_n &= l_n + a_n x + b_n y + c_n z + \ .\ .\ .
\end{aligned}\right\} \quad (84).$$

Størrelserne x, y, z . ., som træde istedetfor X, Y, Z . . ., ville vi i det følgende ogsaa kalde Elementer.

Ved Kvadrering af den r'te Betingelsesligning erholdes

$$v_r^2 = a_r^2 x^2 + 2(a_r l_r + a_r b_r y + a_r c_r z + ..)x + (l_r + b_r y + c_r z + ..)^2. \quad (85)$$

Lader man heri r gjennemløbe alle Værdier fra 1 til n og adderer disse Fejlkvadrater, faas

$$[v^2] = [a^2]x^2 + 2([al] + [ab]y + [ac]z + ..)x + [(l + by + cz + ..)^2]. \quad (86)$$

Den Værdi af x, der gjør $[v^2]$ til Minimum, bestemmes af

$$\frac{d.[v^2]}{dx} = 2\,[a^2]\,x + 2\,[al] + 2\,[ab]\,y + 2\,[ac]\,z + \ldots = 0$$

eller

$$[al] + [a^2]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + \ldots = 0.$$

Analogt hermed vil den Værdi af y, der gjør $[v^2]$ til Minimum, bestemmes af

$$[bl] + [ab]\,x + [b^2]\,y + [bc]\,z + \ldots = 0$$

og saaledes videre, saa at man i alt faar følgende e Ligninger til Bestemmelse af de Værdier af Elementerne, der bringe $[v^2]$ til det absolute Minimum.

$$\left.\begin{array}{l} [al] + [a^2]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + \ldots = 0 \\ [bl] + [ab]\,x + [b^2]\,y + [bc]\,z + \ldots = 0 \\ [cl] + [ac]\,x + [bc]\,y + [c^2]\,z + \ldots = 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array}\right\} \qquad (87)$$

Disse Ligninger, der kaldes *Normalligningerne*, ville ved at opløses give de sandsynligste Værdier for Elementerne. Indsættes disse i Betingelsesligningerne (84), findes de sandsynligste Fejl, som tillagte o'erne give de fordelagtigste Værdier for Observationsstørrelserne.

29. Observationsstørrelserne have forskjellige Vægte.

Vi antage, at Observationsstørrelserne

$$o_1,\ o_2,\ o_3,\ \ldots\ o_n$$

henholdsvis have Vægtene

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots\ p_n.$$

Multipliceres (85) med p_r, faas

$$p_r v_r^2 = p_r a_r^2 x^2 + 2\,(p_r a_r l_r + p_r a_r b_r y + p_r a_r c_r z + \ldots)\,x$$
$$+ p_r\,(l_r + b_r y + c_r z + \ldots)^2. \qquad (88)$$

Lader man heri r gjennemløbe alle Værdier fra 1 til n og adderer, erholdes

$$[pv^2] = [pa^2]\,x^2 + 2\,([pal] + [pab]\,y + [pac]\,z + \ldots)\,x$$
$$+ [p\,(l + by + cz + \ldots)^2]. \qquad (89)$$

Til Bestemmelse af Minimum for $[pv^2]$ haves

$$\frac{d.[pv^2]}{dx} = 2\,[pa^2]\,x + 2\,[pal] + 2\,[pab]\,y + 2\,[pac]\,z + \ldots = 0.$$

Ved Differentiation m. H. t. y, z .... faas $e-1$ andre Ligninger, saa at man ialt faar e Normalligninger:

$$\left.\begin{aligned}
&[pal]+[pa^2]x+[pab]y+[pac]z+\ldots=0\\
&[pbl]+[pab]x+[pb^2]y+[pbc]z+\ldots=0\\
&[pcl]+[pac]x+[pbc]y+[pc^2]z+\ldots=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (90).$$

Vedtager man, at

$$[a^2],\quad [ab],\ldots [al]\ldots,$$

naar Observationsstørrelserne have forskjellige Vægte, ikke længere betegne

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2,\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a^nb^n,\ldots$$
$$a_1l_1+a_2l_2+a_3l_3+\ldots+a_nl_n\ldots,$$

men

$$p_1a_1^2+p_2a_2^2+p_3a_3^2+\ldots+p_na_n^2,\ p_1a_1b_1+p_2a_2b_2+p_3a_3b_3+\ldots$$
$$+p_na_nb_n\ldots,\ p_1a_1l_1+p_2a_2l_2+p_3a_3l_3+\ldots+p_na_nl_n\ldots,$$

saa bliver (87) tillige Normalligningerne, naar Observationsstørrelserne ere ulige nøjagtige.

30. Regningens Udførelse. Af (84) og (87) erholdes

$$\left.\begin{aligned}
&[av]=[al]+[a^2]x+[ab]y+[ac]z+\ldots=0\\
&[bv]=0,\ [cv]=0,\ \text{o. s. v.}
\end{aligned}\right\} \quad (91)$$

eller, hvis Observationsstørrelserne have forskjellige Vægte,

$$[pav]=0,\ [pbv]=0,\ [pcv]=0,\ \text{o. s. v.} \quad (92)$$

Normalligningerne erindres let, naar man bemærker, at venstre Side af 1ste Normalligning dannes af højre Side af Betingelsesligningerne ved at multiplicere hver af disse Ligninger med dens Koefficient til x og addere de derved fremkomne Ligninger. Paa lignende Maade dannes de følgende Normalligninger — alt forudsat, at Observationsstørrelserne have samme Vægt.

Som Kontrol for Beregningen af Normalligningernes Koefficienter haves

$$\left.\begin{aligned}
&[a^2]+[ab]+[ac]+\ldots+[al]=[a(a+b+c+\ldots+l)]\\
&[ab]+[b^2]+[bc]+\ldots+[bl]=[b(a+b+c+\ldots+l)]\\
&[ac]+[bc]+[c^2]+\ldots+[cl]=[c(a+b+c+\ldots+l)]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (93)$$

Der fordres ikke nogen stor Nøjagtighed ved Beregningen af disse Koefficienter ligesaa lidt som ved Normalligningernes Opløsning; ved denne anvender man undertiden Logarithmer, navnlig naar Koefficienterne ere flersiffrede Tal. Firesiffrede Logarithmer ere tilstrækkelig nøjagtige. Er der kun 3 à 4 Normalligninger, vil endog Regnestokken i Reglen kunne benyttes.

Som Kontrol for Normalligningernes rigtige Opløsning kan man prøve, om Ligningerne ere fyldestgjorte ved Indsætning af de fundne Elementer.

En Kontrol baade for Normalligningernes Dannelse og deres Opløsning faas ved at undersøge om

$$[av] = 0, \quad [bv] = 0, \quad [cv] = 0, \; . \; . \; .$$

eller

$$[pav] = 0, \quad [pbv] = 0, \quad [pcv] = 0, \; . \; . \; .$$

efterat v'erne ere fundne af Betingelsesligningerne.

Vi skulle endnu fremstille en tredie og i Reglen bekvemmere Kontrolregning.

Af Betingelsesligningen

$$v_r = l_r + a_r\, x + b_r\, y + c_r\, z + \; . \; . \; .$$

udledes dels

$$v_r{}^2 = l_r\, v_r + a_r\, v_r\, x + b_r\, v_r\, y + c_r\, v_r\, z + \; . \; . \; .$$

$$[v^2] = [lv],$$

dels

$$l_r\, v_r = l_r{}^2 + a_r\, l_r\, x + b_r\, l\;\, y + c_r\, l_r\, z + \; . \; . \; .$$

$$[lv] = [l^2] + [al]x + [bl]y + [cl]z + \; . \; . \; .,$$

saa at man faar

$$[v^2] = [l^2] + [al]x + [bl]y + [cl]z + \; . \; . \; . \qquad (94)$$

Heri ere $[al]$, $[bl]$, $[cl]$, . . . bekjendte fra Normalligningerne, saa at man kun skal beregne $[v^2]$ og $[l^2]$.

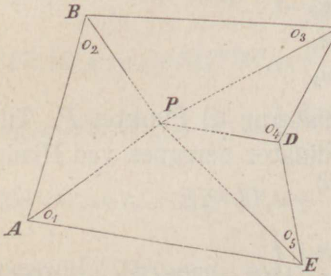
Have Observationsstørrelserne forskjellige Vægte, faas

$$[pv^2] = [pl^2] + [pal]x + [pbl]y + [pcl]z + \; . \; . \; . \qquad (95)$$

Er der mange Normalligninger, vil det være ønskeligt at have en Kontrol for Regningens Rigtighed i Løbet af Eliminationen; dette opnaas derved, at man ved Siden af Normalligningerne anfører Summen af Koefficienterne og det konstante Led, hvilken Sum allerede er dannet ved Kontrollen (93). Foretager man nu ved enhver Regning med Ligningerne den samme Regning med Summerne (som om de vare Led i Ligningerne), saa maa for enhver af Normalligningerne udledet Ligning Summen af Koefficienterne og det konstante Led stemme med den Størrelse, der fremkommer af de oprindelige Summer.

For at sikkre sig imod Fejl i Dannelsen af Betingelsesligningerne adderer man de fundne x, y, z . . . til Tilnærmelsesværdierne X_0, Y_0, Z_0 . . . og indsætter de derved fremkomne Elementer i Fundamentalligningerne. Give disse samme Værdier for o'erne, som allerede ere fundne ved at addere de sandsynligste Fejl til de observerede Værdier, saa maa Betingelsesligningerne betragtes som rigtige.

Udføres Beregningen ved Approximation, bør man ved passende Valg af Enheder for Elementerne og Observationsstørrelserne sørge for, at de numeriske Værdier af a'erne, b'erne, c'erne o. s. v. blive nogenlunde ens, forsaavidt de ikke ere nul. Ved økonomiske Maalinger opnaas dette i Reglen ved at udtrykke horizontale Længder i Alen eller Fod, Vinkler i Minutter og Højder i Tommer.



31. Exempler. Ex. 1. I hosstaaende Figur ere Punkterne A, B, C, D og E forud bestemte ved en Triangulation; deres Koordinater, som vi betragte som fejlfri, ere

		Abscisse	Ordinat
for Punktet	A	$376{,}5$	$158{,}1$
- —	B	$403{,}1$	$836{,}7$
- —	C	$1348{,}4$	$816{,}8$
- —	D	$1262{,}3$	$482{,}7$
- —	E	$1352{,}6$	$0{,}0$.

Endvidere er bekjendt — hvad der dog ogsaa kunde beregnes af Koordinaterne —

$$\log AB = 2{,}83196$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Azimuth} & A-E & = & 350^0\ 47',_8 \\
\text{—} & B-A & = & 267^0\ 45',_6 \\
\text{—} & C-B & = & 178^0\ 47',_5 \\
\text{—} & D-C & = & 75^0\ 32',_4 \\
\text{—} & E-D & = & 100^0\ 35',_9.
\end{array}$$

For at bestemme Punktet P har man med samme Nøjagtighed maalt Vinklerne

$$\begin{aligned}
o_1 &= 51^0\ 05',_8 \\
o_2 &= 49^0\ 47',_7 \\
o_3 &= 29^0\ 13',_0 \\
o_4 &= 101^0\ 46',_0 \\
o_5 &= 38^0\ 40',_9.
\end{aligned}$$

Kalde vi Fejlene paa disse Vinkler v_1, v_2, v_3, v_4 og v_5, bliver

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Azimuth} & A-P & = & \text{Azim. } A-E+o_1+v_1 = 41^0\ 53',_6+v_1 \\
\text{—} & B-P & = & 317^0\ 33',_3+v_2 \\
\text{—} & C-P & = & 208^0\ 00',_5+v_3 \\
\text{—} & D-P & = & 177^0\ 18',_4+v_4 \\
\text{—} & E-P & = & 139^0\ 16',_8+v_5.
\end{array}$$

Til Elementer vælges Koordinaterne til Punktet P. Tilnærmelsesværdier for disse Koordinater beregnes ved Hjælp af o_1 og o_2.

Man har

$$\begin{aligned}
\angle PAB = \angle EAB - o_1 &= 267^0\ 45',_6 + 180^0 - 350^0\ 47',_8 - 51^0\ 05',_8 \\
&= 45^0\ 52',_0,
\end{aligned}$$

$$AP = AB\,\frac{\sin o_2}{\sin(45^0\ 52',_0 + o_2)} = AB\,\frac{\sin 49^0\ 47',_7}{\sin 95^0\ 39',_7},$$

$$\log AP = 2,_{83196} + 9,_{88295} - 9,_{99787} = 2,_{71704}.$$

Koordinaterne til P blive

$$X = 376,_5 + \overline{AP}\cos 41^0\ 53',_6 + x = 764,_{51} + x$$

$$Y = 158,_1 + \overline{AP}\sin 41^0\ 53',_6 + y = 506,_{16} + y.$$

Nu har man

$$tg\,(A-P = tg\,(41^0\ 53',_6+v_1) = \frac{Y-158,_1}{X-376,_5} = \frac{348,_{06}+y}{388,_{01}+x}$$

$$tg\,(B-P) = tg\,(317^0\ 33',_3+v_2) = \frac{-330,_{54}+y}{361,_{41}+x} = -\frac{330,_{54}-y}{361,_{41}+x}$$

$$tg\,(C-P) = tg\,(208^0\ 00',5 + v_3) = \frac{-310{,}64 + y}{-583{,}89 + x} = \frac{310{,}64 - y}{583{,}89 - x}$$

$$tg\,(D-P) = tg\,(177^0\ 18',4 + v_4) = \frac{23{,}46 + y}{-497{,}79 + x} = -\frac{23{,}46 + y}{497{,}79 - x}$$

$$tg\,(E-P) = tg\,(139^0\ 16',8 + v_5) = \frac{506{,}16 + y}{-588{,}09 + x} = -\frac{506{,}16 + y}{588{,}09 - x}.$$

Heraf faas ved Anvendelse af Tabulardifferenser

$$\log\, tg\,(41^0\ 53',6 + v_1) = \begin{cases} 2{,}54165 + 120\,y \\ -(2{,}58884 + 110\,x) \end{cases}$$

$$\log\, tg\,(41^0\ 53',6 + v_1) = 9{,}95281 - 110\,x + 120\,y$$

$$41^0 53',6 + v_1 = 41^0 53',60 + \frac{-110x + 120y}{25} = 41^0 53',60 - 4{,}4x + 4{,}8y,$$

saa at den første Betingelsesligning bliver

$$v_1\quad 0',00 - 4{,}4\,x + 4{,}8\,y.$$

Fremdeles haves

$$\log tg(317^0 33',3 + v_2) = \begin{cases} 2{,}51922 - 130y \\ -(2{,}55800 + 120x) \end{cases} = 9{,}96122 - 120x - 130y$$

$$317^0 33',3 + v_2 = 317^0 33',28 + \frac{-120x - 130y}{-25} = 317^0 33',28 + 4{,}8x + 5{,}2y$$

$$\log tg(208^0 00',5 + v_3) = \begin{cases} 2{,}49226 - 140y \\ -(2{,}76633 - 80x) \end{cases} = 9{,}72593 + 80x - 140y$$

$$208^0 00',5 + v_3 = 208^0 00',84 + \frac{80x - 140y}{31} = 208^0 00',84 + 2{,}6x - 4{,}5y$$

$$\log tg(177^0 18',4 + v_4) = \begin{cases} 1{,}37033 + 1850y \\ -(2{,}69704 - 80x) \end{cases} = 8{,}67329 + 80x + 1850y$$

$$177^0 18',4 + v_4 = 177^0 18',10 + \frac{80x + 1850y}{-269} = 177^0 18',10 - 0{,}3x - 6{,}9y$$

$$\log tg(139^0 16',8 + v_5) = \begin{cases} 2{,}70429 + 80y \\ -(2{,}76944 - 70x) \end{cases} = 9{,}93485 + 70x + 80y$$

$$139^0 16',8 + v_5 = 139^0 16',88 + \frac{70x + 80y}{-26} = 139^0 16',88 - 2{,}7x - 3{,}1y.$$

De fem Betingelsesligninger blive

$$\begin{aligned} v_1 &= 0{,}00 - 4{,}4x + 4{,}8y \\ v_2 &= -0{,}02 + 4{,}8x + 5{,}2y \\ v_3 &= +0{,}34 + 2{,}6x - 4{,}5y \\ v_4 &= -0{,}30 - 0{,}3x - 6{,}9y \\ v_5 &= +0{,}08 - 2{,}7x - 3{,}1y. \end{aligned}$$

Heraf findes

$[a^2] = 56{,}54$, $[ab] = 2{,}58$, $[al] = 0{,}66$, $[a(a+b+l)] = 59{,}78$,
$[b^2] = 127{,}55$, $[bl] = 0{,}19$, $[b(a+b+l)] = 130{,}32$.

Den i forrige Art. nævnte Kontrol for Klammerkoefficienternes Rigtighed stemmer.

Normalligningerne blive

$$56{,}5x + 2{,}6y + 0{,}66 = 0$$
$$2{,}6x + 127{,}6y + 0{,}19 = 0$$

og give ved Opløsning

$$x = -0{,}01, \qquad y = 0{,}00,$$

saa at de ovenfor fundne Tilnærmelsesværdier for Koordinaterne til P berigtiges til

$$X = 764{,}50, \qquad Y = 506{,}16.$$

Forlanges tillige de sandsynligste Fejl paa de observerede Vinkler, da findes de ved at indsætte de nys fundne x og y i Betingelsesligningerne. Dette giver

$$\begin{array}{lll}
v_1 = 0{,}00 + 0{,}04 = +0{,}04 & & v_1^2 = 0{,}0016 \\
v_2 = -0{,}02 - 0{,}05 = -0{,}07 & & v_2^2 = 0{,}0049 \\
v_3 = +0{,}34 - 0{,}03 = +0{,}31 & & v_3^2 = 0{,}0931 \\
v_4 = -0{,}30 + 0{,}00 = -0{,}30 & & v_4^2 = 0{,}0900 \\
v_5 = +0{,}08 + 0{,}03 = +0{,}11 & & v_5^2 = 0{,}0121 \\
\hline
 & & [v^2] = 0{,}2047,
\end{array}$$

saa at de fordelagtigste Værdier for de maalte Vinkler ere

$$\begin{aligned}
o_1 &= 51^0\ 05',84 \\
o_2 &= 49^0\ 47',63 \\
o_3 &= 29^0\ 13',31 \\
o_4 &= 101^0\ 45',70 \\
o_5 &= 38^0\ 41',01.
\end{aligned}$$

Prøven (94) giver, idet $[l^2] = 0{,}2124$,

$$[v^2] = 0{,}2124 - 0{,}0066 + 0 = 0{,}2058,$$

som stemmer tilfredsstillende med den ovenfor fundne Værdi.

For at faa en skarp Kontrol er det at anbefale at udføre Udjevningen med noget større Nøjagtighed, end ellers var fornødent.

Ex. 2. Vinklerne i en plan Trekant ere maalte saaledes

$o_1 = 53^0\ 45',_3$,	Middeltal af 3 Observationer.	
$o_2 = 61^0\ 10',_6$,	— - 2 —	
$o_3 = 65^0\ 03',_3$,	— - 1 —	
Sum $179^0\ 59',_2$.		

Vælges o_1 og o_2 til Elementer, blive Fundamentalligningerne

$$o_1 = X$$
$$o_2 = Y$$
$$o_3 = 180^0 - X - Y.$$

Skjønt disse Ligninger allerede have lineær Form, bør man dog, da Arbejdet lettes derved, indføre Tilnærmelsesværdier for Elementerne og som saadanne benytte de observerede Vinkler o_1 og o_2. Derved blive Betingelsesligningerne

$$v_1 = x$$
$$v_2 = y$$
$$v_3 = 0,_8 - x - y,$$

hvoraf man danner Normalligningerne

$$4x + y = 0,_8$$
$$x + 3y = 0,_8,$$

der give

$$x = 0,_{15}, \qquad y = 0,_{22},$$

saa at man ved Indsætning i Betingelsesligningerne finder

$$v_1 = 0',_{15}, \quad v_2 = 0',_{22}, \quad v_3 = 0',_{43}.$$

De ved Udjevningen forbedrede Vinkler i Trekanten ere

$$53^0\ 45',_{45}$$
$$61^0\ 10',_{82}$$
$$65^0\ 03',_{73}.$$

32. Middelfejlen paa en Observationsstørrelse.

Kjendte man de sande Fejl i o'erne, nemlig

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ldots\ u_n,$$

vilde Middelfejlen findes af Formlen

$$m = \sqrt{\frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{[u^2]}{n}}; \qquad (96)$$

men da u'erne ere ubekjendte, søger man et Udtryk for m ved v'erne.

Ere de sande Fejl paa de sandsynligste Værdier af Elementerne x, y, z . . . . henholdsvis

$$x_0,\ y_0,\ z_0,\ \ldots\ldots,$$

saa blive de sande Værdier for Elementerne

$$x + x_0,\ y + y_0,\ z + z_0,\ \ldots\ldots$$

Indsættes disse i Betingelsesligningerne istedetfor x, y, z, ..., faas de sande Fejl i o'erne

$$\left.\begin{array}{l}
u_1 = l_1 + a_1 (x + x_0) + b_1 (y + y_0) + c_1 (z + z_0) + \ldots \\
\quad = v_1 + a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0 + \ldots \\
u_2 = l_2 + a_2 (x + x_0) + b_2 (y + y_0) + c_2 (z + z_0) + \ldots \\
\quad = v_2 + a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0 + \ldots \\
u_3 = l_3 + a_3 (x + x_0) + b_3 (y + y_0) + c_3 (z + z_0) + \ldots \\
\quad = v_3 + a_3 x_0 + b_3 y_0 + c_3 z_0 + \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_n = l_n + a_n (x + x_0) + b_n (y + y_0) + c_n (z + z_0) + \ldots \\
\quad = v_n + a_n x_0 + b_n y_0 + c_n z_0 + \ldots
\end{array}\right\} \qquad (97)$$

Multipliceres den $r$te af disse Ligninger

$$u_r = v_r + a_r x_0 + b_r y_0 + c_r z_0 + \ldots, \qquad (98)$$

med u_r og med v_r, faas dels

$$u^2_r = v_r u_r + a_r u_r x_0 + b_r u_r y_0 + c_r u_r z_0 \ldots,$$

hvoraf

$$[u^2] = [vu] + [au] x_0 + [bu] y_0 + [cu] z_0 + \ldots, \qquad (99)$$

dels

$$v_r u_r = v^2_r + a_r v_r x_0 + b_r v_r y_0 + c_r v_r z_0 + \ldots,$$

hvoraf, idet $[av] = 0$, $[bv] = 0$, $[cv] = 0$, ...

$$[vu] = [v^2]. \qquad (100)$$

Af (99) og (100) erholdes

$$[u^2] = [v^2] + [au] x_0 + [bu] y_0 + [cu] z_0 + \ldots \qquad (101)$$

I dette Udtryk er kun $[v^2]$ bekjendt, hvorimod de andre Led ikke kunne findes, da man hverken kjender u'erne eller x_0, y_0, z_0, ...; man maa derfor lade sig nøje med at erstatte disse Led med deres Middelværdier.

Af Ligningerne (97) dannes

$$\left.\begin{array}{l} [au] = [a^2]\,x_o + [ab]\,y_o + [ac]\,z_o + \ldots. \\ [bu] = [ab]\,x_o + [b^2]\,y_o + [bc]\,z_o + \ldots. \\ [cu] = [ac]\,x_o + [bc]\,y_o + [c^2]\,z_o + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (102)$$

Multipliceres den første af disse Ligninger med k_1, den anden med k_2, den tredie med k_3, o. s. v., og vælges k'erne saaledes, at de fyldestgjøre følgende Ligninger

$$\left.\begin{array}{l} [a^2]\,k_1 + [ab]\,k_2 + [ac]\,k_3 + \ldots. = 1 \\ [ab]\,k_1 + [b^2]\,k_2 + [bc]\,k_3 + \ldots. = 0 \\ [ac]\,k_1 + [bc]\,k_2 + [c^2]\,k_3 + \ldots. = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (103)$$

saa erholdes ved Addition

$$x_o = k_1\,[au] + k_2\,[bu] + k_3\,[cu] + \ldots. \quad (104)$$

og heraf

$$[au]\,x_o = k_1\,[au]^2 + k_2\,[au]\,[bu] + k_3\,[au]\,[cu] + \ldots \quad (105)$$

For at finde Middelværdien af denne Størrelse $[au]\,x_o$, ville vi tænke os Multiplikationerne i (105) udførte. Man kommer derved til Led af Formen

$$k_1\,a^2{}_r\,u^2{}_r,\ k_2\,a_r\,b_r\,u^2{}_r,\ k_3\,a_r\,c_r\,u^2{}_r \text{ o. s. v.},$$

og til andre af Formen

$$k_1\,a_r\,a\,u_r\,u\,,\ k_2\,a_r\,b\,\,u_r\,u\,,\ k_3\,a_r\,c_s\,u\,\,u_s \text{ o. s. v.}$$

Middelværdien af $u^2{}_r$ er m^2, medens Middelværdien af $u_r\,u_s$ er nul, da der med samme Sandsynlighed kan tillægges $u_r\,u_s$ en positiv som den tilsvarende negative Værdi. Følgelig bliver Middelværdien af

$$[au]\,x_o \text{ lig } (k_1\,[a^2] + k_2\,[ab] + k_3\,[ac] + \ldots.)\,m^2$$

eller formedelst (103) lig m^2.

Analogt hermed vil ogsaa Middelværdien af $[bu]y_o$, $[cu]\,z_o$.. alle være m^2.

Indsættes disse Middelværdier i (101), faas ved Hjælp af (96) følgende Ligning

$$nm^2 = [v^2] + em^2,$$

der giver

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n - e} \qquad (106)$$

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n - e}}\,*). \qquad (107)$$

Kvadratet paa Middelfejlen i en Observationsstørrelse er altsaa Summen af Kvadraterne paa de sandsynligste Fejl divideret med Forskjellen mellem Observationsstørrelsernes og Elementernes Antal (Antallet af Overbestemmelser).

Havde v'erne havt forskjellige Vægte

$$p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_n,$$

vilde man ved at forfølge denne Regning have faaet Middelfejlen paa Vægtenheden bestemt ved

$$m = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n - e}}. \qquad (108)$$

Formlerne (68) og (80) ere specielle Tilfælde af henholdsvis (107) og (108).

33. *Middelfejlen paa et udjevnet Element* findes ved at udtrykke det som Funktion af de observerede Værdier og derefter anvende Formel (54).

Hidtil have vi kun havt Normalligningernes numeriske Opløsning for Øje; det bliver nu nødvendigt at beholde l'erne som Bogstav, saa at vi faa Elementerne udtrykte ved l'erne.

---

*) Imellem vort Raisonnement i Art. 16, for at Middelværdien af $v_1 v_2$ er nul, og i denne Artikel, for at Middelværdien af $u_r u_s$ er nul, er der vel den Forskjel, at medens i første Tilfælde Fejlene vare fuldstændig uafhængige af hverandre, saa ere de i denne Artikel afhængige af hverandre, idet de skulle tilfredsstille (97). Dette faar imidlertid ikke nogen Indflydelse paa den fundne Formel (107).

Da Normalligningerne

$$\left.\begin{array}{l} [al] + [a^2]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + \ldots = 0 \\ [bl] + [ab]\,x + [b^2]\,y + [bc]\,z + \ldots = 0 \\ [cl] + [ac]\,x + [bc]\,y + [c^2]\,z + \ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (109)$$

ere af første Grad m. H. t. x, y, z, ... og l'erne, maa Opløsningen føre til, at Elementerne blive fremstillede som lineære Funktioner af l'erne, altsaa f. Ex.

$$x = \alpha_1\, l_1 + \alpha_2\, l_2 + \alpha_3\, l_3 + \ldots + \alpha_n\, l_n = [\alpha l], \quad (110)$$

hvor α'erne ere Talkoefficienter, der fremkomme ved Normalligningernes Opløsning.

Nu er (83)

$$l_r = F\,(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ \ldots) - o_r$$

eller, naar $F_r\,(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ \ldots)$, der er en konstant Størrelse, betegnes ved K_r,

$$l_r = K_r - o_r,$$

hvilket indsat i (110) giver

$$x = [\alpha K] - \alpha_1\, o_1 - \alpha_2\, o_2 - \alpha_3\, o_3 - \ldots - \alpha_n\, o_n = [\alpha K] - [\alpha o]. \quad (111)$$

Middelfejlen paa x er

$$\mu = \sqrt{\alpha_1^2\, m_1^2 + \alpha_2^2\, m_2^2 + \alpha_3^2\, m_3^2 + \ldots + \alpha_n^2 m_n^2} = \sqrt{[\alpha^2 m^2]}, \quad (112)$$

hvor m_r er Middelfejlen paa o_r. Da man erholder samme Formel, naar man betragter l'erne som Observationsstørrelser, er Omdannelsen af (110) til (111) overflødig.

Har man kun to Normalligninger

$$\left.\begin{array}{l} [al] + [a^2]\,x + [ab]\,y = 0 \\ [bl] + [ab]\,x + [b^2]\,y = 0 \end{array}\right\}, \quad (113)$$

finder man, naar alle Observationsstørrelserne have samme Middelfejl m,

$$x = \frac{[ab]\,[bl] - [b^2]\,[al]}{[a^2]\,[b^2] - [ab]^2} = \frac{([ab]b_1 - [b^2]a_1)\,l_1 + ([ab]\,b_2 - [b^2]a_2)\,l_2 + \ldots}{[a^2]\,[b^2] - [ab]^2},$$

hvoraf

$$\mu^2_x = \frac{[ab]^2\,[b^2] - 2\,[ab]^2\,[b^2] + [a^2]\,[b^2]^2}{([a^2]\,[b^2] - [ab]^2)^2}\,m^2 = \frac{[b^2]}{[a^2]\,[b^2] - [ab]^2}\,m^2. \quad (114)$$

Ombyttes x med y og a med b, faas

$$\mu^2_y = \frac{[a^2]}{[a^2]\,[b^2] - [ab]^2}\,m^2.$$

34. Middelfejlen paa en Funktion af udjevnede Elementer. Den givne Funktion

$$u = F(X,\ Y,\ Z,\ \ldots) \tag{115}$$

bringes paa lineær Form ved at indføre Tilnærmelsesværdier for Elementerne, idet man sætter

$$X = X_0 + x,\ Y = Y_0 + y,\ Z = Z_0 + z,\ \ldots,$$

hvorved man ved Anvendelse af Taylors Formel faar

$$u = F(X_0 + x,\ Y_0 + y,\ Z_0 + z, \ldots) = F(X_0,\ Y_0,\ Z_0 \ldots)$$
$$+ \frac{du}{dX_0}x + \frac{du}{dY_0}y + \frac{du}{dZ_0}z \ldots \tag{116}$$

Udtrykkes heri x, y, z, ... ved l'erne, bliver u fremstillet som en lineær Funktion af dem, af Formen

$$u = F(X_0, Y_0, Z_0 \ldots) + A_1 l_1 + A_2 l_2 + A_3 l_3 + \ldots + A_n l_n. \tag{117}$$

Middelfejlen paa u bliver

$$\mu = \sqrt{A_1^2 m_1^2 + A_2^2 m_2^2 + A_3^2 m_3^2 + \ldots + A_n^2 m_n^2}.$$

35. Exempler. 1°. Middelfejlen paa en Observationsstørrelse i det første Exempel i Art. 31 er

$$m = \sqrt{\frac{0{,}2047}{5-2}} = \sqrt{0{,}0682} = 0',26.$$

Middelfejlene i Koordinaterne ɔ: i x og y er ifølge (114)

$$\mu_x = \sqrt{\frac{127{,}6\ .\ 0{,}0682}{56{,}5\ .\ 127{,}6 - 2{,}6^2}} = 0{,}035 \text{ Alen.}$$

$$\mu_y = \sqrt{\frac{56{,}5\ .\ 0{,}0682}{56{,}5\ .\ 127{,}6 - 2{,}6^2}} = 0{,}023 \quad -$$

2°. Middelfejlen paa de ved Udjevningen forbedrede Vinkler i Trekanten i Ex. 2 i Art. 31 findes saaledes.

Af Betingelsesligningerne

$$\begin{aligned} v_1 &= l_1 + x \\ v_2 &= l_2 \phantom{{}+x} + y \\ v_3 &= l_3 - x - y \end{aligned}$$

dannes Normalligningerne

$$\begin{aligned} 4x + y &= -3l_1 + l_3 \\ x + 3y &= -2l_2 + l_3, \end{aligned}$$

som give

$$x = \frac{-9l_1 + 2l_2 + 2l_3}{11}$$

$$y = \frac{3l_1 - 8l_2 + 3l_3}{11}.$$

Den udjevnede Værdi for den tredie Vinkel er

$$180^0 - X - Y = 65^0 04',_1 - x - y = 65^0 04',_1 - \frac{-6l_1 - 6l_2 + 5l_3}{11}.$$

Middelfejlene for disse udjevnede Vinkler blive, naar Middelfejlen paa Vægtenheden er $0',_{59}$,

$$\text{for } o_1 \quad \mu_1 = \frac{1}{11}\sqrt{81.\frac{0,_{59}^2}{3} + 4.\frac{0,_{59}^2}{2} + 4.\frac{0,_{59}^2}{1}} = 0,_{59}\sqrt{\frac{3}{11}} = 0',_{31}$$

$$- \quad o_2 \quad \mu_2 = \frac{0,_{59}}{11}\sqrt{\frac{9}{3} + \frac{64}{2} + \frac{9}{1}} = 0,_{59}\sqrt{\frac{4}{11}} = 0',_{36}$$

$$- \quad o_3 \quad \mu_3 = \frac{0,_{59}}{11}\sqrt{\frac{36}{3} + \frac{36}{2} + \frac{25}{1}} = 0,_{59}\sqrt{\frac{5}{11}} = 0',_{40}.$$

Til Middelfejlen $0',_{59}$ paa Vægtenheden svarer for Vægtene 3, 2 og 1 henholdsvis Middelfejlene

$$0'_{34}, \quad 0'_{42} \quad \text{og} \quad 0'_{59},$$

der sammenlignede med de nys fundne Middelfejl paa de udjevnede Vinkler vise, at Udjevningen har gjort alle Vinklerne nøjagtigere, men særlig den slettest bestemte Vinkel o_3.

---

§ 4. Korrelatudjevning.

36. De sandsynligste Værdier for Observationsstørrelserne, naar disse ere lige nøjagtige.

Afhængigheden mellem n Observationsstørrelser

$$o_1, \; o_2, \; o_3, \; . \; . \; . \; o_n$$

tænkes givet ved følgende l Ligninger, kaldede *Fundamentalligninger*

$$\left.\begin{array}{l} F_1 \; (o_1, \; o_2, \; o_3, \; . \; . \; . \; o_n) = Q_1 \\ F_2 \; (o_1, \; o_2, \; o_3, \; . \; . \; . \; o_n) = Q_2 \\ F_3 \; (o_1, \; o_2, \; o_3, \; . \; . \; . \; o_n) = Q_3 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ F_l \; (o_1, \; o_2, \; o_3, \; . \; . \; . \; o_n) = Q_l, \end{array}\right\} \quad (119)$$

hvor

$$l < n;$$

thi i modsat Fald kunde man af (119) bestemme o'erne og da var ingen Observation fornøden.

Paa Grund af de tilfældige Fejl ville Ligningerne (119) i Almindelighed ikke nøjagtigt være tilfredsstillede. Man tillægger derfor Observationsstørrelserne Fejlene

$$v_1, \; v_2, \; v_3, \; . \; . \; . \; v_n,$$

saa at (119) omdannes til

$$\left.\begin{array}{l} F_1\,(o_1+v_1, \; o_2+v_2, \; o_3+v_3, \; . \; . \; . \; o_n+v_n) = Q_1 \\ F_2\,(o_1+v_1, \; o_2+v_2, \; o_3+v_3, \; . \; . \; . \; o_n+v_n) = Q_2 \\ F_3\,(o_1+v_1, \; o_2+v_2, \; o_3+v_3, \; . \; . \; . \; o_n+v_n) = Q_3 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ F_l\,(o_1+v_1, \; o_2+v_2, \; o_3+v_3, \; . \; . \; . \; o_n+v_n) = Q_l \end{array}\right\} \quad (120)$$

Ved Hjælp af Taylors Formel faas, idet man sætter

$$\frac{dF_1}{do_1} = a_1, \; \frac{dF_1}{do_2} = a_2, \; \frac{dF_1}{do_3} = a_3, \; . \; . \; . \; . \; \frac{dF_1}{do_n} = a_n,$$

$$\frac{dF_2}{do_1} = b_1, \; \frac{dF_2}{do_2} = b_2, \; \frac{dF_2}{do_3} = b_3, \; . \; . \; . \; . \; \frac{dF_2}{do_n} = b_n,$$

o. s. v. og

$$Q_1 - F_1(o_1, o_2, o_3 \, . \, . \, o_n) = q_1, Q_2 - F_2(o_1, o_2, o_3 \, . \, . \, o_n) = q_2 \text{ o.s.v.} \quad (121)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \; . \; . \; . \; + a_nv_n = q_1 \\ b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 + \; . \; . \; . \; + b_nv_n = q_2 \\ c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \; . \; . \; . \; + c_nv_n = q_3 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ l_1v_1 + l_2v_2 + l_3v_3 + \; . \; \; . \; + l_nv_n = q_l \end{array}\right\} \quad (122)$$

v'erne skulle nu bestemmes saaledes, at de dels tilfredsstille disse Ligninger, der benævnes *Betingelsesligningerne*, dels gjøre $[v^2]$ til Minimum.

I Modsætning til de sandsynligste Fejl

$$v_1, \; v_2, \; v_3, \; . \; . \; . \; v_n$$

ville vi ved

$$v_1 + x_1, \; v_2 + x_2, \; v_3 + x_3, \; . \; . \; . \; v_n + x_n$$

betegne et System af vilkaarlige Fejl, der tilfredsstille (122), saa at man har

$$\left.\begin{array}{l} a_1(v_1+x_1)+a_2(v_2+x_2)+a_3(v_3+x_3)+\ldots+a_n(v_n+x_n)=q_1 \\ b_1(v_1+x_1)+b_2(v_2+x_2)+b_3(v_3+x_3)+\ldots+b_n(v_n+x_n)=q_2 \\ c_1(v_1+x_1)+c_2(v_2+x_2)+c_3(v_3+x_3)+\ldots+c_n(v_n+x_n)=q_3 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ l_1(v_1+x_1)+l_2(v_2+x_2)+l_3(v_3+x_3)+\ldots+l_n(v_n+x_n)=q_n \end{array}\right\} \quad (123)$$

Subtraheres (122) fra (123), erholdes

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots+a_nx_n=0 \\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+\ldots+b_nx_n=0 \\ c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+\ldots+c_nx_n=0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ l_1x_1+l_2x_2+l_3x_3+\ldots+l_nx_n=0. \end{array}\right\} \quad (124)$$

Multipliceres den første af disse Ligninger med en foreløbig ubestemt Størrelse k_1, den anden med k_2, den tredie med k_3 o. s. v. og adderes de derved fremkomne Ligninger, faar man

$$(a_1k_1+b_1k_2+c_1k_3+\ldots+l_1k_l)x_1+(a_2k_1+b_2k_2+c_2k_3+\ldots+l_2k_l)x_2$$
$$+\ldots+(a_nk_1+b_nk_2+c_nk_3+\ldots+l_nk_l)x_n=0. \quad (125)$$

Da $[v^2]$ skal være Minimum, maa — for et hvilketsomhelst System af x'er —

$$[v^2] < [(v+x)^2]$$

og altsaa

$$[v^2] < [v^2]+2[vx]+[x^2]$$

eller

$$\left.\begin{array}{r} [vx]+\dfrac{[x^2]}{2}>0 \\ v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3+\ldots+v_nx_n+\dfrac{[x^2]}{2}>0. \end{array}\right\} \quad (126)$$

Subtraheres (125) fra (126), faas

$$(v_1-a_1k_1-b_1k_2-c_1k_3-\ldots-l_1k_l)x_1+(v_2-a_2k_1-b_2k_2-c_2k_3-\ldots-l_2k_l)x_2$$
$$+\ldots+(v_n-a_nk_1-b_nk_2-c_nk_3-\ldots-l_nk_n)x_n+\frac{[x^2]}{2}>0. \quad (127)$$

Da $\frac{[x^2]}{2}$ altid er positiv, vil Minimumsbetingelsen (127) stedse være opfyldt, naar Koefficienterne til x_1, x_2, x_3, ... x_n alle ere nul, altsaa naar

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \ldots + l_1 k_l \\ v_2 = a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + \ldots + l_2 k_l \\ v_3 = a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 + \ldots + l_3 k_l \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_n = a_n k_1 + b_n k_2 + c_n k_3 + \ldots + l_n k_l \end{array}\right\} \quad (128)$$

Disse Ligninger kaldes *Korrelatligningerne*, k'erne Korrelater og Udjevningen Korrelatudjevning.

Indsættes v'erne af (128) i Betingelsesligningerne, faar man følgende l Ligninger, som kaldes *Normalligningerne*, til Bestemmelse af k'erne

$$\left.\begin{array}{l} [a^2]\,k_1 + [ab]\,k_2 + [ac]\,k_3 + \ldots + [al]\,k_l = q_1 \\ [ab]\,k_1 + [b^2]\,k_2 + [bc]\,k_3 + \ldots + [bl]\,k_l = q_2 \\ [ac]\,k_1 + [bc]\,k_2 + [c^2]\,k_3 + \ldots + [cl]\,k_l = q_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ [al]\,k_1 + [bl]\,k_2 + [cl]\,k_3 + \ldots + [l^2]\,k_l = q_l. \end{array}\right\} \quad (129)$$

Den Orden, hvori Regningen udføres, er følgende:

1°. Betingelsesligningerne fremstilles af Fundamentalligningerne.

2°. Normalligningerne dannes.

3°. Normalligningerne opløses m. H. t. k'erne.

4°. De sandsynligste Fejl beregnes af Korrelatligningerne.

5°. De fundne Fejl adderes til o'erne.

37. Observationsstørrelserne have forskjellige Vægte. Have Observationsstørrelserne

$$o_1,\ o_2,\ o_3,\ \ldots\ o_n$$

Vægtene

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots\ p_n,$$

saa skulle v'erne bestemmes saaledes, at de gjøre $[pv^2]$ til Minimum; altsaa saaledes, at

$$[pv^2] < [p(v+x)^2]$$

eller

$$[pv^2] < [pv^2] + 2[pvx] + [px^2],$$

$$p_1v_1x_1 + p_2v_2x_2 + p_3v_3x_3 + \ldots + p_nv_nx_n + \frac{[px^2]}{2} > 0. \quad (130)$$

Subtraheres (125) herfra, faas

$$(p_1v_1 - a_1k_1 - b_1k_2 - c_1k_3 - \ldots - l_1k_l)x_1 + (p_2v_2 - a_2k_1 - b_2k_2 - c_2k_3 - \ldots - l_2k_l)x_2$$
$$+ \ldots + (p_nv_n - a_nk_1 - b_nk_2 - c_nk_3 - \ldots - l_nk_l)x_n + \frac{[px^2]}{2} > 0. \quad (131)$$

Denne Betingelse er stedse opfyldt, naar Koefficienterne til x_1, x_2, x_3, ... x_n alle ere nul; altsaa naar følgende Korrelatligninger ere tilfredsstillede

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \frac{a_1}{p_1}k_1 + \frac{b_1}{p_1}k_2 + \frac{c_1}{p_1}k_3 + \ldots + \frac{l_1}{p_1}k_l \\ v_2 = \frac{a_2}{p_2}k_1 + \frac{b_2}{p_2}k_2 + \frac{c_2}{p_2}k_3 + \ldots + \frac{l_2}{p_2}k_l \\ v_3 = \frac{a_3}{p_3}k_1 + \frac{b_3}{p_3}k_2 + \frac{c_3}{p_3}k_3 + \ldots + \frac{l_3}{p_3}k_l \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ v_n = \frac{a_n}{p_n}k_1 + \frac{b_n}{p_n}k_2 + \frac{c_n}{p_n}k_3 + \ldots + \frac{l_n}{p_n}k_l \end{array}\right\} \quad (132)$$

Indsættes disse Værdier for v'erne i Betingelsesligningerne, erholdes Normalligningerne

$$\left.\begin{array}{l} \left[\frac{a^2}{p}\right]k_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]k_2 + \left[\frac{ac}{p}\right]k_3 + \ldots + \left[\frac{al}{p}\right]k_l = q_1 \\ \left[\frac{ab}{p}\right]k_1 + \left[\frac{b^2}{p}\right]k_2 + \left[\frac{bc}{p}\right]k_3 + \ldots + \left[\frac{bl}{p}\right]k_l = q_2 \\ \left[\frac{ac}{p}\right]k_1 + \left[\frac{bc}{p}\right]k_2 + \left[\frac{c^2}{p}\right]k_3 + \ldots + \left[\frac{cl}{p}\right]k_l = q_3 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \left[\frac{al}{p}\right]k_1 + \left[\frac{bl}{p}\right]k_2 + \left[\frac{cl}{p}\right]k_3 + \ldots + \left[\frac{l^2}{p}\right]k_l = q_l. \end{array}\right\} \quad (133)$$

38. Problemets Løsning ved Elementudjevning.

Den i de to foregaaende Artikler hehandlede Opgave kan ogsaa løses ved Elementudjevning. I Fundamentalligningerne (119) kunne nemlig de $n - l$ o'er betragtes som uafhængige (Elementer), og de øvrige l, som ere afhængige af dem, kunne da findes af Ligningerne udtrykte ved de uafhængige; betegnes disse o_{l+1}, o_{l+2}, o_{l+3}, . . . o_n ved X, Y, Z, . . . $(n - l)$ i Antal, saa faar man

$$\left.\begin{array}{ll} o_1 & = \varphi_1\,(X,\ Y,\ Z, \ldots) \\ o_2 & = \varphi_2\,(X,\ Y,\ Z, \ldots) \\ o_3 & = \varphi_3\,(X,\ Y,\ Z, \ldots) \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ o_l & = \varphi_l\,(X,\ Y,\ Z, \ldots) \\ o_{l+1} & = X \\ o_{l+2} & = \qquad\quad Y \\ o_{l+3} & = \qquad\qquad\quad Z \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right\} \quad (134)$$

hvor φ'erne betegne de ved Opløsningen fremkomne Funktioner.

Ligningerne (134) have den fra Elementudjevningen bekjendte Form for Fundamentalligningerne, og Udjevningen kan derfor foretages paa den i § 3 fremstillede Maade.

Omvendt kan ogsaa Korrelatudjevning anvendes, naar Fundamentalligningerne ere givne under Formen

$$\begin{array}{l} o_1 = F_1\,(X,\ Y,\ Z, \ldots) \\ o_2 = F_2\,(X,\ Y,\ Z, \ldots) \\ o_3 = F_3\,(X,\ Y,\ Z, \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ o_n = F_n\,(X,\ Y,\ Z, \ldots). \end{array}$$

Af disse Ligninger kan man nemlig eliminere de e Elementer og kommer derved til $n - e = l$ Ligninger mellem de n o'er, altsaa af Formen (119).

Af ovenstaaende fremgaar det, at enhver Udjevning kan udføres efter enhver af de to Methoder, og Regningen vil føre til samme Resultat; thi begge Udjevningsmethoder ere støttede paa samme Princip nemlig, at Summen af Fejlkvadraterne (multiplicerede med de tilsvarende Vægte) skal være Minimum.

Da Elementudjevningen fører til e Normalligninger, medens man ved Korrelatudjevningen erholder

$$l = n - e \qquad (135)$$

Normalligninger, vil, eftersom $l \lessgtr e$ d. v. s. eftersom $l \lessgtr \frac{n}{2}$, Korrelatudjevning eller Elementudjevning give det mindste Antal Normalligninger. Selv om Fundamentalligningerne foreligge under Formen (119), kan det derfor, naar $l > \frac{n}{2}$, undertiden være fordelagtigt at bringe dem paa Formen (134) eller, hvad der i Almindelighed er lettere, foretage Omdannelsen med Betingelsesligningerne (122), idet de $n-l$ v'er betegnes x, y, z, . . ., og Ligningerne løses m. H. t. de øvrige $n-l$ v'er, hvorved man erholder n Ligninger af Formen (84).

39. Et Udtryk for $[v^2]$ *til Kontrol for Regningen.*

Multipliceres den første Ligning (128) med v_1, den anden med v_2, den tredie med v_3 o. s. v., og adderes de derved fremkomne Ligninger, faas

$$[v^2] = [av]\,k_1 + [bv]\,k_2 + [cv]\,k_3 + \;.\;.\;.\; [lv]\,k_l;$$

men da

$$[av] = q_1,\quad [bv] = q_2,\quad [cv] = q_3, \;.\;.\;.\; + [lv] = q_l,$$

erholdes

$$[v^2] = q_1 k_1 + q_2 k_2 + q_3 k_3 + \;.\;.\;.\; + q_l k_l = [qk]. \qquad (136)$$

Have Observationsstørrelserne forskjellige Vægte, bliver

$$[pv^2] = q_1 k_1 + q_2 k_2 + q_3 k_3 + \;.\;.\;.\; + q_n k_n = [qk]. \qquad (137)$$

Disse Udtryk for $[v^2]$ og $[pv^2]$ tjene som Kontrol for Regningen.

40. Middelfejlen paa en Observationsstørrelse.

Indsættes ifølge (135) l istedetfor $n-e$ i (107) og (108), faas, naar Observationsstørrelserne have samme Vægte,

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{l}}, \qquad (138)$$

og naar Vægtene ere forskjellige,

$$m = \sqrt{\frac{[pv^2]}{l}}, \tag{139}$$

hvor m er Middelfejlen paa Vægtenheden.

41. Middelfejlen paa en Funktion af udjevnede Observationsstørrelser. Den sandsynligste Værdi for en Funktion af Observationsstørrelser beregnes umiddelbart af disses sandsynligste Værdier; dens Middelfejl findes ved at udtrykke Funktionen ved selve de observerede Værdier og derefter anvende Formel (54).

Er den givne Funktion

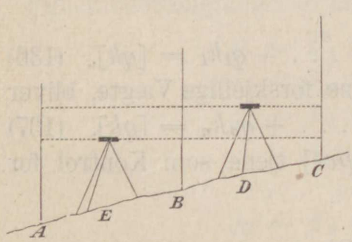
$$u = f(o_1, o_2, o_3, \ldots o_n), \tag{140}$$

saa beregnes dens sandsynligste Værdi u' ved istedetfor $o_1, o_2, o_3, \ldots o_n$ at sætte $o_1 + v_1$, $o_2 + v_2$, $o_3 + v_3, \ldots$ $o_n + v_n$, hvor v'erne ere de ved Udjevningen fundne Fejl.

Man har altsaa

$$u' = f(o_1 + v_1, o_2 + v_2, o_3 + v_3, \ldots o_n + v_n); \tag{141}$$

v'erne kan man faa udtrykt ved o'erne paa følgende Maade. Man indsætter q'erne af (121) i Normalligningerne, idet man beholder o'erne som Bogstav; derefter opløses Normalligningerne, hvorved man faar k'erne udtrykte ved o'erne. Indsætter man disse k'er i Korrelatligningerne, findes v'erne, og naar disse indsættes i (141), faar man u' fremstillet som Funktion af selve de observerede Værdier. Vi ville ikke her gaa nærmere ind paa Regningen, men nedenfor skulle et Par Exempler fremsættes.



42. Exempler. Ex. 1. Tre Punkter A, B og C ere nivellerede to Gange, nemlig baade fra Station D og E.

De aflæste Højder for Sigterne fra D ere

		Faldet
til A	$o_1 = 91'',75$	$o_1 - o_2 = 22'',53$
— B	$o_2 = 69'',22$	$o_2 - o_3 = 20'',72$
— C	$o_3 = 48'',50$	

og for Sigterne fra E

$$\begin{array}{llll} \text{til } A & o_4 = 69'',10 & & \text{Faldet} \\ - B & o_5 = 46'',75 & & o_4 - o_5 = 22'',35 \\ - C & o_6 = 25'',90 & & o_5 - o_6 = 20'',85. \end{array}$$

Fundamentalligningerne dannes ved at sætte Faldet fra B til A, saa vel som fra C til B, beregnet af de to Nivellementer, lige store. De blive

$$\left.\begin{array}{l} o_1 - o_2 - (o_4 - o_5) = 0 \\ o_2 - o_3 - (o_5 - o_6) = 0 \end{array}\right\} \quad (a)$$

og ere ikke tilfredsstillede.

Betingelsesligningerne ere

$$\left.\begin{array}{l} v_1 - v_2 - v_4 + v_5 = -0,18 \\ v_2 - v_3 - v_5 + v_6 = +0,13 \end{array}\right\} \quad (b)$$

Forudsætte vi, at de aflæste Højder have samme Vægte, blive Normalligningerne

$$\left.\begin{array}{l} 4\,k_1 - 2\,k_2 = -0,18 \\ -2\,k_1 + 4\,k_2 = +0,13, \end{array}\right\} \quad (c)$$

og give

$$k_1 = -0,038$$
$$k_2 = +0,013.$$

De sandsynligste Fejl blive

$$\begin{array}{lll} v_1 = -0,038 & \text{afrundes til } v_1 = -0,04 & v_1^2 = 0,0016 \\ v_2 = +0,038 + 0,013 = +0,051 & \quad - \quad - \quad v_2 = +0,05 & v_2^2 = 0,0025 \\ v_3 = -0,013 & \quad - \quad - \quad v_3 = -0,01 & v_3^2 = 0,0001 \\ v_4 = +0,038 & \quad - \quad - \quad v_4 = +0,04 & v_4^2 = 0,0016 \\ v_5 = -0,038 - 0,013 = -0,051 & \quad - \quad - \quad v_5 = -0,05 & v_5^2 = 0,0025 \\ v_6 = +0,013 & \quad - \quad - \quad v_6 = +0,02^{*)} & v_6^2 = 0,0004 \\ & & \overline{[v^2] = 0,0087.} \end{array}$$

Som Kontrol for Regningen haves

$[v^2] = (-0,18).(-0,038) + 0,13.\ 0,013 = 0,00684 + 0,00169 = 0,00853$, hvilket stemmer tilfredsstillende med den nys fundne Værdi.

---

*) Det har her været nødvendigt at forhøje 0,013 til 0,02, for at Betingelsesligningerne nøjagtigt kunne blive fyldestgjorte.

De aflæste Sigtehøjder blive forbedrede til

	Fald
$o'_1 = 91'',_{71}$	
$o'_2 = 69'',_{27}$	$22'',_{44}$
$o'_3 = 48'',_{49}$	$20'',_{78}$
$o'_4 = 69'',_{14}$	
$o'_5 = 46'',_{70}$	$22'',_{44}$
$o'_6 = 25'',_{92}$	$20,_{78}$.

Middelfejlen i en aflæst Højde er

$$m = \sqrt{\frac{0{,}00853}{2}} = 0'',_{065}.$$

Faldet fra C til A er $43'',_{22}$. Vi ville nu bestemme dets Middelfejl. Faldet er

$$o'_1 - o'_3 = o_1 - o_3 + v_1 - v_3. \qquad (d)$$

Heri skulde nu v'erne udtrykkes ved o'erne.

Normalligningerne kunne skrives

$$4\,k_1 - 2\,k_2 = -\,o_1 + o_2 + o_4 - o_5$$
$$-\,2\,k_1 + 4\,k_2 = -\,o_2 + o_3 + o_5 - o_6,$$

og ved deres Opløsning erholdes

$$k_1 = \frac{-\,2\,o_1 + o_2 + o_3 + 2\,o_4 - o_5 - o_6}{6}$$

$$k_2 = \frac{-\,o_1 \quad o_2 + 2\,o_3 + o_4 + o_5 - 2\,o_6}{6}.$$

Da nu

$$v_1 = k_1 \text{ og } v_3 = -\,k_2,$$

saa bliver

$$v_1 - v_3 = \frac{-\,o_1 + o_3 + o_4 - o_6}{2}$$

og

$$o'_1 \quad o'_3 = \frac{o_1 - o_3 + o_4 \quad o_6}{2}.$$

Middelfejlen paa $o'_1 - o'_3$ er

$$\mu = \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{m^2}{4} + \frac{m^2}{4} + \frac{m^2}{4}} = m = 0'',_{065}.$$

Istedetfor at forudsætte, at Observationerne have samme Vægte, kunde man — og maaske med mere Ret — have antaget, at Middelfejlen paa de aflæste Højder var proportional med Afstanden. Ere Stationerne D og E beliggende i Midten henholdsvis af $B\ C$ og $A\ B$, og er $A\ B = B\ C$, saa ville de to lange Sigter fra D til A og fra E til C være tre Gange saa lange som de øvrige. Gives de lange Sigter Vægten 1, ville de korte have Vægten 9, fordi Vægten er omvendt proportional med Middelfejlens Kvadrat

Altsaa er Vægten paa o_1 og o_6 lig 1 og paa o_2, o_3, o_4 og o_5 lig 9.

Normalligningerne blive

$$\left.\begin{aligned} \frac{4}{3}\,k_1 - \frac{2}{9}\,k_2 &= -\,0{,}18 \\ -\,\frac{2}{9}\,k_1 + \frac{4}{3}\,k_2 &= +\,0{,}13 \end{aligned}\right\}$$

eller

$$\left.\begin{aligned} 12\,k_1 - 2\,k_2 &= -\,1{,}62 \\ -\,2\,k_1 + 12\,k_2 &= +\,1{,}17. \end{aligned}\right\}$$

Ved Opløsningen faas

$$k_1 = -\,0{,}122$$
$$k_2 = +\,0{,}077.$$

Fejlene blive

		v^2	pv^2
$v_1 = -\,0{,}122$	afrundes til $v_1 = -\,0{,}12$	$0{,}0144$	$0{,}0144$
$v_2 = +\,0{,}014 + 0{,}009 = +\,0{,}023$	— - $v_2 = +\,0{,}02$	4	36
$v_3 = -\,0{,}009$	— - $v_3 = -\,0{,}01$	1	9
$v_4 = +\,0{,}014$	— - $v_4 = +\,0{,}02$	4	36
$v_5 = -\,0{,}014 - 0{,}009 = -\,0{,}023$	— - $v_5 = -\,0{,}02$	4	36
$v_6 = +\,0{,}077$	— - $v_6 = +\,0{,}08$	64	64
		$[pv^2] =$	$0{,}0325.$

Som Kontrol for Beregningen haves

$$[pv^2] = (-\,0{,}18)\,(-\,0{,}122) + 0{,}13 \;.\; 0{,}077 = 0{,}03197,$$

hvilken Værdi stemmer tilfredsstillende med ovenstaaende.

De berigtigede Aflæsninger blive

	Fald
$o'_1 = 91'',_{63}$	
	$22,_{39}$
$o'_2 = 69'',_{24}$	
	$20,_{75}$
$o'_3 = 48'',_{49}$	
$o'_4 = 69'',_{12}$	
	$22,_{39}$
$o'_5 = 46'',_{73}$	
	$20,_{75}$.
$o'_6 = 25'',_{98}$	

Middelfejlen paa Vægtenheden er

$$m = \sqrt{\frac{0,_{03197}}{2}} = 0'',_{126}.$$

Til Vægten 9 svarer

$$m_9 = 0'',_{042}.$$

Faldet fra C til A er $43,_{14}$; dets Middelfejl ville vi nu beregne.

Normalligningerne ere

$$\left.\begin{aligned} 12\, k_1 - 2\, k_2 &= -9\, o_1 + 9\, o_2 + 9\, o_4 - 9\, o_5 \\ -2\, k_1 + 12\, k_2 &= -9\, o_2 + 9\, o_3 + 9\, o_5 - 9\, o_6 \end{aligned}\right\}$$

og give

$$k_1 = \frac{-54\, o_1 + 45\, o_2 + 9\, o_3 + 54\, o_4 - 45\, o_5 - 9\, o_6}{70}$$

$$k_2 = \frac{-9\, o_1 - 45\, o_2 + 54\, o_3 + 9\, o_4 + 45\, o_5 - 54\, o_6}{70}.$$

Nu er

$$v_1 - v_3 = k_1 + \frac{k_2}{9} = \frac{-55\, o_1 + 40\, o_2 + 15\, o_3 + 55\, o_4 - 40\, o_5 - 15\, o_6}{70},$$

som indsat i (d) giver

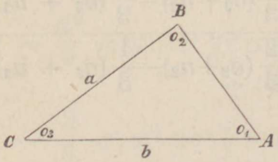
$$o'_1 - o'_3 = \frac{15\, o_1 + 40\, o_2 - 55\, o_3 + 55\, o_4 - 40\, o_5 - 15\, o_6}{70}$$

$$= \frac{3\, o_1 + 8\, o_2 - 11\, o_3 + 11\, o_4 - 8\, o_5 - 3\, o_6}{14}.$$

Endelig findes Middelfejlen paa $o'_1 - o'_3$

$$\mu = \frac{m}{14}\sqrt{\frac{9}{1} + \frac{64}{9} + \frac{121}{9} + \frac{121}{9} + \frac{64}{9} + \frac{9}{1}} = 0,_{55}\ m = 0'',_{069}$$

Faldet fra C til A kan forøvrigt udtrykkes paa flere Maader f. Ex. ved $o'_4 - o'_6$ eller ved $o'_2 - o'_3 + o'_4 - o'_5$. Beregningen kan derfor gjennemføres ad flere Veje, men Resultatet bliver altid det samme.



Ex. 2. I Trekanten $A\ B\ C$ har man maalt Vinklerne o_1, o_2 og o_3 med en Middelfejl af m Minutter samt Siden b, som antages at være fejlfri. Der søges Middelfejlen paa de udjevnede Vinkler og paa den af disse beregnede Side a.

Fundamentalligningen (her er kun en) er

$$o_1 + o_2 + o_3 = 180^0,$$

og Betingelsesligningen

$$v_1 + v_2 + v_3 = 180^0 - o_1 - o_2 - o_3.$$

Normalligningen bliver

$$3\ k_1 = 180^0 - o_1 - o_2 - o_3,$$

saa at

$$v_1 = v_2 = v_3 = k_1 = 60^0 - \frac{o_1 + o_2 + o_3}{3}.$$

De udjevnede Vinkler blive

$$\left.\begin{aligned} o'_1 &= o_1 + v_1 = 60^0 + \frac{2}{3} o_1 - \frac{1}{3} o_2 - \frac{1}{3} o_3 \\ o'_2 &= o_2 + v_2 = 60^0 - \frac{1}{3} o_1 + \frac{2}{3} o_2 - \frac{1}{3} o_3 \\ o'_3 &= o_3 + v_3 = 60^0 - \frac{1}{3} o_1 - \frac{1}{3} o_2 + \frac{2}{3} o_3. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Middelfejlen paa enhver af disse Vinkler er

$$\mu = m \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = m \sqrt{\frac{2}{3}}. \qquad (b)$$

Siden a findes af

$$a = b\ \frac{\sin o'_1}{\sin o'_2} = b\ \frac{\sin\left(60^0 + \frac{2}{3} o_1 - \frac{1}{3} o_2 - \frac{1}{3} o_3\right)}{\sin\left(60^0 - \frac{1}{3} o_1 + \frac{2}{3} o_2 - \frac{1}{3} o_3\right)}. \qquad (c)$$

Sætte vi i dette Udtryk istedetfor o_1, o_2 og o_3 henholdsvis $o_1 + u_1$, $o_2 + u_2$ og $o_3 + u_3$, hvor u'erne betegne Fejlene paa de observerede Vinkler, bliver a ændret til

$$a + k = b \frac{\sin\left(60^0 + \frac{2}{3}(o_1 + u_1) - \frac{1}{3}(o_2 + u_2) - \frac{1}{3}(o_3 + u_3)\right)}{\sin\left(60^0 - \frac{1}{3}(o_1 + u_1) + \frac{2}{3}(o_2 + u_2) - \frac{1}{3}(o_3 + u_3)\right)}$$

eller formedelst Taylors Formel

$$a + k = b\,\frac{T}{N},$$

hvor

$$T = \sin(60^0 + \frac{2}{3}o_1 - \frac{1}{3}o_2 - \frac{1}{3}o_3) + \cos(60^0 + \frac{2}{3}o_1 - \frac{1}{3}o_2 - \frac{1}{3}o_3)\,(\frac{2}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_2 - \frac{1}{3}u_3)$$

$$N = \sin(60^0 - \frac{1}{3}o_1 + \frac{2}{3}o_2 - \frac{1}{3}o_3) + \cos(60^0 - \frac{1}{3}o_1 + \frac{2}{3}o_2 - \frac{1}{3}o_3)(-\frac{1}{3}u_1 + \frac{2}{3}u_2 - \frac{1}{3}u_3)$$

$$a + k = b\,\frac{\sin o'_1 + \cos o'_1\,(\frac{2}{3}\,u_1 - \frac{1}{3}\,u_2 - \frac{1}{3}\,u_3)}{\sin o'_2 + \cos o'_2\,(-\frac{1}{3}\,u_1 + \frac{2}{3}\,u_2 - \frac{1}{3}\,u_3)}. \quad (d)$$

Ved Division med (c) erholdes

$$1 + \frac{k}{a} = \frac{1 + \cot o'_1\,(\frac{2}{3}\,u_1 - \frac{1}{3}\,u_2 - \frac{1}{3}\,u_3)}{1 + \cot o_2\,(-\frac{1}{3}\,u_1 + \frac{2}{3}\,u_2 - \frac{1}{3}\,u_3)} =$$

$$1 + \cot o'_1\,(\frac{2}{3}\,u_1 - \frac{1}{3}\,u_2 - \frac{1}{3}u_3) - \cot o'_2(-\frac{1}{3}\,u_1 + \frac{2}{3}\,u_2 - \frac{1}{3}u_3),$$

hvor anden og højere Potenser af u'erne ere bortkastede, altsaa

$$\frac{k}{a} = \cot o'_1\,(\frac{2}{3}\,u_1 - \frac{1}{3}\,u_2 - \frac{1}{3}u_3) - \cot o_2(-\frac{1}{3}\,u_1 + \frac{2}{3}u_2 - \frac{1}{3}u_3).$$

Men da det i dette Udtryk er forudsat, at u'erne ere udtrykte i Forholdsmaal, ville vi istedetfor u sætte u sin 1', hvor da u er udtrykt i Minutter. Derved erholdes

$$k = \frac{a}{3} \sin 1' \{(2 \cot o'_1 + \cot o'_2)\, u_1$$
$$- (\cot o'_1 + 2 \cot o'_2)\, u_2 - (\cot o'_1 - \cot o'_2)\, u_3\}.$$

Middelfejlen μ paa a bliver bestemt ved

$$\mu^2 = \frac{a^2}{9}\, m^2 \sin^2 1' \{(2 \cot o'_1 + \cot o'_2)^2 + (\cot o'_1 + 2 \cot o'_2)^2 + (\cot o'_1 - \cot o'_2)^2\}$$
$$= \frac{2}{3}\, a^2 m^2 \sin^2 1' (\cot^2 o'_1 + \cot o'_1 \cot o'_2 + \cot^2 o'_2).$$

Er Trekanten ligesidet, bliver

$$\mu^2 = 2 a^2 m^2 \sin^2 1' \cot^2 60^0 = \frac{2}{3}\, a^2 m^2 \sin^2 1'$$
$$\mu = am \sin 1' \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}00024\, am.$$

---

§ 5. Korrelatudjevningens Anvendelse paa en Vinkeltriangulation.

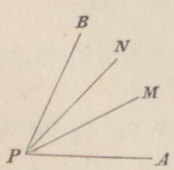
43. *To Methoder for Vinkelmaaling.*

Med Hensyn til Udjevningen skjelner man imellem to Methoder for Vinkelmaaling.

1°. Vinklerne maales uafhængigt af hverandre (Spejlinstrumenter).

2°. Vinklerne maales ved Satsmaaling (den almindelige Vinkelmaaler).

At der i disse to Methoder maa gjøre sig forskjellige Principper gjældende ved Udjevningen, ses af følgende Exempel.



Vinklen $APB = V$ i hosstaaende Figur antages at være maalt med et saa fint Instrument, at den kan betragtes som fejlfri. Nu skal man med et Instrument, der kun yder en forholdsvis ringe Nøjagtighed, bestemme Retningerne fra P til M og N.

1°. Vi antage først, at man til disse Retningers Bestemmelse maaler Vinklerne $APM = o_1$, $MPN = o_2$ og

$NPB = o_3$ uafhængigt af hverandre (Sextant), og at, paa Grund af de ved Maalingen begaaede Fejl, $o_1 + o_2 + o_3$ ikke bliver lig den forud fundne Værdi for $\angle APB$, men

$$o_1 + o_2 + o_3 = V - 1'.$$

Kaldes Fejlene paa disse o'er henholdsvis v_1, v_2 og v_3, haves

$$v_1 + v_2 + v_3 = 1'.$$

De sandsynligste Værdier for Fejlene ere nu aabenbart

$$v_1 = v_2 = v_3 = \frac{1'}{3}.$$

2°. Betjener man sig derimod til Bestemmelse af Retningerne PM og PN af en almindelig Vinkelmaaler, idet man stiller Instrumentet op i P og sigter til alle fire Punkter A, M, N og B (Satsmaaling), og erholder man derved en Værdi for $\angle APB$, der ligesom ovenfor er 1' mindre end dens sande Størrelse V, maa Fejlen alene hidrøre fra Sigterne til A og B; thi Fejl i Sigterne til M og N have aldeles ingen Indflydelse paa $\angle APB$; men naar Fejlen ligger alene i de to Sigter PA og PB, er den sandsynligste Fejl paa hver af dem $1/2'$ d. v. s. paa Sigtet $PA + \frac{1'}{2}$ og paa $PB - \frac{1'}{2}$ (minus fordi Vinklen findes ved at subtrahere Sigtet til B fra Sigtet til A).

Da Sigterne til M og N ikke have nogen Indflydelse paa Bestemmelsen af $\angle APB$, ere de *uafhængige* Observationsstørrelser og deres sandsynligste Fejl derfor nul.

Altsaa bliver den sandsynligste Fejl

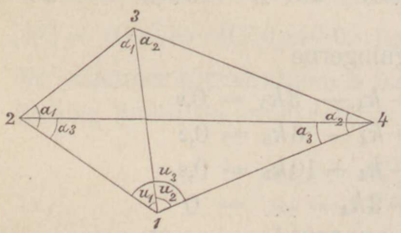
$$\begin{aligned} \text{paa } \angle APM \quad & v_1 = 1/2' \\ \text{— } \angle MPN \quad & v_2 = 0' \\ \text{— } \angle NPB \quad & v_3 = 1/2'. \end{aligned}$$

Uoverensstemmelsen mellem disse Værdier for v_1, v_2 og v_3 og de ovenfor under 1° fundne $\left(\frac{1'}{3}\right)$ viser, at man ikke kan fordele Fejlene paa samme Maade, naar Vinklerne ere maalte ved Satsmaaling, som naar de ere maalte uafhængigt af hverandre. Aarsagen til, at man maa gjøre denne Adskillelse mellem de to Methoder for Vinkelmaaling, er allerede omtalt i Anmærkningen til Art. 18.

44. Vinklerne ere maalte uafhængigt af hverandre (Spejlinstrumenter). Det karakteristiske ved Maaling med Spejlinstrumenter er, at Vinklen direkte bliver observeret, saa at der i Modsætning til Maaling med den almindelige Vinkelmaaler ikke kan blive Spørgsmaal om Fejlen i hvert enkelt af Vinklens Ben.

Efterat Fundamentalligningerne, hvis Dannelse her forudsættes bekjendt, ere opskrevne, giver man hver enkelt Vinkel en Tilvæxt (Fejl) og bringer Ligningerne paa lineær Form (Betingelsesligningerne), hvorefter man finder de sandsynligste Værdier for Tilvæxterne (Fejlene) ved Korrelatudjevning.

Det er en Selvfølge, at hvis man, istedetfor at maale en Vinkels Projektion paa det horizontale Plan, har maalt selve Vinklen, maa den derfra hidrørende *lovmæssige* Fejl først beregnes og Vinklen rettes, forinden Udjevningen foretages.



Exempel. I hosstaaende Figur ere Vinklerne maalte saaledes:

$$
\begin{array}{lll}
u_1 = 47^0\,53',_1 & u_2 = 75^0\,00',_1 & u_3 = 122^0\,53',_2 \\
a_1 = 71^0\,36',_7 & a_2 = 61^0\,16',_5 & a_3 = 23^0\,33',_3 \\
\alpha_1 = 60^0\,29',_3 & \alpha_2 = 43^0\,43',_2 & \alpha_3 = 33^0\,32',_7 \\
\hline
179^0\,59',_1 & 179^0\,59',_8 & 179^0\,59',_2.
\end{array}
$$

Fundamentalligningerne ere

$$
\begin{aligned}
u_1 + a_1 + \alpha_1 &= 180^0 \\
u_2 + a_2 + \alpha_2 &= 180^0 \\
u_3 + a_3 + \alpha_3 &= 180^0 \\
u_1 + u_2 - u_3 &= 0
\end{aligned}
$$

$$\sin a_1 \sin a_2 \sin a_3 = \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3.$$

De fire første af disse Ligninger ere lineære, den femte, der kaldes Sideligningen, er logarithmisk og bringes paa lineær Form ved Hjælp af de i Logarithmetavlen staaende Differenser.

Lalandes Tavle giver, idet Fejlene paa a_1, a_2, a_3 o. s. v. betegnes ved (a_1), (a_2), (a_3) . . .

$\log\sin(a_1+(a_1))=9{,}97724+\ 4(a_1)$	$\log\sin(\alpha_1+(\alpha_1))=9{,}93965+\ 7(\alpha_1)$
$\log\sin(a_2+(a_2))=9{,}94297+\ 7(a_2)$	$\log\sin(\alpha_2+(\alpha_2))=9{,}83957+13(\alpha_2)$
$\log\sin(a_3+(a_3))=9{,}60166+29(a_3)$	$\log\sin(\alpha_3+(\alpha_3))=9{,}74240+19(\alpha_3)$

$$9{,}52187+4(a_1)+7(a_2)+29(a_3) = 9{,}52162+7(\alpha_1)+13(\alpha_2)+19(\alpha_3).$$

De lineære Betingelsesligninger blive

$$\begin{aligned}(u_1)+(a_1)+(\alpha_1) &= 0{,}9\\ (u_2)+(a_2)+(\alpha_2) &= 0{,}2\\ (u_3)+(a_3)+(\alpha_3) &= 0{,}8\\ (u_1)+(u_2)-(u_3) &= 0^{*)}\\ 4(a_1)+7(a_2)+29(a_3)-7(\alpha_1)-13(\alpha_2)-19(\alpha_3) &= -25.\end{aligned}$$

Heraf dannes Normalligningerne

$$\begin{aligned}3k_1 \qquad\qquad\qquad + k_4 - 3k_5 &= 0{,}9\\ 3k_2 \qquad\quad + k_4 - 6k_5 &= 0{,}2\\ 3k_3 - k_4 + 10k_5 &= 0{,}8\\ k_1 + k_2 - k_3 + 3k_4 \qquad &= 0\\ -3k_1 - 6k_2 + 10k_3 \qquad + 1485k_5 &= -25,\end{aligned}$$

idet vi her som stedse i Exemplerne i denne § forudsætte, at Vinklerne ere maalte med samme Nøjagtighed. Normalligningerne give

$$\begin{aligned}k_1 &= +0{,}279\\ k_2 &= +0{,}027\\ k_3 &= +0{,}331\\ k_4 &= +0{,}008\\ k_5 &= -0{,}0184.\end{aligned}$$

---

*) Her, hvor Vinklerne ere maalte uafhængigt af hverandre, er det tilfældigt, at Ligningen $u_1+u_2-u_3=0$ er tilfredsstillet.

De sandsynligste Fejl blive

					Fejlkvadrater
(u_1)	$= +0{,}279 + 0{,}008$	$= +0',287$	afr. til	$+0',29$	$0{,}0841$
(u_2)	$= +0{,}027 + 0{,}008$	$= +0',035$	—	$+0',03$	9
(u_3)	$= +0{,}331 - 0{,}008$	$= +0',323$	—	$+0',32$	1024
(a_1)	$= +0{,}279 - 0{,}074$	$= +0',205$	—	$+0',20$	400
(a_2)	$= +0{,}027 - 0{,}129$	$= -0',102$	—	$-0',10$	100
(a_3)	$= +0{,}331 - 0{,}534$	$= -0',203$	—	$-0',20$	400
(α_1)	$= +0{,}279 + 0{,}129$	$= +0',408$	—	$+0',41$	1681
(α_2)	$= +0{,}027 + 0{,}239$	$= +0',266$	—	$+0',27$	729
(α_3)	$= +0{,}331 + 0{,}350$	$= +0',681$	—	$+0',68$	4624
				$[v^2]$	$= 0{,}9808.$

Ved Bortkastelsen af 3die Decimal i Minutter bør man sørge for, at de fire første Betingelsesligninger nøjagtigt blive fyldestgjorte; (u_2) bør saaledes ikke gjøres til $+0{,}04$; thi derved blev hverken den anden eller fjerde af disse Ligninger tilfredsstillet.

Som Kontrol for Beregningen haves

$$[v^2] = 0{,}9 \cdot 0{,}279 + 0{,}2 \cdot 0{,}027 + 0{,}8 \cdot 0{,}331 + 0 \cdot 0{,}008 + 25 \cdot 0{,}0184 = 0{,}9813,$$

der stemmer tilfredsstillende med den ovenfor fundne Værdi. Endelig findes de sandsynligste Værdier for Vinklerne

$$\begin{aligned}
u_1 &= 47^0\ 53',39 \\
u_2 &= 75^0\ 00',13 \\
u_3 &= 122^0\ 53',52 \\
a_1 &= 71^0\ 36',90 \\
a_2 &= 61^0\ 16',40 \\
a_3 &= 23^0\ 33',10 \\
\alpha_1 &= 60^0\ 29',71 \\
\alpha_2 &= 43^0\ 43',47 \\
\alpha_3 &= 33^0\ 33',38,
\end{aligned}$$

hvis Rigtighed prøves ved at undersøge, om de fyldestgjøre Fundamentalligningerne.

Middelfejlen i de maalte Vinkler er

$$m = \sqrt{\frac{0{,}9808}{5}} = 0',44.$$

Sideligningen kan fremstilles paa flere Maader, den er her dannet med 1 som Toppunkt, d. v. s. den fremkommer ved af Siden 1 — 2 at beregne 1 — 3, deraf 1 — 4 og sluttelig af denne igjen 1 — 2. Man kunde ogsaa have valgt ethvert af de andre Punkter 2, 3 eller 4 til Toppunkt, og Udjevningen vil give samme Resultat, hvilken af de fire Sideligninger man benytter.

Derimod maa det iagttages, at netop de maalte Vinkler og ikke saadanne, som deraf kunne afledes (Funktioner af Observationsstørrelser), indgaa i Fundamentalligningerne; forekommer der derfor i disse en Vinkel, som ikke direkte er maalt, maa den fremstilles som Funktion af direkte maalte Vinkler. Vilde man f. Ex. indføre Vinkelsumsligningen for Trekant 2—3—4 istedetfor en af de andre Vinkelsumsligninger, skal den skrives saaledes

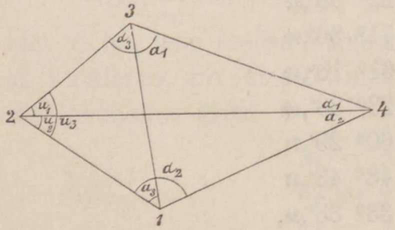
$$a_1 - \alpha_3 + \alpha_1 + a_2 + \alpha_2 - a_3 = 180^0,$$

og den lineære Betingelsesligning blev

$$(a_1) + (a_2) - (a_3) + (\alpha_1) + (\alpha_2) - (\alpha_3) = 0{,}3.$$

Istedetfor log sin af Vinkel 3 — 4 — 2 indføres

$$\log\sin(\alpha_2 - a_3 + (\alpha_2) - (a_3)) = \log\sin(20^0\,09',9 + (\alpha_2) - (a_3))$$
$$= 9{,}53748 + 35\,(\alpha_2) - 35\,(a_3).$$



For at paavise, hvilken Betydning det har, at denne Regel bliver iagttaget, fremsættes her en Udjevning af den samme Firkant, men under andre Forudsætninger, nemlig at de maalte Vinkler ere (se hosstaaende Figur):

$$u_1 = 38^0\,04',0 \qquad u_2 = 33^0\,32',7 \qquad u_3 = 71^0\,36',7$$
$$a_1 = 121^0\,45',8 \qquad a_2 = 23^0\,33'3 \qquad a_3 = 47^0\,53',1$$
$$\alpha_1 = 20^0\,09,9 \qquad \alpha_2 = 122^0\,53',2 \qquad \alpha_3 = 60^0\,29',3.$$

Tavlen giver

$$\begin{array}{l|l} \log\sin(a_1+(a_1))=9{,}92954-8(a_1) & \log\sin(\alpha_1+(\alpha_1))=9{,}53748+35(\alpha_1) \\ \log\sin(a_2+(a_2))=9{,}60166+29(a_2) & \log\sin(\alpha_2+(\alpha_2))=9{,}92414-8(\alpha_2) \\ \log\sin(a_3+(a_3))=9{,}87029+11(a_3) & \log\sin(\alpha_3+(\alpha_3))=9{,}93965+7(\alpha_3) \end{array}$$

$$9{,}40149-8(a_1)+29(a_2)+11(a_3) = 9{,}40127+35(\alpha_1)-8(\alpha_2)+7(\alpha_3).$$

Betingelsesligningerne blive

$$\begin{aligned} (u_1) + (a_1) + (\alpha_1) &= 0{,}3 \\ (u_2) + (a_2) + (\alpha_2) &= 0{,}8 \\ (u_3) + (a_3) + (\alpha_3) &= 0{,}9 \\ (u_1) + (u_2) - (u_3) &= 0 \\ -8(a_1) + 29(a_2) + 11(a_3) - 35(\alpha_1) + 8(\alpha_2) - 7(\alpha_3) &= -22, \end{aligned}$$

de heraf dannede Normalligninger ere

$$\begin{aligned} 3k_1 \qquad\qquad\qquad + k_4 - 43k_5 &= 0{,}3 \\ 3k_2 \qquad\quad + k_4 + 37k_5 &= 0{,}8 \\ 3k_3 - k_4 + 4k_5 &= 0{,}9 \\ k_1 + k_2 - k_3 + 3k_4 \qquad\quad &= 0 \\ -43k_1 + 37k_2 + 4k_3 \qquad + 2364k_5 &= -22, \end{aligned}$$

som give

$$\begin{aligned} k_1 &= -0{,}222 \\ k_2 &= +0{,}541 \\ k_3 &= +0{,}331 \\ k_4 &= +0{,}004 \\ k_5 &= -0{,}0224. \end{aligned}$$

De sandsynligste Værdier for

Fejlene	og	Vinklerne blive
$(u_1) = -0',22$		$u_1 = 38^0\ 03',78$
$(u_2) = +0',55$		$u_2 = 33^0\ 33',25$
$(u_3) = +0',33$		$u_3 = 71^0\ 37',03$
$(a_1) = -0',04$		$a_1 = 121^0\ 45',76$
$(a_2) = -0',01$		$a_2 = 23^0\ 33',19$
$(a_3) = +0',08$		$a_3 = 47^0\ 53',18$
$(\alpha_1) = +0',56$		$\alpha_1 = 20^0\ 10',46$
$(\alpha_2) = +0',36$		$\alpha_2 = 122^0\ 53',56$
$(\alpha_3) = +0',49$		$\alpha_3 = 60^0\ 29',79.$

Disse Vinkler ere ikke overensstemmende med de ovenfor fundne, navnlig er Forskjellen stor for Vinklen 3—1—2's Vedkommende, idet de to fundne Værdier ere

$$47^0\ 53',_{18} \quad \text{og} \quad 47^0\ 53',_{39},$$

en Forskjel af $0',_{21}$ eller omtrent Halvdelen af Middelfejlen.

45. Vinklerne ere maalte ved Satsmaaling. (Den almindelige Vinkelmaaler.) Det karakteristiske ved Satsmaaling er, at ikke selve de Maalingen vedkommende Vinkler blive maalte, men derimod de Vinkler — i det følgende benævnede Sigter —, som Vinklernes Ben danne med en ubekjendt og Opgaven aldeles uvedkommende Retning, nemlig den, som Sigtelinien indtager, naar Aflæsningen paa Kredsen viser nul. En maalt Vinkel er derfor ikke nogen Observationsstørrelse, men en Funktion af saadanne, nemlig Differensen mellem to Sigter. Disse Sigter gives Tilvæxter, hvorved Fejlene paa Vinklerne blive fremstillede som Differenser af to saadanne Tilvæxter.

Til Exempel fremsættes her en Udjevning af Firkanten i forrige Art., foretaget under Forudsætning af, at Vinklerne ere maalte ved Satsmaaling.

De observerede Sigter og de deraf beregnede Vinkler ses af hosstaaende Skema.

Toppunkt	Sigte til	Aflæsning		Vinkel	
		°	′	°	′
1	4	230	29,9	75	00,1
	3	155	29,8	47	53,1
	2	107	36,7		
2	1	243	28,8	33	32,7
	4	209	56,1	38	04,0
	3	171	52,1		
3	2	301	04,3	60	29,3
	1	240	35,0	61	16,5
	4	179	18,5		
4	3	11	56,0	20	09,9
	2	351	46,1	23	33,3
	1	328	12,8		

Fejlen paa Sigtet fra 1 til 2 og fra 1 til 3 betegnes her hensigtsmæssigt ved (1 . 2), (1 . 3) o. s. v.

Vælges 1 til Toppunkt, kunne de i forrige Art. noterede Differenser for Logarithmerne af Vinklernes sin. benyttes. Man faar da

$$\begin{gathered}4\,((2.1) - (2.3)) + 7\,((3.1) - (3.4)) + 29\,((4.2) - (4.1)) \\ -7\,((3.2) - (3.1)) - 13\,(4.3) - (4.1)) - 19\,((2.1) - (2.4)) = -25\end{gathered}$$

eller

$$\begin{gathered}-15(2.1) + 19\,(2.4) - 4\,(2.3) - 7\,(3.2) + 14\,(3.1) - 7\,(3.4 \\ - 13\,(4.3) + 29\,(4.2) - 16\,(4.1) = -25.\end{gathered}$$

Betingelsesligningerne blive

$$\begin{gathered}(1.3) - (1.2) + (2.1) - (2.3) + (3.2) - (3.1) = 0{,}9 \\ (1.4) - (1.3) + (3.1) - (3.4) + (4.3) - (4.1) = 0{,}2 \\ (1.4) - (1.2) + (2.1) - (2.4) + (4.2) - (4.1) = 0{,}8 \\ -1{,}5\,(2.1) + 1{,}9\,(2.4) - 0{,}4\,(2.3) - 0{,}7\,(3.2) + 1{,}4\,(3.1) \\ -0{,}7\,(3.4) - 1{,}3\,(4.3) + 2{,}9\,(4.2) - 1{,}6\,(4.1) = -2{,}5.\end{gathered}$$

Heraf dannes Normalligningerne

$$\left.\begin{array}{rcl} & & \text{Sum af Koeff.} \\ 6\,k_1 - 2\,k_2 + 2\,k_3 - 3{,}2\,k_4 = 0{,}9 & \ldots & +\,3{,}7 \\ -\,2\,k_1 + 6\,k_2 + 2\,k_3 + 2{,}4\,k_4 = 0{,}2 & \ldots & +\,8{,}6 \\ 2\,k_1 + 2\,k_2 + 6\,k_3 + 1{,}1\,k_4 = 0{,}8 & \ldots & +11{,}9 \\ -3{,}2\,k_1 + 2{,}4\,k_2 + 1{,}1\,k_3 + 21{,}62\,k_4 = -2{,}5 & \ldots & +19{,}42 \end{array}\right\} \quad (a)$$

Til højre er anført Summen af Koefficienterne og det konstante Led, hvilken Sum benyttes som Kontrol for Regningen, saaledes som forklaret i Art. 30.

Multipliceres den første af Normalligningerne med $\frac{2}{6}$, $-\frac{2}{6}$ og $\frac{3{,}2}{6}$ ved Hjælp af Regnestokken (eller Logarithmer), faas

$$\left.\begin{array}{rcl} 2\,k_1 - 0{,}67\,k_2 + 0{,}67\,k_3 - 1{,}07\,k_4 = 0{,}30 & \ldots & +\,1{,}23 \\ -\,2\,k_1 + 0{,}67\,k_2 - 0{,}67\,k_3 + 1{,}07\,k_4 = -0{,}30 & \ldots & -\,1{,}23 \\ +3{,}2k_1 - 1{,}07\,k_2 + 1{,}07\,k_3 - 1{,}71\,k_4 = 0{,}48 & \ldots & +\,1{,}97 \end{array}\right\} \quad (a')$$

Adderes disse Ligninger efter Ordenen til den anden, tredie og fjerde Ligning (a), fremkommer

$$\left.\begin{array}{l} 5{,}33\,k_2 + 2{,}67\,k_3 + 1{,}33\,k_4 = 0{,}50 \ldots + 9{,}83 \\ 2{,}67\,k_2 + 5{,}33\,k_3 + 2{,}17\,k_4 = 0{,}50 \ldots + 10{,}67 \\ 1{,}33\,k_2 + 2{,}17\,k_3 + 19{,}91\,k_4 = -2{,}02 \ldots + 21{,}39 \end{array}\right\} \quad (b)$$

Multipliceres den første af disse Ligninger med $-\frac{2{,}67}{5{,}33}$ og $-\frac{1{,}33}{5{,}33}$, faas

$$\left.\begin{array}{l} -2{,}67\,k_2 - 1{,}33\,k_3 - 0{,}67\,k_4 = -0{,}25 \ldots - 4{,}93 \\ -1{,}33\,k_2 - 0{,}67\,k_3 - 0{,}33\,k_4 = -0{,}12 \ldots - 2{,}45 \end{array}\right\} \quad (b')$$

Ved at addere disse Ligninger til hver sin af de to sidste (b), erholdes

$$\left.\begin{array}{l} 4\,k_3 + 1{,}5\,k_4 = 0{,}25 \ldots (5{,}74)\ 5{,}75 \\ 1{,}5\,k_3 + 19{,}58\,k_4 = -2{,}14 \ldots 18{,}94. \end{array}\right\} \quad (c)$$

Multipliceres den første af disse Ligninger med $-\frac{1{,}5}{4}$, faas

$$-1{,}5\,k_3 - 0{,}56\,k_4 = -0{,}09 \ldots - 2{,}15, \quad (c')$$

som adderet til den anden (c) giver

$$19{,}02\,k_4 = -2{,}23 \ldots + 16{,}79, \quad (d)$$

hvoraf man faar

$$k_4 = -0{,}117,$$

som indsat i den første (c) bestemmer

$$k_3 = +0{,}106;$$

derefter findes af den første (b) (Regnestokken kan anvendes)

$$k_2 = +0{,}070$$

og endelig ved Hjælp af (a)

$$k_1 = +0{,}075.$$

Fejlene paa Sigterne blive

		Fejlkvadrater
(1.4) $= +0{,}070 + 0{,}106 = +0'{,}176$	afr. til $+0'{,}17$	0,0310
(1.3) $= +0{,}075 - 0{,}070 = +0'{,}005$	— $0'{,}00$	0
(1.2) $= -0{,}075 - 0{,}106 = -0'{,}181$	— $-0'{,}18$	328

					Fejlkvadrater
(2.1)	$= +0{,}075 + 0{,}106 + 0{,}175$	$= +0',356$	afr. til	$+0',36$	$0{,}1267$
(2.4)	$= -0{,}106 - 0{,}222$	$= -0',328$	—	$-0',33$	1076
(2.3)	$= -0{,}075 + 0{,}047$	$= -0',028$	—	$-0{,}03$	8
(3.2)	$= +0{,}075 + 0{,}082$	$= +0',157$	—	$+0{,}16$	246
(3.1)	$= -0{,}075 + 0{,}070 - 0{,}164$	$= -0',169$	—	$-0',17$	286
(3.4)	$= -0{,}070 + 0{,}082$	$= +0',012$	—	$+0',01$	1
(4.3)	$= +0{,}070 + 0{,}152$	$= +0',222$	—	$+0',22$	493
(4.2)	$= +0{,}106 - 0{,}339$	$= -0',233$	—	$-0',23$	543
(4.1)	$= -0{,}070 - 0{,}106 + 0{,}187$	$= +0',011$	—	$+0',01$	1
				$[v^2]$	$= 0{,}4559.$

Som Kontrol for Regningen haves

$$[v^2] = 0{,}9 \,.\, 0{,}075 + 0{,}2 \,.\, 0{,}070 + 0{,}8 \,.\, 0{,}106 + 2{,}5 \,.\, 0{,}117 = 0{,}4588.$$

Overensstemmelsen med den ovenfor fundne Værdi for $[v^2]$ er et Vidnesbyrd om, at Regnestokken har givet tilstrækkelig Nøjagtighed.

De rettede Værdier for Sigterne og Vinklerne blive,

for Sigtet fra	1 til 4 $= 230^0\,30',07$		
	1 — 3 $= 155^0\,29',80$	$\angle$ 4—1—3	$= 75^0\,00',27$
	1 — 2 $= 107^0\,36',52$	3—1—2	$= 47^0\,53',28$
	2 — 1 $= 243^0\,29',16$		
	2 — 4 $= 209^0\,55',77$	1—2—4	$= 33^0\,33',39$
	2 — 3 $= 171^0\,52',07$	4—2—3	$= 38^0\,03',70$
	3 — 2 $= 301^0\,04',46$		
	3 — 1 $= 240^0\,34',83$	2—3—1	$= 60^0\,29',63$
	3 — 4 $= 179^0\,18',51$	1—3—4	$= 61^0\,16',32$
	4 — 3 $= 11^0\,56',22$		
	4 — 2 $= 351^0\,45',87$	3—4—2	$= 20^0\,10',35$
	4 — 1 $= 328^0\,12',81$	2—4—1	$= 23^0\,33',06.$

Middelfejlen i et Sigte bliver

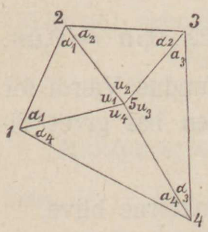
$$m = \sqrt{\frac{0{,}1559}{4}} = 0',338,$$

og da en Vinkel er Differensen af to Sigter, vil dens Middelfejl være

$$0',_{338}\sqrt{2} = 0,_{48}.$$

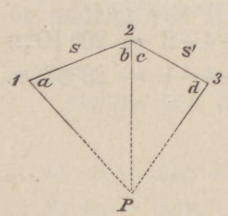
Det fortjener at fremhæves, at Summen af Fejlene paa samtlige fra et Punkt udgaaende Sigter er lig nul; f. Ex. $(1.4) + (1.3) + (1.2) = 0$. Dette benyttes til at prøve Rigtigheden af Fejlenes Beregning af Korrelaterne, hvorimod det ikke er nogen Kontrol for Normalligningernes Dannelse eller deres rigtige Opløsning; thi Summen er nul for hvilkesomhelst Værdier af Korrelaterne.

46. Sammenligning mellem Methoderne i de to foregaaende Artikler. Hvis Vinklerne i hosstaaende Figur ere maalte uafhængigt af hverandre, vil man faa 6 Fundamentalligninger, nemlig 4 Vinkelsumsligninger, 1 Sideligning, og endvidere en Ligning, der udtrykker, at Summen af Vinklerne omkring Punktet 5 skal være lig 360⁰, altsaa



$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 360^0; \qquad (a)$$

men ere Vinklerne maalte ved Satsmaaling, bortfalder denne sidste Fundamentalligning, idet den, som man let ser, bliver identisk, og (a) tilfredsstilles af hvilkesomhelst Værdier for Sigterne. Overalt hvor der forekommer en Relation mellem Vinklerne omkring et Punkt, vil Satsmaalingen derfor give et mindre Antal Fundamentalligninger, end man erholder, naar Vinklerne ere maalte uafhængigt af hverandre. Som Følge heraf er Udjevningen i første Tilfælde stundom lettere at udføre end i sidste.



I hosstaaende Figur forestiller 1 — 2 = s, og 2 — 3 = s' to Sider i et Triangelnet, der allerede er udjevnet og derfor anses for fejlfrit (jfr. følgende Art.). a, b, c og d ere Vinkler, der for at bestemme Punktet P ere maalte samtidig med Vinklerne i Triangelnettet.

Ere Vinklerne maalte uafhængigt af hverandre, faar man to Fundamentalligninger, nemlig

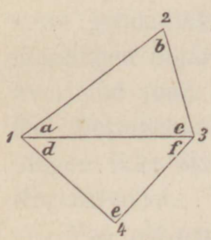
$$b + c = \angle 1 - 2 - 3 \qquad (b)$$

$$\frac{s \sin a}{\sin (a + b)} = \frac{s' \sin d}{\sin (c + d)}; \qquad (c)$$

har man derimod maalt Vinklerne ved Satsmaaling, bortfalder (b) som identisk, saa at man kun faar en Fundamentalligning.

Det bemærkes, at f. Ex. Vinklen c skal beregnes ved at subtrahere det forhen *berigtigede* Sigte 2 — 3 fra det *observerede* 2 — P.

Har man som Fundamentalligninger kun Vinkelsumsligninger, vil man, naar Vinklerne ere maalte uafhængigt af hverandre, kunne udjevne hver Trekant for sig; men ere Vinklerne maalte ved Satsmaaling, maa man for at faa en exakt Udjevning foretage denne for samtlige Trekanter under et. Dette oplyses her kun ved et simpelt Exempel.



Vinklerne i hosstaaende Figur ere maalte saaledes

$a = 35^0\ 42',0$	$d = 40^0\ 30',0$
$b = 70^0\ 22',5$	$e = 90^0\ 29',0$
$c = 73^0\ 56',4$	$f = 49^0\ 00',4$
$180^0\ 00',9$	$179^0\ 59',4$

1^0. Vinklerne forudsættes at være maalte *uafhængigt* af hverandre.

Betingelsesligningerne ere

$$(a) + (b) + (c) = -\ 0{,}9$$
$$(d) + (e) + (f) = +\ 0{,}6.$$

Normalligningerne blive

$$3\ k_1 = -\ 0{,}9$$
$$3\ k_2 = +\ 0{,}6$$

og give

$$k_1 = -\ 0{,}3$$
$$k_2 = +\ 0{,}2,$$

saa at man faar

$$(a) = (b) = (c) = -\ 0{,}3$$
$$(d) = (e) = (f) = +\ 0{,}2,$$

hvilket ogsaa vilde erholdes ved at udjevne Fejlene for hver Trekant for sig jfr. Ex. 2, Art. 42.

2^0. Vinklerne forudsættes at være maalte ved *Satsmaaling*.

Betingelsesligningerne skrives saaledes

$$(1.3) - (1.2) + (2.1) - (2.3) + (3.2) - (3.1) = -0{,}9$$
$$(1.4) - (1.3) + (3.1) - (3.4) + (4.3) - (4.1) = +0{,}6.$$

Heraf dannes Normalligningerne

$$6\,k_1 - 2\,k_2 = -0{,}9$$
$$-2\,k_1 + 6\,k_2 = +0{,}6,$$

der give

$$k_1 = -0{,}131$$
$$k_2 = +0{,}056.$$

Fejlene paa Sigterne blive

$$(1.4) = +0',056$$
$$(1.3) = -0',187$$
$$(1.2) = +0',131$$
$$(2.1) = -0',131$$
$$(2.3) = +0',131$$
$$(3.2) = -0',131$$
$$(3.1) = +0',187$$
$$(3.4) = -0',056$$
$$(4.3) = +0',056$$
$$(4.1) = -0',056,$$

og Tilvæxterne paa Vinklerne med de ovenfor brugte Betegnelser

$$(a) = -0',32$$
$$(b) = -0',26$$
$$(c) = -0',32$$
$$(d) = +0',24$$
$$(e) = +0',11$$
$$(f) = +0',25.$$

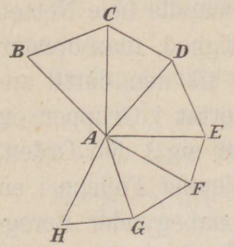
Havde man derimod urigtigt foretaget Udjevningen for hver Trekant for sig, vilde man have fundet samme Tilvæxter som i 1^0, hvilke ikke ere uvæsentlig forskjellige fra de her fundne.

47. Tilnærmende Udjevning. Naar Triangelnettet har en større Udstrækning, vil det ofte være uoverkommeligt at foretage Udjevningen strengt ved at behandle hele Nettet under et; i alt Fald vil den større Nøjagtighed, man opnaar ved den exakte Udjevning, ikke svare til den dertil anvendte Tid. Man deler derfor Triangelnettet i Grupper og foretager Udjevningen for hver Gruppe for sig i den Orden, hvori de indgaa i Nettet. Har man udjevnet Fejlene i en Gruppe, maa man, naar man derpaa paabegynder Beregningen for en Nabogruppe, selvfølgelig ikke tillægge de allerede rettede Vinkler (Sextant) eller Sigter (alm. Vinkelmaaler) nogen Fejl.

Hvor store man skal vælge Grupperne, afhænger af den Nøjagtighed, hvormed man vil have Udjevningen udført, og af den Tid, man vil offre derpaa; jo større man gjør Grupperne, desto vidtløftigere vil Beregningen blive, men desto større Nøjagtighed vil man ogsaa opnaa. Ved de store geodætiske Maalinger (Gradmaalinger), hvor Vinkelmaalingen tager meget lang Tid, gjør man Grupperne store, hvorimod man i den økonomiske Landmaaling kun tager faa Betingelsesligninger for ad Gangen, for at Beregningen ikke skal blive for besværlig i Sammenligning med Markarbejdet.

Ved økonomiske Maalinger benyttes næsten altid den almindelige Vinkelmaaler til Bestemmelse af Vinklerne i et Triangelnet; desuagtet anvender man undertiden Methoden i Art. 44 ved Udjevningen, forsaavidt dette letter Arbejdet, saaledes navnlig, naar der forekommer en Gruppe Triangler, som ikke indeholder nogen anden Overbestemmelse end den, der fremgaar af, at man har maalt alle tre Vinkler i Trekanterne (Vinkelsumsligninger). I dette Tilfælde anvender man nemlig i Praxis ofte den Regel, at man fordeler Forskjellen mellem Vinkelsummen og 180^0 lige paa Trekantens tre Vinkler, skjønt dette ifølge forrige Art. ikke er korrekt. Denne Vilkaarlighed maa dog vistnok anses for tilladelig, naar Trekanterne ere smaa; dog bør man have Opmærksomheden henvendt paa, at ikke en Vinkel.

der er Summen eller Differensen af flere i Trekanterne forekommende Vinkler, ved denne Methode faar en urimelig stor Tilvæxt. Antage vi f. Ex., at Summen af de maalte Vinkler i hver af de 6 Trekanter i hosstaaende Figur er 1′ mindre end 180°, skulde man, efter den nys angivne Regel, føje en Tilvæxt af $^1/_3{}'$ til hver af Vinklerne; men derved fik Vinklen $H\ A\ B$ en Tilvæxt af $6 . ^1/_3 = 2'$, der er aldeles urimelig, da denne Vinkel er maalt med samme Nøjagtighed, som alle de andre; man bør i dette Tilfælde kun lægge smaa Tilvæxter paa Vinklerne ved A.



Ere Trekantsiderne meget smaa (under 1000 Alen), vil en Udjevning, selv naar Triangelnettet deles i smaa Grupper, være for vidtløftig. Man indskrænker sig da til at fordele Forskjellen mellem Summen af Vinklerne i hver enkelt Trekant og 180° lige paa de tre Vinkler, dog under Iagttagelse af, at de Relationer, der eventuelt finde Sted mellem Vinklerne omkring et Punkt, blive fyldestgjorte. Man paabegynder derefter Beregningen af Sidernes Logarithmer; det vil saa i Almindelighed vise sig, at Sideligningerne ikke ere tilfredsstillede, idet man, ved fra en Side at føre Beregningen gjennem en Række af Sider tilbage til Udgangssiden, ikke erholder den samme Logarithme for denne, som man gik ud fra. Uoverensstemmelsen jevnes da paa de mellemliggende Siders Logarithmer.

Ved den paafølgende Beregning af Koordinaterne er ikke videre at bemærke, end at, da Nettets Fundamentalligninger nu ikke ere fyldestgjorte, vil der i Reglen opstaa smaa Uoverensstemmelser i Regningen.

Fjerde Kapitel.

Fejlen i Bestemmelsen af et Punkt i et Plan.

---

48. Fejlen i et Punkts Koordinater og Fejlen i dets Beliggenhed. Middelfejlen. Nøjagtigheden, hvormed et Punkt i et Plan er bestemt, angives ved Middelfejlene i Punktets Koordinater. Paa Beregningen heraf er der i Art. 16 anført et Exempel (4). Denne Methode at angive Nøjagtigheden paa har imidlertid den Mangel, at man, da de to Koordinater i Almindelighed have forskjellig Middelfejl, ikke faar nogen bestemt Maalestok for Godheden af Punktets Bestemmelse. Dette opnaas ved Middelfejlen i Punktets Beliggenhed.

Ere Punktets sandsynligste Koordinater X og Y behæftede med Fejlene x_0 og y_0, vil Fejlen f i Punktets Beliggenhed, hvorved forstaas Afstanden mellem Punktets sande Sted $(X + x_0,\ Y + y_0)$ og dets sandsynligste Sted (X, Y), være Hypotenuse i en retvinklet Trekant, hvis Katheter ere x_0 og y_0, og altsaa være bestemt ved

$$f^2 = x_0^2 + y_0^2. \tag{142}$$

Middelværdien af f^2 er

$$\mu^2 = m_x^2 + m_y^2,$$

saa at

$$\mu = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}, \tag{143}$$

hvor m_x og m_y ere Middelfejlene i Koordinaterne, og μ Middelfejlen i Punktets Beliggenhed, eller kortere kaldet „Punktets Middelfejl".

Da et Punkt er bestemt ved to Maal, kræver en Udjevning to Elementer, hvortil Punktets Koordinater kunne vælges.

Ifølge (114) ville Middelfejlene i Koordinaterne med sædvanlige Betegnelser være bestemte ved

$$m_x^2 = \frac{[b^2]}{[a^2]\,[b^2] - [ab]^2}\, m^2 \tag{144}$$

$$m_y^2 = \frac{[a^2]}{[a^2]\,[b^2] - [ab]^2}\, m^2, \tag{145}$$

hvor Middelfejlen paa alle Observationer er lig m.

Af (144) og (145) faas

$$\mu^2 = m_x^2 + m_y^2 = \frac{[a^2] + [b^2]}{[a^2]\,[b^2] - [ab]^2}\, m^2. \tag{146}$$

Er

$$[a^2] = [b^2]$$

og

$$[ab] = 0,$$

bliver

$$m_x^2 = m_y^2 = \frac{m^2}{[a^2]} \tag{147}$$

$$\mu^2 = \frac{2\, m^2}{[a^2]}. \tag{148}$$

49. Fejlellipsen. Har det sandsynligste Sted for et Punkt M Koordinaterne

$$X \text{ og } Y,$$

og antages disse at være behæftede med Fejlene x_o og y_o, og ere endvidere $v_1, v_2, v_3 \ldots . v_n$ og $u_1, u_2, u_3 \ldots . u_n$ henholdsvis de sandsynligste og de sande Fejl, vil man ifølge (97) have

$$\left.\begin{array}{l}
u_1 = v_1 + a_1\, x_o + b_1\, y_o \\
u_2 = v_2 + a_2\, x_o + b_2\, y_o \\
u_3 = v_3 + a_3\, x_o + b_3\, y_o \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
u_n = v_n + a_n\, x_o + b_n\, y_o
\end{array}\right\} \tag{149}$$

Har man kun foretaget to Observationer, faar man ingen Udjevning; men man kan ligefuldt fremstille to Ligninger af Formen (149).

Sandsynligheden for, at Punktets Koordinater ere $X + x_0$ og $Y + y_0$, eller Sandsynligheden for, at Observationsfejlene ere $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$, er proportional med

$$e^{-\frac{[u^2]}{2m^2}};$$

men da

$$[u^2] = [v^2] + 2[av]x_0 + 2[bv]y_0 + [a^2]x^2_0 + [b^2]y^2_0 + 2[ab]x_0y_0$$
$$= [v^2] + [a^2]x^2_0 + [b^2]y^2_0 + 2[ab]x_0y_0,$$

idet

$$[av] = 0 \text{ og } [bv] = 0,$$

og da $[v^2]$ er konstant, vil Sandsynligheden være proportional med

$$e^{-\frac{[a^2]x_0^2 + [b^2]y^2_0 + 2[ab]x_0y_0}{2m^2}} = e^{-z^2}, \quad (150)$$

hvor vi have sat

$$\frac{[a^2]x^2_0 + [b^2]y^2_0 + 2[ab]x_0y_0}{2m^2} = z^2$$

og altsaa

$$[a^2]x^2_0 + [b^2]y^2_0 + 2[ab]x_0y_0 = 2m^2z^2. \quad (151)$$

Er z konstant, bliver Sandsynligheden konstant, og M ligger med samme Sandsynlighed paa alle de Punkter, hvis Koordinater tilfredsstille (151), som er Ligningen for en Ellipse. Altsaa er det geometriske Sted for alle lige sandsynlige Punkter en Ellipse — kaldet Fejlellipsen — bestemt ved (151).

For at beregne Retningen og Størrelsen af Ellipsens Axer ændres Koordinatsystemet, idet vi dreje Axerne en Vinkel Θ. Vi benytte dertil de bekjendte Formler

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x_1 \cos\Theta - y_1 \sin\Theta \\ y_0 &= x_1 \sin\Theta + y_1 \cos\Theta, \end{aligned}\right\} \quad (152)$$

hvor x_1 og y_1 ere Koordinaterne i det nye System. (151) bliver nu ændret til

$$A x^2_1 + B y^2_1 + C x_1 y_1 = 2m^2z^2, \quad (153)$$

hvor

$$A = [a^2] \cos^2 \Theta + [b^2] \sin^2 \Theta + 2 [ab] \sin \Theta \cos \Theta \quad (154)$$

$$B = [a^2] \sin^2 \Theta + [b^2] \cos^2 \Theta - 2 [ab] \sin \Theta \cos \Theta \quad (155)$$

$$C = -2([a^2] - [b^2]) \sin \Theta \cos \Theta + 2 [ab] (\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta) \quad (156)$$

Vi bestemme nu Θ saaledes, at $C = 0$, altsaa af Ligningen

$$([a^2] - [b^2]) \sin 2 \Theta = 2 [ab] \cos 2 \Theta, \quad (157)$$

der giver

$$tg\, 2 \Theta = \frac{2 [ab]}{[a^2] - [b^2]}. \quad (158)$$

Ligningen (153) faar herved den simplere Form

$$A x_1^2 + B y_1^2 = 2m^2 z^2$$

eller

$$\frac{x_1^2}{\alpha^2} + \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1,$$

hvor Halvaxerne α og β ere

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{2\, m\, z}{\sqrt{2\, A}} \\ \beta &= \frac{2\, m\, z}{\sqrt{2\, B}}. \end{aligned}\right\} \quad (159)$$

Af (154), (155) og (157) faas

$$A + B = [a^2] + [b^2] \quad (160)$$

$$A - B = ([a^2] - [b^2]) \cos 2 \Theta + 2 [ab] \sin 2 \Theta$$

$$= 2 [ab] \frac{\cos^2 2 \Theta}{\sin 2 \Theta} + 2 [ab] \sin 2 \Theta = \frac{2 [ab]}{\sin 2 \Theta}. \quad (161)$$

Skal α være den *store* Halvaxe maa $A - B$ ifølge (159) være negativ, og altsaa $\sin 2 \Theta$ have modsat Tegn af $[ab]$.

Sættes

$$A - B = - K, \quad (162)$$

hvor K er positiv og bestemmes af

$$K = - \frac{2 [ab]}{\sin 2 \Theta} = - \frac{[a^2] - [b^2]}{\cos 2 \Theta}, \quad (163)$$

har man ifølge (160) og (162)

$$\left.\begin{matrix} 2A \\ 2B \end{matrix}\right\} = [a^2] + [b^2] \mp K. \qquad (164)$$

Da z hverken indgaar i $\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\frac{B}{A}}$ eller i Udtrykket for $tg\, 2\,\Theta$, vil Ellipsens Stilling og Form være uafhængig af z, der derimod bestemmer dens Størrelse.

Arealet af Ellipsen er

$$\pi\alpha\beta = \frac{2\pi m^2 z^2}{\sqrt{AB}} = k z^2,$$

idet vi for Kortheds Skyld have sat den konstante Koefficient til z^2 lig k. Sættes $z + h$ istedetfor z, faas en anden Ellipse, hvis Areal er

$$k\,(z + h)^2 = k\,(z^2 + 2\,z h + h^2).$$

Arealet af Ellipseringen imellem disse to Ellipser bliver

$$k\,(2\,z h + h^2),$$

eller, naar h er en uendelig lille Størrelse dz,

$$2\,k z\,d z.$$

Sandsynligheden ds for, at Punktet M ligger i denne Ellipsering, er dels proportional med Ringens Areal dels med e^{-z^2}; altsaa er, idet c er en ny Konstant,

$$ds = cze^{-z^2}dz. \qquad (165)$$

Sættes

$$t = z^2,$$

altsaa

$$\frac{dt}{dz} = 2z,$$

faas ved Indsætning i (165)

$$ds = \frac{c}{2}\,e^{-t}\,dt. \qquad (166)$$

Sandsynligheden s for, at Punktet ligger indenfor en vis Ellipse, er Summen af Sandsynlighederne for dets Beliggenhed paa samtlige Ellipseringe indenfor denne Ellipse. Altsaa er

$$s = \frac{c}{2}\int_0^{z^2} e^{-t}\,dt; \qquad (167)$$

men

$$\int e^{-t}dt = -e^{-t},$$

thi

$$\frac{d.-e^{-t}}{dt} = \text{lim.*)}\;\frac{-e^{-(t+h)}+e^{-t}}{h} = \text{lim.}\,e^{-t}\,\frac{1-e^{-h}}{h}$$

$$= \text{lim.}\;e^{-t}\;\frac{1-\left(1-\frac{h}{1}+\frac{h^2}{1.2}\cdots\right)}{h} = e^{-t},$$

saa at

$$s = \frac{c}{2}\left(1-e^{-z^2}\right). \quad (168)$$

Til Bestemmelse af Konstanten c veed man, at til $z = \infty$ svarer $s = 1$; thi der er Vished for, at M ligger indenfor en uendelig stor Ellipse. Altsaa er

$$1 = \frac{c}{2}, \quad (169)$$

saa at man faar

$$s = 1 - e^{-z^2}. \quad (170)$$

Sandsynligheden for, at M ligger udenfor Fejlellipsen, er

$$s' = 1 - s = e^{-z^2}. \quad (171)$$

Til $z = 1$ svarer

$$s = 1 - e^{-1} = 0{,}6321.$$

Der er altsaa en Sandsynlighed af henved $^2/_3$ for, at M ligger indenfor den Ellipse, hvis Halvaxer ere

$$\alpha = \frac{2\,m}{\sqrt{2A}} \quad \text{og} \quad \beta = \frac{2\,m}{\sqrt{2B}}, \quad (172)$$

og som vi i det følgende ville kalde *Hovedellipsen*.
Til $z = 2$ og $z = 3$ svarer henholdsvis

$$s = 1 - e^{-4} = 0{,}9817 \text{ og } s = 1 - e^{-9} = 0{,}9999.$$

---

*) lim. (limite) betegner den Værdi, Størrelsen har, naar $h = 0$.

Den *sandsynlige* Fejlellipse er den, indenfor hvilken Punktet ligger med Sandsynligheden $1/2$. Sættes i (171) $s' = \frac{1}{2}$, og tages den nat. Logarithme, faas

$$-z^2 = -l.\,2,$$

der giver

$$z = \sqrt{l.\,2} = \sqrt{0{,}69315} = 0{,}8326.$$

Med Hensyn til Regningens Udførelse bemærkes, at efterat Punktets sandsynligste Sted er fundet, bestemmes $2\,\Theta$ og deraf Θ ved (158); men $2\,\Theta$ bestemt ved tg har to Værdier, hvis Forskjel er 180^0; den af disse, hvis *sin* har modsat Tegn af $[ab]$, bestemmer Retningen af den store Axe, den anden bestemmer den lille Axes Retning. Man finder derefter K af (163), $2\,A$ og $2\,B$ af (164) og sluttelig α og β af (159), efterat man har valgt en Værdi for z. Størrelserne $[a^2]$, $[b^2]$ og $[ab]$ ere i Almindelighed bekjendte fra den forudgaaede Elementudjevning.

$tg\ 2\ \Theta$ bliver ubestemt, naar

$$[a^2] = [b^2]$$

og

$$[ab] = 0,$$

men til samme Tid ses (151) at blive Ligningen for en Cirkel med Radius

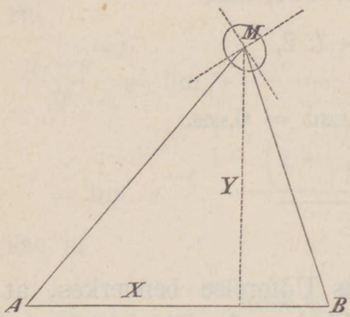
$$r = m\,z\sqrt{\frac{2}{[a^2]}}. \qquad (174)$$

Punktet er i dette Tilfælde lige nøjagtigt bestemt i alle Retninger.

Er specielt $z = 1$, bliver

$$r = m\sqrt{\frac{2}{[a^2]}},$$

hvilket ifølge (148) er Punktets Middelfejl. Der er altsaa en Sandsynlighed af $0{,}6321$ for, at Fejlen i Punktets Beliggenhed er mindre end Middelfejlen. At denne Sandsynlighed ikke stemmer med den i Art. 11 nævnte $(0{,}683)$ er begrundet i, at Fejlen i Beliggenheden ikke følger den almindelige exponentielle Fejllov.



50. Exempler.

1°. I hosstaaende Figur ere maalte

$$\angle A = 50^0\ 00',0$$
$$\angle B = 70^0\ 00',1$$
$$\angle M = 60^0\ 00',0$$

og Siden $AB = 1000$ *Al.*, som antages at være fejlfri, hvorimod Middelfejlen i Vinklerne er $^1/_4{}'$. Der søges Punktet *M*'s Koordinater, dets Middelfejl og Fejlellipsen.

A vælges til Koordinatsystemets Begyndelsespunkt, *A B* til Abscisseaxe.

Først beregnes tilnærmende Koordinater til *M*.

log *A M* findes af

$$A\,M = A\,B\,\frac{\sin B}{\sin M} = 1000\,\frac{\sin 70^0\ 00',1}{\sin 60^0\ 00',0}.$$

Derefter findes

$$X_0 = A\,M \cos A, \qquad Y_0 = A\,M \sin A.$$

Regningen giver

$$X_0 = 697{,}5, \qquad Y_0 = 831{,}2.$$

Med sædvanlige Betegnelser haves

$$tg\,(A + v_A) = tg\,(50^0\ 00',0 + v_A) = \frac{831{,}2 + y}{697{,}5 + x}$$

$$tg\,(B + v_B) = tg\,(70^0\ 00',1 + v_B) = \frac{831{,}2 + y}{302{,}5 - x}.$$

En femsiffret Tavle giver

$$\log\,(831{,}2 + y) = 2{,}91971 + 52\,y$$
$$\underline{\log\,(697{,}5 + x) = 2{,}84354 + 63\,x}$$
$$\log tg\,(50^0\ 00',0 + v_A) = 0{,}07617 - 63\,x + 52\,y$$

$$50^0\ 00',0 + v_A = 49^0\ 59',92 + \frac{-\,63\,x + 52\,y}{26},$$

hvoraf

$$v_A = -\,0{,}08 - 2{,}4\,x + 2{,}0\,y.$$

Paa samme Maade findes den anden Betingelsesligning, som bliver

$$v_B = + 0{,}03 + 3{,}6\, x + 1{,}3\, y.$$

Naar Udjevningen er foretaget, skal selvfølgelig Summen af Vinklerne i Trekanten være 180⁰, altsaa er

$$A + v_A + B + v_B + M + v_M = 180^0$$

og følgelig

$$v_M = 180^0 - (A + B + M) - v_A - v_B = - 0{,}1 - v_A - v_B.$$

Indføres ovenstaaende Værdier for v_A og v_B heri, faas

$$v_M = - 0{,}05 - 1{,}2\, x - 3{,}3\, y,$$

som er den tredie Betingelsesligning.

De tre Betingelsesligninger ere altsaa

$$v_A = - 0{,}08 - 2{,}4\, x + 2{,}0\, y$$
$$v_B = + 0{,}03 + 3{,}6\, x + 1{,}3\, y$$
$$v_M = - 0{,}05 - 1{,}2\, x - 3{,}3\, y.$$

Normalligningerne blive

$$20{,}2\, x + 3{,}8\, y + 0{,}36 = 0$$
$$3{,}8\, x + 16{,}6\, y + 0{,}04 = 0,$$

hvilke Ligninger give

$$x = - 0{,}02, \qquad y = 0{,}00,$$

saa at de sandsynligste Koordinater til M ere

$$X = 697{,}48, \qquad Y = 831{,}20.$$

Middelfejlen i M's Beliggenhed er

$$\mu = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{20{,}2 + 16{,}6}{20{,}2 \,.\, 16{,}6 - 3{,}8^2}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{36{,}8}{320{,}88}} = 0{,}085 \text{ Al.}$$

Retningen af Fejlellipsens Axer bestemmes af

$$tg\, 2\,\Theta = \frac{2 \,.\, 3{,}8}{20{,}2 - 16{,}6} = \frac{7{,}6}{3{,}6},$$

der giver

$$\log tg\, 2\,\Theta = 0{,}3245$$
$$2\,\Theta = 244^0\ 39'$$
$$\Theta = 122^0\ 20'.$$

Fremdeles findes

$$K = - \frac{7{,}6}{\sin 2\,\Theta} = 8{,}4.$$

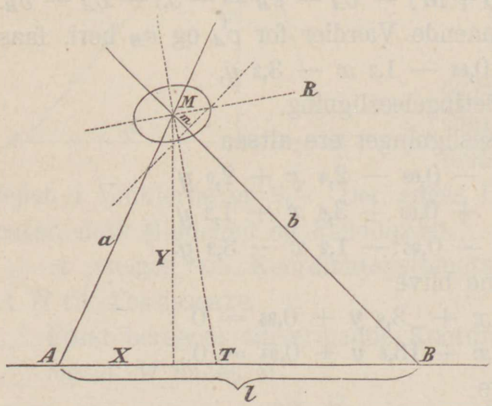
$$[a^2] + [b^2] = 20{,}2 + 16{,}6 = 36{,}8.$$
$$2\,A = 28{,}4$$
$$2\,B = 45{,}2.$$

Hovedellipsens Halvaxer ere

$$\alpha = \frac{2 \,.\, 0{,}25}{\sqrt{28{,}4}} = 0{,}094 \text{ Al.}$$

$$\beta = \frac{2 \,.\, 0{,}25}{\sqrt{45{,}2}} = 0{,}074 \text{ —.}$$

2⁰. Ved Prøve af Kort efter den af Prof. Oppermann angivne Methode forefalder den Opgave at bestemme et Punkts Koordinater ved Maaling af Afstandene fra Punktet til to faste Punkter i en ret Linie. Da de faste Punkter A og B ere afsatte med Stangpasser, ville vi antage, at de ere fejlfri, hvorimod Middelfejlen i de maalte Afstande



a og b fra det søgte Punkt M til A og B er m. $A\,B = l$. Vi ville nu søge Middelfejlen i Koordinaterne til Punktet M, Middelfejlen i dets Beliggenhed samt Fejlellipsen.

Tages A til Begyndelsespunkt og $A\,B$ til Abscisseaxe, haves, idet Koordinaterne til M kaldes X og Y,

$$a^2 = X^2 + Y^2 \qquad (a)$$

$$b^2 = (l - X)^2 + Y^2. \qquad (b)$$

Indsættes istedetfor a, b, x og y henholdsvis $a + v_a$, $b + v_b$, $X + x_o$ og $Y + y_o$, hvor v_a, v_b, x_o og y^o ere Fejlene henholdsvis paa a, b, X og Y, erholdes

$$(a + v_a)^2 = (X + x_o)^2 + (Y + y)^2 \qquad (c)$$

$$(b + v_b)^2 = (l - X - x_o)^2 + (Y + y_o)^2 \qquad (d)$$

Subtraheres (a) fra (c) og (b) fra (d) og divideres med 2, faas, idet Kvadraterne paa Fejlene bortkastes,

$$a\,v_a = X\,x_o + Y\,y_o, \qquad (e)$$

$$b\,v_b = -(l - X)\,x_o + Y\,y_o. \qquad (f)$$

Smukkere Formler faas ved at indføre Vinklerne $B\,A\,M = A$ og $A\,B\,M = B$, idet

$$\frac{X}{a} = \cos A, \qquad \frac{Y}{a} = \sin A,$$

$$\frac{l-X}{b} = \cos B, \qquad \frac{Y}{b} = \sin B.$$

Man faar

$$v_a = \cos A \,.\, x_0 + \sin A \,.\, y_0 \qquad (g)$$

$$v_b = -\cos B \,.\, x_0 + \sin B \,.\, y_0. \qquad (h)$$

Opløses disse Ligninger med Hensyn til x_0 og y_0, erholdes

$$x_0 = \frac{\sin B}{\sin (A+B)}\, v_a - \frac{\sin A}{\sin (A+B)}\, v_b \qquad (i)$$

$$y_0 = \frac{\cos B}{\sin (A+B)}\, v_a + \frac{\cos A}{\sin (A+B)}\, v_b, \qquad (k)$$

saa at Middelfejlene m_x i Abscissen og m_y i Ordinaten blive bestemte ved

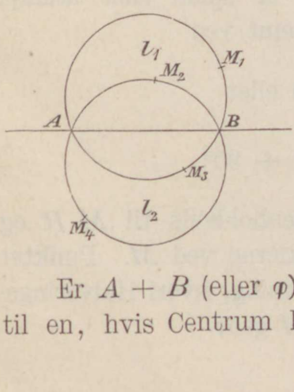
$$m_x^2 = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 (A+B)}\, m^2 \qquad (l)$$

$$m_y^2 = \frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 (A+B)}\, m^2. \qquad (m)$$

Endelig er, naar μ er Middelfejlen i Punktets Beliggenhed

$$\mu^2 = \frac{2\,m^2}{\sin^2 (A+B)} = \frac{2\,m^2}{\sin^2 M}. \qquad (n)$$

Heraf ses, at μ bliver den samme for alle de Værdier af A og B, hvis Sum er enten lig en Vinkel φ eller $180^0 - \varphi$ (φ konstant). Følgelig er det geometriske Sted for alle de Punkter, der bestemmes med samme Nøjagtighed (Nøjagtighedskurven), to ligestore Cirkler igjennem A og B. Disse Cirkler ere fremstillede i hosstaaende Figur, hvor M_1, M_2, M_3 og M_4 altsaa ere 4 Punkter, der bestemmes med samme Nøjagtighed. Et Punkt vil være nøjagtigere eller unøjagtigere bestemt end disse 4 Punkter, eftersom det ligger indenfor eller udenfor de halvmaaneformede Figurer l_1 og l_2.



Er $A + B$ (eller φ) lig 90^0, falde de to Cirkler sammen til en, hvis Centrum ligger i Midten af $A\,B$, og som er det geometriske Sted for de nøjagtigst bestemte Punkter. I dette Tilfælde bliver

$$m_x = m_y = m, \qquad \mu = m\sqrt{2}. \qquad (o)$$

Til Bestemmelse af Fejlellipsen haves, ifølge (g) og (h),

$$[a^2] = \cos^2 A + \cos^2 B \qquad (p)$$

$$[b^2] = \sin^2 A + \sin^2 B \qquad (q)$$

$$[ab] = \sin A \cos A - \sin B \cos B = \frac{1}{2}(\sin 2A - \sin 2B)$$

$$= \sin(A - B)\cos(A + B). \qquad (r)$$

Altsaa bliver

$$tg\, 2\,\Theta = \frac{\sin 2\,A - \sin 2\,B}{\cos 2\,A + \cos 2\,B} = tg\,(A - B) \qquad (s)$$

$$2\,\Theta = \begin{cases} A - B \\ A - B + 180^0 \end{cases} \qquad (t)$$

$$\Theta = \begin{cases} \frac{1}{2}(A - B) \text{ eller} \\ \frac{1}{2}(A - B) + 90^0 \end{cases} \qquad (u)$$

$$K = \mp \frac{2 \sin(A - B)\cos(A + B)}{\sin(A - B)} = \mp 2\cos(A + B), \qquad (v)$$

— eller + eftersom man tager den øverste eller nederste Værdi for Θ.

Da K skal være positiv, ser man, at eftersom

$$A + B \gtrless 90^0$$

d. v. s. eftersom Vinklen $A\ M\ B$ er spids eller stump, bliver den store Axes Retning bestemt ved

$$\Theta = \begin{cases} \frac{1}{2}(A - B) \text{ eller} \\ \frac{1}{2}(A - B) + 90^0. \end{cases}$$

I Figuren svare disse Retninger henholdsvis til $M\ R$ og $M\ T$, idet disse Linier halvere Vinklerne ved M. Punktet er altsaa daarligst bestemt i den Retning, hvori Halveringslinien for den stumpe Vinkel ved M gaar.

Man har fremdeles

$$\left.\begin{matrix} 2\,A' \\ 2\,B' \end{matrix}\right\} = \underset{(\mp)}{2 \pm 2}\cos(A+B) = 2(1 \pm \cos(A+B)) = \left\{\begin{matrix} 4\cos^2\frac{1}{2}(A+B) \\ 4\sin^2\frac{1}{2}(A+B), \end{matrix}\right. \qquad (x)$$

saa at Hovedellipsens Halvaxer blive

$$\left.\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}\right\} = \frac{m}{\cos\frac{1}{2}(A+B)} = m \sec\frac{1}{2}(A+B) \text{ i Retning } M\,R$$

$$\left.\begin{matrix} \beta \\ \alpha \end{matrix}\right\} = \frac{m}{\sin\frac{1}{2}(A+B)} = m \operatorname{cosec}\frac{1}{2}(A+B) \quad - \quad M\,T.$$

Med Hensyn til Ellipsens Konstruktion bemærkes, at en Linie vinkelret paa $B\,M$ i en Afstand m fra M afskjærer Halvaxerne af $M\,R$ og $M\,T$.

Er $A + B = 90^0$, blive Axerne lige store; Ellipsen gaar over til en Cirkel, hvis Radius er $m\sqrt{2}$ overensstemmende med (o).

Oversigt
over nogle af de vigtigste Formler.

Sandsynlighedsregning.

	Nr.	Side.
$s = \frac{g}{m}.$	(7)	7
$s + s' = 1.$	(10)	8
$S = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n.$	(11)	9
$S = s_1 \, s_2 \, s_3 \ldots s_n$	(13)	10
$S = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots\ldots r} s^r \, s'^{n-r}.$	(16)	13

Uafhængige Observationsstørrelser.

$ds = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2m^2}} dv.$	(43)	20
$s = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^v e^{-\frac{v^2}{2m^2}} dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{v}{m\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt.$	(44)	21
$\left.\begin{aligned} k &= A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3 + \ldots + A_n v_n \\ &= \frac{du}{do_1} v_1 + \frac{du}{do_2} v_2 + \frac{du}{do_3} v_3 + \ldots + \frac{du}{do_n} v_n. \end{aligned}\right\}$	(51)	28
$\left.\begin{aligned} \mu &= \sqrt{A_1^2 m_1^2 + A_2^2 m_2^2 + A_3^2 m_3^2 + \ldots + A_n^2 m_n^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{du}{do_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{du}{do_2}\right)^2 m_2^2 + \left(\frac{du}{do_3}\right)^2 m_3^2 + \ldots + \left(\frac{du}{do_n}\right)^2 m_n^2}. \end{aligned}\right\}$	(54)	31

Middeltallet.

	Nr.	Side.
$$x = \frac{o_1 + o_2 + o_3 + .. + o_n}{n} = \frac{[o]}{n}.$$	(63)	39
$$[v] = 0.$$	(64)	—
$$[v^2] = [o^2] - \frac{[o]^2}{n}$$	(65)	—
$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}.$$	(68)	40
$$\mu = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n\,(n-1)}}.$$	(66) og (69)	40 og 41
$$x = \frac{p_1\,o_1 + p_2\,o_2 + p_3\,o_3 \,..\, + p_n\,o_n}{p_1 + p_2 + p_3 \,..\, + p_n} = \frac{[po]}{[p]}.$$	(73)	42
$$[pv] = 0.$$	(74)	—
$$[pv^2] = [po^2] - \frac{[po]^2}{[p]}.$$	(75)	—
$$m = \sqrt{\frac{[p\,v^2]}{n-1}}.$$	(80)	44
$$\mu = \frac{m}{\sqrt{[p]}} = \sqrt{\frac{[pv^2]}{[p]\;(n-1)}}.$$	(76) og (81)	43 og 44

Elementudjevning.

Betingelsesligningerne.

$$\left.\begin{array}{l}
v_1 = l_1 + a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + \ldots \\
v_2 = l_2 + a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + \ldots \\
v_3 = l_3 + a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z + \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
v_n = l_n + a_n\,x + b_n\,y + c_n\,z + \ldots
\end{array}\right\} \quad (84) \quad 47$$

Normalligningerne.

$$\left.\begin{array}{l}
[al] + [a^2]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + \ldots = 0 \\
[bl] + [ab]\,x + [b^2]\,y + [bc]\,z + \ldots = 0 \\
[cl] + [ac]\,x + [bc]\,y + [c^2]\,z + \ldots = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad (87) \quad 48$$

	Nr.	Side.
$$\left.\begin{array}{l}[pal]+[pa^2]x+[pab]y+[pac]z+\ldots=0\\ [pbl]+[pab]x+[pb^2]y+[pbc]z+\ldots=0\\ [pcl]+[pac]x+[pbc]y+[pc^2]z+\ldots=0\\ \ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}$$	(90)	49
$[av]=0,\ [bv]=0,\ [cv]=0,\ \ldots\ldots$	(91)	—
$[pav]=0,\ [pbv]=0,\ [pcv]=0,\ \ldots\ldots$	(92)	—
$$m=\sqrt{\frac{[v^2]}{n-e}}$$	(107)	58
$$m=\sqrt{\frac{[p\ v^2]}{n-e}}$$	(108)	—

Korrelatudjevning.

Betingelsesligningerne.

$$\left.\begin{array}{l}a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+\ldots+a_nv_n=q_1\\ b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3+\ldots+b_nv_n=q_2\\ c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+\ldots+c_nv_n=q_3\\ \ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\\ l_1v_1+l_2v_2+l_3v_3+\ldots+l_nv_n=q_l\end{array}\right\}$$	(122)	62

Normalligningerne.

$$\left.\begin{array}{l}[a^2]k_1+[ab]k_2+[ac]k_3+\ldots+[al]k_l=q_1\\ [ab]k_1+[b^2]k_2+[bc]k_3+\ldots+[bl]k_l=q_2\\ [ac]k_1+[bc]k_2+[c^2]k_3+\ldots+[cl]k_l=q_3\\ \ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\\ [al]k_1+[bl]k_2+[cl]k_3+\ldots+[l^2]k_l=q_l.\end{array}\right\}$$	(129)	64

Korrelatligningerne.

$$\left.\begin{array}{l}v_1=a_1k_1+b_1k_2+c_1k_3+\ldots+l_1k_l\\ v_2=a_2k_1+b_2k_2+c_2k_3+\ldots+l_2k_l\\ v_3=a_3k_1+b_3k_2+c_3k_3+\ldots+l_3k_l\\ \ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\\ v_n=a_nk_1+b_nk_2+c_nk_3+\ldots+l_nk_l\end{array}\right\}$$	(128)	—

Normalligningerne.

Nr. Side.

$$\left.\begin{array}{l}
\left[\frac{a^2}{p}\right] k_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] k_2 + \left[\frac{ac}{p}\right] k_3 + \ldots + \left[\frac{al}{p}\right] k_l = q_1 \\
\left[\frac{ab}{p}\right] k_1 + \left[\frac{b^2}{p}\right] k_2 + \left[\frac{bc}{p}\right] k_3 + \ldots + \left[\frac{bl}{p}\right] k_l = q_2 \\
\left[\frac{ac}{p}\right] k_1 + \left[\frac{bc}{p}\right] k_2 + \left[\frac{c^2}{p}\right] k_3 + \ldots + \left[\frac{cl}{p}\right] k_l = q_3 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\left[\frac{al}{p}\right] k_1 + \left[\frac{bl}{p}\right] k_2 + \left[\frac{cl}{p}\right] k_3 + \ldots + \left[\frac{l^2}{p}\right] k_l = q_l
\end{array}\right\} \quad (133) \quad 65$$

Korrelatligningerne.

$$\left.\begin{array}{l}
v_1 = \frac{a_1}{p_1} k_1 + \frac{b_1}{p_1} k_2 + \frac{c_1}{p_1} k_3 + \ldots + \frac{l_1}{p_1} k_l \\
v_2 = \frac{a_2}{p_2} k_1 + \frac{b_2}{p_2} k_2 + \frac{c_2}{p_2} k_3 + \ldots + \frac{l_2}{p_2} k_l \\
v_3 = \frac{a_3}{p_3} k_1 + \frac{b_3}{p_3} k_2 + \frac{c_3}{p_3} k_3 + \ldots + \frac{l_3}{p_3} k_l \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
v_n = \frac{a_n}{p_n} k_1 + \frac{b_n}{p_n} k_2 + \frac{c_n}{p_n} k_3 + \ldots + \frac{l_n}{p_n} k_l
\end{array}\right\} \quad (132) \quad —$$

$$[v^2] = [qk]. \quad (136) \quad 67$$

$$[pv^2] = [qk]. \quad (137) \quad —$$

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{l}}. \quad (138) \quad —$$

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v^2]}{l}}. \quad (139) \quad 68$$

Middelfejlen i et Punkt i et Plan.

$$\mu^2 = m_x^2 + m_y^2 = \frac{[a^2] + [b^2]}{[a^2]\,[b^2] - [ab]^2}\, m^2. \quad (146) \quad 92$$

Fejlellipsen.

$$tg\ 2\,\Theta = \frac{2\,[ab]}{[a^2] - [b^2]}. \quad (158) \quad 94$$

		Nr.	Side.
	$K = -\dfrac{2\,[ab]}{\sin 2\,\Theta}.$	(163)	94
	$\left.\begin{matrix}2\,A\\2\,B\end{matrix}\right\} = [a^2] + [b^2] \mp K.$	(164)	95
	$\alpha = \dfrac{2\,z\,m}{\sqrt{2\,A}},\ \beta = \dfrac{2\,z\,m}{\sqrt{2\,B}}.$	(159)	94
	$s = 1 - e^{-z^2}.$	(170)	96