

Denne fil er downloadet fra
Danmarks Tekniske Kulturarv
www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på
www.tekniskkulturarv.dk/about

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

L. Vedel.
Jordtrykkets
rationelle Theori
Forudsæta og Resultater

INDUSTRI-
FORENINGEN

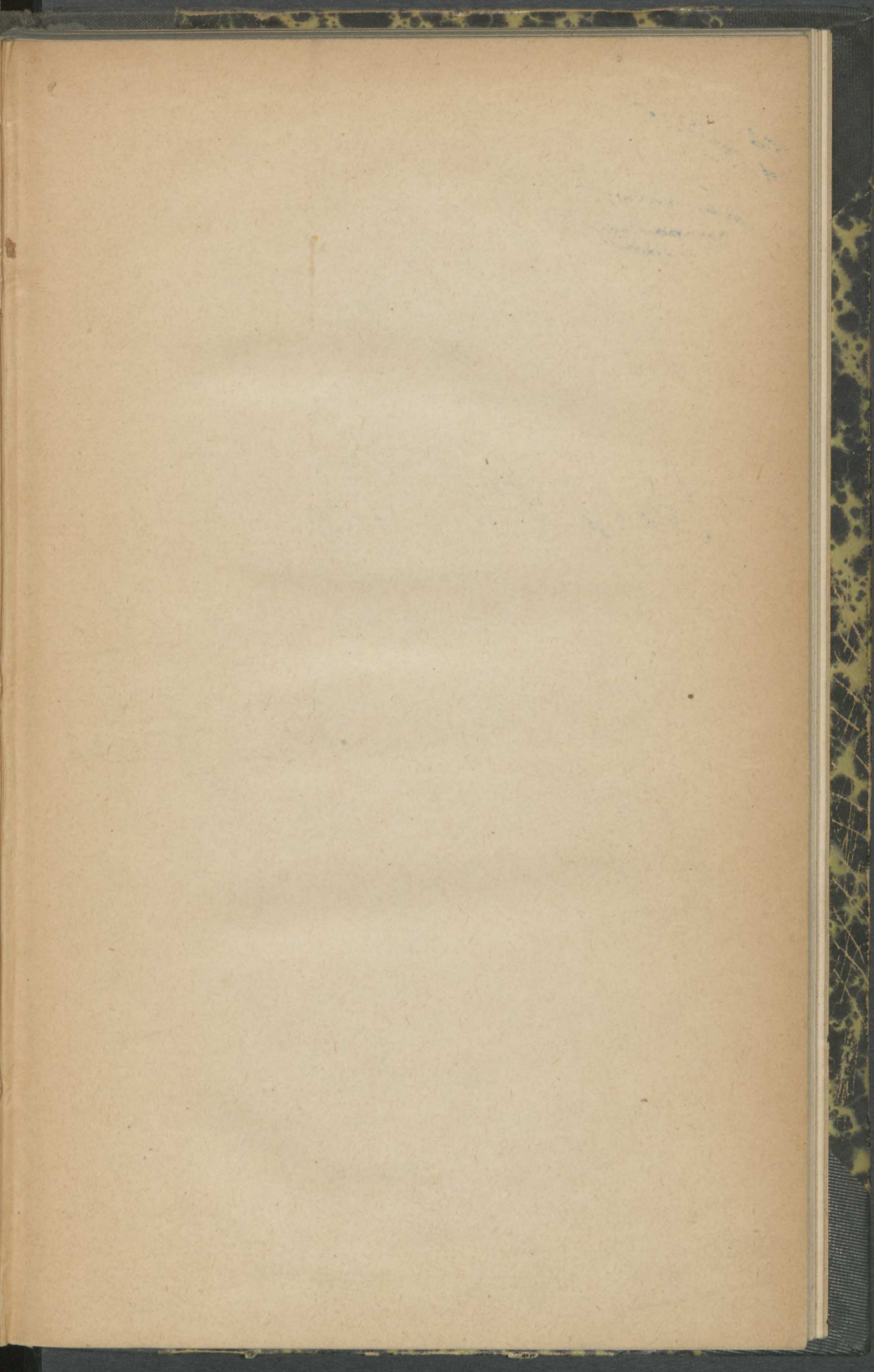
#693 1323.

6881

~~3169~~
74

693 1323

693 1323



14-24.

JORDTRYKKETS

RATIONELLE THEORI

DENS FORUDSÆTNINGER OG RESULTATER

SAMT

EN KORT HISTORISK OVERSIGT

OVER

DE VIGTIGSTE AF DE ÆLDRE THEORIER

AF

P. VEDEL

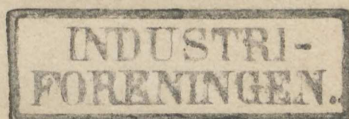
INGENIEUR



KJØBENHAVN

ANDR. FRED. HØST & SØNS FORLAG

1889



JORDTRYKKETS

RATIONELLE THEORI

THEORIE KORTBESKRIVNING OG RESULTATER

AF DR. J. J. GRÆBES

DE VIGTIGSTE AF DE ELDERE THEORIER

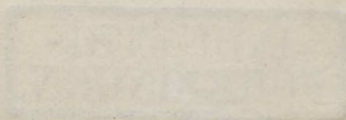
E. VEDDET



KJØBENHAVN

UDGIVET HOS A. GRÆBES

Kjøbenhavn. — Græbes Bogtrykkeri.



INDHOLD.

	Side
Friction og Cohæsion	1
Forskjellige Egenskaber ved Jordarterne	24
Ældre og nyere Jordtrykstheorier.	
a) Theorier, der undersøge et endeligt Jordprisme	31
b) Theorier, der betragte Jordelementet	52
Udvikling af Theorien	74

Vor Tids Naturstudium og Behandling af de exacte
 Videnskaber karakteriseres ved en almindelig Bestræbelse
 efter at lære de mindste Deles Natur og indbyrdes Forhold
 at kjende. Hele den moderne Mathematik hviler paa
 Differential- og Integralregningen, Physiken og Chemien paa
 Molecular- og Atomtheorien, Zoologien og Botaniken paa
 Celletheorien og den nyere Medicin tildels paa Bacterio-
 logien. Ogsaa i den anvendte Mathematik, o: den mathe-
 matiske Physik eller rationelle Mechanik, har den samme
 Bestræbelse gjort sig gjældende, og hele Elasticitetstheorien
 hviler saaledes paa Betragtning af Fibrene eller de uendelig
 smaa Fiberelementer.

Først i de sidste Decennier har man imidlertid ogsaa
 i de løse Systemers Theori, navnlig i Jordtrykstheorien,
 forsøgt at slaa ind paa den samme Vej og i Stedet for det
 endelige Coulomb'ske Jordprisme at undersøge Ligevægts-
 forholdene af det uendelig lille Cauchy'ske Jordelement.
 Det er indlysende, at man ved Kjendskab hertil vil vinde
 en langt fyldigere og dybere Indsigt i de indre Forhold i
 Jordmassen, og da man tillige kan tage sit Udgangspunkt
 fra færre og mere plausible Hypotheser end ved hin ældre
 Theori, er det ikke med Urette, naar man i Modsætning
 dertil har kaldet den nyere for den rationelle Jordtryks-
 theori.

Det kan ikke nægtes, at den nye Undersøgelsesmethode, hvor tiltalende og værdifuld den end kan være i theoretisk Henseende, dog i en Del af de for Anvendelserne vigtige Tilfælde ikke vil føre væsentligt videre end den ældre Theori. Men giver denne end undertiden den exacte Løsning, undertiden en brugelig Tilnærmelse, saa giver den dog ingen Oplysning om, naar det ene og naar det andet indtræder, eller om Resultatets Fejl gaar til den ene eller den anden Side og beløber sig til en forsvindende eller en maaske temmelig betydelig Størrelse. I Modsætning dertil undersøger og skjelner den nye Theori imellem saadanne Tilfælde, hvor den og den ældre Methode levere den exacte Løsning, og saadanne, hvor dens Resultater kun give en Tilnærmelse, ved hvilken Fejlen dog stedse vil ligge til den ene, α : den sikre, Side. Den angiver endvidere de almindelige Ligninger, paa hvis algebraiske Løsning Problemet altid vil bero, hvilke de specielle Forhold end ere, og om end disse Ligninger ere for complicerede, til at man deraf kan udlæde den exacte Løsning i al dens Almindelighed, kunne de dog føre til particulære Opløsninger, som repræsentere de hyppigst forekommende specielle Tilfælde.

Den rationelle Jordtrykstheori med dens mere videnskabelige Karakter og generelle Formler, paa hvilke al videre Udvikling af vort Kjendskab til Jordarterne maa baseres, har derfor formentligen Krav paa Opmærksomhed ikke alene blandt Theoretikerne, men ogsaa hos den praktiske Ingenieur, der kun altfor ofte har Lejlighed til at prøve den ældre Theoris Ufuldkommenhed. —

Friction og Cohæsion.

Løse Systemer. Friction og Cohæsion.

§ 1. I de løse Systemers Theori er det en af Hovedvanskelighederne paa den rette Maade at tage Hensyn til de passive Kræfter Frictionen og Cohæsionen. Det er Tilstedeværelsen af disse og den deraf følgende mindre fuldkomne Bevægelighed af Systemets mindste Dele, der karakteriserer det som fast i Modsætning til de flydende Legemer; men paa den anden Side skyldes det den forholdsvis svage Cohæsion og derfor større Bevægelighed, at det maa betegnes som løst i Modsætning til de i snævrere Forstand faste, elastiske eller leddede Systemer.

Herved forudsættes almindelig i Jordtrykstheorien en i det væsentlige homogen Masse, hvis mindste bevægelige Dele ere de physiske Differentialer, Moleculerne, der uden Brud paa Continuiteten kunne glide paa hinanden og forskydes i det uendelige paa alle mulige Maader. De løse Systemer, som man i Praxis har at gjøre med, ere imidlertid af en anden Natur, idet de mindste bevægelige Dele ikke ere uendelig smaa, men enten som Stenene i Murværker eller Jordpartiklerne i Jordværker have en endelig Størrelse og derfor ogsaa selv kunne være i Besiddelse af forskellige Egenskaber efter deres moleculære Sammensætning. Medens de uelastiske eller elastiske Legemers Theori kun behandler et enkelt Complex af Moleculer, omfatte de leddede Systemer flere saadanne Complexer, der ved visse Baand ere forbundne til et Hele, og de løse Systemer en Samling af dem uden al indbyrdes Forbindelse. Hvert enkelt af de

bevægelige Elementer er altsaa et mere eller mindre elastisk Legeme og maa derfor ogsaa være underkastet de almindelige for et saadant gjældende Love, specielt ogsaa Elasticitetsloven; men imellem dem indbyrdes virker kun Frictionen og Cohæsionen og ikke —, hvad der dog kun er en Gradsforskjel, — nogen saa activ Kraft som Elasticiteten.

Frictionen er, som først paavist ved Coulomb's Slædeforsøg, proportional med Normaltrykket paa Berøringsfladerne, men derimod uafhængig af disses Areal og i det væsentlige ogsaa af Bevægelsens Hastighed. Cohæsionen er ifølge samme Forfatter proportional med de berørende Fladers Størrelse men uafhængig af Trykket. Det maa imidlertid stedse erindres, at begge ere secundære Kræfter, og at de derfor i hvert enkelt Tilfælde kun optræde med den til Ligevægtens Etablering netop fornødne Størrelse, saafremt denne ikke overskrider den højeste Værdi, de kunne naa; ere de derimod ikke i Stand til at tilvejebringe Ligevægt, saa modvirke de den stedfindende Bevægelse med deres under disse Forhold største Beløb. De angivne Udtryk

$$F = \mu N \text{ og } C = k A$$

hvor F er Frictionen, C Cohæsionen, N Normaltrykket, A Arealet, μ og k henholdsvis Frictions- og Cohæsiions-Coefficienterne, ere derfor kun Grændseværdier for F og C , og tilmed kun at betragte som første Tilnærmelser for disse.

Friction.

§ 2. Naar to Legemer udøve et gjensidigt Tryk i deres Berøringsflader, ville de smaa Ujevnheder, Forhøjninger og Fordybninger deri, gribe ind i hinanden. Frictionen hidrører fra, at disse Ujevnheder ved Bevægelsen af det ene Legeme hen ad det andets Overflade brydes, bøjes eller løftes ud af Indgribning. Det følger heraf, at den maa være forskjellig for forskjellige Stoffer, afhængig af Berøringsfladernes Glathed og af Bevægelsens Natur. Idet der fordres nogen Tid til, at Ujevnhederne ret kunne gribe ind i hinanden — for Træ paa Træ maaske nogle Timer, for Træ paa Metal indtil flere Dage —, maa Frictionen ved Overgang fra Hvile til Bevægelse (den statiske F .) være større end under denne (den dynamiske F .); idet

endvidere ved Rulning Ujevnhederne ville sænkes ned i og løftes ud af hinanden, maa den glidende Friction være større end den rullende.

Coulomb, der først anstillede Undersøgelser herover i det store, og senere Morin, der 1830 i Metz foretog over 1000 Forsøg, fandt, at den glidende Friction under Bevægelsen var proportional med Trykket, som under Forsøgene varierede fra 46 til 1145 Kg., men derimod uafhængig af Berøringsarealet, som varierede fra 0.004 til 0.088 □ M. Det tilsyneladende paradoxale heri bortfalder, naar man udtrykker det saaledes: at Frictionen er proportional med Trykket pr. Enhed af Areal multipliceret med Arealet. Endvidere syntes Hastigheden af Bevægelsen, — som ved Forsøgene ikke overskred 3.5 M. pr. Sec. —, ved visse Materialier at have en forsvindende Betydning, ved andre derimod næsten ingen.

Ogsaa senere Undersøgelser bekræfte, at Hastigheden har nogen Indflydelse, og at Modstanden aftager, naar denne voxer. Bochet¹⁾ har saaledes fundet ved at drage Jernbanevogne med fastklemte Hjul henad Skinnerne, at den glidende Friction, F , kan udtrykkes ved:

$$F = N \left(\frac{\mu - \gamma}{1 + \theta v} + \gamma \right)$$

hvor N er Normaltrykket paa Glidefladen, v Hastigheden, μ , γ , θ Constanter. Er $v = 0$, bliver $F = \mu N$: μ er Frictionscoefficienten for Hvile; er $v = \infty$, bliver $F = \gamma N$: γ er Frictionscoefficienten for uendelig Hastighed. Constanten θ endelig er for alle Materialier temmelig nær den samme : $\theta = 0.30$, naar v udtrykkes i Meter pr. Sec. Som Middeltal fandtes paa tørre Skinner uden Smøremiddel for bløde Træarter, Læder, Guttapercha: $\mu = 0.60$, $\gamma = 0.30$; for haarde, tørre Træarter: $\mu = 0.53$, $\gamma = 0.25$; for raat Jern: $\mu = 0.40$, $\gamma = 0.10$; for glat og poleret Jern: $\mu = 0.30$, $\gamma = 0.10$; for vaadt Træ og fedt Træ henholdsvis: $\mu = 0.25$, $\gamma = 0.10$ og $\mu = 0.16$, $\gamma = 0.04$. — Naar Frictionscoefficienterne almindelig angives forskellige for Hvile og Bevægelse, eller naar Molesworth regner den sidste

¹⁾ Comptes rendus, t. 50, 1860. — Ann. des ponts et chaussées, 1861, 2. — o. a. St.

lig 0.7 Gange den første, saa burde herved altsaa tillige omtales, med hvilken Hastighed denne Bevægelse tænkes at foregaa; deraf vilde da γ kunne findes.

For at faa et nøjagtigere Udtryk for Frictionen vilde det imidlertid ogsaa være nødvendigt at tage Hensyn til, at den ikke voxer fuldstændig proportionalt med Normaltrykket. Naar dette har naaet en vis Størrelse pr. Arealenhed, — maaske først naar en delvis Knusning er begyndt at indtræde, maaske allerede tidligere —, saa vil den ifølge Rankine, Moseley o. a. tiltage ualmindelig stærkt; særlig gjælder noget saadant, forsaavidt Smørelse er anvendt, naar denne ved det stærke Tryk presses ud, saa at Fladerne komme i directe Berøring med hinanden. For mindre stærke Tryk vil derimod ifølge Kimball, Tower, Thurston o. a. Coefficienten snarere aftage lidt, naar disse voxe, indtil den ender med at holde sig tilnærmelsesvis constant ved nogenlunde høje Tryk.

Det er forholdsvis faa af de nyere Forsøg, der angaa Frictionen af plane Overflader, flere ere derimod anstillede over Tapfrictionen. Da der imidlertid herved er benyttet Tapper, enten rigelig smurte eller endog anbragte i et Oliebad, have de saaledes fundne Resultater mindre Interesse i nærværende Forbindelse, hvor det navnlig er den glidende Friction imellem ikke smurte Flader, der haves for Øje. I Forbigaaende skal det derfor blot nævnes, at Hirn's, Waltjen's, Rühlmann's, Kirchweger's og andres Forsøg have fundet Bekræftelse i Thurston's og Tower's¹⁾, og at herefter Frictionen ved smurte Tapper varierer stærkt med Hastigheden, idet den efterat have aftaget til et Minimum ved en Hastighed af i Almindelighed 0.50—0.75 M. pr. Sec., men adskilligt mere ved særlig store Tryk, atter tiltager hurtigt med denne. Det viste sig endvidere, — hvad ogsaa let forstaaes ved Betragtning af de smaa Ujevnheder i Overfladerne —, at en Omvendning af Bevægelsen i Begyndelsen foraarsager en undertiden ret betydelig Forøgelse af Frictionen, indtil Tappen i nogen Tid har løbet i

¹⁾ Proceedings of the institution of mechanical engineers London 1883. — Dingler's polytechn. Journal Bd. 225 og 252 — o. a. St.

samme Retning. At Frictionen endelig fandtes at aftage, naar Temperaturen stiger, kan endnu berøres.

Cohäsion.

§ 3. Ifølge den nyere atomistiske Theori antages alle Legemer sammensatte af ensartede Massepunkter eller Atomer, hvis forskellige Ordning i regelmæssige Grupper til Molecular betinge Stoffernes forskellige Egenskaber. Disse Atomer have en Bestræbelse til altid to og to at holde sig i en vis, meget lille, indbyrdes Afstand, den neutrale Afstand. Ere de hinanden nærmere end denne, ville de udøve en gjensidig Frastødning $\propto$ en Trykspænding, der er desto stærkere, jo nærmere de ere. Ere de derimod mere fjernede fra hinanden, udøve de en Tiltrækning $\propto$ en Trækspænding, der først voxer med Afstanden indtil et Maximum —, svarende til en vis Størrelse af denne, som dog er for lille til at kunne iagttages, — og derpaa aftager, saa at den ved enhver synlig Afstand allerede er meget lille. Frastødningen giver Legemerne Rumopfyldning, Tiltrækningen derimod Sammenhængskraft. Det forstaas ogsaa let, hvorledes Elasticiteten fremkommer, og hvorledes Brud ved Strækning kan foregaa, idet Atomerne fjernes saa meget fra hinanden, at Tiltrækningen bliver forsvindende; derimod bliver Knusning ved Tryk kun mulig, naar dette, maaske ved Rystelser, faar en saadan Sideafvigelse i Forhold til Atomernes Forbindelseslinie, at disse ikke nærmes til hinanden, men snarere maaske gjensidig forskydes derved.

Cohæsionen eller Sammenhængskraften er altsaa at betragte som en indbyrdes Tiltrækning imellem Legemernes mindste Dele. Adhäsion eller Vedhægningskraft bruges ikke sjældent i Flæng hermed; men undertiden defineres den som en Tiltrækning mellem uensartede, Cohæsionen derimod som en saadan mellem ensartede Legemer. Det er denne Kraft, som giver Materien Fasthed og Elasticitet, som modstaar Strækning og Forskydning, og som ved sin større eller mindre Intensitet nærmer Jordarterne mere eller mindre til de faste Systemer. Ved de ideale Jordarter, som Theorien beskæftiger sig med, har imidlertid Sammenhængskraften kun en forholdsvis ringe Betydning, idet de enkelte Partikler, Moleculerne, forudsættes saa meget fjer-

nede fra hinanden, at Tiltrækningen mellem deres respective Atomer er forsvindende. Og for de i Naturen forekommende Jordarter gjælder dette i endnu højere Grad, idet deres mindste Dele ere endelige Legemer, der kun paa enkelte Punkter kunne berøre hinanden. I Jordtryksthoeien spiller derfor denne Kraft kun en underordnet Rolle. Den optræder i Almindelighed som en med Forskydningsmodstanden ved de faste Legemer analog Reaction og maa følgelig, som det er bekjendt fra Elasticitetsthoeien for disse, være proportional med Arealet, langs hvilket Forskydningen sker, men i det væsentlige uafhængig af Trykket vinkelret derpaa; det er imidlertid indlysende, at dette netop ved Jordarterne ifølge det ovenfor bemærkede kun kan være en første Tilnærmelse, idet et forøget Tryk, hvorved de enkelte Partikler bringes i nærmere Berøring med hinanden, comprimeres eller maaske knuses, saa at Atomernes indbyrdes Afstand formindskes, nødvendigvis i en væsentlig Grad maa forøge Sammenhængen.

Friction og Cohæsion passive Kræfter i Modsætning til Elasticiteten.

§ 4. Cohæsionen, ω : den indre Modstand ved de løse Systemer, og Elasticiteten, som den benævnes ved de faste Legemer, er altsaa i Virkeligheden den samme Kraftyttring; men ogsaa Frictionen, som fremkommer ved Bøjning og Sønderbrydning af de smaa, elastiske Ujevnheder i Legemernes Overflader, maa siges at være af samme Natur. Det er Kræfter, der oprindelig kaldes til Live som Modstande og med et ikke større Beløb end netop fornødent for Ligevægt, men som engang fremkaldte og ikke overvundne ogsaa kunne optræde som active, virkende til at bringe Delene tilbage til den oprindelige Ligevægtstilstand. Cohæsionen og Frictionen maa imidlertid dog betegnes som passive Kræfter, forsaavidt overhovedet dette Begreb skal svare til en i Naturen eksisterende Realitet og ikke blot er en videnskabelig Abstraction. Ved enhver nok saa lille endelig Bevægelse vil nemlig den første paa Grund af den korte Afstand, indenfor hvilken dens Virkning er følelig, og den anden, fordi dens Maximalbeløb som Følge af

Ujevnhedernes forsvindende Størrelse er overvundet, ikke mere kunne tilvejebringe den tidligere Tilstand, og det active Arbejde, som disse Kræfter kunne udføre, maa altsaa være uendelig lille. Kun under særegne Omstændigheder kunne Forholdene være noget anderledes, idet f. Ex. Jordarten kan være gennemtrængt af en Vædske, imellem hvilken og Jordpartiklerne da Friction og Adhæsion finder Sted. Elasticiteten ved de faste Legemer kan derimod ikke saaledes siges at være en udelukkende passiv Kraft, idet Strækningen eller Sammentrykningen, forinden Elasticitetsgrænsen naas, undertiden er meget betydelig.

Kun Frictionen medtages i Beregning.

§ 5. Det er et Spørgsmaal, om i Jordtryksteorien Cohæsionen og Frictionen skulle tænkes virkende samtidig eller kun en ad Gangen, og da den første, indtil Bevægelse er i Færd med at indtræde, den anden saalænge denne finder Sted. Winkler¹⁾ og senere Schäfer ere — ligesom tidligere Ardant — tilbøjelige til at antage det sidste, men de fleste andre Forfattere gaa ud fra, at de virke samtidig; nogen Indflydelse paa Resultaterne faar dette dog ikke, idet saa at sige alle —, maaske alene med Undtagelse af Culmann og et Par andre, — udelade Hensynet til Cohæsionen. Efter det foregaaende synes der ingen Grund at være til at antage, at ikke begge Kræfterne skulde kunne være til Stede samtidig, og Leygue's²⁾ Forsøg vise ogsaa bestemt i denne Retning. Er den stedfindende Bevægelse uendelig lille, saa vil utvivlsomt Cohæsionen virke, forsaavidt ikke Atomerne ere blevne fjernede saa meget fra hinanden, at deres indbyrdes Tiltrækning er forsvindende; men ogsaa Frictionen vil optræde med et Beløb lig den elastiske Modstand af de smaa Ujevnheder mod den til Bevægelsen svarende Bøjning eller Forskydning af disse. Foregaar derimod en endelig Bevægelse, saa modvirkes denne ikke alene af Frictionens største Beløb, svarende til Ujevnhedernes Brudmodstand, men tillige af en ringe Cohæsion, hidrørende fra den gjen-

¹⁾ Neue Theorie des Erddruckes. Wien 1872.

²⁾ Ann. des ponts et chaussées, 1885, 2.

sidige Tiltrækning imellem alle Partiklerne. For saa vidt er imidlertid Winkler's Paastand berettiget, som det ikke gaar an at antage begge Kræfterne virkende med deres største Beløb samtidig. Frictionen er kun Maximum under Bevægelsen, eller naar denne netop er i Færd med at indtræde, men det er ingenlunde sikkert, at ikke Cohæsionen allerede forinden har naaet sit Maximum og atter er aftaget, idet Afstanden imellem Atomerne har overskredet den Værdi, der svarer til den størst mulige Tiltrækning; dette vil dels afhænge af denne Afstands Størrelse, dels af Ujevnhedernes Dimensioner og Elasticitet, altsaa af Legemernes physiske Egenskaber og Overfladernes Natur, og dels endelig af Trykket, der bringer Ujevnhederne i Indgribning.

Af Hensyn til det ovenstaaende vil det utvivlsomt i Reglen være tilraadeligt kun at gjøre Regning paa Frictionen. Det eneste, man med Vished kan sige, er nemlig, at, for at en endelig Bevægelse overhovedet skal kunne finde Sted, maa den forskydende Kraft være større end det største af de to Kræfters Maximalbeløb; og medens ved de faste Legemer Sammenhængskraften er den væsentligste og derfor alene betragtes dér, vil ved Jordarterne i Almindelighed Frictionen være den langt overvejende. Hertil kommer imidlertid ogsaa, at om end Cohæsionen i visse Jordarter, navnlig i fugtigt Ler, kan være temmelig betydelig, vil den dog efterhaanden let tilintetgjøres ved Luftens og Vejrligets Virkning, og maaske ikke mindst ved Temperaturforandringer og Frost.

Frictionens største Beløb.

§ 6. Frictionens største Beløb vil bero paa, om det er den statiske eller dynamiske Form af denne, man har at gjøre med. Vel maa ved et Jordværk i Ligevægt Bevægelse overhovedet ikke indtræde, men ved det mindste Stød eller den mindste Rystelse af to Legemer, der berøre hinanden, vil Frictionen imellem dem gaa over fra den første til den sidste Form, idet Ujevnhederne udløses noget af deres Indgribning. Da den dertil ogsaa under Bevægelsen er mindre end under Hvile, maa Ligevægten for at være stabil, nødvendigvis være baseret paa en Værdi deraf, som

er mindre end eller i det højeste lig den dynamiske Frictions Maximumsbeløb. Og da dette desuden for en bestemt Hastighed kan angives med større Sikkerhed end det til Hvile svarende Beløb, er det i hvert Fald altid det sikreste at holde sig dertil.

Frictionens virkelige Beløb. Principet af den mindste Modstand.

§ 7. Hvor stor iøvrigt Frictionen i hvert enkelt Tilfælde virkelig er, har først Moseley og efter ham Rankine og Scheffler søgt at bestemme ved Hjælp af et nyt Theorem, kaldet Principet af den mindste Modstand.

I dets af den sidste modificerede og mest fuldkomne Form kan dette udtrykkes saaledes:¹⁾ Naar et System af Kræfter er i Ligevægt, og deriblandt findes et Antal Reactioner, saa ville deres paa Resultanten af alle de active Kræfter vinkelrette Composanter være saa smaa, som de for Systemet iøvrigt gjældende Betingelser tilstede det. I alle de for Anvendelserne vigtigere Tilfælde kan det samme omskrives til, at Vinklerne mellem Reactionerne og Retningen af de active Kræfters Resultant ville være Minimum.

Principet, der dog kun har Betydning ved tre eller færre ubekjendte Reactioner, idet det i dets Almindelighed rummer en Ubestemthed, skulde give de virkelig eksisterende, ikke de til en Grændse-Ligevægt svarende Tryk. Det baseres i Virkeligheden paa en Hypothese om en successive Udvikling af disse og kan let i en lidt ændret Skikkelse afledes af Gauss' Tvangslov.²⁾

Overført paa Jordtrykstheorien skulde, ifølge de nævnte Forfattere, dette Princip føre til, at Frictionen langs ad enhver Flade, hvis Heldning mod Horizontalen er større end Frictionsvinklen, altsaa blandt andet ogsaa langs en Brudflade eller — i Almindelighed — en Beklædningsmur, vil optræde med sit størst mulige Beløb; thi de active Kræfter ere Vægte, og Reactionerne maa derfor saa nær som muligt

¹⁾ Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken, Braunschweig, 1857.

²⁾ Tidsskrift for Mathematik 5te Række, 6te Aargang 1888.

være lodrette, α : Heldningen mod Normalen til Understøtningsfladen skulde — under den omtalte Forudsætning — overalt være lig den til denne svarende Frictionsvinkel.

Det er imidlertid her som overalt ved Theoremets Anvendelse af den største Betydning at kjende den Maade, hvorpaa Systemet oprindelig er anbragt i den Stilling, det har, idet der herved kan være indbragt deri visse indre Spændinger, hvorved nogle af Reactionerne delvis ere bestemte. Betragtes saaledes det kileformige Jordlegeme, som begrænses af en Beklædningsmurs verticale Bagside og af en Brudflade i Jordmassen, saa kan det tænkes ført ned imellem disse paa forskjellig Maade. Er det f. Ex. gledet ned ad Brudfladen, holdt ind mod denne ved en vandret Kraft paa den lodrette Flade, vil Trykket paa Muren ogsaa blive vandret; er det derimod ført ned langs ad den sidste, vil Trykket med Normalen paa denne danne Frictionsvinklen, medens den Kraft, hvormed Jordprismet er blevet holdt ind derimod, vil bestemme Reactionen fra Brudfladen. Hertil kommer endvidere, at Jordlegemet ikke er et enkelt fast Hele, men en Samling af løse Partikler, der hver for sig kunne være anbragt paa forskjellig Maade, og saaledes bliver da Spørgsmaalet om Anbringelsesmaaden end mere compliceret.

Det er altsaa ikke nogen tilladelig Conclusion, at Reactionen overalt med Normalen til Understøtningsfladen maa danne Frictionsvinklen, og det vil af det foregaaende være indlysende, at Principet af den mindste Modstand ikke uden visse Forudsætninger lader sig anvende i Jordtrykstheorien.

Med Hensyn til dets Anvendelse i Hvælvtheorien gjælder de samme Indvendinger, uagtet her Anbringelsesmaaden lettere kunde tænkes taget med i Beregning. I Stedet derfor har man i nyere Tider opstillet Theorien om den gunstigste Tryklinie, som antages efterhaanden at indstille sig ved de smaa Sætninger, som uafbrudt finde Sted i Hvælvingen. Ogsaa i Jordmassen ville imidlertid saadanne smaa Bevægelser og Sætninger stadig foregaa, hidrørende fra Stød og Rystelser, Temperatur- og Fugtighedsvariationer o. desl., og det er netop ved Hjælp heraf, at man ligeledes i Jordtrykstheorien kan komme ud over Vanskelighederne. Det er nemlig indlysende, at disse Smaabevægelser af Delene efterhaanden ville ophæve de Initialspændinger, der muligvis ved Systemets Anbringelse oprindelig kunne være indbragt deri, og forsaavidt

man virkelig vil anvende Principet af den mindste Modstand, er man altsaa i Stand hertil, saasnart blot Jordmassen har været udsat for nogle Rystelser og Sætninger eller har henstaaet i nogen Tid. Det vil dog ogsaa umiddelbart kunne indses uden Hjælp af denne, — ialfald ved Jordarterne, — lidt usikre og farlige Theori, at naar saadanne Bevægelser antages at indtræde langs Beklædningsmurens Bagside og Brudfladen, saa maa Frictionen langs begge optræde med sin Maximalværdi, og Reactionerne altsaa med Normalerne danne Frictionsvinklerne.

Betragtes Jorden som en fuldstændig levende Masse, hvis Partikler alle ere i smaa Bevægelser, saa maa Frictionen imellem disse overalt i Massen være Maximum. Det er imidlertid et Spørgsmaal, om en saadan Betragtning virkelig tør antages beføjet, og der vil i det følgende blive Lejlighed til at gjenoptage dette og underkaste det en noget nærmere Undersøgelse.

Methoder til Maaling af Friction og Cohæsion.

§ 8. Naar man ved Forsøg skal bestemme Frictionscoefficienten for forskjellige Jordarter, findes den i Almindelighed ved at maale Heldningen af disses naturlige Skraaning. En Jordpartikel, anbragt paa en heldende Flade og uden Cohæsion med denne, vil glide ned deraf, naar Frictionen ikke kan holde den, og en Jordmasses Skraaning vil derfor lidt efter lidt ændre sig, indtil Partiklerne netop kunne hvile derpaa; men dette vil, som bekendt, først indtræde, naar Heldningen mod Horizontalen er lig Frictionsvinklen: *arc. tg μ* . — Cohæsionen, til hvilken herved intet Hensyn er taget, er ganske vist ved enkelte Jordarter temmelig forsvindende og vil i Naturen efterhaanden formindskes ved Vejrligets Indflydelse og ved Rystelser, men fuldstændig ophæves kan den dog ikke. Er den iagttagne Jordskraaning imidlertid tilstrækkelig høj, vil dette dog ingen Betydning faa for Frictionens Bestemmelse. Søges nemlig efter den almindelige Jordtrykstheori med Antagelse af plane Brudflader den stejleste Skraaning, hvorunder en foroven vandret afgrændset Jordmasse kan holde sig, saa faas den paa følgende Maade.

optræder, samtidig med at Frictionscoefficienten har sin absolut største Værdi μ . Er nemlig h lille, saa kan k_1 bestemmes af (1), og er den tilstrækkelig lille, bliver $\cot. \alpha$ negativ ∞ : Jorden er overhængende. Sættes imidlertid blot $\cot. \alpha$ lig Nul, saa at Skraaningen altsaa er vertical, faas:

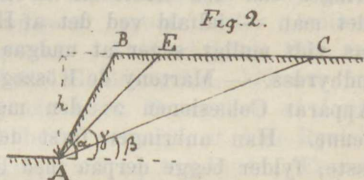
$$h_0 = \frac{4 k_1}{\tilde{\omega}} (\mu + \sqrt{1 + \mu^2}) \dots (2)$$

hvoraf k_1 kan bestemmes ved Iagttagelse af den største Højde, h_0 , ved hvilken en lodret afstukken Jordvæg i længere Tid kan holde sig.

Da det er af Betydning i Forbindelse med denne Bestemmelse af Frictionen og Cohæsionen at gjøre sig klart Rede for, hvorledes disse optræde i de forskjellige Brudflader, bemærkes følgende. For enhver Plan beliggende imellem AB og AE virker kun Cohæsionen, med et Beløb pr. Arealenhed, som varierer fra Nul ved den første til en Værdi ved den sidste, der er det absolute Maximum, k , saafremt Jordens moleculære Beskaffenhed er en saadan, at en endelig Friction ikke træder i Virksomhed, førend Partiklerne ere mere fjernede fra hinanden, end der svarer til den største Attraction imellem dem. Heldningen af AE vil da være bestemt ved:

$$\frac{\tilde{\omega} h^2}{2} (\cot. \gamma - \cot. \alpha) \sin \gamma = \frac{k h}{\sin \gamma}$$

Drejer nu Brudplanen sig videre fra AE henimod AC , saa vil Frictionen komme til, voxende lidt efter lidt til det absolute Maximum μ ved AC , og samtidig vil den Cohæsion, der virker i Forening dermed, aftage fra en vis Værdi, k_0 , svarende til en Afstand mellem Partiklerne, ved hvilken Frictionen ikke er forsvindende (bestemt ved: $k_0 + \mu' n = k$, hvor n er Trykket pr. Arealenhed af AE), til k_1 , som den er ved AC . Drejer Planen sig endelig endnu videre, saa vil Frictionen atter aftage og Cohæsionen voxe. Alt dette vil fremgaa af den ovenstaaende Ligning, der ud-



trykker Ligevægten af det vilkaarlige Jordprisme ABC , idet heri kan sættes: $k' = F(\mu')$, hvor F er en af Jordartens Natur afhængig Function. — Det vil ikke frembyde nogen Vanskelighed at modificere disse Betragtninger for det Tilfælde, at en ikke forsvindende Friction træder i Virksomhed, før Cohæsionen har naaet sit absolute Maximum k .

Undertiden har man ogsaa bestemt Frictionen paa anden Maade, idet man har maalt det Træk, der er nødvendigt for at forskyde en Jordmasse henad en anden. Ovenover en faststaaende Kasse, helt fyldt til Randen med Jord, anbringes en lignende løs Kasse uden Laag og Bund og inden Anbringelsen fyldt med samme Jordart, hvoraf en Del vil bæres af Frictionen langs Sidevæggene; enten ved Træk paa den øvre eller maaske ved at helde den nedre Kasse bringes saa den første til at forskyde sig over den anden, idet man — ialfald ved det af Hagen benyttede Apparat — saa vidt muligt søger at undgaa Friction imellem Kasserne indbyrdes. — Martony de Köszezh bestemte ved et lignende Apparat Cohæsionen ϕ : den med k_1 betegnede Værdi af denne. Han anbringer først den løse Kasse ovenpaa den faste, fylder begge derpaa med Jord og belaster Overfladen af denne med Vægte; det Træk, der da er nødvendigt for at forskyde den øvre Kasse med dens Indhold, maaler Frictionen plus den virkende Cohæsion, og denne sidste faas altsaa heraf, naar den første er bekjendt.

Endelig har man i den nyeste Tid foreslaaet en tredie Fremgangsmaade, som dog væsentlig kun er en Forbedring af den første. En Mangel ved denne er nemlig Vanskeligheden ved at anbringe Jorddelene paa den næsten under Frictionsvinklen heldende Skraaning uden derved at give dem en saadan Hastighed, at de rulle ned, og Frictionsvinklen altsaa findes noget — maaske 1 à 2° — for lille. Ved derimod at anbringe Jorden i en Kasse, planere dens Overflade horizontal og derpaa dreje Kassen om en vandret Kant mere og mere, indtil Jordoverfladen begynder at forstyrres og altsaa netop har den søgte Heldning, vil denne Ulempe undgaas. Dog ligger Fejlen i det første Tilfælde til den sikre Side, og det er neppe nogen Fordel, naar man i det sidste finder Frictionen svarende til Overgangen fra Hvile til Bevægelse i Stedet for det omvendte.

En Combination af denne og den foregaaende Methode,

som frembyder visse Fordele, bestaar i paa Jordoverfladen i den drejelige Kasse at anbringe en mindre Kasse uden Laag og Bund, fylde denne med Jord og derpaa give hele Systemet en saadan Heldning, at den begynder at glide ned ad Overfladen. Saaledes har fornylig Leygue maalt Cohæsion og Friction.

Mangler ved Methoderne.

§ 9. Hvilken af disse Fremgangsmaader der end benyttes, ville de fundne Coefficienter dog ikke kunne gjøre Fordring paa nogen stor Nøjagtighed.

Det er ovenfor (§ 6 Side 8) anført, at det er den dynamiske Friction, som man i Jordtrykstheorien bør regne med; men det er ogsaa bemærket, at denne afhænger af Bevægelsens Hastighed, og det Spørgsmaal opstaar derfor, hvilken Hastighed man da maa paaregne. At Forholdene ikke ere som ved Overgangen fra Hvile til Bevægelse, hidrører fra Rystelser og de heraf følgende smaa Bevægelser af Jordpartiklerne, og det hele vil derfor afhænge af disse Rystelsers Natur, navnlig deres Hyppighed og Amplitude. Er den Jordmasse, der skal undersøges, udsat for mange hurtige og stærke Rystelser, bør Frictionen deri regnes mindre (o: svarende til en større Hastighed), end naar dette ikke er Tilfældet. Exempelvis vil det første saaledes gjælde for en Jernbanedæmning, der passeres af svære Tog med stor Hastighed, medens Sagen stiller sig anderledes ved en Kanaldæmning og tildels ogsaa ved Jordmassen bag en Kaimur,¹⁾ som kun er udsat for langsomme, svagere Rystelser ved Kjørsel af Kraner, enkelte Vogne, Nedfiring af svære Byrder o. desl.

Maales den Kraft, der er nødvendig for at forskyde en Del af Jordmassen, saa kan ogsaa Hastigheden, hvormed Bevægelsen foregaar, iagttages; og da denne vil være jevn, naar Kraften netop er lig den dertil svarende Friction, saa at Accelerationen er Nul, saa vil man ad denne Vej unægtelig finde de i videnskabelig Henseende fineste Resultater.

¹⁾ Ved Bolværker vilde det derimod maaske være rigtigere at regne Frictionen mindre paa Grund af de Rystelser, der forplante sig til Jorden, naar et Skib tørner imod.

tater. Ved Maaling af den naturlige Skraaning faas derimod en for Praxis anvendeligere Værdi, navnlig naar man til Iagttagelsen vælger en Masse, der er udsat for de samme Rystelser som det Bygningsværk, der ved Jordtryksteorien skal undersøges, eller man f. Ex. vilde angive Heldningerne henholdsvis for en Jernbanedæmning og en Kanal- eller almindelig Vej-Dæmning. Forudsat at Bochet's Formel er nogenlunde correct, og at kun Frictionen virker, vil den naturlige Skraaning, svarende til Hastigheden v , være bestemt ved:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\mu - \gamma}{1 + \theta v} + \gamma$$

Idet endelig Cohæsionens Bestemmelse afhænger af Frictionen, maa den til Basis for denne lagte Hastighed ogsaa faa Indflydelse derpaa. —

Der er imidlertid et andet Spørgsmaal, der her som overalt ved Jordtryksteoriens Anvendelse i Naturen er af den største Betydning, det er Spørgsmaalet om Partiklernes Størrelse og Form. I det foregaaende er det omtalt, at Jordarterne i Virkeligheden ikke bestaa af uendelig smaa Elementer, men af endelige Legemer, og Ligevægtsforholdene kunne derfor ikke være ganske de samme som de, Theorien udleder ved at substituere en Abstraction derfor. Af denne Grund ville de anførte Methoder til Frictionens Bestemmelse let kunne føre til fejlagtige Resultater eller ialfald til saadanne, der ikke uden et vist Forbehold tør antages som brugelige.

Betragtes et System af Legemer af en hvilkensomhelst Form og Størrelse, saa ville de ved Glidning, Rulning eller Spinding paa hinanden kunne ordne sig paa forskellige Maader. For ethvert af dem vil den stabileste Stilling være den, hvor dets Tyngdepunkt er sænket saa meget som muligt. Er derfor Systemet udsat for passende Rystelser og Stød, hverken for stærke eller for svage, saa ville Delene efterhaanden nærme sig til en saadan Ordning, at denne Betingelse saa vidt muligt er opfyldt for enhver af dem med tilbørligt Hensyn til alle de andre.

Forudsættes Jordpartiklerne alle at være indbyrdes congruente Legemer, ordnede paa forskjellig Maade, saa kan man i nogle Tilfælde umiddelbart se, hvilken den stabileste Ordning vil være. For en Samling Kugler af samme

Radius, r , hvoraf de nederste hvile paa et vandret Underlag, vil det være en saadan, at enhver Kugle hviler paa 3 andre og, — forsaavidt den ligger helt inde i Massen —, bidrager til directe at bære 3, samt iøvrigt berøres af 6 med Centrene i samme vandrette Plan. Dette er den for pyramideformede Kuglestabler vel kjendte Ordning, hvorved det samlede Antal Kugler udtrykkes ved et Pyramidaltal og de i en vilkaarlig vandret Plan beliggende ved et Polygonal- eller specielt Trigonal-Tal. Derimod ere de hyppigt benyttede rectangulære Stabler, hvor hver Kugle hviler paa 4 andre, kun delvist stabile.

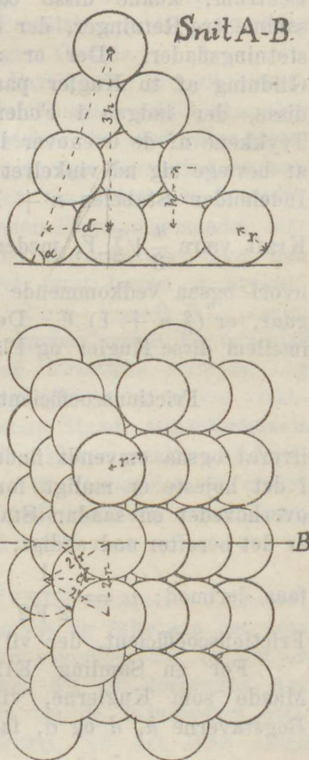
Den lodrette Afstand imellem to successive vandrette Kuglelags Centralplaner vil let faas ved Betragtning af det regulære Tetraeder, hvis fire Hjørner ere Centrene af de tre i samme Lag liggende Kugler og den derpaa hvilende af det næste Lag, og hvis Kanter derfor alle sex have Længden $2r$; den er: $h = 2r\sqrt{\frac{2}{3}}$. Ligeledes faas den stejleste stabile Skraaning af en saadan Samling af Kugler bestemt ved:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3h}{d} = \frac{6r\sqrt{\frac{2}{3}}}{r\sqrt{3}} = 2\sqrt{2} = 2.82842, \alpha = 70^{\circ}31'45''$$

saa at Heldningen ses at være uafhængig af Radius r .

Denne Ligevægtstilstand vil ikke fordre nogensomhelst Friction imellem Kuglerne indbyrdes, og der forudsættes kun en saadan imellem nogle af de nederste af disse og Planen,

Fig. 3.



hvorpaa de hviler. Hver Kugles Vægt (V) kan nemlig opløses i tre ligestore Composanter ($V\sqrt{\frac{1}{6}}$) efter Kanterne i det omtalte Tetraeder; og idet alle de Tryk, som den modtager fra de øvre Kugler, derfor maa gaa gennem dens Centrum, kunne disse ogsaa alle decomponeres efter de samme tre Retninger, der ere vinkelrette paa de tre Understøtningsflader. Der er altsaa intetsteds Tilbøjelighed til Glidning af to Kugler paa hinanden. Derimod ville de af disse, der indgaa i Foden af Skraaningen, som Følge af Trykkene af de ovenover liggende med en vis Kraft stræbe at bevæge sig ud vinkelret paa Skraaningens Længderetning. Indeholder Stabelen $n + 1$ Lag, saa vil denne vandrette

Kraft være $\frac{n}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}V$, medens det lodrette Tryk paa Planen, hvori ogsaa vedkommende nederste Kugles egen Vægt indgaar, er $(\frac{2}{3}n + 1)V$. Den til Ligevægt fornødne Friction imellem disse Kugler og Planen vil altsaa være bestemt ved:

$$\text{Frictionscoefficienten } \mu = \frac{n}{(2n + 3)\sqrt{2}},$$

hvoraf ogsaa omvendt findes Antallet af Lag, $n + 1$, som i det højeste er muligt for en given Værdi af μ . For at overhovedet en saadan Stabel skal kunne dannes ($n = 1$), er det herefter nødvendigt, at: $\mu \leq \frac{1}{4} = 0.14$; for $n = \infty$

faas derimod: $\mu = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0.35$, som altsaa er den største

Frictionscoefficient, der vil kunne fordres.

For en Samling Ellipsoider, ordnede paa samme Maade som Kuglerne, vil, med uforandret Betydning af Bogstaverne h , d og a , faas:

$$h = 2c\sqrt{\frac{2}{3}}, d = b\sqrt{3}, \text{tg } \alpha = 2\sqrt{2} \cdot \frac{c}{b}$$

naar c betegner den lodrette Halvaxe og b den af de to vandrette, der er vinkelret paa Skraaningens Længderetning; den tredie Halvaxe, den med Skraaningen parallele, indgaar derimod ikke i Resultatet. For at Stabiliteten skal være fuldkommen, maa imidlertid den mindste af de tre Axer være lodret, altsaa $c \leq b$, saa at den stejleste Skraaning vil være den, der svarer til Omdrejningsellipsoiden eller specielt Kuglen.

For et System af Cylindre med elliptisk Tversnit (Halvaxer a og b , samt $a > b$) faas Skraaningen bestemt ved: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \sqrt{3}$, der for den cirkulære Cylinder giver:

$\alpha = 60^\circ$. Hvorledes Forholdene ville stille sig ved en Samling af Prismes, specielt Parallelopippeder, og flere andre Legemer behøver neppe nogen Omtale.

Hvilken nu end Formen af Partiklerne er, vil altsaa, uafhængig af Frictionen, en vis fuldkommen stabil Skaaning kunne indstille sig og trods Rystelser bevares uforandret. Ved at maale Vinklen α af den naturlige Skraaning er man derfor ikke sikker paa virkelig at faa Frictionen bestemt. Bedre er i den Henseende den anden Fremgangsmaade, som bestaar i at forskyde den øvre Del af Jordmassen over den nedre. Vel vil herved denne Del først hæves et Stykke, der for ellipsoidale Partikler er: $2c - h = 0.37c$, men et Øjeblik efter synker den atter ligesaa meget og udvikler saaledes paany det til Løftningen forbrugte Arbejde; og saaledes vil den skiftevis hæves og synke, saa at det virkelige kan antages, at man paa denne Maade tilnærmelsesvis vil faa alene Frictionen imellem Partiklerne maalt. At Modstanden ved Overgang fra Hvile til Bevægelse er større end under denne, stemmer ogsaa godt med det ovenanførte, idet til en Begyndelse et extra Arbejde maa udføres for at løfte Delene det omtalte Stykke.

Ere imidlertid Partiklerne ikke alle congruente Legemer, eller ere de lejrede paa forskellig Vis og ikke saa tæt som muligt, saa blive Forholdene mere complicerede, og det er ikke sikkert, at ved Forskydningen alt det forbrugte Arbejde atter gjenvindes. Og selv om de forudsættes congruente, men af en vilkaarlig Form, vil det ikke alene frembyde store Vanskeligheder at opstille en almindelig Theori til Bestemmelsen af den Skraaning, der uafhængig af Frictionen vil kunne holde sig, men det er overhovedet et Spørgsmaal, om den Betingelse, at hver Partikel skal røre de nærmest liggende og have sit Tyngdepunkt saa lavt som muligt, vil være tilstrækkelig til at bestemme Systemet. Naar dette ikke er Tilfældet, eller Massen ikke er rystet tilstrækkeligt sammen, vil det, — ligesom ved Anvendelsen af Principet af den mindste Modstand, — være af Betydning at kjende den Maade, hvorpaa de enkelte Dele op-

rindelig ere anbragte i Stilling, eller hvad Maxwell og Darwin kalder «det historiske Element».

Det er altsaa kun ved Jordarter, hvis Partikler virkelig ere forsvindende, at man tør antage ved de nævnte Fremgangsmaader at finde Frictionscoefficienten svarende til et vilkaarligt Snit i Massen, idet Frictionen netop er den Modstand, der hidrører fra de smaa Ujevnheder i Snittet. Paa Grund af den neppe overalt lige tætte Lejring af Delene vil Værdien dog ikke være den samme overalt i Massen, og naar den naturlige Skraanings Heldning maales, saa vil denne i Virkeligheden, som svarende til de øvre Jordlag, give en noget for lav Frictionscoefficient. I et System af større Legemer derimod blive Ujevnhederne saa store, at man neppe mere vilde kalde det en Friction. Ved Anvendelsen af de ældre Jordtrykstheorier, hvor Modstanden langs en hel Brudflade eller Murvæg betragtes under ét, har dette imidlertid mindre reel Betydning. Men det er nødvendigt at erindre, at det ved de nævnte Metoder — ialfald ved den første og tredje og tildels ogsaa ved den anden — ikke er Frictionen imellem de enkelte Partikler selv, som man maaler, og at de saaledes fundne Værdier derfor ikke uden videre kunne benyttes i de nyere Theorier, hvor Partiklen eller Jordelementet behandles for sig. —

For at kunne bestemme Frictionen ved Maaling af den naturlige Skraanings Vinkel med Horizontalplanen har man imidlertid gjort en Forudsætning, mod hvilken en ny Indvending kan rejses. Theoretisk talt er det nemlig, afset fra det ovenanførte, dog ikke sikkert, at den maalte Vinkel ikke er mindre end Jordartens Frictionsvinkel, idet der muligvis ikke kan præsteres en tilstrækkelig Friction imellem Jorden og Underlaget.

Scheffler¹⁾, der har gjort opmærksom herpaa, undersøger først Forholdene for en Jordvold, hvis Tversnit er en ligebenet Trekant. Ved Hjælp af sin Jordtrykstheori finder han, — naar μ er Frictionscoefficienten i Jorden,

¹⁾ Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken. Braunschweig. 1857.

μ' den mellem denne og Underlaget —, at Skraaningernes Heldningsvinkler α ere bestemte ved:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{\mu' \sqrt{\mu(1 + \mu^2)} + \sqrt{\mu + \mu'}}{1 - \mu \mu'} \right)^2 - \mu$$

saalænge dette er mindre end μ , og at kun $\operatorname{tg} \alpha = \mu$, saafremt:

$$\mu' \geq \frac{\mu}{(\sqrt{1 + \mu^2} + \mu \sqrt{2})^2}$$

Er Tversnittet en uligebenet Trekant, idet den ene Skraanings Heldningsvinkel er given lig α_1 , saa findes med Tilnærmelse for den anden Skraaning:

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu' (\sqrt{1 + \mu^2} + \sqrt{\mu} \sqrt{\mu + \operatorname{tg} \alpha_1})^2$$

og kun $\operatorname{tg} \alpha = \mu$, naar:

$$\mu' \geq \frac{\mu}{(\sqrt{1 + \mu^2} + \sqrt{\mu} \sqrt{\mu + \operatorname{tg} \alpha_1})^2}$$

Naar specielt $\alpha_1 = 0$, saa at det altsaa er den naturlige Skraaning af en foroven vandret afgrændset Jordmasse, man søger, saa faas:

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu' (\mu + \sqrt{1 + \mu^2})^2$$

og kun $\operatorname{tg} \alpha = \mu$, naar: $\mu' \geq \mu (\sqrt{1 + \mu^2} - \mu)^2$.

Denne Indvending har dog i Virkeligheden ingen stor Betydning, idet man paa den ene Side ved Forsøgene med Lethed kan tilvejebringe et tilstrækkelig ru Underlag og paa den anden Side i Naturen saa at sige altid vil have med et saadant at gjøre. For at $\operatorname{tg} \alpha$ virkelig skal være lig μ , fordres nemlig ifølge det ovenstaaende kun, at μ' er større end en temmelig ubetydelig Værdi; for en Dæmning, hvis Tversnit er en ligebenet Trekant, er denne Maximum, naar $\mu = \sqrt{5} - 2 = 0.486$, hvortil svarer $\mu' \geq 0.150$, og for en foroven vandret afgrændset Jordmasse er den Maximum, naar $\mu = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0.577$, hvortil svarer $\mu' \geq 0.192$.

Observationsresultater.

§ 10. Efter forskellige Forfatteres Angivelser anføres nedenfor Frictionscoefficienterne for en Del Jordarter, saaledes som de ere fundne ved Metoder af samme Natur som de omtalte. At Resultaterne variere en Del, skyldes blandt andet den forskellige Compression, og Boussinesq er tilbøjelig til at antage, at sin. af Frictionsvinklen for samme Sandart vil variere proportionalt med Tætheden ρ med Vægtfylden. Medens Darwin fandt den sidste varierende imellem 1.40 og 1.55 for samme Sandmasse, paaviste Gobin for en anden Jordart en Variation af Frictionscoefficienten fra 0.74 til 0.90.

	Frictions-coefficient.	Frictions-vinkel.
Rent Ler		
tørt.....	0.58—1.19	30—50°
fugtigt.....	1.00	45°
meget fugtigt.....	0.29—0.47	16—25°
[fast stampet.....]	2.25—3.49	66—74°]
Muldjord.....	0.53	28°
Sandet Ler		
tørt.....	0.58—1.07	30—47°
fugtigt.....	1.00—1.38	45—54°
meget fugtigt.....	0.31	17°
Fint Sand		
tørt.....	0.49—0.78	26—38°
fugtigt.....	0.62	32°
Grovt Sand, Grus		
tørt.....	0.81—1.11	39—48°
fugtigt.....	0.47—0.62	25—32°
Shingle		
tor.....	0.81	39°

Ikke mindre usikre ere Angivelserne for saadanne løse Systemer, hvis Partikler have en ikke forsvindende Størrelse, selv om de alle ere tilnærmelsesvis congruente. Der henvises herved til den forrige §, idet det bemærkes, at vel kan paa Grund af Partiklernes særegne Form en vis, stabil Skraaning indstille sig, men dog er dette ikke saaledes at forstaa, at den altid vil danne sig, naar f. Ex. Jordmassen henkastes i en Bunke; derimod vil den maaske kunne dannes ved successive Udskridninger, naar Jorden først an-

bringes og lejres godt i en Kasse med bevægelige Vægge, og disse derpaa fjernes.

For Rug og Hvede er den naturlige Skraanings Anlæg observeret lig 0.6, altsaa den tilsvarende Frictionsvinkel lig 31° ; for Byg fandtes de samme Størrelser at være henholdsvis 0.65 og 33° , for Hirse 0.46 og $24\frac{1}{2}^{\circ}$. Idet Kornene betragtes som tilnærmelsesvis ellipsoidiske, og Forholdet imellem de tre Axer for hver især maalt til henholdsvis: 1:1.2:2.1, 1:1.3:3.4 og 1:1.5:1.8, maatte ifølge det foregaaende en Skraaning være mulig under Anlægget: 2.4, 2.2 og 1.9, svarende til en Heldning mod Horizontalen af $67\frac{1}{2}^{\circ}$, $65\frac{1}{2}^{\circ}$ og $62\frac{1}{2}^{\circ}$.

Endelig turde det heller ikke være paa urette Plads her at omtale Cohæsionscoefficienten for forskjellige Jordarter, saaledes som den ifølge Formlen (2) Side 13 er bestemt ved Iagttagelse af den største Højde, som en lodret afstukket Jordmasse kan have for i længere Tid at holde sig uden større Nedstyrtninger. Det er dog kun faa Oplysninger, der foreligge herom, og idet (2) indeholder ikke mindre end 3 Observationsstørrelser, alle mere eller mindre behæftede med Fejl, kan det ikke ventes, at Resultaterne blive særdeles paalidelige.

Idet Cohæsionen er proportional med et Areal, maa dens Coefficients Dimension være Vægtenheden Gange (Arealenheden)⁻¹; den er altsaa afhængig af begge disse, og de angivne Værdier deraf referere sig til Metersystemet.

	Højde h_0 i Meter.	Vægt ϕ pr. Cub.- meter i Kg.	Frictions- coefficient μ .	Cohæsions- coefficient i Kg pr. $\square$ Meter.
Sand	0			0
Sandet Ler.....	1—2	1500	1.19	140—270
Fastlejret Ler.....	3—5	1800	2.25	290—480

Her som overalt ved Angivelser angaaende Jordarterne savnes iøvrigt i høj Grad en Classifikation af disse med fastslaaede Betegnelser derfor.

Forskjellige Egenskaber ved Jordarterne.

Mindste Volumen.

§ 11. Ethvert løst System, bestaaende af uelastiske eller kun lidet elastiske Partikler uden Cohæsion og Friction, vil, udsat for tilstrækkelige Rystelser, efterhaanden ordne sig, saa at det indtager Minimum af Volumen. Det vil derfor i denne Tilstand karakteriseres ved en Egenskab, som man har kaldet Udvidetilbøjelighed (dilatancy), og som ytrer sig ved, at Systemet ved en hvilken som helst Formforandring, saa længe det blot bibeholder sin Continuitet og de ydre Partikler ikke omordnes i Forhold til hinanden, altid vil voxe i Volumen, idet Mellemrummene imellem Delene forøges.

Det er Partiklernes Størrelse og Form, der betinger, hvor store Tomrummene i Massen ville være, naar den saaledes i sin mest comprimerede Tilstand er saa tæt som muligt, og Spørgsmaalet staar derfor i nær Forbindelse med den Undersøgelse, der ovenfor (§ 9) blev anstillet af Hensyn til Frictionsvinklens Maaling. Tilstanden maa svare til en under de foreliggende Forhold mulig fuldkommen stabil Ordning. Ganske vist forudsættes foreløbig ingen Friction at være til Stede imellem Partiklerne, men imellem de yderste af disse og den omgivende Masse (f. Ex. Underlaget) maa en saadan Kraft kunne optræde, som er i Stand til at holde dem i deres indbyrdes Stilling. Exempelvis kan nævnes, at den i § 9 betragtede stabileste Ordning af en Samling ligestore Kugler netop er den, der vil svare til Minimum af Volumen. Naar Kuglerne ordnes efter Trekantstillene i en tresidet Pyramide,

vil Forholdet imellem Mellemrummene og det samlede Volumen aftage fra $1 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = 0.621$, som det er for kun

1 Kugle, til $1 - \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0.260$, som det er, naar Kug-

lernes Antal er uendeligt. Den sidste Værdi af dette Forhold vil ogsaa faas, naar man ikke tager Hensyn til de yderste Kugler, men kun betragter de i Massens Indre værende, og for disses Vedkommende gaar frem paa følgende Maade.

Til en vilkaarlig af Kuglerne lægges Tangentplaner i alle dens 12 Røringspunkter med de omliggende. Den vil herved blive omskrevet af den Overflade, som i Krystallographien benævnes Rhombedodekaædret (∞O), og som kan tænkes fremkommen ved et regulært 6-sidet Prismes Afskjæring med to rette 3-sidede Pyramider, der have fælleds Axe dermed og hvis Sider to og to ere parallelle, medens Kanterne ligge i Plan hver med sin af Prismets Kanter. Det er Forholdet imellem Kuglens og det af denne Overflade begrændsede Volumen, som er lig $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$, og som subtraheret fra Enheden netop angiver Mellemrummenes relative Størrelse. Og det kan endnu tilføjes, at hver af de 6 Prismekanter, naar r er Kuglens Radius, har Længden $r\sqrt{\frac{3}{2}}$, medens Afstanden imellem de to Pyramiders Toppunkter er det dobbelte heraf, og at endelig Hældningen af disses Sideflader imod Axen er $\text{arc. cos. } \sqrt{\frac{1}{3}}$, eller netop den samme, som dannes af de tilsvarende Flader i Bicellen; de ere altsaa ogsaa her saaledes beliggende, at der tilvejebringes Maximum Volumen med Minimum af Overflade.

Det vil frembyde store Vanskeligheder rent mathematisk at bevise, at Partiklerne, hvilken Form de end have, dog altid ved at udsættes for tilstrækkelige Rystelser ville kunne ordne sig paa en saadan Maade, at der tilvejebringes et absolut mindste Volumen, saa længe blot Fordringen om Continuitet (o: Berøring imellem Delene) og Uforanderlighed i den relative Ordning af de ydre Partikler er opfyldt. Ved en Række interessante Forsøg har imidlertid Rey-

nolds¹⁾ paavist, at dette virkelig er Tilfældet, forudsat blot at ingen Elasticitet, Cohæsion eller Friction er til Stede imellem de enkelte Smaadele. Optræde derimod disse Kræfter, ville de mere eller mindre berøve Systemet den nævnte Egenskab, indtil ved de almindelige Legemer, bestaaende af en Samling Moleculer, Loven overhovedet ikke gjælder mere.

Ved Forsøgene indesluttedes Systemet i en Cautchuc-Sæk (Boldt), i hvis tynde Vægge de ydre Partikler trykkede sig ind og derved holdtes i indbyrdes uforanderlig Stilling. Forøgelse eller Formindskelse af Mellemrummene i Massen maales enten ved Luft, idet Sækken var forbundet med en Trykmaaler, eller, bedre, ved Vand, idet et Rør derfra førte hen til en Vandbeholder. Efterat Sandet, Haglene, Frøkornene, eller hvad man nu benytter, er rystet godt sammen, saa at Tætheden er saa stor som mulig, lukkes Sækken, og det er da ikke muligt, f. Ex. ved at trykke den mellem to Plader, at forandre Formen deraf uden derved at forøge Mellemrummene og altsaa Volumen af det hele. Lufttrykket vil derfor aftage, og det sank ved Reynolds' Forsøg endog 152^{mm} Qvægsølv, svarende til en Forøgelse af Mellemrummene med $\frac{1}{4}$. En Sæk, indeholdende 3 $\frac{1}{2}$ lbs. Sand med Mellemrummene fyldte med Vand, trak først, idet den blev presset ud, indtil c. $\frac{1}{2}$ lb. Vand fra Beholderen, men drev derpaa, idet den yderligere pressedes, atter noget deraf tilbage, sugede saa igjen noget til o. s. v., alt eftersom Massen under Formforandringen skiftevis udvidede sig eller trak sig sammen.

Idet Systemet ikke kan forandre Form uden at forøge Volumen, vil ogsaa omvendt al Formforandring være umulig, naar man hindrer Volumenforøgelsen. Lukkedes derfor, efterat Sandet havde antaget sin tætteste Consistens, Forbindelsen med Vandbeholderen, saa at hverken Luft eller Vand kunde fylde de forøgede Mellemrum, viste det sig umuligt selv ved stærke Tryk at forandre Sækkens Form, lige meget hvilken denne var. Det er endog muligt at tage en Afstøbning af en Form paa denne Maade. Sækken rystes, fyldt med Sand og Vand i Overskud, indtil den passer ind i Formens Fordybninger; efterat Overskudet af Vand derpaa er fjernet, og Sækken lukket, kan den udtages

¹⁾ Nature, vol. XXXIII, 1886.

af Formen og bevarer da et Billede deraf, selv om man udsætter den for temmelig stærke Tryk.

De i Naturen forekommende Jordarter ere imidlertid i Besiddelse baade af Friction og Cohæsion, og de ville derfor kun tildels frembyde den omtalte Egenskab, idet muligvis Delene kunne antage en saadan stabil Ordning, at de ved de passive Kræfter imellem dem hindres fra, selv ved nogenlunde stærke Rystelser og Tryk, at bevæge sig imellem hinanden, indtil Ordningen bliver den, der svarer til Minimum af Volumen. Dertil kommer, at Partiklerne ere mere eller mindre elastiske, og at de derfor ved forskellige Tryk comprimeres forskjelligt, saa at Massens Udvidelse ved en vis Formforandring bliver desto mindre, jo større Trykket er.

Vægtfylde.

§ 12. Tætheden skulde ifølge det foregaaende ved en vis Ordning af Partiklerne antage en absolut Maximum-værdi, men paa Grund af de anførte Afvigelser fra Forudsætningerne vil dette kun tildels være Tilfældet, og den vil i en væsentlig Grad afhænge af Trykket. I en Jordmasse vil derfor Vægtfylden af de nedre Lag være større end af de øvre, ikke alene fordi Jorddelene i disse muligen ikke ere rystede eller trykkede saa tæt ind i Mellemrummene imellem hinanden som muligt, men ogsaa fordi de i hine ved det større Tryk af den ovenover liggende Masse ville comprimeres, saa at, kunde man gjerne sige, den enkelte Partikel selv, betragtet som en Samling af Moleculer, nærmer sig sin tætteste Tilstand.

Saaledes som Vægtfylden for Jordarterne i Almindelighed angives, plejer man imidlertid ikke at tage noget Hensyn hertil men kun at bestemme den som en Middel-værdi, svarende til, hvad man kan antage som en Middeltæthed deraf. I nedenstaaende Tabel anføres den paa denne Maade bestemte Vægtfylde for nogle løse Systemer, idet det bemærkes, at den absolute Vægt af 1 Cubikmeter faas i Kilogram ved Multiplication af disse Tal med 1000.

	Vægtfylde.		Vægtfylde.
Rent Ler		Fint Sand	
tørt.....	1.6—1.9	tørt.....	1.4—1.6
fugtigt.....	1.9—2.1	fugtigt.....	1.7—2.0
Muldjord		Grovt Sand, Grus....	1.4—2.0
tør.....	1.4—1.6	Skjærver	
fugtig.....	1.6—1.7	fugtige.....	1.6
meget fugtig....	1.8—2.0	Shingle.....	1.4—1.5
Sandet Ler		Sne.....	0.13
tørt.....	1.4—1.7		
fugtigt.....	1.7—2.1		

For nogle af congruente endelige Partikler bestaaende Systemer indeholder følgende Tabel Oplysninger:

	Vægtfylde.		Vægtfylde.
Hvede.....	.707—.809	Ærter.....	.800
Rug.....	.663—.788	Bønner.....	.788
Byg.....	.618—.695	Rapsfrø.....	.600
Havre.....	.430—.537	Hirse.....	.740
Mais.....	.720	Malt.....	.475

Disse Værdier gjælde for Systemerne med de deri værende Mellemrum, ikke for de enkelte Partikler. Exempelvis er saaledes Qvartzens Vægtfylde 2.65, og dersom alle Sandkornene i rent Qvartzsand ere congruente og sphæriske, saa at ifølge det foregaaende Mellemrummene deri udgjør 26%, naar Massen er saa tæt som muligt, saa skulde Vægtfylden af det som tørt udgjøre $0.74 \times 2.65 = 1.96$, som fuldkommen gennemtrængt med Vand derimod 2.22. Ifølge directe Forsøg beløbe imidlertid Tomrummene i tørt Sand sig til 26—42%, og i fugtigt til 14—33%, hvortil for Partikler af almindelig Stenvægt = 2.7 vilde svare Vægtfylder af henholdsvis 1.6—2.0 og 1.7—2.4. Ligeledes ere Tomrummene i Grus, slaæde Skjærver og Shingle (Rullesten) maalt til 34%, 45—50% og 32—

42⁰/₀, hvoraf Vægtfylderne vilde faas lig 1.8, 1.4—1.5 og 1.6—1.8.

Uagtet for Sandets Vedkommende Resultaterne frembyde en ret tilfredsstillende Overensstemmelse med Theorien, viser dog dets stærke Volumenformindskelse ved Blanding med Vand — undertiden angives endog 20⁰/₀ — tydelig hen til, at dets Tilbøjelighed til at antage den størst mulige Tæthed modarbejdes af indre Kræfter, hvis Indflydelse Vandet formindsker. I Modsætning dertil vil Ler, navnlig rent, snarere udvide sig noget ved moderat Fugtighed.

At tage Hensyn til Forskjellen i Tæthed af de dybere og de øvre Jordlag, eller til at disse, opblødte og løsnede som de ere af Regn, Sne, Frost og Temperaturforandringer, mere end hine nærme sig den flydende eller halvflydende Tilstand og derfor ved deres mindre Friction og Cohæsion udøve et forholdsvis stort Jordtryk, vilde føre til meget complicerede Beregninger. I alle Jordtrykstheorier forudsættes derfor Massen ensartet, med mindre en Discontinuitet er til Stede deri som f. Ex. ved Dagligvands- eller maaske Højvands-Linien, idet som bekjendt Vægtfylde og Frictionsvinkel maa regnes mindre under end over Vand. Dog er det utvivlsomt, at uensartede Elementer i Jordlegemet kunne afstedkomme store Forstyrrelser, og det er en Erfaring¹⁾, at enkelte større Lerklumper, som ved Opførelsen af en Dæmning ere indkomne deri i fugtig Tilstand, undertiden i Tidens Løb ved Trykket af den overliggende Masse kan give Anledning til Dannelsen af Glideflader og maaske flere Aar efter Bygningen foraarsage pludselige Nedstyrtninger, hvis Aarsag synes ufattelig.

Consistens.

§ 13. Naar Ler og enkelte andre Jordarter optage en tilstrækkelig Vandmængde, kunne de gaa over til en halvflydende Tilstandsform. Det Jordtryk, som de da udøve, vil nærme sig til det af en Vædske af samme Vægtfylde,

¹⁾ Lehwald i Zeitschrift für Bauwesen, Jahrg. XXXV, Berlin 1885.

uagtet det, saalænge blot nogen Friction eller Cohæsion er tilstede, dog altid vil være mindre end dette.

Forandrer derimod Massen ikke Karakter, ved at Mellemrummene deri alle fyldes med Vand, saa kan en noget mere rationel Betragtningssmaaade lægges til Grund for Beregningen. Bestaar Jordarten af nogenlunde store Elementer, saasom Shingle, Skjærver o. desl., saa vil man være paa den sikre Side, naar Trykket, som udøves f. Ex. paa en Beklædningsmur, regnes lig Resultanten af to andre. Det ene af disse er Vandtrykket, som vilde faas, dersom hele Massen var en Vædske af Vandets Vægtfylde; det andet er Jordtrykket, svarende til en Jordart af Vægtfylde: $\sigma = 1 + \tau$, hvor σ = Vægtfylden af den virkelig foreliggende Jord med tomme Mellemrum, τ = det relative Volumen af disse. Exempelvis vil for $\sigma = 1.5$, $\tau = 0.34$ faas Vægtfylden = 0.84. —

Det er umiddelbart indlysende, at Udstømningen af et halvflydende Legeme gennem en Aabning i Bunden af en Beholder vil foregaa langt langsommere end af en Vædske. Er Beholderen fyldt tilstrækkelig højt, vil til en Begyndelse Jordens Overflade være vandret; men efterat en Del er løbet ud, danner der sig en Indsænkning deri, og denne voxer og antager efterhaanden Formen af en til den naturlige Skraaning svarende Kegletruncus langs Randen af Udstømningsaabningen. Indtil den omtalte Indsænkning er begyndt at danne sig, vil Udstømningshastigheden være uafhængig af Beholderens Fyldningsgrad og af alle Belastninger, som kunne være anbragte paa Overfladen af Jordmassen.

Heldes fint Sand i den ene Gren af et U-Rør, saa vil det ikke alene ikke som en Vædske stige op i den anden, men trænger neppe engang noget væsentligt frem i den horizontale Forbindelsesgren.

Ældre og nyere Jordtryksthæorier.

a) Thæorier, der undersøge et endeligt Jordprisme.

Tidligste Thæorier, Coulomb, Poncelet, Curie o. a.

§ 14. Som Basis for Jordtryksthæorien har man oprindelig opstillet en Del indbyrdes uafhængige, tildels urigtige og temmelig vilkaarlige Hypotheser, og det er først efterhaanden, at man har set sig i Stand til at fjerne disse og saaledes er naaet frem til mere almengyldige og tilforladelige Resultater. I de fleste af de ældre Thæorier har man saaledes ved Bestemmelsen af det Tryk, der udøves paa en Beklædningsvæg, betragtet et vist Jordprisme bag denne som et Hele, idet Glidefladen, der almindelig antages plan, enten vælges under en given Vinkel eller bestemmes saaledes, at Trykket af Prismet imod Væggen bliver saa stort eller maaske snarere saa farligt som muligt; i nogle af de nyere Thæorier har man derimod mere rationelt undersøgt Ligevægtsbetingelserne for de enkelte Partikler. Det er navnlig Frictionen og Cohæsionen, der gjøre Forholdene noget complicerede, og det er disse, til hvis rette Forstaaelse man kun lidt efter lidt har kunnet nærme sig.

Naar i Oldtiden de romerske Bygmestere skulde construere en Beklædningsmur, gjordes ifølge Vitruvius¹⁾ dens Tykkelse proportional med den Vægt, som den havde at understøtte; den styrkedes yderligere ved Modstandsspiller, hvis indbyrdes Afstand og Brede, saavel som deres Frem-

¹⁾ Cresy: An Encyclopædia of Civil Engineering, London 1847.

spring ind i Jordmassen, var lig Murens Højde, medens de paa Ydersiden kun forneden havde dennes Tykkelse og derfra aftog gradvis opefter. Det er dog ikke klart heraf, hvilken Forestilling man egentlig har gjort sig om Jordtrykkets Natur.

Indtil langt ned i Tiden toges overhovedet intet Hensyn til Frictionen i Jorden, og man antog derfor, at Trykket paa Muren maatte være det samme, som det en Vædske af Jordens Tæthed vilde udøve. Det er fra en saadan Betragtning, at den bekendte Regel skriver sig, at Tykkelsen af en lodret Mur med vandret Jordoverflade, for at ikke Kantring skal finde Sted, maa gjøres lig den halve Højde.

Først i Slutningen af det 17de Aarhundrede udviklede Vauban sine, maaske væsentlig empiriske, Formler til Bestemmelsen af Beklædningsmures Tykkelse, og i den følgende Tid af henimod et Aarhundrede gjordes derefter forskellige, temmelig ufuldkomne Forsøg paa at opstille en virkelig Theori. Man betragtede herved kun en lodret Mur med vandret Jordoverflade, og Skilleplanen, der antoges at udgaa fra Foden enten af Murens Bagside eller Yderside, valgtes af nogle Forfattere parallel med den naturlige Skraaning, af andre derimod under en Heldning af 45^0 og af en enkelt (Couplet) parallel med Skraaningen af en Samling opstablede Kugler, altsaa under Vinklen $\text{arc. tg } 2\sqrt{2}$. Vægten af Jordprismet, virkende i dettes Tyngdepunkt, opløstes derefter i en Composant vinkelret paa Skilleplanen og en anden parallel med denne, og enten betragtedes den sidste som Trykket til Kantring af Muren, eller den opløstes atter i en vertical og en horizontal Composant, der da repræsenterede Trykket. Bullet er den første, hvem en saadan Theori skyldes, og Bélidor er den, der først forsøgte at tage Hensyn til Frictionen i Jorden.

Det er imidlertid Coulomb¹⁾, hvem den Ære tilkommer at have lagt Grunden til en mere videnskabelig Theori ved at indføre Principet om Prismet af det største Tryk og tage Jordens i Brudfladen virkende Friction og Cohæsion med i Beregning. Idet han for vandret Jordoverflade og lodret Mur antog Trykket vinkelret paa denne og Brudfladerne plane, bestemte han den virkelige

¹⁾ Mémoires des savants étrangers, 1773.

Værdi af Trykket, ved Differentiation af det almindelige Udtryk derfor, som Maximum, svarende til Brudplanens Heldningsvinkel som uafhængig variabel. Prony¹⁾ udvidede Coulomb's Theori til Mure med heldende Bagside, idet han ogsaa for disse antog Trykretningen horizontal, og den samme Fejl begaar ligeledes Eytelwein²⁾. Dette retter Français³⁾ derhen, at Trykket altid er vinkelret paa Muren, og ham følger Navier⁴⁾, der tillige undersøger Tilfældet af en ensformig Belastning af den vandrette Jordoverflade; naar den sidste imidlertid først ved Coulomb's Methode bestemmer Trykket som værende vinkelret paa Muren og derpaa ved Beregningen af denne mod Kantring taler om imellem den og Jordmassen at indføre en Friction, — som han ganske vist strax efter sætter lig Nul, — saa er dette urigtigt, idet de forskellige paa Jordprismet virkende Kræfter da ikke mere ere i Ligevægt.

Efterat Ardant, Persy, Audoy og andre lidt efter lidt havde udvidet Theorien, og navnlig den sidste — foruden at forsøge paa at tage Hensyn til Variationen af Vægtfylde, Friction og Cohæsion med Dybden — tillige havde behandlet det Tilfælde, at den verticale Mur er lavere end Jordmassen, fremkom Poncelet med sit classiske Arbejde⁵⁾ om Beklædningsmure. Han betragter heri vilkaarligt heldende Mure og en Jordmasse, hvis Overflade ligger højere end disses. Men medens han beregner Jordtrykket, idet han antager det vinkelret paa Muren⁶⁾, gaar han ved sin graphiske Construction deraf —, den samme, som endnu hyppigt benyttes, og som findes gjengivet i forskellige Lærebøger⁷⁾, — ud fra, at en Friction virker imellem Jorden og Muren, saa at Trykket er skraat rettet mod

¹⁾ Recherches sur la poussée des terres, Paris 1812.

²⁾ Praktische Anweisung zur Wasserbaukunst 1802—1824.

³⁾ Mémorial de l'officier du génie, 1820.

⁴⁾ Résumé des leçons données à l'école des ponts et chaussées etc., Paris 1826.

⁵⁾ «Mémoire sur la stabilité des revêtements et de leurs fondations» i Mémorial de l'officier du génie, 1840.

⁶⁾ Theorien critiseres skarpt af Scheffler i: Theorie der Gewölbe, Futtermauern etc., Braunschweig 1857.

⁷⁾ Blandt andre i: Borch og Holmberg, Lærebog i teknisk Mekanik, Kjøbenhavn 1879.

denne og med Normalen dertil danner Frictionsvinklen. Principet er altsaa det, at Brudprismets Vægt decomponeres efter to Retninger, som danne de respective Frictionsvinkler med Normalerne til Muren og til det vilkaarlig valgte Brudplan, og at Maximumværdien af den første af disse to Composanter derpaa bestemmer Heldningen af det virkelige Brudplan og Størrelsen af Trykket. Det analytiske Udtryk herfor giver Saint-Guilhem¹⁾, som ogsaa betragter Tilfældet af en ensformig fordelt Belastning paa den i sin Almindelighed ikke plane Jordoverflade. Culmann's elegante graphiske Methode²⁾ for belastet saavelsom ubelastet Jordoverflade hviler fuldstændig paa Poncelet's Theori, kun forsøger han ogsaa at tage Cohæsionen med i Betragtning.

Uagtet man saaledes efterhaanden havde arbejdet sig frem til fuldkommnere Resultater, vende dog stedse enkelte Forfattere tilbage til de ældre Theorier. Ikke alene gjælder dette Maschek, Hoffmann og andre, men ogsaa Hagen³⁾ opløser Vægten af Jordprismet i en Composant parallel med Brudplanen og en anden vinkelret derpaa, trækker fra den første den med den anden proportionale Friction og opløser den derpaa parallel med og vinkelret paa Muren, hvorefter han betragter Maximum af de til forskjellige Retninger af Brudplanen svarende Værdier af den sidste som Trykket. Ligeledes Weingarten⁴⁾ regner Trykket vinkelret paa Muren. Idet han gjør opmærksom paa, at Frictionen, som virker i Jorden langs ad en vilkaarlig Skilleplan, ikke maales ved Frictionscoefficienten μ , men ved $\mu' \leq \mu$, betragter han først Murens Modtryk som en activ Kraft og bestemmer den til Ligevægt med denne og Jordprismets Vægt nødvendige Værdi af μ' . Ved dernæst for den Retning af Skilleplanen, der gjør μ' til Maximum, at sætte $\mu' = \mu$, finder han den mindste active Kraft, som vil kunne holde Jorden i Ligevægt, og det maa da være det virkelige passive Modtryk, som Muren maa præstere. Denne Betragtning er i Virkeligheden den samme som Coulomb's, og Resultaterne falde derfor ogsaa sammen med hans.

¹⁾ Ann. des ponts et chaussées, 1858.

²⁾ Die graphische Statik, Zürich 1866.

³⁾ Handbuch der Wasserbaukunst, II Del, 1853.

⁴⁾ Erbkam's Zeitschrift für Bauwesen, 1870.

Allerede tidlig havde man imidlertid ved Revetementsmure gjort Erfaringer, som ikke kunde forklares ved den almindelige Jortryktheori. Audé gjorde (1848) opmærksom herpaa, og senere (1855—59) anstillede Curie lignende Iagttagelser, som foranledigede ham til at modificere Poncelet's Theori, hvis Decompositionsmaade han kun antog rigtig under Forudsætning af, at Brudprismet er et fast Legeme, der kan taale Bøjning. I Modsætning dertil opløses han¹⁾ Brudprismets Vægt i en Composant parallel med Skilleplanen og en anden, der med Normalen til denne danner Frictionsvinklen, φ . Den første af disse betegner han som «det primitive Tryk», og danner det med Normalen til Murens Bagside en Vinkel, som er mindre end Frictionsvinklen, φ_1 , mellem Jord og Murværk, saa betragter han det som det virkelige Jordtryk; i modsat Fald opløses Composanten atter i én parallel med Muren, som antages optagen af den faste underliggende Jord, og i en anden under Vinklen φ_1 med Normalen, og denne er da det effective Jordtryk. Ved Beregningen af Beklædningsmure mod Omkantring bestemmer han dernæst Brudplanet, saa at ikke selve Trykket, men Momentet af dette bliver Maximum.

Ved en lignende Betragtning, nemlig naar det primitive Tryk opløses parallel med og vinkelret paa Muren, og ingen Friction regnes virkende langs denne, opstod den Regel, at Tykkelsen af en lodret Mur med vandret Jordoverflade skal gøres lig $\frac{1}{3}$ af Højden.

Curie's Theori er utvivlsomt urigtig, og det franske Academi nægtede den ogsaa sit Bifald.²⁾ Ikke alene er det utilladeligt at bortkaste den med Muren parallele Composant af det primitive Tryk, for saa vidt dette atter dekomponeres, men St. Venant bestrider ogsaa Rigtigheden af, naar det med Normalen danner en Vinkel mindre end Frictionsvinklen, da at betragte det som det effective Tryk, idet han gaar ud fra, at dette sidste altid i Brudøjeblikket maa danne netop Frictionsvinklen (Betragtning af Grændseligevægtstilstanden). Uagtet altsaa herved Poncelet's Løs-

¹⁾ Comptes rendus, t. 77, 1873. — Ann. des ponts et chaussées, 1882, 1.

²⁾ Comptes rendus, t. 77, 1873.

lige Brudflade, ε = Murens Heldning mod Perpendicularen, V = Vægten af Jordprismet ABC , P og R Reactionerne, samt $\mu' = \operatorname{tg} \alpha'$ Frictionscoefficienten i Jorden svarende til Skilleplanen AC , $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ dennes største Beløb, k' og k de tilsvarende Cohæsionscoefficienter og $f = \operatorname{tg} \beta$ Frictionscoefficienten mellem Mur og Jord. Saa faas Jordtrykket paa Muren:

$$P = \frac{V \sin (\alpha - \alpha' + \varphi) - k' L \cos \alpha'}{\cos (\alpha - \alpha' - \beta + \varepsilon + \varphi)},$$

der maa være constant, uafhængig af φ 's Variation fra $\varphi = 0$ til $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha - \varepsilon$, og herved faas altsaa en Re-

lation imellem α' , k' og φ . Virkede derimod Frictionen og Cohæsionen med deres størst mulige Beløb langs Skilleplanen AC , saa vilde Trykket antage en mindre Værdi Π , og Differensen $P - \Pi$ vil altid være positiv, naar φ varierer, indtil den for den virkelige Brudplan, AE , bliver Minimum = 0. Men, idet P er constant, vil altsaa AE være bestemt ved:

$$\left. \begin{aligned} \Pi_{\text{Max.}} &= \left(\frac{V \sin \varphi - k L \cos \alpha}{\cos (\varphi + \varepsilon - \beta)} \right)_{\text{Max.}} \\ \therefore \frac{d\Pi}{d\varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (3)$$

Man kommer herved atter tilbage til Coulomb's Princip om «Prismet af størst Tryk», men i Betragtning af at Trykket, P , er constant, uafhængig af φ , foreslaar Rebhann helre at kalde det «Brudprismet» eller «det farligste Jordprisme».

— Cohæsionshøjden af Jordarten eller den største Højde, ved hvilken denne kan holde sig under en stejlere Skraaning end den naturlige, findes bestemt ved:

$$\Pi = 0, \frac{d\Pi}{d\varphi} = 0,$$

hvoraf for plan Jordoverflade faas — uafhængigt af dens Heldning mod Horizontalen — Højden:

$$h = \frac{4k}{\tilde{\omega}} \frac{\cos \alpha \cos \varepsilon}{1 - \sin (\alpha + \varepsilon)} \dots \dots (4)$$

idet $\tilde{\omega}$ er Vægten af en Volumenenhed Jord. For $\varepsilon = 0$

faas heraf atter Formlen (2) Side 13. Er den plane, vandrette Jordoverflade belastet ensformigt med p pr. Arealen-
 enhed, bliver $\tilde{\omega}$ at erstatte med: $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega} + \frac{2p}{h}$, hvorved
 Højden formindskes med $\frac{2p}{\tilde{\omega}}$.

Ved Beregning af Trykket imod en Beklædningsmur
 maa Undersøgelsen, uagtet den noget forandrede Motivering,
 i Virkeligheden blive ganske den samme som ved Anven-
 delsen af Coulomb's Princip. V og L udtrykkes ved φ ,
 idet Overfladen er given ved dens Ligning: $L = F(\varphi)$,
 Brudplanets Retning bestemmes dernæst ved at sætte Diffe-
 rentialquotienten af Π med Hensyn til φ lig Nul, og den
 heraf fundne Værdi af φ , indsat i Π , giver endelig det
 søgte Jordtryk, P . — Først forudsætter Rebhann Frictionen
 langs Muren forsvindende $\therefore \beta = 0$, men senere tager han
 ogsaa Hensyn dertil og regner altsaa Trykket ikke vinkelret
 paa Muren. Cohæsionen i Jorden lader han ude af Be-
 tragtning undtagen i det Tilfælde, hvor Jordoverfladen er
 horizontal i Højde mod Murens Krone, og β er Nul.

Større Interesse end de forskellige Tilfælde, som saa-
 ledes alle udvikles efter samme Mønster, har imidlertid
 Rebhann's elegante graphiske Bestemmelse af Brudfladen og
 af Jordtrykkets Størrelse. Herved forudsættes Cohæsions-
 coefficienten $k = 0$, og følgende er:

$$P = \Pi_{\text{Max.}} = \left(\frac{V \sin \varphi}{\cos(\varphi + \varepsilon - \beta)} \right)_{\text{Max.}}$$

Men af Figuren vil det let ses, at: $\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{1}{2} \tilde{\omega} L^2$, og
 altsaa bliver:

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{d\varphi} &= \frac{\sin \varphi}{\cos(\varphi + \varepsilon - \beta)} \frac{dV}{d\varphi} + \frac{V \cos(\varepsilon - \beta)}{\cos^2(\varphi + \varepsilon - \beta)} \\ &= \frac{V \cos(\varepsilon - \beta) - \frac{1}{2} \tilde{\omega} L^2 \sin \varphi \cdot \cos(\varphi + \varepsilon - \beta)}{\cos^2(\varphi + \varepsilon - \beta)}, \end{aligned}$$

der, sat lig Nul, giver:

$$W = \frac{1}{2} \tilde{\omega} A E^2 \frac{\sin \gamma \cdot \cos(\gamma + \varepsilon - \beta)}{\cos(\varepsilon - \beta)},$$

$$P = \frac{1}{2} \tilde{\omega} A E^2 \frac{\sin^2 \gamma}{\cos(\varepsilon - \beta)} \dots \dots \dots (5)$$

mindre da MF halveres af $A E$, maa Forsøget gjentages med et nyt, valgt E .

Ved Bestemmelsen af Angrebepunktet for det resulterende Tryk, P , gaar Rebhann ligesom Prony og Français ud fra, at indtil en vis Højde, Cohæsiionshøjden h , udøver Jorden intet Tryk paa Muren. Momentet af P med Hensyn til Punktet A faas derefter ved Integration af de elementære Tryks Momenter, idet denne foretages fra det i Dybden h under Jordoverfladen liggende Punkt af Muren indtil dens Fod A . Er $A B$ plan og altsaa P tilligemed alle de elementære Tryk dp parallelle, og betegnes Højden af P 's Angrebepunkt over A ved e , Dybden af dp 's under B ved x , samt Højden af $A B$ ved H , saa faas:

$$P e = \int_h^H (H - x) dp = \int_h^H p dx$$

Er tilmed Jordoverfladen vandret, og regnes Frictionen langs Muren forsvindende $\alpha: \beta = 0$, saa vil (3) og (4) give:

$$P = c H (H - h), p = c x (x - h)$$

hvor $c = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \sec \varepsilon \cdot \frac{1 - \sin(\alpha + \varepsilon)}{1 + \sin(\alpha - \varepsilon)}$. Indsættes disse Udtryk i det ovenstaaende, og udføres Integrationen, findes:

$$e = \frac{1}{3} H \left(1 - \frac{h}{H}\right) \left(1 + \frac{h}{2H}\right) \dots \dots \dots (6)$$

Navier havde fundet det urigtigt at foretage Integrationen fra h af, idet han antog de elementære Tryk for $x < h$ dels positive, dels negative, saa at deres Resultant vel er Nul, men Momentsummen ikke forsvindende, og ligesom Coulomb integrerede han derfor imellem Grændserne 0 og H . Herved bliver:

$$e = \frac{1}{3} H \frac{2H - 3h}{2(H - h)} \dots \dots \dots (7)$$

Saadanne negative Elementartryk kunne imidlertid ikke godt tænkes at existere i Virkeligheden, og Rebhann regner derfor dp lig Nul, saalænge x er mindre end h . Dog kan der ogsaa imod hans Formel rejses Indvendinger.

En ret anskuelig graphisk Bestemmelse af e faas ved Construction af Integralet som et Areal, dannet af Kurven,

der repræsenterer Trykkets Forandring med Højden af Muren $\varnothing$: $H - x = F(p)$.

Forsøg paa Forbedringer af Theorien.

§ 16. Ufuldkommenheden af de ældre Jordtryk-theorier fremgik særlig tydeligt af de Resultater, som Baker i 1881 forelagde «Institution of civil engineers» i London.¹⁾ Hans Erfaringer ere indvundne ved Bygningen af en stor Mængde, tildels provisoriske Revetementer ved Anlægget af Metropolitan Railway i London. Ifølge Hope's Experimenter skulde Trykket imod en lodret Mur af en Sandmasse med vandret Overflade svare til det af en Vædske af Vægtfylde 0.30, medens Pasley dog kun fandt omtrent det halve heraf $\varnothing$: Vægtfylden 0.14. Men Baker paaviste saadanne Anomalier, som at en Mur, der vilde kantre ved det af Hope angivne Vædskestryk, var i Stand til at modstaa Jordtrykket, medens andre, der vilde kunne udholde Trykket af en Vædske af Vægtfylde 1.47 eller endog 1.71, svigtede, væsentlig maaske paa Grund af Opblødning af Jordmassen.

Ved den af ham benyttede graphiske Bestemmelse af Trykket for lodret Mur og vandret Jordoverflade tager han iøvrigt intet Hensyn til Frictionen langs Muren; og ved Constructionen af Tykkelsen heraf gaar han ud fra, at denne i Forhold til Højden skal være lig $\sqrt{\frac{1}{3}} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(90 - \alpha)$, idet α er Frictionsvinklen, og Murværkets Vægtfylde regnes lig Jordens.

Schäffer²⁾, der ganske antager Rebhann's Theori, havde allerede tidligere gjort opmærksom paa det urigtige i samtidig at regne Friction og Cohesion virkende i samme Fladeelement og begge med deres Maximalbeløb. Han fremhæver endvidere, at naar man regner Trykket paa Brudplanen heldende mod dennes Normal under en Vinkel,

¹⁾ Minutes of proceedings of the society of civil engineers, London 1881. Referat bl. a. i: Engineering, vol. 31, 1881 og: The Engineer, vol. 51, 1881. — Senere udkommen særskilt under Titlen: The actual lateral pressure of earthwork, New York, 1882.

²⁾ Zeitschrift für Bauwesen, 1878.

som er Frictionsvinklens Maximalbeløb, saa forudsættes alle i denne Plan virkende Elementartryk indbyrdes parallelle og alle dens Elementer samtidig i Grændseligevægtstilstanden; men denne Betingelse finder han kun opfyldt, naar Jordoverfladen er plan. Endelig ere Glidefladerne ikke rigurøst Planer. De paa disse Forudsætninger udviklede Formler ere derfor kun mere eller mindre grove Tilnærmelser.

At nævnes fortjene endnu følgende, tildels empiriske, nyere Theorier.

Lagrené¹⁾ finder Trykket paa en heldende Mur for vilkaarligt heldende Jordoverflade som Resultanten af det, der virker paa en vertical Plan gennem Bagvæggens Fod, og Vægten af Jordprismet imellem denne Plan og Muren. Han gaar herved ud fra, at Trykket paa en vertical Plan er parallel med Jordoverfladen.

Gobin²⁾ anser det sidste for urigtigt. For vilkaarligt heldende Jordoverflade antager han Trykket paa en vertical Væg normalt paa denne, idet Jorden i første Øjeblik forudsættes ikke at have nogen Tilbøjelighed til at glide langs den, men vel langs ad Brudplanen, der bestemmes ved Coulomb's Princip om Prismet af størst Tryk, idet dog Cohæsionen medtages i Beregningen. Saasnart imidlertid Kantringen er begyndt, saa at Glidning virkelig finder Sted langs Muren, regner han med Navier en Friction virkende langs denne lig Frictionscoefficienten Gange det fundne Normaltryk. Han begaar herved øjensynlig en Fejl, idet de paa Jordprismet virkende Kræfter ikke mere kunne være i Ligevægt, naar en saadan Friction indføres, uden at Normaltrykkets Beløb forandres.

For en heldende Mur, ved hvilken Verticalplanen gennem Bagvæggens nederste Kant ligger i Jordlegemet, benyttes Lagrené's Fremgangsmaade, idet blot Trykket paa denne Verticalplan regnes horizontalt. For en Mur med Heldning til den modsatte Side, under Vinklen ε mod Verticalen, regnes Trykket virkende horizontalt og i Størrelse lig det paa en lodret Mur af samme Højde multipliceret med $1 - tg \varepsilon tg a$, hvor a er Frictionsvinklen i Jorden.

¹⁾ Ann. des ponts et chaussées, 1881, 2.

²⁾ Do. do. do. , 1883, 2.

eller den er Halveringslinien af Vinklen $B A K$. Er specielt $\varepsilon = 0$, bliver: $tg \delta = \mu + \sqrt{1 + \mu^2}$, idet μ er Frictionscoefficienten. — Idet Trykket paa Muren antages parallelt med Skilleplanen, bestemmes dernæst denne saaledes, at dette Tryk bliver Maximum. For $\varepsilon = 0$ faas da δ bestemt af Ligningen:

$$tg^3 \delta - 2 \mu tg^2 \delta - \mu = 0 \dots \dots \dots (9)$$

Under de samme Forudsætninger bestemmes endelig Skilleplanen saaledes, at det afskaarne Jordprisme frembringer Maximum af Kantringsmoment om den verticale Murs bageste Kant, og man faar:

$$2 tg^3 \delta - 3 \mu tg^2 \delta - \mu = 0 \dots \dots \dots (10)$$

I et cohærent Legeme eller en Jordmasse med Cohæ-sion antager han, at Brud vil finde Sted efter den paa den første Maade bestemte Skilleplan, og parallel med denne vil det saaledes løsrevne Jordprisme da udøve Tryk imod Muren; i en Jordart uden Cohæ-sion maa man derimod gaa ud fra det uheldigste Tilfælde, og der maa Skilleplanen altsaa bestemmes ved en af de to sidste Metoder.

Idet Clavenad kun betragter en Mur med lodret Bagside og den vandrette Jordoverflade i Højde med dennes Overkant, finder han Trykkets Størrelse, naar Frictionscoefficienten imellem Jord og Murværk regnes lig den i Jordens Indre α : μ , at være lig det imod en Mur uden Friction virkende Tryk multipliceret med Coefficienten:

$$\sqrt{1 + \mu^2} \frac{\mu + \sqrt{1 + \mu^2}}{2 \mu + \sqrt{1 + \mu^2}}. \quad \text{Men denne vil for de i}$$

Praxis forekommende Værdier af μ kun afvige lidet fra Enheden (0.9—1.0 for $\mu = 0.4 - 1.0$), og de to Værdier af Trykket ere altsaa tilnærmelsesvis ligestore. — Han fremhæver dernæst Forskjellen imellem 1) det statiske Tryk, ved hvilket ingen Friction virker, og som altsaa er vinkelret paa Muren, og 2) det kinetiske, der i visse Tilfælde vil optræde, nemlig ved en begyndende Kantring, ikke ved en Glidning af denne, og som paa Grund af den til Stede værende Friction vil være parallel med den naturlige Skraaning, idet Murens Bagside er lodret. Trykket vil være horizontalt, indtil det har frembragt en infinitesimal Bevægelse ved Omkantring af Muren; men i det samme,

cielt $\mu = \frac{2}{3}$, skal Bredden mindst være lig Højden, hvilket ogsaa fandtes bekræftet ved Forsøg.¹⁾

Clavenad anbefaler dog for Praxis ved Beregningen af Beklædningsmure at betragte Trykket som horizontalt og derved sikre sig en mere stabil Ligevægt end den betragtede instabile.

Den ældre Theoris Hypotheser.

Plane Skilleflader og Coulomb's Princip.

§ 17. De i det foregaaende omtalte Jordtrykstheorier hvile alle paa flere eller færre ubeviste Hypotheser, og selv de fuldkomneste af dem ville staa og falde med et Par af disse, fra hvilke man stedse er gaaet ud som fundamentale Forudsætninger. At Skillefladerne ere plane, og at, ifølge Coulomb's Princip, den Brudplan virkelig vil danne sig, som svarer til det størst mulige Tryk imod Muren, ere de Grundhypotheser, hvorpaa egentlig alle Theorierne ere byggede, og imod dem begge kan der rejses en Del Indvendinger.

Ikke alene er den første af disse ubevist, men den er i sin Almindelighed rimeligvis urigtig og giver i flere Tilfælde vistnok kun en temmelig raa Tilnærmelse. Det har derfor ogsaa været forgjæves, naar enkelte Forfattere har forsøgt almindelig at bevise den, og kun under ganske specielle Antagelser er det lykkedes. Brudfladen tænkes her ved bestemt efter Coulomb's Princip, saaledes at Trykket af det afskaarne Jordlegeme er Maximum. — Persy's²⁾ Bevis, for at denne Brudflade er plan, naar blot Jordoverfladen er horizontal, og Frictionen imod Muren samt Cohæsionen i Jordmassen begge ere Nul, har Scheffler godtgjort Urigtigheden af. — Hagen's³⁾ Bevis, der kun forudsætter Jordoverfladen plan, — lige meget under hvilken Heldning —, og ingen Cohæsion i Jordens Indre, hviler ligeledes paa

¹⁾ Audé havde dog ved sine Forsøg fundet en Brede af 0.56 h tilstrækkeligt.

²⁾ Cours de stabilité des constructions.

³⁾ Handbuch der Wasserbaukunst, II Del, 1853.

forskjellige falske Forudsætninger. Hans Ræsonnement er følgende: for at Coulomb's Princip kan være opfyldt, maa Brudfladen være saaledes bestemt, at den ved en vilkaarlig, med Muren parallel, Plan afskaarne Del af Brudprismet ogsaa opfylder det samme Princip og altsaa udøver Maximum af Tryk paa denne Plan; men selvfølgelig maa det saaledes afskaarne, mindre Brudprisme være ligedannet med det hele, hvilket kun vil være Tilfældet, naar Brudfladen er plan. Denne hans Forudsætning om Lighedannetheden af de to Jordlegemer er imidlertid ikke bevist, og idet den er baseret paa, at Brudfladen danner samme Vinkel med Muren, hvor dybt dennes Fod end ligger under Jordoverfladen, gaar han i Virkeligheden herved ud fra netop det, som det gjaldt at bevise. Heller ikke er det i og for sig indlysende, at Retningen af Trykket paa Muren er uafhængig af dennes Højde og altsaa den samme derfor som for den dermed parallelle Plan; dog vil dette følge umiddelbart af Hagen's urigtige Jordtrykstheori, hvorefter Trykket stedse antages vinkelret paa Muren. —

Først Scheffler¹⁾ har imidlertid givet et nogenlunde tilfredsstillende Bevis for, at Brudfladen er plan i det specielle Tilfælde, hvor Muren er vertical og fuldkommen glat, altsaa uden Friction, og Jorden er homogen, uden Cohæsion og foroven vandret afgrændset. Dog benytter han herved Principet af den mindste Modstand, imod hvis Anvendelse der kan rejses Indvendinger. Efter Winkler's Forslag at substituere det Hagen'ske Bevis for det noget mere complicerede Scheffler'ske turde neppe være at anbefale, da ikke alle Manglerne ved det første ere fjernede i det betragtede specielle Tilfælde. Derimod kan man ved at forudsætte Friction langs Muren og Cohæsion i Jorden give Undersøgelsen en noget bredere Basis.

Idet man af den vilkaarlig valgte Brudflade betragter et Element, hvis Retning med den verticale Mur danner Vinklen v , opløses Vægten af den lodret over dette hvilende Jordmasse, p , i en Composant, q , der med Normalen til Muren (α : med Horizontalen) danner Frictionsvinklen $\beta =$

¹⁾ Crelle's Journal für die Baukunst, Bd. 30, 1851. — Ogsaa i hans Oversættelse af Moseley's: The mechanical principles of engineering and architecture, Braunschweig 1845.

arc. $tg. v$ mellem Murværk og Jord, og i en anden, r , der med Normalen til Elementet danner Vinklen γ , saaledes bestemt at r kan optages af dettes normale Modtryk og af Frictionen tilligemed Cohæsionen langs det. Vælges nu Murens Bagside til x -Axe med positiv Retning lodret opad og Horizontalen gennem dens Fod til y -Axe, samt betegner h dens Højde, $\tilde{\omega}$ Vægten af en Cubikenhed Jord, $\mu = tg \alpha$ Frictionscoefficienten for denne og k Cohæsionscoefficienten, saa faas let efter nogen Regning:

$$q = \sqrt{1 + v^2} \frac{\tilde{\omega} tg v (h - x) (1 - \mu tg v) - k (1 + tg^2 v)}{tg v (\mu + v + tg v - \mu v tg v)} dy,$$

og idet Lagrange's Betegnelse for den deriverede Function, y' , indføres for $tg v$, findes heraf det totale Tryk imod Muren:

$$Q = \sqrt{1 + v'^2} \int_0^h \left(\tilde{\omega} (h - x) \frac{1 - \mu y'}{\mu + v + (1 - \mu v) y'} - \frac{k}{(\mu + v) y' + (1 - \mu v) y'^2} \right) y' dx.$$

Den søgte Brudflade $y = f(x)$ skal imidlertid ifølge Coulomb's Princip være en saadan, at dette Udtryk for Q bliver Maximum, og Functionsformen maa altsaa bestemmes ved Hjælp af Variationsregningen. Men ifølge denne vil hertil fordres, at:

$$K = N \frac{dP}{dx} = 0 \text{ og } H = \left(V - P y' \right) \delta x + P \delta y \Big|_0^1 = 0,$$

hvor V betegner Størrelsen under Integraltégnet, $N = \frac{\partial V}{\partial y}$,

$P = \frac{\partial V}{\partial y'}$, og H er Differensen imellem Værdierne af det indenfor Klammer staaende Udtryk henholdsvis ved den øvre og nedre Grændse fra Integrationen.

Da nu $N = 0$, giver den første af disse Ligninger

$$\frac{dP}{dx} = 0 \text{ : } P = \text{const.}, \text{ og da Brudfladen maa udgaa fra}$$

Murens Fodpunkt $(0,0)$ og ender ved dens Skjæring, (h, y_1) , med den horizontale Jordoverflade, er $\delta x_0 = \delta x_1 = 0$,

$\delta y_0 = 0$, saa at den anden Ligning giver: $P_1 \delta y_1 = 0$
 c: $P = 0$ for $x = h$. Men følgelig er den arbitrære Constant lig Nul, og ved Indsætning af P 's Værdi som Differentialquotienten af V faas en kvadratisk Ligning til Bestemmelsen af y' , hvoraf denne findes, afhængig af x , men med kun én Værdi, idet den negative Løsning maa forkastes. Brudfladen vil altsaa i Almindelighed ikke være plan, idet den er bestemt ved Ligningen:

$$y' = \frac{1}{1 - \mu \nu} \left(-(\mu + \nu) + \sqrt{\frac{[k(1 + \nu^2) + \tilde{\omega}(\mu + \nu)(h - x)](1 + \mu^2)}{k + \tilde{\omega} \mu (h - x)}} \right) \dots (11)$$

ved hvis Integration en arbitrær Constant indkommer, som findes ved Betingelsen, at y skal være lig Nul, naar x er Nul.

Er specielt Cohæsionen $k = 0$, bliver y' constant, altsaa Brudfladen plan, og dens Hældning imod Verticalen er da bestemt ved:

$$tg v = \frac{1}{1 - \mu \nu} \left(-(\mu + \nu) + \sqrt{\frac{(\mu + \nu)(1 + \mu^2)}{\mu}} \right),$$

der, naar Frictionscoefficienten langs Muren regnes lig den i Jordens Indre c: $\mu = \nu$, bliver:

$$tg v = \frac{-2\mu + \sqrt{2(1 + \mu^2)}}{1 - \mu^2},$$

men derimod, naar $\nu = 0$, bliver: $tg v = -\mu + \sqrt{1 + \mu^2}$,
 hvoraf: $v = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

Vilde man paa samme Maade bestemme Brudfladen, saaledes at ikke Trykket men Kantringsmomentet bliver Maximum, saa kom Størrelsen under Integraltegnet til at hedde ikke V men Vx ; dog vil Resultatet aldeles ikke paa-virkes heraf, og den fundne Flade vil altsaa samtidig opfylde begge Fordringer.

Den foretagne Opløsning af p efter Retningerne q og r synes tilladelig, i al Fald som en første Approximation, idet Brudprismet betragtes i det Øjeblik, hvor det netop er i Færd med at glide, og hvor altsaa Frictionen og Cohæsionen

paa hvert Sted af Skillefladen maa være kaldt til Live med deres størst mulige Beløb. —

Hvad nu den anden af de to fundamentale Hypotheser, Coulomb's Princip, angaar, saa ere de Indvendinger, der kunne rejses imod dette, tildels af en mere formel end egentlig reel Natur. Da det ogsaa er ved Hjælp deraf, at Antagelsen om Brudfladens Form begrundes i det specielle Tilfælde, hvor noget saadant er muligt, saa indses det, at de ældre Jordtrykstheorier i Virkeligheden hvile paa dette ene Princip, hvis Berettigelse det derfor er af Betydning at undersøge.

Enhver Jordart vil for en kortere Tid, naar Delene ere ordnede paa en vis Maade, og den ikke udsættes for Rystelser og Stød, kunne holde sig under en hvilken som helst Skraaning stejlere end den naturlige, navnlig naar Cohæsionen ved særegne Forhold forøges, f. Ex. ved at Fugtigheden i Mellemrummene fryser. Hertil bidrager tildels Partiklernes egen Natur, idet de i Virkeligheden ere elastiske og derfor kunne ændre Form, saa at de f. Ex. trykkede kileformede danne fuldkomne Hvælvinger. Paa samme Maade kan der i Jordmassen bag Beklædningsmuren danne sig alle mulige Brudflader, efter hvilke Udskridning vilde finde Sted, og ved hvis Dannelse Jorden først vil kunne udøve Tryk imod Muren, idet den som et System af Partikler er at betragte som uelastisk.

For at kjende det virkelige Tryk paa Muren i et givet Øjeblik og altsaa den øjeblikkelige Brudflade, vilde det være nødvendigt at kjende den indre Ligevægtstilstand imellem Smaadelene paa det Tidspunkt. Thi Partiklerne udvide sig med Varmen, trække sig sammen med Kulden, ændre Cohæsion, Form, Fugtighedstilstand o. s. v., kort sagt en Jordmasse kan opfattes som et System, hvis Dele uafbrudt ere i Bevægelse. I Virkeligheden er det imidlertid slet ikke dette, man behøver at kjende. Saasnart man nemlig har gjort sig klart, at Trykket, som Muren har at modstaa, uafbrudt varierer, indses det ogsaa, at det kun gjælder at sikre sig, at den kan udholde dette i det uheldigste Tilfælde, og derfor er det, at man maa beregne den af Trykket, svarende til det Coulomb'ske Prisme, naar Glidning eller Knusning af Materialet skal undersøges, men ved det Prisme, der giver Maximum af Moment, naar det er Kantring, der

skal undersøges. Naar flere Forfattere, blandt andre Weingarten og Rebhann, saa stærkt fremhæve, at Trykket imod Muren maa være det samme, hvilken Brudfladen end er, saa er dette aldeles ikke umiddelbart indlysende. Meget snarere vil der til hver Brudflade svare et forskjelligt Tryk, afhængig af den deri virkende Friction og Cohæsion, som Partiklernes indbyrdes, ved Fladens Dannelse forandrede, Ligevægtstilstand bestemmer, og af Modtrykket fra den under Murens Fodpunkt liggende Jordmasse. De omtalte Forfattere gaa imidlertid ud fra, at dette Modtryk stedse er Nul, og under den Forudsætning er deres Ræsonnement fuldkommen rigtigt; Murens Reaction maa nemlig holde et hvilket som helst, ved et tænkt Snit i Jordmassen afskaaret, Prisme i Ligevægt, altsaa ogsaa det af Coulomb's Brudplan begrænsede. Men i Virkeligheden er Jordprismet paavirket af 4 Kræfter, nemlig dets egen Vægt, Reactionerne fra Muren, Skillefladen og endelig den gennem dets nedre Kant fra den underliggende Jordmasse, og er de tre første af disse givne, saa kan endnu den sidste findes, saaledes at Ligevægten er etableret. Det er derfor neppe muligt at angive, hvor stort det virkelige Tryk er, har det et Øjeblik en Værdi, er denne i det næste en anden, og det eneste sikre er følgelig at være beredt paa de uheldigste Forhold. Coulomb's Princip er altsaa for saa vidt med en redactionel Ændring fuldkommen berettiget, idet det ikke bestemmer Trykket som det er, men som det i det højeste kan være, og det er dette, som man ved Beregningerne er nødt til at lægge til Grund.

Mere formel Betydning har ogsaa den af Boussinesq¹⁾ fremsatte Indvending, at det af Coulomb bestemte Brudplan ikke svarer til et egentligt Maximum af Trykket, idet det samme Tryk vil faas for et hvilket som helst afskaaret Prisme større end det Coulomb'ske, naar det ved en Skilleplan kan dele sig i dette og en Rest, som bæres af Frictionen.

Ogsaa med Hensyn til Retningen af de to Composanter, hvori Brudprismets Vægt decomponeres, kan der rejses Tvivl. Betragtes imidlertid Systemet i dets Grændseligevægtstilstand, idet Muren netop er i Færd med at bevæge sig og et Jordprisme med at glide ned, saa er det rigtigt langs dette

¹⁾ Comptes rendus, t. 98, 1884.

Prismes Skilleplan og langs Muren at regne med den størst mulige Friction og CohæSION. Clavenad's Antagelse, at Murens Bevægelse i første Øjeblik skulde bevirkes ved et perpendiculart statisk Tryk, og at dette først derpaa gaar over til et kinetisk, der med Normalen danner Frictionsvinklen, kan muligvis have nogen Betydning, men dens Berettigelse er tvivlsom, og hans videre Ræsonnement neppe ganske rigtigt, idet han ikke tager Hensyn til, at Tiden, der hengaar mellem Bevægelsens Begyndelse og Trykkets Forandring af Retning er uendelig lille.

Forudsat at Skillefladerne kunne betragtes som plane, Jordprismet som et fast Hele og de paa dette virkende Kræfter som dets egen Vægt, Reactionen fra Muren og den fra Skillefladen, saa synes følgende Betragtning at være den rette. I Hviletilstanden vil Trykket paa Muren have en vis Retning, bestemt blandt andet ved Jordmassens Anbringelsesmaade bag den, men ved Rystelser og Smaa-bevægelser efterhaanden nærmende sig til at danne Frictionsvinklen med Normalen. Men hvilken Murens Reaction nu end er, maa Trykket i en hvilken som helst Skilleplan være bestemt i Størrelse og Retning som Resultanten deraf og af det tilhørende Jordprismes Vægt, og dets Vinkel med Normalen til Planen kan højest naae det til Maximum af Frictionen og CohæSIONen svarende Beløb. I Brudøjeblikket vil imidlertid Trykkene paa Muren saavel som paa den Skilleplan, langs hvilken Udskridning finder Sted, med de respective Normaler danne Grændsevinklerne, og for Ligevægten vil det være tilstrækkeligt at undersøge dette Tilfælde.

Hvad der gjør Forholdene noget mere complicerede, er det, at Jordmassen i Virkeligheden ikke er ensartet, de øvre Lag ere mere flydende, de nedre tættere, og der kan, blandt andet allerede ved Værkets Opførelse, være dannet en Discontinuitet i Jorden i Form af en Revne, langs hvilken CohæSIONen da er mindre end i den øvrige Masse.

b) Theorier, der betragte Jordelementet.

Scheffler.

§ 18. Ved Siden af de i det foregaaende omtalte, og væsentlig efter samme Type byggede, Undersøgelser over

Jordtrykket har forskellige Forfattere søgt ved Betragtning af de indre Kræfter i Jordmassen at opstille en mere rationel Theori, hvilende paa saa faa Antagelser som muligt.

Scheffler¹⁾ var den første,²⁾ der saaledes anvendte Infinitesimalmethoden, idet han søgte Ligevægtsbetingelserne for det uendelig lille Jordelement. Han behandler kun det Tilfælde, at Jordmassen foroven og forneden er begrændset af vandrette Planer, men iøvrigt ubegrændset, og opstiller herfor som selvindlysende Axiomer: 1) at Trykket paa et vandret Fladeelement er lodret og lig Vægten af den ovenover liggende Jord, og 2) at Trykket paa et lodret Fladeelement er vandret og vinkelret paa dette, samt alene afhængigt af Dybden under Overfladen.

I denne Jordmasses Indre betragtes dernæst et lille, tresidet Prisme, ABC , hvis ene Side er lodret, den anden vandret, medens den tredje med Verticalen danner Vinklen α . Betegner V, H, R, N, S Trykkene pr. Arealenhed, faas da let som Ligevægtsbetingelser:

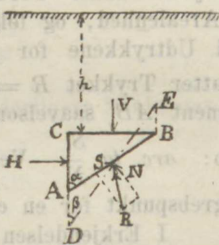
$$(12) \dots \begin{cases} N = V \sin^2 \alpha + H \cos^2 \alpha \\ S = (V - H) \sin \alpha \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

For den Retning af AB , langs hvilken Tilbøjeligheden til Glidning er størst, antager Scheffler — ifølge Principet af den mindste Modstand, der lærer, at R 's vandrette Composant altid vil være saa lille som muligt, — at R nærmer sig Verticalen, saa meget som Ligevægten tillader, eller altsaa —, naar α er tilstrækkelig lille, — at S er lig Grændseværdien $N \operatorname{tg} \varphi + k$, hvor φ er Frictionsvinklen og k Cohæsionscoefficienten. Men herved er Trykket H bestemt, og det faas derfor som Maximum af de Tryk, som ifølge ovenstaaende Ligninger vilde svare til forskellige Værdier af α , naar S stedse var lig $N \operatorname{tg} \varphi + k$.

¹⁾ Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken, Braunschweig, 1857.

²⁾ En tidligere Theori af Ortmann (Statik des Sandes, 1847) var bygget paa fuldstændig urigtige Forudsætninger og derfor uden Betydning.

Fig. 8.



Efter Løsning af disse Ligninger sættes altsaa: $\frac{dH}{d\alpha} = 0$,
 hvoraf Retningen af Glidefladen, DE , og Størrelsen af
 Trykket, H , faas:

$$(13) \dots \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}, \quad H = (\tilde{\omega} h + \varrho) \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{k \cdot \cos \varphi}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)},$$

naar $\tilde{\omega}$ er Vægten af en Volumenénhed Jord, h Elementets
 Dybde under Jordoverfladen, ϱ Atmosfærens Tryk pr.
 Arealenhet, og følgelig: $V = \tilde{\omega} h + \varrho$. Ved Indsætning
 i Udtrykkene for N og S findes derpaa disse, og deraf
 atter Trykket $R = \sqrt{N^2 + S^2}$ paa det vilkaarlige Ele-
 ment AB saavel som dets Vinkel med Normalen til dette
 α : $\operatorname{arc. tg} \frac{S}{N}$. Ved Integration faas Trykket og dets An-
 grebspunkt for en endelig Flade.

I Erkjendelsen af, at disse Resultater kun gjælde en
 tænkt Flade i Jordmassen, ikke en materiel Væg med Fric-
 tion og Adhæsion, forlader Scheffler tildels atter denne Vej og
 benytter ved Undersøgelsen af Trykket paa en Beklædningsmur
 en med de ældre Theorier mere analog Fremgangsmaade. Idet
 han forudsætter Jordoverfladen vandret, Brudfladerne plane,
 Cohæsionen forsvindende og betegner Vinklen mellem Muren og
 Verticalen gennem dens Fod ved α' , der er positiv, naar
 den ligger i Jordmassen, negativ, naar den ligger udenfor

denne, adskiller han to Tilfælde. Er $\alpha' < \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, benyttes
 ganske den ældre Methode med Coulomb's Princip, idet dog
 her Reactionernes Retninger motiveres ved Principet af den
 mindste Modstand, hvorefter de ville være saa nær lodrette
 som muligt og altsaa med Normalerne til Muren og Brud-
 planen danne Frictionsvinklerne φ' og φ (φ' er højst lig φ). —

Er derimod $\alpha' > \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, vil den nye Theori kunne anvendes
 paa Verticalplanen gennem Murens Fod, idet der til begge
 Sider af denne i Jordmassen vil kunne lægges Snit, svarende

til Maximum af Tryk derpaa, altsaa ifølge det foregaaende under Holdingen $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$. Trykket paa den saaledes tænkte Plan faas selvfølgelig ved Integration af det fundne Udtryk for H , og det er da Horizontaltrykket paa Muren. Dette sammensættes med Vægten af Jordlegemet imellem Verticalplanen og Muren, og Resultanten vil da være Jordtrykket paa denne, forudsat at den med Normalen dertil danner en Vinkel, som er lig eller mindre end φ' ; i modsat Fald maa man atter vende tilbage til den ældre Methode. Det første vil, som man let finder, indtræde, naar α' er større eller lig den Værdi deraf, som er bestemt ved Ligningen:

$$\sin(2\alpha' + \varphi') = \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi},$$

hvoraf, naar $\varphi' = \varphi$, ikke faas nogen yderligere Minimumsgrændse for α' end den allerede givne.

Rankine.

§ 19. Omtrent samtidigt med Scheffler og uden Kjendskab til hans Arbejde opstillede Rankine¹⁾ en lignende, noget fuldkomnere Theori. Idet han betragter Spændingerne i et vilkaarligt Punkt af Jordmassen, gaar han ud fra som almindeligt Stabilitetsprincip, naar ingen Cohæsion antages virkende, at intet Steds Vinklen, θ , mellem Trykket paa et vilkaarligt plant Element og dettes Normal maa overskride Frictionsvinklen, φ . Ifølge Lovene for de indre Spændinger i et fast Legeme vil imidlertid Maximum af denne Vinkel svare til en Stilling af Elementet vinkelret paa Planet af det største og mindste principale Tryk, p_1 og p_2 , og være bestemt ved: $\theta_{Max} = \arcsin \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}$; herved faas da Relationen:

¹⁾ «On the stability of loose earth» i Philosophical Transactions, 1857; ligeledes senere i: A manual of applied mechanics, London 1858, og i: A manual of civil engineering, London 1861. — Resumeret af Flamant i Ann. des ponts et chaussées, 1872, 2.

$$\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \leq \sin \varphi \text{ } \circ: \frac{p_1}{p_2} \leq \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \cot^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \dots (14)$$

For to vilkaarlige, i $p_1 p_2$'s Plan beliggende, conjugerte Tryk, $\circ$: saadanne, hvoraf hvert er parallel med den af det andet paaavirkede Plan, er endvidere almindelig Forholdet imellem Intensiteterne p og p' , naar θ er deres Heldning mod Normalerne og altsaa $\frac{\pi}{2} + \theta$ Vinklen imellem dem:

$$\frac{p}{p'} = \frac{\cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \theta_1}}{\cos \theta - \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \theta_1}}, \dots (15)$$

hvor θ_1 er den største virkelig optrædende Værdi af θ . Men idet altsaa θ_1 maa være $\leq \varphi$, faas heraf den øvre Grændseværdi for $\frac{p}{p'}$ ved Substitution af φ derfor.

Disse to Ligninger danne Basis for Theorien, der nu anvendes paa en uendelig Jordmasse med plan, under Vinklen θ mod Horizontalplanen heldende, Overflade. Idet en vertical og en med Jordoverfladen parallel Plan her ville være conjugerte, og Trykket paa den sidste er Vægten af den lodret derover liggende Jordmasse, altsaa, naar x er dens lodrette Dybde under Overfladen, $p_x = \tilde{\omega} x \cos \theta$, faas Grændseværdierne for Trykket, p_y , paa det verticale Element ved i (15) enten at sætte $p = p_x$, $p' = p_y$ eller omvendt og erstatte θ_1 med φ . Men ifølge Principet af den mindste Modstand skulde det virkelige Tryk p_y som fremkaldt af det primitive, p_x , være saa lille som for Ligevægten muligt, og Rankine sætter det derfor lig dets lavere Grændseværdi $\circ$:

$$p_y = \tilde{\omega} x \cos \theta \frac{\cos \theta - \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \varphi}}{\cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \varphi}} \dots (16)$$

Ved Hjælp af samme Princip finder han paa samme Maade det tredie conjugerte Tryk, p_z , vinkelret paa de to andre, p_x og p_y , eller det tredie principale Tryk, p_3 , vinkel-

ret paa de to andre, p_1 og p_2 , at være lig det mindste af disse, altsaa ifølge Lovene for den indre Ligevægt:

$$\left. \begin{aligned} p_z = p_3 = p_2 &= \tilde{\omega} x \cos \theta \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \varphi}} \\ p_1 &= \tilde{\omega} x \cos \theta \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \varphi}} \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

og den sidstes Heldning mod Horizontalen:

$$\Psi = \frac{1}{2} \left(\theta + \pi - \arcsin \frac{\sin \theta}{\sin \varphi} \right)$$

Trykket paa en vertical Beklædningsmur finder han derefter ved Integration som Resultanten af Elementartrykkene p_y , altsaa parallel med Overfladen og med sit Angrebepunkt i en Dybde lig $\frac{2}{3}$ af Murens Højde. Ogsaa paa en ikke vertical Væg kan Trykket paa lignende Maade faas, eller man kan bestemme det som Resultanten af Trykket paa en vertical Plan gennem dens Fod og Vægten af Jordprismet mellem denne og Væggen.

Til Bestemmelse af p_1 , p_2 , p_x og p_y for et vilkaarligt Punkt, O , angiver Rankine følgende Construction: Gennem O drages Linierne OX horizontalt, OR under Frictionsvinklen φ og OP parallel med Terrainoverfladen α : under Vinklen θ . Omkring et Punkt M paa OX slaas en Cirkel, der rører OR og skjærer OP i Punkterne Q og P , samt OX i Y og X . Oprejsses saa i P en Perpendicular paa OP indtil dens Skjæring med OX i V , og sættes: $OV = \tilde{\omega} x$, saa er:

$$p_1 = OX, p_2 = OY, p_x = OP, p_y = OQ,$$

og p_1 's Retning halverer Vinklen QMX .

Theorien hviler paa Moseley's ubeviste og tildels urigtige Princip af den mindste Modstand. Den giver derfor ikke, som den prætenderer, den virkelige Ligevægtstilstand, men kun en til en mulig Grændseligevægt svarende, idet der i hvert Punkt af Jordmassen antages at eksistere en Plan, hvis tilhørende Tryk med Normalen danner Grændsevinklen φ . Endvidere regnes den begrænsende Murmasse aldeles equivalent med et Jordlegeme, og dens større Fasthed forudsættes altsaa ikke at ændre Ligevægtsforholdene,

ligesom Frictionsvinklen langs Muren tages lig den i Jordens Indre.

Levy.

§ 20. En mere almindelig og langt fuldstændigere Theori skyldes Levy¹⁾, hvis Arbejde forelagdes det franske Academi 1867 og tiltraadtes af dette 1870.

Idet han antager Jorden uden Cohæsion og kun betragter Grændseligevægtstilstanden, hvor Massen netop er i Færd med at glide og desagregere sig i alle sine Dele, gaar han ud fra, at for ethvert Punkt Vinklen mellem Normalen og Trykket paa det Fladeelement, hvor den er størst, netop er lig Jordens Frictionsvinkel, φ . Ved Hjælp heraf og Cauchy's Theoremer for den indre Ligevægt (o: af det elementære Tetraæder eller Parallelopipedum) opstilles tre Ligninger imellem Normalcomposanterne, N_1 og N_2 , og Tangentialcomposanterne, T , af Trykket pr. Arealenhed paa to gjennem et vilkaarligt Punkt, (x, y) , lagte Fladeelementer, vinkelrette hvert paa sin af Axerne i det vilkaarlig valgte retvinklede Coordinatsystem. Idet $\tilde{\omega}$ er Vægten af en Cubikenhed Jord, θ Vinklen mellem y' Axen og Verticalen, hedde disse Ligninger:

$$(18) \dots \begin{cases} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = -\tilde{\omega} \sin \theta \\ \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} = \tilde{\omega} \cos \theta \\ (N_2 + N_1)^2 \sin^2 \varphi - (N_2 - N_1)^2 - 4 T^2 = 0, \end{cases}$$

der, naar y' Axen er valgt lodret, o: $\theta = 0$, og en Hjælpefunction indføres, reduceres til en enkelt partiel Differentialligning af 2den Orden og 2den Grad. Hertil kommer imidlertid de særlige Betingelser, 1) at Trykket i ethvert Punkt af den frie Jordoverflade skal være Nul, og 2) at det paa ethvert Element af Beklædningsmurens Bagside med Normalen skal danne Frictionsvinklen mellem Jord og Murværk. Dersom man altsaa kunde integrere den omtalte

¹⁾ Comptes rendus, t. 68, 1869. — Rapport og videre Udvikling af Theorien af de Saint-Venant i Comptes rendus, t. 70, 1870.

Differentialligning, — hvad dog neppe er muligt —, vilde herved Problemet være løst i al dets Almindelighed.

For at naa videre maa Levy forudsætte Jordoverfladen plan, — dog af vilkaarlig Heldning, ω , mod Horizontalplanen, — og han betragter da først det Tilfælde, at Jordmassen iøvrigt er ubegrændset, saa at altsaa Betingelsen 2) bortfalder. Vælges Coordinatsystemet, saa at $\theta = 0$, og betegner p et Punkts vinkelrette Afstand fra den heldende Jordoverflade, saa vil da Composanterne af Trykkene paa et vertikalt og et horizontalt Element i dette Punkt være:

$$(19) \dots \begin{cases} N_1 = \tilde{\omega} p \sigma^2 \cos \omega \\ N_2 = \tilde{\omega} p \frac{1 + \sigma^2 \sin^2 \omega}{\cos \omega} \\ T = -\tilde{\omega} p \sigma^2 \sin \omega \end{cases}$$

$$\text{hvor: } \sigma = \frac{\cos \omega}{\cos \varphi} - \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{\cos^2 \varphi} - 1}$$

$$\text{og: } p = x \sin \omega + y \cos \omega,$$

som baade tilfredsstiller (18) og Betingelsen 1). — For et hvilket som helst andet plant Fladeelement, hvis Heldning mod den verticale y' Axe er ε , faas ved Betragtning af Cauchy's elementære Tetraeder Trykkets Vinkel, φ_1 , med Normalen bestemt ved Ligningen:

$$2 T \cos(\varphi_1 - 2\varepsilon) + (N_2 - N_1) \sin(\varphi_1 - 2\varepsilon) = (N_2 + N_1) \sin \varphi_1 \dots (20),$$

hvoraf det betragtede Punkts Afstand fra Overfladen, — altsaa dets Coordinater, — udgaar ved Indsætning af (19). Men følgelig ere ogsaa de til en given Værdi af φ_1 svarende Heldninger, ε , hvoraf der for hvert Punkt faas to, uafhængige af p , og de Flader i Jordmassen, der dannes af de successive Elementer, hvis Tryk med Normalen danner Vinklen φ_1 , ere altsaa to Systemer af parallelle Planer. Brudfladerne, til hvilke specielt svarer φ_1 lig Frictionsvinklen φ , ere saaledes i dette Tilfælde plane, og deres Heldning mod Verticalem faas af:

$$\cos(2\varepsilon + \varphi - \omega) = \frac{\sin \omega}{\sin \varphi} \dots (21)$$

For nu at anvende disse Resultater i det Tilfælde, at Jordmassen ikke er ubegrændset, men afsluttet ved en Be-

klædningsmur, forudsætter Levy, at dennes Retning netop er den ved Ligning (20) bestemte, naar heri for φ_1 sættes Frictionsvinklen mellem Jord og Murværk. I saa Fald antages Murens Indførelse ikke at forandre Ligevægtsforholdene i den ubegrændsede Masse, Ligningerne (19) ville opfylde Betingelsen 2), og Brudfladerne ere plane, saa at Coulomb's Princip ogsaa vilde kunne anvendes. Idet i Almindelighed Frictionen langs Muren sættes lig den i Jorden, er altsaa Retningen af dens Bagvæg bestemt ved (21). Det skraa Tryk paa et Arealelement af denne findes lig Vægten af et Jordprisme, hvis Højde er Dybden under Overfladen maalt langs Væggen, multipliceret med $\cos(\varepsilon + \varphi)$.

De specielle Tilfælde, hvor (21) er opfyldt, er altsaa de eneste, for hvilke Levy's Theori prætenderer at give en exact Løsning, og Resultatet heraf er det samme, som faas ved Coulomb's Princip. Men han viser ogsaa, at Glidefladerne ikke kunne være plane uden at være parallelle, og at dette kun vil indtræde, naar Jordoverfladen er plan og (21) tilfredsstillet, saa at heller ikke de ældre Theorier i andre Tilfælde kunne føre til Maalet.

Naar Betingelsen (21) ikke er opfyldt, benyttes imidlertid dog de under Forudsætning deraf udledede Formler (19) som en første Tilnærmelse, der i Almindelighed ikke vil afvige meget fra det rette og — i Modsætning til de ved Coulomb's Princip afledede Udtryk — altid vil ligge paa den sikre Side. Den herved begaaede Fejl svarer nemlig til den Antagelse, at Frictionsvinklen langs Muren ikke er φ , men den altid mindre Værdi φ_1 , som af Ligningen (20) faas for de forskellige Elementer deraf.

Bestemmelsen af en højere Tilnærmelse reducerer de Saint-Venant¹⁾ til Løsningen af en Differentialligning af 2den Orden, som dog er lineær, og som Boussinesq²⁾ integrerer. Er Murens Heldning imod Verticalen større end den ved (21) bestemte, bliver imidlertid Løsningen umulig, hvilket de Saint-Venant forklarer derhen, at Jordmassen ikke vil desagregere sig i alle sine Dele, men skrider ud som et samlet Hele. Er derimod Heldningen mindre, faas herved

¹⁾ Comptes rendus, t. 70, 1870.

²⁾ Comptes rendus, t. 70, 1870.

en anden Tilnærmelse, som dog kun vil være brugelig, naar Afgivelsen fra den ved (21) bestemte Værdi af ε er ringe. —

Et væsentligt Fortrin ved Levy's Theori fremfor de paa Moseley's Princip af den mindste Modstand baserede ældre af Scheffler og Rankine betegner det, at der skjælnes imellem de specielle Tilfælde, hvor Methoden giver den exacte Løsning, og dem, hvor det kun er en Tilnærmelse, og at det udtrykkelig fremhæves, at det kun er en Grændseligevægtstilstand, der undersøges. En Hovedindvending er det derimod, som maaske mod hele den rationelle Theori, at Jordmassens Dele alle antages samtidigt at være i Færd med at bevæge sig i Forhold til hinanden, uagtet det i og for sig muligvis vilde være tilstrækkeligt, om dette blot gjaldt nogle af Delene.

Considère.

§ 21. Considère¹⁾ forsøger at bevise Rigtigheden af denne Hypothese, dog kun for saa vidt som Jordmassen er ubegrændset til Siderne og anbragt successive i Lag parallelle med Overfladen. Et Element i det sidst anbragte af disse Lag vil hverken vinkelret paa dette eller parallel dermed lide nogen Paavirkning; men efterhaanden som der fyldes Jord over, vil det vinkelrette og — som en Betragtning af de indre Ligevægtsforhold viser — samtidig ogsaa det parallelle Tryk voxe mere og mere. Det indre Tryk i en hvilken som helst Retning kan imidlertid ikke forøges, uden at Afstanden imellem Moleculerne formindskes, og efterhaanden som Jordlegemet opføres, maa altsaa disse, blandt andet i det enkelte Jordlag, nærmes mere og mere til hinanden. Men dette kan ikke foregaa, uden at Moleculer, der oprindeligt ere anbragte i øvre Lag, lidt efter lidt trænge ned i nedre, og der maa altsaa overalt i Massen finde Glidninger Sted imellem Smaadelene, saa at der i ethvert Punkt maa være en Plan, hvis Tryk med Normalen netop danner Grændsevinklen.

Efterat have paavist, at der i hvert Punkt findes to Planer, der kun paavirkes normalt, betegner han Forholdet

¹⁾ Ann. des ponts et chaussées, 1870, 1.

imellem deres Tryk ved k og finder da Maximum af Vinklen, δ , imellem Normalen og Trykket paa et vilkaarligt Element gennem Punktet bestemt ved:

$$\operatorname{tg} \delta_{\text{Max}} = \frac{k - 1}{2 \sqrt{k}}$$

Sættes δ_{Max} lig Frictionsvinklen φ , faas heraf Forholdet imellem de normale Tryk overalt i Jorden: $k = \cot. ^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$.

Considère's Betragtningssmaade nærmer sig mere Scheffler's end Levy's. Han behandler kun de Tilfælde, hvor Jordmassen er ubegrændset til Siderne og dens Overflade plan, enten horizontal, parallel med den naturlige Skraaning eller af en vilkaarlig Heldning. Idet her Fladerne af normalt Tryk ere to orthogonale Systemer af parallelle Planer, vises det let, at Trykket paa et Element af en af disse er lig Vægten af en Jordsejle, hvis Højde er Punktets lodrette Dybde under Skjæringslinien mellem Jordoverfladen og Planen af det andet System igjennem samme Punkt; bestemmes paa analog Maade Trykket paa Elementet af den sidste Plan, maa Forholdet imellem dette og hint være k . Ved den sidste Betingelse eller umiddelbar Betragtning findes Retningerne af de to Systemer, og ved Hjælp af det retvinklede, tresidede, elementære Prisme, hvis to Sider ere parallelle med disse Retninger og derfor paavirkede af bekjendte, normale Tryk, faas da Trykket paa et vilkaarligt Element i Jordmassen.

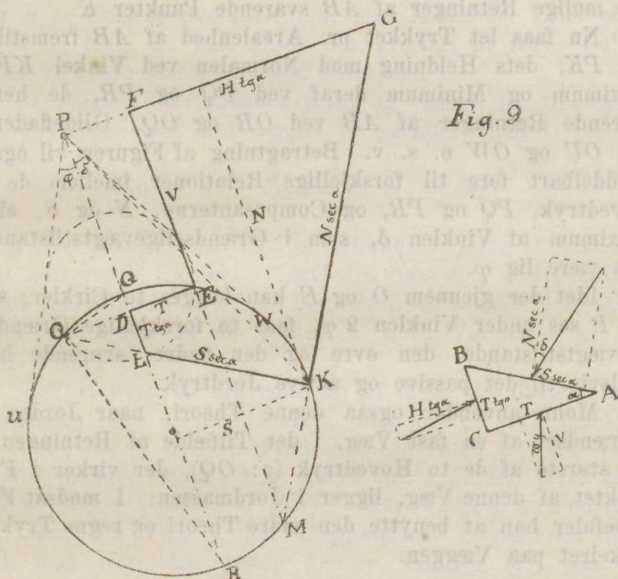
Uagtet Considère er opmærksom paa, at Anvendelsen heraf paa det Tilfælde, hvor Jorden er begrændset af en fast Væg, egentlig ikke er rigtig, med mindre Frictionen langs denne netop har samme Værdi som den, der vilde virke i den tilsvarende Flade af den ubegrændsede Jordmasse, og at i modsat Fald Brudfladerne ikke ere plane, antager han dog, at man med tilstrækkelig Sikkerhed altid kan benytte de af det ovenstaaende udledede Formler for Trykket paa en Jordvæg, ogsaa naar denne erstattes af en fast Mur.

Angrebspunktet saavel for Muren som for en vilkaarlig Skilleplan regnes beliggende i en Afstand fra det nederste Punkt lig $\frac{1}{3}$ af Højden, og ved specielt blandt de fra

Murens Fod udgaaende Skilleplaner at vælge den, hvis Tryk er normalt, eller den, for hvilken det med Normalen danner Frictionsvinklen, faas ved Betragtning af det afskaarne Jordprisme en graphisk Bestemmelse af Trykket.

Mohr.

§ 22. Mohr¹⁾ behandler rent graphisk det samme specielle Tilfælde σ : en til Siderne ubegrændset Jordmasse med plan, vilkaarligt hældende Overflade.



Idet han gaar ud fra, at Trykket paa et med Terrainfladen parallelt Element er verticalt og lig Vægten af en Jordsejle, hvis Højde er den normale Afstand, y , fra hin Flade, at Trykket paa et verticalt Element er parallel med Terrainfladen, og at de tangentielle Spændinger i to indbyrdes vinkelrette Flader gennem samme Punkt ere lige-store, tegner han Diagrammet $DEFGKL$ op for et elemen-

¹⁾ Zeitschrift des hannov. Arch.- und Ing.-Vereins, 1871.

tært Prisme ABC , hvis ene Side, $AC = 1$, er parallel med Terrainfladen, den anden, BC , vinkelret derpaa og den tredje, AB , heldende under en vilkaarlig Vinkel α . Forlænges ED , KL , FE og GK til deres indbyrdes Skjæringspunkter O og M , saa er $DO = T$, $FM = H$, og altsaa ere D , E , F , M , O faste, af Fladen AB 's Retning uafhængige Punkter; det samme gjælder P , og PO saavel som FD ere verticale, af Længde lig $\tilde{\omega}y$, idet $\tilde{\omega}$ er Vægten af en Cubikenhed Jord. Idet endvidere Vinkel $OEM = OKM = \frac{\pi}{2}$, vil en

Cirkel over OM som Diameter gaa igjennem E og de til alle mulige Retninger af AB svarende Punkter K .

Nu faas let Trykket pr. Arealenhet af AB fremstillet ved PK , dets Heldning mod Normalen ved Vinkel KPR , Maximum og Minimum deraf ved PQ og PR , de hertil svarende Retninger af AB ved OR og OQ , Glidefladerne ved OU og OW o. s. v. Betragtning af Figuren vil ogsaa umiddelbart føre til forskellige Relationer imellem de to Hovedtryk, PQ og PR , og Composanterne, N og S , eller Maximum af Vinklen δ , som i Grændseligevægtstilstanden maa være lig φ .

Idet der gjennem O og E kan lægges to Cirkler, som fra P ses under Vinklen 2φ , faas to forskellige Grændseligevægtstilstande, den øvre og den nedre, svarende henholdsvis til det passive og active Jordtryk.

Mohr anvender ogsaa denne Theori, naar Jorden er begrændset af en fast Væg, i det Tilfælde at Retningen af det største af de to Hovedtryk (o: OQ), der virker i Fodpunktet af denne Væg, ligger i Jordmassen. I modsat Fald anbefaler han at benytte den ældre Theori og regne Trykket vinkelret paa Væggen.

Winkler.

§ 23. Omtrent samtidigt med de tre sidst nævnte Forfattere offentliggjorde ogsaa Winkler¹⁾ sin ret fuldstændige Jordtrykstheori.

¹⁾ Zeitschrift des österr. Ing.- und Arch.-Vereines, 1871. — Senere udkommen særskilt under Titelen: Neue Theorie des Erd-druckes etc., Wien, 1872.

Idet atter han først betragter en til Siderne ubegrændset Jordmasse med vilkaarlig Overflade og antager som Hypothese, at der i Grændseligevægtstilstanden i ethvert Punkt findes en Plan, langs hvilken Glidning netop er i Færd med at foregaa, finder han ved Ligevægtsbetingelserne for det elementære Prisme ganske de samme tre Ligninger (18) som Levy. Dog faas den sidste af disse under en noget almindeligere Form:

$$(N_2 + N_1)^2 \cos^2 \varphi - 4 N_2 N_1 + 4 T^2 - 2 (N_2 + N_1) k \sin 2\varphi - 4 k^2 \cos^2 \varphi = 0,$$

hvor k er Cohæsionscoefficienten, som imidlertid strax efter sættes lig Nul, da han anser det urigtigt at regne Cohæsionen virkende samtidigt med Frictionen.

Er specielt Terrainfladen plan, og vælges den til x -Axe, faas Trykkene vinkelret derpaa og parallel dermed:

$$N_2 = \tilde{\omega} y \cos \omega, \quad T = -\tilde{\omega} y \sin \omega, \quad N_1 = \tilde{\omega} y \frac{\sigma^2 + \sin^2 \omega}{\cos \omega}$$

i fuld Overensstemmelse med Formlerne (19) for et vertikalt og et horizontalt Element. Ligeledes vises det, at Hovedtryk saavel som Glideflader i alle Punkter have samme Retninger, og at Heldningen af de sidste, ε , imod Verticalen er bestemt ved (21).

Med Hensyn til Anvendelsen af disse Resultater, naar Jordmassen ikke er ubegrændset, men udøver Tryk imod en fast Væg, langs hvilken Frictionscoefficienten φ_1 kan være lig eller mindre, men aldrig større end i Jorden selv, gaar Winkler noget videre end Levy. Har Væggen samme Retning som den Plan i den ubegrændsede Jordmasse, hvis Tryk med Normalen netop danner Vinklen φ_1 , saa vil dens Indførelse intet forandre i Ligevægtsforholdene, og de fundne Formler ville være rigtige, saavel som ogsaa de paa Coulomb's Princip baserede Theorier. Til enhver Heldning af Overfladen og enhver Værdi af Frictionscoefficienten φ_1 vil svare en vis Stilling af Væggen; er φ_1 lig φ , maa den falde sammen med en Glideflade, bestemt ved (21), men er $\varphi_1 < \varphi$, vil dens Vinkel med denne, ν , faas af:

$$\cos. (2 \nu + \varphi - \varphi_1) = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi} \dots \dots \dots (22)$$

Men ogsaa ellers mener Winkler at kunne benytte Theorien, og han skjelner med Hensyn til Fænomenerne ved Kantringen imellem to forskellige Tilfælde. Ligger Væggens Retning i Vinklen imellem de to Glideflader gennem dens Fod, saa at kun den ene af disse bevares i Jordmassen, saa vil, naar Ligevægten forstyrres, et Jordprisme glide ned langs denne Flade og Væggens Bagside, og begge Steder vil altsaa den fulde Friction, henholdsvis φ og φ_1 , være kaldt til Live. Men idet Trykket paa Væggen altsaa netop maa danne Maximumsvinklen φ_1 med Normalen til denne, kunne Ligevægtsforholdene ikke være de samme som i den ubegrænsede Jordmasse, med mindre ν har den bestemte Værdi, som faas af (22), svarende til $2\nu + \varphi - \varphi_1$ positiv. Ligger derimod Væggens Retning udenfor Vinklen imellem de to Glideflader, saa at begge disse indeholdes i Jordmassen, saa vil det imellem dem indesluttede Prisme glide ned, medens den nærmest Væggen liggende Jord vil følge med denne og ikke glide ned langs den, saafremt blot Trykket med Normalen danner en Vinkel $\leq \varphi_1$. Idet derfor i dette Tilfælde Frictionen ikke nødvendigvis optræder med netop sit Maximumsbeløb, men med en hvilken som helst mindre Værdi, kan Væggen, uden at Ligevægtstilstanden i den ubegrænsede Jordmasse forstyrres, have en hvilken som helst Retning, for hvilken blot Trykkets Heldning mod Normalen er $\leq \varphi_1$; ved i (22) i Stedet for φ_1 at sætte en saadan mindre Vinkel, faas den tilsvarende Retning, idet her den negative Værdi af $2\nu + \varphi - \varphi_1$ bliver at benytte.

For de Stillinger af Væggen endelig, ved hvilke ifølge det foregaaende Theorien ikke er gyldig, kunde man vel benytte den som en Tilnærmelse, men Winkler antager det rigtigere i saa Fald at vende tilbage til den ældre Theori og forudsætte Glidefladerne plane og Trykkets Heldning mod Normalen lig φ_1 .

Idet han da ganske følger Rebhann's Fremgangsmaade og Constructioner, antyder han dog ogsaa en graphisk Tilnærmelse for krumt profilerede Mure og benytter endelig Rebhann's Theori til en ret elegant Construction af Glidefladerne i en ubegrændset Jordmasse, naar disse antages plane, hvilket dog kun er strængt rigtigt, naar Jordoverfladen er plan.

Weyrauch. Jacquier.

§ 24. Af de senere Forfattere, der har behandlet den rationelle Jordtrykstheori, følge de fleste den af Levy, Considère og Winkler angivne Vej og rette væsentlig deres Bestræbelser paa at udfinde simple graphiske Constructioner.

Weyrauch¹⁾ benytter saaledes hertil Udtrykkene for Normal- og Tangential-Trykket, N_μ og T_μ , paa et vilkaarligt, under Vinklen μ mod den vilkaarlig valgte x -Axe heldende Element, der med Levy's (Lamé's) Betegnelser ere:

$$N_\mu = \frac{N_1 + N_2}{2} - \frac{N_1 - N_2}{2} \cos 2\mu - T \sin 2\mu$$

$$T_\mu = -\frac{N_1 - N_2}{2} \sin 2\mu + T \cos 2\mu$$

Følgende ret simple Construction af N_μ , T_μ og Trykkets Heldning, φ_1 , imod Normalen angives derefter. Fra det givne Punkt, o , afsættes parallel med x -Aksen: $oc = \frac{N_1 + N_2}{2}$, $cn = \frac{N_1 - N_2}{2}$ og parallel med y -Aksen: $cm = T$.

En Cirkel slaas derpaa om c som Centrum med Radius co og en anden, som gaar igjennem Punkterne c , n og m . Drages saa fra o en Linie i det betragtede Elements Retning, altsaa under Vinklen μ med oc , indtil dens Skjæring med Cirklen om c i a , drages endvidere ac og oprejses i dennes andet Skjæringspunkt, b , med Cirklen gjennem c en Perpendicularær, der skjærer denne Cirkel i et andet Punkt d , saa er: $N_\mu = ab$, $T_\mu = bd$, Resultanten $R_\mu = ad$ og $\varphi_1 = \angle dab$. Og forlænges ad til dens andet Skjæringspunkt, e , med Cirklen om c som Centrum, saa vil eo være Retningen af Trykket R_μ .

Jacquier²⁾ angiver en noget anden Construction til Bestemmelse af Trykket R_μ 's Retning, idet han bemærker, at de to Retninger oa og oe af en vilkaarlig Cirkel gjennem o skjæres i Punkter a og e , der, naar Vinklen μ varierer, ere tilsvarende Punkter i en Involution, saa at altsaa For-

¹⁾ Allgemeine Bauzeitung, Wien, 1880.

²⁾ Ann. des ponts et chaussées, 1882, 1.

bindelseslinien *ae* gaar igjennem et fast Punkt, hvis Beliggenhed let kan findes.

Boussinesq.

§ 25. I Modsætning til disse og andre Forfattere har Boussinesq¹⁾ fæstet sin Opmærksomhed paa de mere reelle Mangler ved Theorien, baade hvad angaar dennes Grundlag og dens Anvendelse paa begrændsede Jordmasser.

Hans Undersøgelser i den første Retning har dog mindre praktisk Betydning og frembyder væsentlig kun theoretisk Interesse. I Stedet for «Grændseligevægten», hvor Jordmassen er lige ved at skride ud, studerer han «Elasticitetsligevægten», hvor Frictionen endnu ikke har naaet sin Maximumsværdi, og hvor derfor Trykket imod Beklædningsmuren er større end under hin.

De for en cohæsiønsløs Jordart i Modsætning til de faste Legemer og Vædskerne karakteristiske Egenskaber kunne udtrykkes ved, 1) at Elasticitetscoefficienten imod Forskydning, i Stedet for at være constant som hos de første eller Nul som hos de sidste, maa antages proportional med Trykket, og 2) at Modstanden mod Strækning er Nul, saa at Jordelementet kun kan være underkastet Tryk. Ved Hjælp af den første af disse —, naar blot i Stedet for Trykket tages Middeltrykket, p , af de tre principale Tryk, — antage de almindelige Ligninger for Spændingerne i et vilkaarligt Punkt af et isotropt Legeme (hvori det udtrykkes, at Tangentialcomposanterne skulle være Nul, naar p er Nul) følgende Form:

$$N_1 = -p \left(1 - 2m \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad T_1 = pm \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (23)$$

og analogt for N_2, T_2, N_3, T_3 . Heri ere $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$ Normal- og Tangential-Composanterne paa et

¹⁾ Comptes rendus, t. 77, 1873 og t. 98, 1884. — Ann. des ponts et chaussées, 1882, 1; 1883, 2; 1884, 1. — Minutes of proceedings of the society of civil engineers, London, 1882. — Endvidere i: Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents etc. et sur la poussée des terres sans cohésion, Paris, 1876.

Element, hvis Kanter ere parallele med Axerne i det vilkaarlig valgte Coordinatsystem, u, v, w Composanterne af Elementets Dilatationshastighed ($\gamma: \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ Dilatationerne i Axernes Retninger) og m en positiv Constant. Ved Hjælp af den anden Egenskab, som fordrer, at N_1, N_2, N_3 altid skulle være negative, faas, at den største Dilatation altid maa være mindre end $\frac{1}{2m}$, og Elasticitetsgrænsen

sættes derfor lig $\frac{\sin \varphi}{2m}$, hvor φ maa bestemmes særskilt for hver Jordart; den vises at være den naturlige Skraanings Heldning mod Horizontalen γ : Frictionsvinklen.

Den af Ligningerne (23) udledede Incompressibilitetsbetingelse:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (24)$$

og de 3 Translationsligninger, som udtrykke Elementets Ligevægt, bestemme de 4 Ubekjendte u, v, w, p , som ved Indsætning i (23) give Trykkene. De ved Integrationen indkomne Constante faas dels af den ovenstaaende Betingelse med Hensyn til Maximumsdilatationen, dels af Betingelserne ved Jordmassens Begrænsning, saavel ved den frie Overflade som ved de faste Vægge.

— Af større Betydning end disse Betragtninger, imod hvis Berettigelse der kan rejses adskillige Indvendinger, er Boussinesq's Bestræbelser for, svarende til Grændseligevægts-tilstanden, at angive brugelige Approximationer, hvor Levy's Theori, anvendt paa den ubegrænsede Jordmasse, ikke giver den exacte Løsning.

Naar Murens Retning er en saadan, at der i Kantingsøjeblikket vil finde Glidning Sted langs den, saa at Trykket med Normalen altsaa netop maa danne den givne Frictionsvinkel, saa vil Theorien i Almindelighed ikke være anvendelig, idet Trykket paa en hvilken som helst Plan i den ubegrænsede Jordmasse vil have en ganske bestemt Retning. For imidlertid i dette Tilfælde at finde en approximert Løsning indfører Boussinesq i den givne homogene Masse en vis Heterogenitet. Er Jordoverfladen plan

med en Heldning ω mod Horizontalen (positiv, naar Terrænet stiger fra Muren), og danner Murens Bagside Vinklen ε med Verticalen (positiv, naar den sidste, oprejst fra Væggens nederste Kant, ligger i Jordlegemet), saa antages Frictionsvinklen, φ' , constant, lig φ'' , for den Del af Massen, der afskjæres hinsides et plant Snit gennem Murens Overkant under Vinklen δ med dens Retning; derimod Jordkilen paa den anden Side af dette Snit betragtes som heterogen med φ' voxende efter en vis Lov, fra hvad den er i den homogene Del, indtil den ved Muren bliver lig den Frictionsvinkel, Φ , der maatte høre til en ubegrænset homogen Jordmasse, for at Trykket paa et med Muren sammenfaldende Snit med Normalen til dette netop skulde danne den givne Frictionsvinkel, φ_1 , mellem Jord og Murværk.

Idet han nu tænker sig to saadanne heterogene Masser, den ene med Frictionsvinklen overalt større end i den givne homogene, den anden med den overalt mindre, faas to Værdier af Normaltrykket paa Muren, begge med Angrebspunkt i $\frac{1}{3}$ af dennes Højde, og imellem disse som Grændser vil det søgte Tryk ligge. For den første tages $\varphi'' = \varphi_1$ lig den givne Masses Frictionsvinkel, for den anden sættes Φ lig dette, medens $\varphi'' = \varphi_1$, og det arithmetiske Middeltal af de to heraf beregnede Normaltryk vil da kun afvige lidet fra det virkelige. Dog finder Boussinesq efter en nøjere Undersøgelse i det specielle Tilfælde, hvor Muren er lodret, $\omega: \varepsilon = 0$, at en bedre Approximation vil faas ved til den lavere af de to Grændseværdier at lægge $\frac{9}{22}$ af Differensen imellem den og den øvre. Den tangentielle Composant af Trykket faas heraf ved Multiplication med $\operatorname{tg} \varphi_1$.

Uden her at gaa nærmere ind paa Beregningens Enkelt-heder, vil man af det foregaaende indse, at Brudfladerne i den betragtede Masse ikke ere plane, men indenfor den heterogene Del svagt krumme, og at Approximationens Finhed vil være desto større, jo mindre Heterogenitet man er nødt til at indføre.

Endnu skal blot nogle af Resultaterne anføres. De hvile paa den Antagelse, at Frictionscoefficienten mellem Murværk og Jord er lig den i dennes Indre, og at Vinklerne ω og ε begge ere ≥ 0 . For det almindelige Tilfælde vil, naar $\tilde{\omega}$ er Vægten af en Volumenenhed af den givne

Jordmasse og h Murens lodrette Højde, faas et Normaltryk lig $\frac{1}{2} \tilde{\omega} \frac{h^2}{\cos \varepsilon} K$. Heri er:

$$K = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi''}{2} \right) \frac{\cos \psi \cos (\varphi'' + \delta) \cos (\omega - \varepsilon) \cos \varphi''}{\cos (\varphi'' - \delta) \cos (\omega + \psi)}, \quad (25)$$

hvor ψ og δ ere givne ved Ligningerne:

$$\left. \begin{aligned} \sin (\omega + 2 \psi) &= \frac{\sin \omega}{\sin \varphi''} \\ \delta &= \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi''}{2} - \psi - \varepsilon \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

og den nedre Grændseværdi faas ved at sætte φ'' lig den givne Frictionsvinkel φ , medens den øvre vil svare til φ'' bestemt af Ligningen:

$$\sin \varphi'' = \sin \varphi \cdot \cos \delta \dots \dots \dots (27)$$

Det er dog herved en Betingelse, at (26) giver $\delta \geq 0$, altsaa at $\varepsilon < \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \psi$. I modsat Fald vil der nemlig ikke, som forudsat, finde Glidning Sted langs Muren, men en Del af Jordmassen, afskaaret ved en Plan gennem Bagvæggens Fod og under Vinklen δ med dens Retning, vil følge med som et Hele. Det søgte Jordtryk faas da enten som Resultanten af det paa denne Plan, under Hældningen φ mod Normalen, virkende Tryk og Vægten af Jordprismet imellem den og Muren, eller som Resultanten af de to tilsvarende Kræfter for en Verticalplan gennem Bagvæggens Fod, naar blot Trykket paa denne regnes under Vinklen ω med dens Normal ω : parallel med Jordoverfladen. Den først omtalte Plan er en Glideflade i den ubegrænsede Jordmasse, og Tilfældet $\varepsilon > \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \psi$ er i Virkeligheden det af Winkler fremhævede, hvor han antager Levy's Theori gyldig.

For det specielle Tilfælde at Jordoverfladen er horizontal, Muren vertical, bliver: $\omega = \varepsilon = 0$, $\psi = 0$, $\delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi''}{2}$, og (25) og (27) reduceres til:

$$K = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi''}{2} \right) \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi''}{2} \right) \cos \varphi''}{\cos \left(\frac{3\varphi''}{2} - \frac{\pi}{4} \right)} \dots (28)$$

samt:

$$\sin \varphi'' = \frac{\sin \varphi}{4} (\sin \varphi + \sqrt{8 + \sin^2 \varphi}) \dots \dots (29)$$

— Disse Boussinesq's Formler, (25)—(29), til Bestemmelse af Jordtrykket og — ved Multiplication med $\frac{1}{3} h$ — dets Kantringsmoment vise en særdeles tilfredsstillende Overensstemmelse med talrige directe Maalinger ved Forsøg af Andé¹⁾, Darwin²⁾, Gobin³⁾, Leygue⁴⁾ og andre.

Flamant⁵⁾ har beregnet Tavler for den ved Formlerne bestemte Coefficient, hvormed det hydrostatiske Tryk $\frac{\tilde{\omega} h^2}{2}$

skal multipliceres for at give Jordtrykket. De svare til Værdier af φ voxende med 3° ad Gangen fra 21° til 45° , og ω og ε voxende med 5° ad Gangen henholdsvis fra 0° til φ og fra 0° til 25° .

Som en praktisk Approximation udleder han heraf, at Normalcomposanten af Trykket paa Muren indenfor de betragtede Grændser af φ , ω og ε altid, selv naar ε ikke er mindre end $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \psi$, vil være:

$$N = \frac{0.16 \cdot \cos \varphi}{\sin \left[\varphi - \frac{\omega}{2} - \frac{\varepsilon}{4} (0.1 \varphi - 1) \right]} \cdot \frac{\tilde{\omega}}{2} \left(\frac{h}{\cos \varepsilon} \right)^2 \dots (30)$$

naar φ er udtrykt i Grader. Dette fører til en graphisk Construction, idet det resulterende Tryk, der vilde svare til N , dersom dets Retning med denne dannede Vinklen φ , vil

¹⁾ Ann. des ponts et chaussées, 1884, 1.

²⁾ Do. do. do. 1883, 2.

³⁾ Do. do. do. do.

⁴⁾ Do. do. do. 1885, 2.

⁵⁾ Do. do. do. 1885, 1.

have en Projection: $0.16 \frac{\tilde{\omega}}{2} \left(\frac{h}{\cos \varepsilon} \right)^2$ paa en Linie, der med

Murens Retning danner Vinklen: $\frac{\omega}{2} + \frac{\varepsilon}{4} (0.1 \varphi - 1)$. —

— I det følgende skulle Hovedtrækkene angives af en rational Jordtryksteori, saaledes som den, tildels paa Basis af det foregaaende, kan udvikles i sin Almindelighed.

Udvikling af Theorien.

Forudsætninger.

§ 26. De Forudsætninger, paa hvilke man ifølge det foregaaende maa bygge den rationelle Jordtrykstheori, kunne resumeres saaledes:

1. Frictionen og Cohæsionen virke samtidigt, $\circ$: Modstanden mod Forskydning bestaar af et med Trykket og et andet med Overfladen proportionalt Led. De optræde imidlertid ikke begge med deres Maximalbeløb, men en vis Relation maa tænkes at forbinde deres simultane Coefficienter μ' og k' $\circ$: $k' = F(\mu')$, og disse afhænge atter af Smaapartiklernes Form, Ordning o. s. v. For at Glidning langs en vilkaarlig Flade, paa hvilken pr. Arealenhed et Normaltryk N virker, overhovedet skal kunne ske, maa: $[N\mu' + F(\mu')]_{\text{Max.}}$ overvindes af den tangentielle Kraft. Naar Bevægelsen først er indtraadt, vil derimod Modstanden være: $N\mu'_{\text{Max.}} + F(\mu'_{\text{Max.}}) = N\mu + k_1$.

Man kjender ikke Functionen F men kan ved Forsøg maale baade μ og k_1 . Dog vil den sidstes Betydning i Reglen være forsvindende i Sammenligning med den førstes, idet Vejrligets Indflydelse, Rystelser o. desl. tilintetgjøre Cohæsionen, og i Almindelighed kan man derfor uden Skade udelade den, altsaa sætte $F(\mu') = 0$.

2. Frictionen langs en Beklædningsmur vil afhænge af, hvorvidt Jorden glider langs den eller ej. I første Fald vil, naar Cohæsionen er Nul, Trykket med Normalen indelade Frictionsvinklen, i sidste Fald vil det virke under en eller anden mindre Vinkel med denne.

Ved en Ligevægtsforstyrrelse vil der i Virkeligheden aldrig blive Tale om Glidning af Muren, thi Faren for en Kantring er langt overvejende. Men i begge Tilfælde vil

der foregaa en Glidning af Jorden, enten efter en Skilleflade i denne, idet de ved Muren nærmest liggende Dele følge med ved dens Bevægelse, eller langs Bagvæggen, idet Jordoverfladen efterhaanden sænker sig ved den.

Frictionscoefficienten imellem Jord og Murværk kan i Reglen regnes lig den i Jordens Indre. Større kan den i al Fald ikke regnes, thi er den det, vil et uendelig tyndt Jordlag fastholdes deraf, og Glidningen vil da foregaa langs dette.

Det kan lige nævnes, af Lafont har foreslaaet at regne Frictionsvinklen variabel med Vinklen α mellem Væggen og vedkommende Elements Bevægelsesretning ved en Kantring φ : $tg \varphi' = \cos \alpha \, tg \varphi$.

3. Jordmassens physiske Constanter: Friction, Cohæ-sion, Vægtfylde o. s. v. afhænge i høj Grad af den tætte Lejring og af det historiske Element. Det gjælder derfor i Praxis at holde sig paa den sikre Side, hverken at regne Frictionen for stor eller Tætheden for lille, og er Jorden udsat for mange Rystelser o. desl., bør navnlig Frictions-coefficienten regnes tilstrækkelig lavt.

Den ideale Masse, som man er nødt til at betragte i Theorien, forudsættes fuldstændig homogen og bestaaende af uendelig smaa Dele. Ere disse derimod endelige, som f. Ex. ved Beregning af Trykket af en Kornmasse i en Silo, faas kun en temmelig raa Tilnærmelse.

Rebhann har udtrykt Indflydelsen af Stampning af Bagfyldningen bag en Mur af Højde H ved Relationen:

$$R_o : R_k = \tilde{\omega}_o : \tilde{\omega}_k \left(1 - \frac{h}{H} \right), \text{ hvor } R_o \text{ og } R_k, \tilde{\omega}_o \text{ og } \tilde{\omega}_k$$

henholdsvis ere Tryk paa Muren og Vægt pr. Cubikenhed af den løse og af den stampede Masse, og h er Cohæ-sions-højden af den sidste.

4. I Grændseligevægtstilstanden, hvor Udskridning er paa Nippet til at finde Sted, antages alle Partiklerne i Færd med at glide paa hinanden. En nylig anbragt Jordmasse, i hvilken Cohæ-sionen er forsvindende, vil væsentlig forholde sig paa lignende Maade som tørt og fint Sand. Men ogsaa senere vil den stadige Vexlen af Temperatur, Tryk, Fugtighedsgrad, saavelsom Rystelser o. desl. medføre Forandringer i Delenes Lejring, de ville udvide sig eller

trække sig sammen, undergaa Formforandringer og maa derfor være i en uafbrudt Bevægelse imellem hinanden.

Den ældre Forestilling, at Brudprismet skulde skride ud som et samlet Hele, er uholdbar, og talrige Forsøg synes at vise, at det virkelig nærmer sig til at desaggregeres i alle sine Dele. I en Jordmasse med plan Overflade fremgaar det saaledes af Forsøgene, at Overfladen, efterhaanden som Kantringen foregaar, ved Muren vil sænke sig mere og mere fra dennes Krone, og at enhver Partikel i den udskridende Masse tilnærmelsesvis vil bevæge sig i en Retning parallel med Brudfladen og med en Hastighed, som er proportional med dens Afstand fra denne. Deformationen foregaar altsaa i parallele Lag, som glide paa hinanden, indtil den naaer sin fulde Udstrækning, hvor den udskredne Jordmasse nærmer sig til at antage den naturlige Skraanings Heldning. I ethvert Punkt af Brudprismet vil følgelig i Grændseligevægtstilstanden for en eller flere bestemte Retninger Maximum af Friction plus Cohæsion være taget i Brug.

At dette saaledes kun er paavist experimentalt for den udskridende Del af Massen, ikke for de hinsides Brudfladen liggende Punkter, er af mindre Betydning. Thi de udviklede Formler behøve kun at gjælde indenfor Brudprismet, og de ved Integrationen indkomne Constanter bestemmes netop saaledes, at Betingelserne ved dets Begrænsning ere opfyldte.

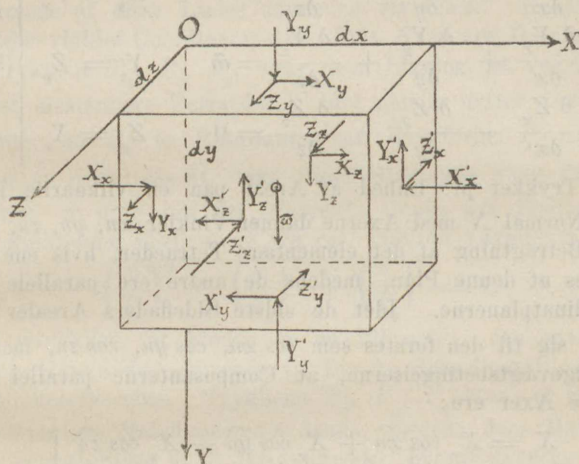
Fundamentalligninger.

§ 27. For nu ved Hjælp af disse Forudsætninger at udvikle de almindelige Ligninger for den indre Ligevægt i en Jordmasse betragtes et lille retvinklet Parallelopipedum med Kanter dx , dy , dz parallelle med Axerne i et retvinklet Coordinatsystem, der for Simpelheds Skyld er valgt saaledes, at y -Aksen er lodret. Trykket pr. Enhed af Areal paa et vilkaarligt, gennem Punktet O lagt, plant Element, hvis Normal er N , betegnes ved P_n og i Analogi dermed altsaa det paa den ene Sideflade, $dy\ dz$, ved P_x , det paa den anden, $dz\ dx$, ved P_y og det paa den tredie, $dx\ dy$, ved P_z . Deres Composanter parallelle med Coordinataxerne be-

tegnes henholdsvis ved: $X_n, Y_n, Z_n; X_x, Y_x, Z_x; X_y, Y_y, Z_y; X_z, Y_z, Z_z$ (1). Endelig være ω Vægten af en Cubik-enhed Jord.

De 6 Ligevægtsligninger for det parallelpipedske Element findes da let ved Betragtning af Composanterne

Fig. 10.



parallelle med Coordinataxerne og Momenterne med Hensyn til disse. Translationsligningen for x -Aksens Retning bliver saaledes:

$$(X'_x - X_x) dy dz + (X'_y - X_y) dz dx + (X'_z - X_z) dx dy = 0$$

$$\text{hvor: } X'_x - X_x = \frac{\partial X_x}{\partial x} dx, \quad X'_y - X_y = \frac{\partial X_y}{\partial y} dy$$

$$\text{og } X'_z - X_z = \frac{\partial X_z}{\partial z} dz.$$

¹⁾ Formentlig ere disse Betegnelser simplere og overskueligere end de hyppigt i Elasticitetstheorien benyttede Lamé'ske (Levy's) Betegnelser N_1, N_2, N_3, T og Coriolis' (Rankine's) $\sigma: p_{nm}$ for Composanten parallel med Linien M af Trykket paa en paa Linien N vinkelret Plan.

Rotationsligningen for en med x -Aksen parallel Axe gennem Elementets Midtpunkt bliver:

$$(Y_z + Y'_z) dx dy \frac{dz}{2} - (Z_y + Z'_y) dx dz \frac{dy}{2} = 0,$$

hvoraf, efter Bortkastning af uendelig smaa Led: $Y_z = Z_y$.

Ligevægtsligningerne ere altsaa:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} &= 0 & X_y &= Y_x \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} &= \tilde{\omega} & Y_z &= Z_y \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} &= 0 & Z_x &= X_z \end{aligned} \right\} (31)^1$$

Trykket pr. Enhed af Areal paa en vilkaarlig Plan, hvis Normal N med Axerne danner Vinkler $\hat{x}\hat{n}$, $\hat{y}\hat{n}$, $\hat{z}\hat{n}$, faas ved Betragtning af det elementære Tetraeder, hvis ene Side dannes af denne Plan, medens de andre ere parallelle med Coordinatplanerne. Idet de sidste Sidefladers Arealer forholde sig til den førstes som $\cos \hat{x}\hat{n}$, $\cos \hat{y}\hat{n}$, $\cos \hat{z}\hat{n}$, faas let af Ligevægtsbetingelserne, at Composanterne parallel med de tre Axer ere:

Vægen af
det elementære
Tetraeder
der spiller
her ingen Rolle

$$\left. \begin{aligned} X_n &= X_x \cos \hat{x}\hat{n} + X_y \cos \hat{y}\hat{n} + X_z \cos \hat{z}\hat{n} \\ Y_n &= Y_x \cos \hat{x}\hat{n} + Y_y \cos \hat{y}\hat{n} + Y_z \cos \hat{z}\hat{n} \\ Z_n &= Z_x \cos \hat{x}\hat{n} + Z_y \cos \hat{y}\hat{n} + Z_z \cos \hat{z}\hat{n} \end{aligned} \right\} \dots (32)$$

medens selve Trykket, P_n , dets Composanter, N_n og T_n , normalt paa og parallel med Planen, samt dets Heldning, φ_1 , mod Normalen, ere:

$$\left. \begin{aligned} P_n &= \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2} \\ N_n &= X_n \cos \hat{x}\hat{n} + Y_n \cos \hat{y}\hat{n} + Z_n \cos \hat{z}\hat{n} \\ T_n &= \sqrt{P_n^2 - N_n^2} \end{aligned} \right\} \dots (33)$$

$\text{tg } \varphi_1 = \frac{T_n}{N_n}$

¹⁾ Vare Retningerne af Coordinataxerne vilkaarligt valgte, saa at Verticalen V dannede Vinkler $\hat{x}\hat{v}$, $\hat{y}\hat{v}$, $\hat{z}\hat{v}$ dermed, vilde højre Side af de tre første Ligninger i Stedet for 0, $\tilde{\omega}$, 0 være henholdsvis $\tilde{\omega} \cos \hat{x}\hat{v}$, $\tilde{\omega} \cos \hat{y}\hat{v}$, $\tilde{\omega} \cos \hat{z}\hat{v}$.

Af Udtrykkene for X_n, Y_n, Z_n udledes umiddelbart Reciprocitetsloven: Naar Trykkene pr. Arealenhed paa to Elementer gennem samme Punkt projiceres, det ene paa det til det andet svarende Elements Normal, saa ere disse to Projectioner ligestore.

Afsættes nu fra det betragtede Punkt, O , i deres respective Retninger de forskellige Tryk P_n , svarende til alle mulige Stillinger af det plane Element, saa ville Endepunkterne af disse Linier danne en vis Flade. Henført til et skjævvinklet Coordinatsystem, hvis Axer ere Retningerne af Trykkene P_x, P_y, P_z , faas dens Ligning let ved Hjælp af det elementære Tetraeder. Idet nemlig dettes Ligevægt

fordrer, at P_n er Resultanten af Kræfterne $P_x \cos \hat{xn}$, $P_y \cos \hat{yn}$ og $P_z \cos \hat{zn}$, maa disse Størrelser være Coordinaterne, x', y', z' , af det tilhørende Punkt paa Fladen, og ved Relationen imellem de tre $\cos$. faas da Ligningen:

$$\left(\frac{x'}{P_x}\right)^2 + \left(\frac{y'}{P_y}\right)^2 + \left(\frac{z'}{P_z}\right)^2 = 1,$$

som udtrykker, at Fladen er en Ellipsoide, den saakaldte Trykellipsoide, svarende til Lamé's Spændingsellipsoide i Elasticitetsteorien. Trykkene P_x, P_y, P_z danne et System af conjugerte Halvdiametre i denne, medens dens Halvaxer ville repræsentere de 3 Hovedtryk, hvoraf det ene er et Maximum, det andet et Minimum og det tredje et Minimum. Af Hensyn til Symmetrien maa disse Hovedtryk være Normaltryk paa de tilsvarende Elementer.

Ved Betragtning af det uendelig lille, i Almindelighed skjævvinklede, elementære Parallelopipedum indses det let, at naar af to Planer gennem samme Punkt den ene paavirkes af et Tryk parallel med den anden, saa vil omvendt ogsaa dennes Tryk være parallel med den første, og Skjæringslinien af disse to Planer bestemmer Retningen af et tredje Tryk, saaledes at det af dette paavirkede Element er parallel med de to andre Kræfter. Der dannes herved et System af 3 conjugerte Tryk, hvoraf hvert er parallel med de af de to andre paavirkede Planer. Specielt indses det paa samme Maade, at et Element, parallel med en af Axerne i Ellipsoiden og altsaa vinkelret paa en af de tre Symmetriplaner, vil lide et Tryk parallel med denne Plan.

**) Coefficienterne
ere jo Forhold
dene mellem
Sidernes Area
ler.*

De tre Hovedtryk, P_1, P_2, P_3 , kunne udtrykkes ved det vilkaarlige retvinklede Coordinatsystems Tryk ved Hjælp af Ligningerne (32), naar det erindres, at de ere vinkelrette paa deres respective Planer og altsaa: $X_n = P_n \cos \hat{x}n$, $Y_n = P_n \cos \hat{y}n$, $Z_n = P_n \cos \hat{z}n$. Ved Indsætning heraf i (32) og Elimination af cosinerne faas en Determinant, der fører til 3die Grads Ligningen:

$$P_n^3 - a P_n^2 + b P_n - c = 0, \dots \dots \dots (34)$$

$$\text{hvor: } a = X_x + Y_y + Z_z, \quad b = X_x Y_y + Y_y Z_z + Z_z X_x \\ - X_y^2 - Y_z^2 - Z_x^2, \quad c = X_x Y_y Z_z + 2 X_y Y_z Z_x \\ - X_x Y_z^2 - Y_y Z_x^2 - Z_z X_y^2. \quad \text{De 3 Rødder af denne}$$

Ligning (34) ville da være de søgte Hovedtryk. —

For yderligere at anskueliggjøre de indre Ligevægtsforhold i Jordmassen indføres en anden Flade af anden Orden, der kan betegnes som Heldningsellipsoiden. I et retvinklet Coordinatsystem, hvis Axer ere de tre Hovedtryk, er dens Ligning:

$$\frac{x^2}{a P_1} + \frac{y^2}{a P_2} + \frac{z^2}{a P_3} = 1,$$

hvor a er en vilkaarlig Constant. Idet i dette Coordinatsystem Ligningerne (32) for et vilkaarligt Tryk P_n reduceres til: $X_n = P_1 \cos \hat{x}n$, $Y_n = P_2 \cos \hat{y}n$, $Z_n = P_3 \cos \hat{z}n$, indses det, at Tangentplanen til denne Flade —, der ved Jordarterne altid maa være en Ellipsoide, idet P_1, P_2, P_3 ikke kunne være negative: Trækspændinger, — i dens Skjæringspunkt med en gennem Begyndelsespunktet, parallel med P_n , dragen Linie vil være parallel med den af dette Tryk paavirkede Plan.

Den største Heldning af Trykket imod Normalen til det af dette paavirkede Element kan nu findes ved Hjælp af denne Ellipsoide. En Plan gennem P_n og Normalen vil skjære Fladen i en Ellipse, Elementet i en Tangent dertil, og den betragtede Vinkel, φ_1 , er da Complementet til Vinklen imellem denne Tangent og Radius vector til dens Røringspunkt. Lad p og q være Halvaxerne i Ellipsen,

Men Normalen i det plane Snit ville jo ikke være Normalen til Ellipsoiden?

x og y Coordinaterne af P_n 's Skjæringspunkt dermed henført til Ellipseaxerne som Coordinataxer, saa faas let:

$$\cot \varphi_1 = \frac{\frac{q^2 x}{p^2 y} + \frac{y}{x}}{1 - \frac{q^2 x}{p^2 y} \cdot \frac{y}{x}} = \frac{p^2 q^2 + y^2}{p^2 - q^2} \cdot \frac{1}{y x}$$

Men af alle mulige Raddi vectores, der kunne drages i denne Ellipse, vil den største Heldning φ_1 svare til den, for hvilken $y x$ er Maximum; ved at sætte Differential-quotienten lig Nul og benytte Ellipsens Ligning finder man

$$\text{heraf: } y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} q, \quad x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} p \quad \text{og altsaa: } \cot \varphi_1 = \frac{2 p q}{p^2 - q^2} = \frac{2}{\frac{p}{q} - \frac{q}{p}}. \quad \text{Idet dernæst } P_n \text{ tænkes at dreje}$$

sig i Rummet, faas forskellige Ellipser paa Heldnings-ellipsoiden, og den til hver af disse svarende Maximumsværdi af φ_1 bliver desto større, jo større $\frac{p}{q}$ er. Men altsaa faas den absolute Maximumsheldning φ_1 i det Hovedsnit i Ellipsoiden, der indeholder den største og den mindste af dennes tre Axer a : $\sqrt{a P_1}$ og $\sqrt{a P_2}$.

I ethvert Punkt af Jordmassen vil altsaa Faren for Glidning være størst langs to Elementer, der indeholde det mellemste Hovedtryk, P_3 , og ere symmetrisk beliggende med Hensyn til de to andre, idet de med det største af disse, P_1 , danner Vinkler:

$\text{arc tg } \pm \sqrt{\frac{P_2}{P_1}}$. Heldningen af det derpaa virkende Tryk imod Normalen er bestemt ved:

$$\cot. \varphi_{1 \text{ Max}} = \frac{2 \sqrt{P_1 P_2}}{P_1 - P_2}.$$

Det er imidlertid en af Forudsætningerne for Theorien, at $\varphi_{1 \text{ Max}}$ for ethvert Punkt ved den betragtede Ligevægts-tilstand netop er lig Frictionsvinklen φ (idet Cohæsionen antages forsvindende), og altsaa maa overalt:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{P_1 - P_2}{2 \sqrt{P_1 P_2}} \dots \dots \dots (35)$$

Ved heraf og (34) at eliminere P_1 og P_2 faas en i sin Almindelighed meget compliceret Ligning¹⁾, der tilligemed Ligevægtsligningerne (31) tjener til Bestemmelsen af de søgte Tryk paa Planer parallele med Coordinatplanerne.

Hertil kommer endnu, til Bestemmelse af Integrations-constanterne, de Betingelser, der, ifølge den foreliggende Opgaves Natur, skulle være opfyldte i Jordmassens Begrænsningsflader, saavel ved dennes frie Overflade som ved muligen tilstedeværende faste Vægge. Er Overfladen ubelastet, skal ved den:

$$Y_y = 0, \quad X_y = Y_x = 0, \quad Z_y = Y_z = 0; \dots (36)$$

er den derimod belastet med en efter en vis Lov: $\Theta(x, y, z)$ varierende Vægt pr. Enhed af Areal, og betegnes Lufttrykket ved ρ , saa ændres den første Ligning til:

$$Y_y = \Theta(x, y, z) + \rho$$

Er endvidere Vinklen imellem Normalen til den faste Væg og Trykket derpaa φ' , saa skal langs den Ligningerne (33) give:

$$\frac{T_n}{N_n} = \operatorname{tg} \varphi' \dots \dots \dots (37)$$

— Opgaven er imidlertid endnu ubestemt, idet der til Beregning af de Ubekjendte $X_x, Y_y, Z_z, X_y, \dots$ mangler 2 Ligninger, og den Ligevægtstilstand, som man ønsker at

¹⁾ Af (35) udledes: $2(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi) = \frac{P_1}{P_2} + \frac{P_2}{P_1}$, og den Ligning, hvis Rødder ere: $\frac{P_1}{P_2} + \frac{P_2}{P_1}, \frac{P_2}{P_3} + \frac{P_3}{P_2}, \frac{P_3}{P_1} + \frac{P_1}{P_3}$ dannes dernæst ved Hjælp af (34) og Theorien for de symmetriske Functioner af Rødderne. Idet denne nu skal tilfredsstilles af Roden $2(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi)$, faas da den søgte Relation:

$$(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi)^3 - \frac{ab - 3c}{2c} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi)^2 + \frac{a^3 c + b^3 + 3c^2 - 5abc}{4c^2} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi) - \frac{(a^2 - 2b)(b^2 - 2ac) - c^2}{8c^2} = 0, \text{ hvor } a, b, c \text{ have samme Betydning som i (34).}$$

undersøge, er altsaa endnu ikke tilstrækkelig defineret. Smaadelenes indbyrdes Ordning og det historiske Moment vil i Virkeligheden levere de manglende Relationer, men af Mangel paa Kjendskab hertil nødes man til at gjøre yderligere Forudsætninger angaaende den betragtede Ligevægts-tilstand. Antages nemlig, analogt med (23) og (24)¹⁾, at Trykkene kunne sættes:

$$X_x = p - 2k \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y_z = -k \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \text{ etc.},$$

hvor u, v, w ere Hastighedscomposanterne i Punktet (x, y, z) under den uendelig lille Formforandring af et lille Element, og at Volumenforandringen herved er forsvindende, altsaa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \dots\dots\dots (38)$$

saa kan denne, (38), og Ligningerne:

$$\begin{aligned} \frac{X_y}{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}} &= \frac{Y_z}{\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}} = \frac{Z_x}{\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}} = \frac{X_x - Y_y}{2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)} \\ &= \frac{Y_y - Z_z}{2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right)} \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

føjes til de tidligere fundne, og til Bestemmelsen af de 9 Ubekjendte: $X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x, u, v, w$ haves da et tilstrækkeligt Antal Ligninger.

Opgaven er saaledes reduceret til et rent algebraisk Problem, nemlig Løsningen af: (31), (34) og (35), (38) og (39) i Forbindelse med Betingelserne (36) og (37).

Problemet reduceret til plant.

§ 28. I næsten alle de for Anvendelserne vigtige Tilfælde kan man imidlertid definere den betragtede Grændseligevægtstilstand paa en saadan Maade, at Forudsætningerne (38) og (39) ikke behøves, og at Løsningen af de mange Ligninger simplificeres i en væsentlig Grad. Ved en pris-

¹⁾ Jvnf. Formlerne for Vædsker med Friction i Kirchhoff's: Vorlesungen über mathematische Physik, Leipzig, 1876.

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{Y_y + X_x}{2} - \frac{Y_y - X_x}{2} \cos 2\varepsilon - X_y \sin 2\varepsilon \\ T &= -\frac{Y_y - X_x}{2} \sin 2\varepsilon + X_y \cos 2\varepsilon \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{tg } \varphi_1 &= \frac{T}{N} \end{aligned} \quad (42)$$

og, for at Ligevægten ikke skal forstyrres, maa overalt:

$$\pm T \leq N \text{tg } \varphi + k,$$

idet k er Cohæsiionscoefficienten, svarende til Frictionscoefficienten $\text{tg } \varphi$, og $\pm T$ betegner den numeriske Værdi af T . Ved den betragtede Grændseligevægt er da:

$$[\pm T - N \text{tg } \varphi]_{\text{Max.}} = k, \text{ hvorfra: } \frac{dT}{d\varepsilon} + \frac{dN}{d\varepsilon} \text{tg } \varphi = 0, \text{ der}$$

viser, at Cohæsionen ingen Indflydelse har paa Beliggenheden af de for Glidning mest udsatte Flader, Glidefladerne. Indsættes heri Værdierne (42), faas følgende Relation:¹⁾

$$4 X_y^2 + (Y_y - X_x)^2 - (Y_y + X_x)^2 \sin^2 \varphi - 4 k^2 \cos^2 \varphi - 2 k (Y_y + X_x) \sin 2\varphi, \dots \dots \dots (41')$$

der for $k = 0$ reduceres til (41).

— Problemet er i dette Tilfælde et rent plangeometrisk, idet man kun behøver at undersøge Tryk i Hovedplanen, o: den paa Væggens Længderetning vinkelrette xy' Plan, og altsaa virkende paa Elementer vinkelrette paa denne Plan. Tryk- og Heldnings-Ellipsoiderne erstattes altsaa af de to Ellipser, hvori de skjæres af xy' Planen, og hvis Ligninger med Hensyn til Hovedtrykkene som Axer ere:

$$\left(\frac{x}{P_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{P_2}\right)^2 = 1 \text{ og } \left(\frac{x}{\sqrt{\alpha} P_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{\alpha} P_2}\right)^2 = 1.$$

Størrelsen af Hovedtrykkene P_1 og P_2 faas directe ved Betragtning af et elementært tresidet Prisme eller af (34) ved deri at sætte $P_3 = Z_z$:

¹⁾ Først dannes Ligningen:

$$(Y_y - X_x) \sin (\varphi \mp 2\varepsilon) + 2 X_y \cos (\varphi \mp 2\varepsilon) = (Y_y + X_x) \sin \varphi + 2 k \cos \varphi, \text{ hvorfra ved Differentiation:}$$

$$\pm 2 X_y \sin (\varphi \mp 2\varepsilon) = (Y_y - X_x) \cos (\varphi \mp 2\varepsilon)$$

og af disse faas da let (41').

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2} (Y_y + X_x) + \frac{1}{2} \sqrt{(Y_y - X_x)^2 + 4 X_y^2} \\ P_2 &= \frac{1}{2} (Y_y + X_x) - \frac{1}{2} \sqrt{(Y_y - X_x)^2 + 4 X_y^2} \end{aligned} \quad (43)$$

Deres Vinkler med y -Aksen, γ , faas af (42) ved at sætte Tangentialcomposanten, T , lig Nul og erstatte ε med $\frac{\pi}{2} - \gamma$:

$$tg 2 \gamma = \frac{2 X_y}{Y_y - X_x} \dots \dots \dots (44)$$

der giver to Værdier af γ , den ene $\frac{\pi}{2}$ større end den anden.

(42) viser tillige, at for $Y_y \geq X_x$ vil P_1 svare til den Værdi af γ , der gjør $\cos 2 \gamma \geq 0$.

Trykket paa en vilkaarlig Plan og dennes Spor i xy' Planen ere conjugerte Diametre i Heldningsellipsen, og saadanne repræsentere derfor conjugerte Tryk. Udtrykt ved P_1 og P_2 faas dets to Composanter parallele med disse af (42), naar heri sættes P_1 og P_2 for Y_y og X_x , Nul for X_y , og Elementets Heldning mod P_1 's Retning, ε' , for $\pi - \varepsilon$.

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2} (P_1 + P_2) - \frac{1}{2} (P_1 - P_2) \cos 2 \varepsilon' \\ T &= \frac{1}{2} (P_1 - P_2) \sin 2 \varepsilon' \end{aligned}$$

Trykkets Heldning imod Normalen, φ_1 , bliver da:

$$tg \varphi_1 = \frac{T}{N} = \frac{(P_1 - P_2) tg \varepsilon'}{P_1 tg^2 \varepsilon' + P_2} \quad (45)$$

Differentieres derimod de saaledes dannede Udtryk for N og T med Hensyn til ε' og indsættes derpaa Differential-

qvotienterne i Ligningen: $\frac{d T}{d \varepsilon'} + \frac{d N}{d \varepsilon'} tg \varphi = 0$, faas Glidefladernes Retninger bestemt ved:

$$\begin{aligned} tg 2 \varepsilon_1 &= \pm cot \varphi = \pm tg \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \\ \varepsilon_1 &= \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \dots \dots \dots (46) \end{aligned}$$

De to Glideflader danne altsaa indbyrdes en Vinkel

$\frac{\pi}{2} - \varphi$, som halveres af det største af de to Hovedtryk, P_1 .

Dette gjælder ifølge det foregaaende, selv om Cohæsionen ikke er forsvindende. Er den imidlertid det, saa er Glidefladerne tillige de, for hvilke Trykkets Heldning imod Normalen er størst, og ε_1 kan da ogsaa faas af (45) som den, der gjør $\operatorname{tg} \varphi_1$ til Maximum $\circ$:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \pm \sqrt{\frac{P_2}{P_1}}, \dots \dots \dots (47)$$

hvilket ogsaa umiddelbart fremgaar af Udviklingen øverst Side 81. Altsaa:

Glidefladerne ere, naar Cohæsionen er Nul, bestemt ved Diagonalerne i den om Heldnings-ellipsen omskrevne Rectangel, $\circ$: ved de 2 ligestore conjugerte Diametre i denne.

Forholdet imellem de to Hovedtryk havs ogsaa af (46) og (47) $\circ$:

$$P_1 = P_2 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right), \quad P_2 = P_1 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right),$$

og det resulterende Tryk paa Glidefladen bliver:

$$P_o = \sqrt{P_1 P_2}.$$

— Retningerne af de Elementer, hvis Tryk med Normalen danner en given Vinkel φ_1 , er givet ved (45), hvoraf ved de nys fundne Relationer P_1 og P_2 kunne elimineres.

$$\text{Idet: } \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi},$$

$$\text{faas: } \sin (2 \varepsilon' + \varphi_1) = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi}, \dots \dots \dots (48)$$

$$\operatorname{tg} (\varepsilon' + \varphi_1) = \operatorname{tg} \varepsilon' \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right),$$

eller, naar Vinklen imellem Trykket paa Elementet og den ene af Glidefladerne — $\circ$: mellem det conjugerte Element og denne — betegnes ved ν , og altsaa:

$$\varepsilon' = \frac{\pi}{2} - \varphi_1 - \varepsilon_1 + \nu = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} + \nu - \varphi_1 \text{ (Fig. 11), } \therefore$$

$$\cos(2\nu + \varphi - \varphi_1) = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi} \dots \dots \dots (49)$$

— Man har saaledes en ret fyldig Forestilling om de indre Ligevægtsforhold i Jordmassen, forudsat at Trykkene X_x , Y_y , X_y ere fundne. I ethvert Punkt kjendes da Retningerne af to Elementer, der paavirkes normalt, og af to andre, hvis Tryk med Normalen danner saa stor en Vinkel som muligt. Af saadanne successive Elementer af samme Slags dannes 4 Systemer af Flader i Massen, af hvilke de to, der kun lide normale Elementartryk, benævnes «isostatiske Flader», og de to, hvis Tryk holder saa meget som muligt, — 3: naar Cohæsionen er Nul, under Vinklen φ med Normalen, — og langs hvilke Glidning i første Øjeblik efter en Ligevægtsforstyrrelse vil finde Sted, derfor betegnes som «Glidningsfladerne». Deres Spor i den betragtede xy Plan ere de isostatiske Kurver og Glidningskurverne, af hvilke de første overalt skjære hinanden orthogonalt, de sidste derimod hinanden under den constante

Vinkel $\frac{\pi}{2} - \varphi$; gennem ethvert Punkt gaa 4 saadanne Kurver, hvoraf de to isostatiske halvere Vinklen imellem de to andre. I det valgte Coordinatsystem er ifølge (44) Differentialligningen for de isostatiske Kurver:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \frac{Y_y - X_x}{X_y} \frac{dy}{dx} - 1 = 0,$$

medens den for Glidningskurverne faas af (46) og (44), idet: $\frac{dy}{dx} = \cot(\gamma \pm \varepsilon_1)$. Er Cohæsionen lig Nul, saa at (41) gjælder, bliver den sidste efter nogen Regning:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - 2 \frac{Y_y X_x \operatorname{tg}^2 \varphi + X_y^2}{X_x^2 \operatorname{tg}^2 \varphi - X_y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{Y_y^2 \operatorname{tg}^2 \varphi - X_y^2}{X_x^2 \operatorname{tg}^2 \varphi - X_y^2} = 0,$$

hvoraf: $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{Y_y \operatorname{tg} \varphi \pm X_y}{X_x \operatorname{tg} \varphi \mp X_y}$, der dog indeholder to numerisk uligestore fremmede Rødder.

For en til Siderne ubegrændset Jordmasse, hvis Overflade har en vilkaarlig krum Form, kan iøvrigt en tilnærmende Construction faas af de to fra et vilkaarligt Punkt udgaende Glidelinier, forudsat at disse kun afvige lidet fra at være rette. Winkler angiver en saadan Construction, som baseres paa Rebhann's Theori. Er nemlig (Fig. 5) AB retlinet, og er den og AE de to Glidelinier fra A , saa maa, ligesaavel som AE er Brudlinien svarende til en Væg AB , ogsaa omvendt AB være den svarende til en Væg AE . Construeres derfor et Punkt G' , der i Forhold til AB er analogt med G i Forhold til AE , saa maa Arealerne $AG'B$, ABE og $AE G$ være ligestore. Herved maa dog forudsættes $\alpha = \beta$, og ved Prøve kan da let AB og AE bestemmes, saa at Betingelsen er opfyldt.

Trykket endelig paa en vilkaarlig fast Væg, som begrænder Jordmassen, er givet ved Ligningerne (42), der i Størrelse og Retning bestemme Elementartrykket paa ethvert Punkt af Væggen. Ved Integration langs denne faas heraf det resulterende Tryk med dets Angrebepunkt og saaledes ogsaa det Kantringsmoment, som Beklædningsmuren har at modstaa.

— Alt kommer saaledes til at afhænge af Integrationen af Differentialligningerne (40) og (41) eller (41¹) med Grændsebetingelserne:

$$\begin{aligned} \text{ved Overfladen: } & Y_y = 0, X_y = 0, X_x = 0 \\ \text{og ved Væggen: } & \frac{T}{N} = \pm \operatorname{tg} \varphi'. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \dots \dots (50)$$

Indføres en Hjælpefunction $\psi(x, y)$, og sættes:

$$X_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, Y_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, X_y = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \tilde{\omega} x, \dots (51)$$

vil (40) være tilfredsstillet, og (41) bliver:

$$\begin{aligned} 4 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \tilde{\omega} x \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 - \\ \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 \sin^2 \varphi = 0, \dots \dots (52) \end{aligned}$$

til hvis Integration Opgaven altsaa nu er ført tilbage. Dog kan denne partielle Differentialligning af 2den Orden og

2den Grad i sin Almindelighed ikke løses, og kun particulære Integraler kunne findes deraf.

Ubegrændset Jordmasse med plan Overflade.

§ 29. For næsten alle Anvendelserne af Jordtryks-theorien vil det være tilstrækkeligt at undersøge det specielle Tilfælde, hvor Jordoverfladen er plan med en vilkaarlig Heldning, ω , imod Horizontalplanen. Selv under denne Forudsætning vil imidlertid den exacte Løsning kun kunne faas, naar den faste Væg opfylder visse bestemte Betingelser.

Er Jordmassen ubegrændset fornedet og til Siderne, saa er det umiddelbart indlysende, at Trykkene paa parallelle Elementer maa være ens for alle Punkter i samme Dybde under den plane, ensformigt belastede Overflade, og følgelig maa X_x , Y_y , X_y være Functioner af den vinkelrette Afstand til denne, z : $p = x \sin \omega + y \cos \omega$,

eller af Verticalafstanden: $d = \frac{p}{\cos \omega} = x \operatorname{tg} \omega + y$. Idet

man da kan sætte:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} = \frac{\partial X_x}{\partial d} \operatorname{tg} \omega, \quad \frac{\partial X_y}{\partial y} = \frac{\partial X_y}{\partial d}, \quad \frac{\partial X_y}{\partial x} = \frac{\partial X_y}{\partial d} \operatorname{tg} \omega,$$

$$\frac{\partial Y_y}{\partial y} = \frac{\partial Y_y}{\partial d}, \quad \text{blive Ligningerne (40) hver for sig integrable,}$$

og er Jordoverfladen ubelastet, faas herved Relationerne:

$$X_x \operatorname{tg} \omega + X_y = 0 \quad \text{og} \quad X_y \operatorname{tg} \omega + Y_y = \tilde{\omega} d,$$

der i Forbindelse med (41) give:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \tilde{\omega} d \sigma^2 \cos^2 \omega, & Y_y &= \tilde{\omega} d (1 + \sigma^2 \sin^2 \omega), \\ X_y &= -\frac{\tilde{\omega} d}{2} \sigma^2 \sin 2\omega \end{aligned} \right\} \dots (53)$$

$$\text{hvor: } \sigma = \frac{\cos \omega - \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi}^1$$

¹⁾ Den anden Værdi af σ , svarende til $+$ foran Kvadratroden, vil give det passive Jordtryk (se nedenfor).

Disse Ligninger, der tilfredsstille Differentialligningerne og den første af Betingelserne (50), give altsaa Opgavens Løsning for en til Siderne ubegrænset Jordmasse, for hvilken den anden Betingelse (50) bortfalder.

Trykket paa et vilkaarligt Element, hvis Vinkel med y -Aksen er ε , faas af (42):

$$\left. \begin{aligned} N &= \tilde{\omega} d [\sin^2 \varepsilon + \sigma^2 \cos^2 (\omega - \varepsilon)] \\ T &= -\frac{\tilde{\omega} d}{2} [\sin 2 \varepsilon + \sigma^2 \sin 2 (\omega - \varepsilon)] \end{aligned} \right\} \dots (54)$$

Dets Heldning, φ_1 , imod Normalen er uafhængig af d og kun afhængig af Elementets Retning. Altsaa for alle Elementer af en vilkaarlig Plan have Trykkene samme Retning.

Ligning (44) giver: $tg 2 \gamma = \frac{\sigma^2 \sin 2 \omega}{1 - \sigma^2 \cos 2 \omega}$. Heraf

og af (46) følger, at: Hovedtrykkene for alle Punkter af Jordmassen have samme Retning, og at det samme altsaa ogsaa gjælder Glidefladerne.

Disse Retninger faas ogsaa af (48) og (49), idet det bemærkes, at Trykket paa en med Terrainfladen parallel Plan ($\varepsilon = \frac{\pi}{2} + \omega$) ifølge (54) med Normalen danner Vinklen $\varphi_1 = \omega$ og altsaa, er lodret. Hovedtrykket P_1 's Vinkel med Overfladen, ε' , og P_2 's Heldning mod Horizontalen ($\gamma = \frac{\pi}{2} - \omega$ minus den første) er bestemt ved:

$$\sin (2 \varepsilon' + \omega) = \frac{\sin \omega}{\sin \varphi}$$

og Glidefladens Heldning mod Verticalen, ν , ved:

$$\cos (2 \nu + \varphi - \omega) = \frac{\sin \omega}{\sin \varphi}$$

Det følger endvidere heraf, at: de isostatiske Kurver og Glidningskurverne danne 4 Systemer af parallelle rette Linier. En ret simpel graphisk Bestemmelse af deres Retninger er vist i Fig. 12.

Størrelsen af Hovedtrykkene faas af (43):

$$\left. \begin{aligned} P_1 \\ P_2 \end{aligned} \right\} = \tilde{\omega} d \frac{\sigma \cos \omega (1 \pm \sin \varphi)}{\cos \varphi} = \tilde{\omega} d \sigma \cos \omega \cdot \cot \left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{\varphi}{2} \right)$$

og Trykket paa en Glideflade: $P_g = \sqrt{P_1 P_2} = \tilde{\omega} d \sigma \cos \omega$.

— I det specielle Tilfælde, at Jordoverfladen enten er vandret eller parallel med den naturlige Skraaning, simplificeres disse Formler betydeligt.

a) Er $\omega = 0$, bliver:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right), & X_x &= \tilde{\omega} y \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right), \\ Y_y &= \tilde{\omega} y, & X_y &= 0 \\ N &= \tilde{\omega} y \frac{1 - \sin \varphi \cos 2\varepsilon}{1 + \sin \varphi}, & T &= -\tilde{\omega} y \frac{\sin 2\varepsilon \cdot \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \end{aligned} \right\} \dots (55)$$

Hovedtrykket P_1 er verticalt, P_2 horisontalt, og Glidefladerne halvere Vinklen mellem Verticalen og en Linie parallel med den naturlige Skraaning.

$$P_1 = \tilde{\omega} y, P_2 = \tilde{\omega} y \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right), P_g = \tilde{\omega} y \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

b) Er $\omega = \varphi$, bliver derimod:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= 1, & X_x &= \tilde{\omega} d \cos^2 \varphi, & Y_y &= \tilde{\omega} d (1 + \sin^2 \varphi), \\ X_y &= -\frac{\tilde{\omega} d}{2} \sin 2\varphi \\ N &= \tilde{\omega} d [\sin^2 \varepsilon + \cos^2 (\varphi - \varepsilon)], \\ T &= -\tilde{\omega} d \sin \varphi \cos (\varphi - 2\varepsilon). \end{aligned} \right\} (56)$$

Den ene Glideflade er vertical ($\nu = 0$), den anden parallel med Jordoverfladen, og Hovedtrykket P_1 halverer den spidse Vinkel mellem disse.

$$P_1 = \tilde{\omega} d (1 + \sin \varphi), P_2 = \tilde{\omega} d (1 - \sin \varphi),$$

$$P_g = \tilde{\omega} d \cos \varphi$$

c) Er $\omega = -\varphi$, faas samme Formler (56) som for $\omega = \varphi$, blot at X_y skifter Tegn, og at de til en given Vinkel ε svarende N og T blive numerisk ligestore som dem af (56) for den samme negative Værdi af Vinklen. At Forholdene maatte være saaledes, er umiddelbart indlysende, idet dette Tilfælde i Virkeligheden er det samme som b), blot med x -Aksens positive Retning forandret.

Indførelse af en fast Væg.

§ 30. Er nu Jordmassen begrændset til Siden af en fast Væg, og antages i Tilfælde af en Ligevægtsforstyrrelse Jorden at glide langs denne, saa maa i Grændseligevægtstilstanden Trykket derpaa med Normalen netop danne Frictionsvinklen, φ' , mellem Jord og Murværk, hvor φ' ifølge det foregaaende dog højst tør regnes lig φ .

Men for at de for den ubegrændsede Jordmasse fundne Resultater ogsaa kunne gjælde her, maa da den anden Ligning (50) være opfyldt, og ifølge (54) Væggen altsaa være plan og have en enkelt ganske bestemt Retning. Ifølge (49) vil dens Vinkel, ν' , med Glidefladen være bestemt ved:

$$\cos(2\nu' + \varphi - \varphi') = \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi}, \dots\dots\dots (57)$$

og er Frictionen langs den lig eller større end i Jorden, saa at φ' regnes lig φ , maa den falde sammen med denne Glideflade og altsaa med Verticalen danne Vinklen ν , bestemt ved:

$$\cos(2\nu + \varphi - \omega) = \frac{\sin \omega}{\sin \varphi} \dots\dots\dots (58)$$

Af de to Værdier af ν' og ν , som disse Ligninger give, er dog kun den ene, svarende til de positive Værdier af $2\nu' + \varphi - \varphi'$ og $2\nu + \varphi - \omega$, brugelig, idet ifølge Forudsætningerne den ene af de to fra Væggens Fod udgaaende Glideflader nødvendigvis maa ligge i Jordmassen, medens den anden maa træffe udenfor denne.

I det Tilfælde, at Væggen har den saaledes bestemte Retning, ville Glidefladerne være parallelle Planer som antaget af Coulomb, og det ved (54) bestemte Jordtryk kan da vises at være det samme som det ved den ældre Theori udledede, naar Frictionen langs Væggen medregnes.

Er derimod Væggens Retning en saadan, at begge Glideplanerne gennem dens Fod ligge i Jordmassen, saa vil Glidning finde Sted langs begge disse og —, naar φ' regnes lig φ , — ikke, som forudsat, langs Væggen. Ved dennes Kantring vil da det mellem den og den nærmest liggende Glideflade indesluttede Jordlegeme følge med som et Hele. Ligevægtstilstanden for den ubegrændsede Jord-

masse vil altsaa ogsaa i dette Tilfælde være uforstyrret ved Væggens Indførelse, og Trykket er følgelig atter bestemt ved Formlerne (54); kun er dets Heldning imod Normalen nu ikke Frictionsvinklen φ , men den mindre Vinkel φ_1 , som faas af (54). — Det samme vil ogsaa gjælde, naar φ' er mindre end φ , og Væggen har en saadan Belliggenhed udenfor Vinklen mellem de to Glideflader, at Trykkets Heldning φ_1 er mindre end φ , altsaa naar en Plan gennem Væggens Fod i den af (57) bestemte Retning ligger i Jorden; her er det dog den negative Værdi af $2\nu' + \varphi - \varphi'$, som maa tages.

Trykket paa Væggen faas i disse Tilfælde ved Integration langs denne af Udtrykkene (54) for N og T eller af Resultanten, P , der lettest findes ved Hjælp af Reciprocitetsloven. Projectionen af Trykket paa en med Jordoverfladen parallel Plan ($\varepsilon = 90 + \omega$) ind paa Normalen til Væggen er nemlig ifølge denne Lov lig Projectionen af P paa en Normal til Overfladen. Men det første af disse to Tryk er ifølge (54) lodret og i Størrelse lig $\tilde{\omega} d \cos \omega$; det andet, P , danner med Overfladen en Vinkel $\varepsilon - \omega + \varphi_1$. Følgelig er for et Punkt i en langs Væggen maalt Afstand, l , fra dennes øvre Kant:

$$P = \tilde{\omega} d \frac{\sin \varepsilon \cdot \cos \omega}{\sin(\varepsilon - \omega + \varphi_1)} = \tilde{\omega} l \frac{\sin \varepsilon \cdot \cos(\varepsilon - \omega)}{\sin(\varepsilon - \omega + \varphi_1)}, \quad (59)$$

hvori Trykkets Heldning mod Normalen, φ_1 , naar Væggens Vinkel med Hovedtrykket P_1 er ε' , er bestemt ved (48), hvoraf:

$$\cot \varphi_1 = \frac{1 - \sin \varphi \cos 2\varepsilon'}{\sin \varphi \sin 2\varepsilon'} \dots \dots \dots (60)$$

Er Væggens Højde, maalt lodret, lig h , skal Integrationen foretages fra $l = 0$ til $l = \frac{h}{\cos \varepsilon}$, og altsaa bliver det resulterende Tryk, hvis Angrebspunkt ligger i Højden $\frac{1}{3} h$ over Væggens Fod:

$$R = \frac{\tilde{\omega} h^2}{2} \frac{\sin \varepsilon \cos(\varepsilon - \omega)}{\cos^2 \varepsilon \cdot \sin(\varepsilon - \omega + \varphi_1)} \dots \dots \dots (61)$$

Er specielt $\varphi_1 = \varphi$, saa at Væggens Retning falder sammen med Glidefladen, kunne disse Udtryk reduceres væsentligt. Af (58) udledes nemlig, naar ν erstattes af ε ,

finde Glidning Sted langs den, og Trykket derpaa maa altsaa med Normalen danne Frictionsvinklen φ' eller φ , uagtet det ikke vilde gjøre dette i den ubegrændsede Jordmasse.

Man kan altsaa skjelne imellem følgende Tilfælde (Fig. 12). Er AG og AH de to Planer, der i den ubegrændsede Jordmasse paavirkes af Tryk under Frictionsvinklen φ' (mellem Murværk og Jord) med Normalen, saa vil Theorien være anvendelig, naar Væggen har Stillingen AH eller ligger indenfor Vinklen DAG . For alle andre Stillinger indenfor Vinkel BAC eller CAF er den derimod ikke exact, og indenfor Vinkel FAE er Trykket Nul.

Specielt er ved vandret Jordoverflade Theorien ugyldig for lodret Mur, med mindre Frictionen langs denne er Nul; ved en med den naturlige Skraaning parallel Overflade gjælder den derimod, naar Frictionen er lig den i Jordens Indre.

Undersøgelse af de Tilfælde, hvor Theorien ikke er exact.

§ 31. I de for Anvendelserne vigtige Tilfælde, hvor de fundne Resultater ikke kunne anvendes som exacte, skulde man egentlig gaa tilbage til de almindelige Ligninger (50), (51) og (52). Forholdene ville imidlertid blive temmelig complicerede, og om end Væggen, naar Frictionen langs den er ligesaa stor som i Jordens Indre, maa være en af Glidefladerne, kunne disse iøvrigt ikke være plane eller parallele.

At de ikke kunne være plane uden samtidig at være parallele i hvert af de to Systemer, indses umiddelbart af det foregaaende. En vilkaarlig af dem af det ene System vil nemlig skjæres af alle dem af det andet under samme constante Vinkel $\frac{\pi}{2} - \varphi$, og følgelig maa disse alle være parallele. — Men at Glidefladerne ikke kunne være plane uden netop i det behandlede Tilfælde, kan ogsaa let vises. Trykket paa et lille Element af en af dem kan nemlig findes ved Betragtning af en smal Jordstøje, der, hvilende derpaa, naaer helt op til Overfladen og har Retning af Glidefladerne i det andet System. Paa denne Støje virke kun Reactioner

parallelle med Glidefladernes to Retninger, og opløses da dens Vægt efter disse, vil den ene af de to Composanter være Trykket paa Elementet, som altsaa kun afhænger af Søjle's Højde. Heraf følger da, at Trykkene overalt i Massen kun afhænge af Dybden under Overfladen, hvilket netop var det, der karakteriserede den ubegrændsede Jordmasse. — Det samme vil kunne udledes af Differential-ligningen for Glidekurverne eller lettere for de isostatiske Kurver.

Ved Ræsonnement kan det ogsaa indses, at Glidekurverne maa være krumme, naar Væggens Retning ikke er den ved det foregaaende bestemte. Hvor de udgaa fra Væggen, maa de nemlig, naar Frictionsvinklen φ' er lig φ , med den danne Vinklen $\frac{\pi}{2} - \varphi$, medens de i længere Af-

stand derfra, i Skjæringspunktet med Jordoverfladen, tilnærmelsesvis maa have samme Retning som i den til Siderne ubegrændsede Jordmasse. — Forsøg vise det samme. Audé bestemte ved Kantring af Væggen Skjæringslinien imellem Brudfladen og Jordoverfladen og lagde derefter igjennem denne og Væggens nedre Kant i den samme Jordmasse en Plan med en Frictionscoefficient lig eller lidt mindre end i Jordens Indre; Trykket paa Væggen fandtes herved formindsket, hvilket ganske naturligt forklares, ved at Brudfladen har været concav imod denne. Leygue fandt ligeledes Brudfladen krum, men antog den convex imod Væggen. For en vilkaarlig given Væg viste han, at det geometriske Sted for Skjæringspunkterne mellem de fra dens øverste Punkt udgaaende, forskjelligt heldende Overflader og de respective, ved den første Ligevægtsforstyrrelse dannede, Brudflader gjennem dens Fod tilnærmelsesvis er en under

Vinklen $\frac{\pi}{4}$ mod Horizontalen heldende Plan; at imidlertid

Brudfladen, efterhaanden som Udskridningen finder Sted, altid foroven vil dreje sig mere og mere indefter i Jordmassen, der ved den totale Deformation stræber at indstille sig med den naturlige Skraaning; og at det geometriske Sted for Skjæringspunkterne mellem Brudlinierne svarende til denne totale Deformation —, der dog ikke har Betyd-

ning for Jordtrykkets Beregning, — og Overfladen er en til den naturlige Skraaning asymptotisk Kurve.¹⁾

I de Tilfælde, hvor Theorien ikke er exact, er da ogsaa Coulomb's Hypothese om de plane Brudflader urigtig og de derved udledede Formler altsaa upaalidelige. De fundne Udtryk (53) og (54) kunne imidlertid dog ogsaa her benyttes som en første Approximation, der —, naar Frictionsvinklen langs Væggen er lig den i Jordens Indre, — fremfor de ældre Theoriers Resultater frembyder den store Fordel altid at være paa den sikre Side. At bruge disse Formler vil nemlig være det samme som at antage Frictionsvinklen langs Væggen ikke lig φ , men den altid mindre Vinkel: $\varphi_1 = \arctg \frac{T}{N}$, som faas af (54).

Beregningen vil endelig i Virkeligheden ogsaa blive simplere end ved at benytte de meget complicerede Formler, som Coulomb's Theori fører til.

Navnlig vil Tilnærmelsen, der er desto finere, jo mindre φ er, kunne benyttes i saadanne Tilfælde, hvor de to Retningslinier for Hovedspændingerne gennem Væggens Fod ligge i Jordmassen, og hvor altsaa den afskaarne Del af denne vilde kunne erstattes af en fast Mur, dersom der ikke ved Kantringen fandt Glidning Sted langs den, eller dersom dens Frictionsvinkel var en anden.

For nu at finde en yderligere Tilnærmelse føjes til Udtrykkene (53) tre nye Ubekjendte, om hvilke det antages, at de ere saa smaa, at deres Kvadrater og Producter ere forsvindende. I Lighed med (51) indføres en Hjælpefunction $\Phi(x, y)$, med hvis Differentialquotienter af 2den Orden de tre Ubekjendte ere proportionale, og altsaa sættes:

¹⁾ Basis for hans Beregninger er: at Jordens Volumen efter Udskridningen er det samme som for den, er ingenlunde correct, og det Udtryk, han finder for Afstanden mellem Skjæringspunkterne af en vandret Jordoverflade og de til den initiale og den totale Deformation svarende Brudlinier, kan derfor neppe tillægges megen Betydning. Er Væggens Heldning mod Verticalen lig ε , Frictionen $tg \varphi = \frac{2}{3}$, er det:

$$\alpha = \frac{(0.5 - tg \varepsilon)^2}{8} (1.5 + tg \varepsilon)$$

$$\begin{aligned} X_x &= \tilde{\omega} \left(d \sigma^2 \cos^2 \omega + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \\ Y_y &= \tilde{\omega} \left(d + d \sigma^2 \sin^2 \omega + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \\ X_y &= -\tilde{\omega} \left(d \sigma^2 \sin \omega \cos \omega + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad \dots (62)$$

Ligningerne (40) ville herved være tilfredsstillende, og (41) giver en Differentialligning af 2den Orden, der, naar Kvadrater og Producter af de tre Deriverede bortkastes, bliver lineær o:

$$\begin{aligned} & (1 + \sigma^2) \sin^2 \varphi \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - \\ & (1 - \sigma^2 \cos 2\omega) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - 2 \sigma^2 \sin 2\omega \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned}$$

Hertil kommer endnu Betingelserne (50) ved Overfladen og langs Væggen.

Integralet af denne Ligning er: $\Phi = f_1(x - y \operatorname{tg} \varepsilon_1) + f_2(x - y \operatorname{tg} \varepsilon_2)$, hvor f_1 og f_2 ere arbitrære Functioner og ε_1 og ε_2 de to Værdier af ε , der tilfredsstille Ligningen:

$$\cos(2\varepsilon \pm \varphi - \omega) = \pm \frac{\sin \omega}{\sin \varphi}.$$

Idet nu imidlertid Φ 's Differentialquotienter af anden Orden ifølge den første Betingelse (50) langs hele Overfladen alle skulle være Nul, og det let vises, at $x - y \operatorname{tg} \varepsilon_1$ og $x - y \operatorname{tg} \varepsilon_2$ langs denne, hvilken Værdi ω end har imellem $+$ og $- \varphi$, stedse er positiv, varierende fra Nul til Uendelig, saa indses det, at f_1 og f_2 's, og altsaa ogsaa Φ 's, Differentialquotienter af anden Orden maa være Nul overalt, hvor $x - y \operatorname{tg} \varepsilon_1$ og $x - y \operatorname{tg} \varepsilon_2$ ere positive, det vil sige for alle Punkter imellem Jordoverfladen og en Linie BC gennem Væggens Toppunkt under Vinklen ε_1 med Verticalen.

Den anden Betingelse (50) giver en Relation, der, naar Frictionen langs Væggen er lig den i Jordens Indre, og Væggens Retning altsaa i Virkeligheden maa falde sammen med en Glidekurve, lettest vilde faas af Differentialligningen for disse, naar deri sættes $\frac{dy}{dx} = \cot \varepsilon$. Da det imidlertid ved

Dannelsen af denne er forudsat, at (41) tilfredsstilles exact, hvilket ikke er Tilfældet her, vil det være nødvendigt at gaa tilbage til Ligningerne (42) og derved directe af (50) at udlede Betingelsesligningen.

Er nu $\varepsilon = \varepsilon_1$, vil denne Relation være tilfredsstillet af $\Phi = 0$, og man faar altsaa ganske rigtigt, at den første Tilnærmelse i dette Tilfælde ogsaa er den exacte Løsning.

Er derimod $\varepsilon > \varepsilon_1$, saa at Væggen falder indenfor det Areal, hvor Φ 's Deriverte af 2den Orden ere Nul, kan den af (50) udledede Betingelse ikke opfyldes, med mindre φ' deri har en eller anden Værdi mindre end φ . Tilfældet er netop et saadant, hvor ifølge det foregaaende den udviklede Theori er anvendelig, idet begge Glideflader gennem Væggens Fod ligge i Jordmassen, og Glidning altsaa finder Sted langs den ene af disse, ikke langs Væggen, hvis Tryk derfor ikke holder under Frictionsvinklen mod Normalen.

Er endelig $\varepsilon < \varepsilon_1$, sættes $f_2'' = 0$ for hele Jordmassen og $f_1'' = 0$ for Punkter, der gjør $x - y \operatorname{tg} \varepsilon_1 > 0$, men $f_1'' = A_1 (x - y \operatorname{tg} \varepsilon_1)$ for saadanne, der gjør $x - y \operatorname{tg} \varepsilon_1 < 0$. Ved Indsætning heraf i Betingelsesligningen for Væggen findes:

$$A_1 = 2 \sigma \operatorname{tg} \varphi \frac{\cos^3 \varepsilon_1 \cos (\omega - \varepsilon)}{\cos (\varphi - \varepsilon_1 + \varepsilon)},$$

der, idet:

$$\Phi = f_1 (x - y \operatorname{tg} \varepsilon_1) = \frac{A_1}{6} (x - y \operatorname{tg} \varepsilon_1)^3,$$

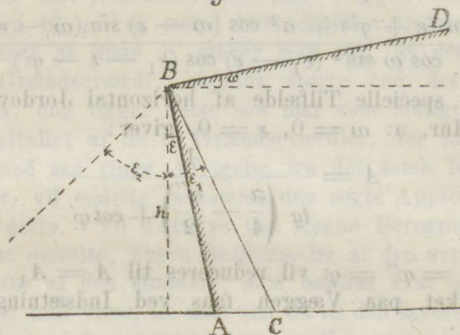
bestemmer de tre Correctioner, der skulle føjes til (53).

Trykket paa en vilkaarlig Plan kan nu findes ved (42), men Formlerne blive complicerede, og det maa stedse erindres, at de kun gjælde, naar ε kun afviger lidet fra ε_1 . —

For at naa nøjagtigere Resultater er det at foretrække med Boussinesq at indføre Forudsætningen om en ringe Heterogenitet i Jordmassen, saaledes at dennes indre Frictionsvinkel, φ_i , der er constant, lig φ'' , for alle Punkter af Arealet BCD , fra BC varierer, saa at den ved Væggen BA bliver lig den Vinkel φ'_i , som maatte høre til en homogen ubegrænset Jordmasse, for at Trykket paa en Plan BA deri med Normalen skulde danne Væggens Frictionsvinkel φ' .

Denne Heterogenitet tænkes nu saaledes bestemt, at overalt i Massen exact, ikke alene tilnærmelsesvis, Ligningen (41) er opfyldt af Udtrykkene (62) med:

Fig. 13.



$$\Phi = \begin{cases} 0 & \text{for } x - y \operatorname{tg} \varepsilon_1 > 0 \\ \frac{A}{6} (x - y \operatorname{tg} \varepsilon_1)^3 & \text{for } x - y \operatorname{tg} \varepsilon_1 < 0, \end{cases}$$

naar blot φ i (41) erstattes af den varierende indre Frictionsvinkel φ_i , medens i (62) φ ombyttes med φ'' . Som Function af x og y findes denne derfor ved Indsætning af (62) i:

$$\sin^2 \varphi_i = \frac{4 X_y^2 + (Y_y - X_x)^2}{(Y_y + X_x)^2} = 1 - 4 \frac{X_x Y_y - X_y^2}{(Y_y + X_x)^2}$$

hvoraf efter nogen Regning:

$$\sin^2 \varphi_i = 1 - 4 d \cos^2 \varepsilon_1 \frac{d \sigma^2 \cos^2 \omega \cos^2 \varepsilon_1 - A (\sigma^2 \cos^2 (\omega - \varepsilon_1) + \sin^2 \varepsilon_1) (y \operatorname{tg} \varepsilon_1 - x)}{[d(1 + \sigma^2) \cos^2 \varepsilon_1 - A (y \operatorname{tg} \varepsilon_1 - x)]^2}$$

for Punkter indenfor ABC ; heri afhænge σ og ε_1 af φ'' . Den indre Frictionsvinkel er altsaa ens for alle Punkter af en vilkaarlig ret Linie gennem B ; thi danner denne med Verticalen en Vinkel $\theta < \varepsilon_1$, og sættes altsaa: $x = y \operatorname{tg} \theta$, $d = y + x \operatorname{tg} \omega = y \frac{\cos (\theta - \omega)}{\cos \theta \cos \omega}$, vil y^2 kunne bortforkortes, saa at kun θ kommer til at indgaa.

Til Bestemmelsen af A sættes for Væggen: $\frac{T}{N} = -tg \varphi'$,
 hvoraf ved (42):

$$A = -\cos(\varepsilon - \omega) \cos^3 \varepsilon_1 \frac{\sin \varepsilon \cos(\varepsilon + \varphi') + \sigma^2 \cos(\omega - \varepsilon) \sin(\omega - \varepsilon - \varphi')}{\cos \omega \sin^2(\varepsilon_1 - \varepsilon) \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon - \varphi')},$$

der i det specielle Tilfælde af horizontal Jordoverflade og vertical Mur, $\omega = 0$, $\varepsilon = 0$, giver:

$$A = \frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi''}{2}\right) + \cot \varphi'}$$

og for $\varphi' = \varphi'' = \varphi$ vil reduceres til $A = A_1$.

Trykket paa Væggen faas ved Indsætning heraf i Formlerne:

$$\begin{cases} N = \tilde{\omega} l \left\{ \frac{\cos(\varepsilon - \omega)}{\cos \omega} [\sin^2 \varepsilon + \sigma^2 \cos^2(\varepsilon - \omega)] - A \frac{\sin^3(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{\cos^3 \varepsilon_1} \right\} \\ T = -N tg \varphi' \end{cases}$$

hvor l er Afstanden, maalt langs Væggen, fra et vilkaarligt Punkt af denne til dens Top. —

Herved kan nu det virkelige Tryk af den givne homogene Jordmasse findes imellem to Grændser. Normalcomposanten af det vil nemlig aftage, naar Frictionen voxer, og betragtes derfor to heterogene Jordmasser, den ene med φ_i overalt større, den anden med φ_i overalt mindre end den givne Frictionsvinkel φ , saa maa det sande Tryk ligge imellem de to hertil svarende Værdier. Dets Angrebspunkt maa ifølge ovenstaaende Udtryk for N ligge i $\frac{1}{3}$ af Væggens Højde over dennes Fod.

For at faa den lavere Grændse maa man vælge: $\varphi_{iMin} > \varphi$,

og for at komme Sandheden saa nær som muligt sættes da: $\varphi' = \varphi'' = \varphi$, idet i den givne homogene Masse Frictionsvinklen langs Væggen antages lig den i Jordens Indre. For at finde den øvre Grændse maa man vælge: $\varphi_{iMax} \leq \varphi$, og,

idet φ_i vil være Maximum for $\theta = \varepsilon$, kan man da sætte $\varphi'_i = \varphi$, $\varphi'' = \varphi''$, hvor den sidste bestemmes af Relationen

imellem φ'_i , φ' og φ'' , som faas af Udtrykket for $\sin^2 \varphi_i$ ved Indsætning af A , naar $x = y \operatorname{tg} \varepsilon$ indføres. En finere Bestemmelse af denne Grændse vil dog faas ved kun at sætte $\varphi'_i = \varphi$, derpaa udtrykke φ' ved φ'' , indsætte dette i Udtrykket for Normaltrykket paa Væggen, differentiere med Hensyn til φ'' og sætte Differentialquotienten lig Nul. Ved da heraf at finde φ'' sikrer man sig, at den saaledes bestemte Grændseværdi, skjøndt større end det virkelige Normaltryk, dog ligger dette saa nær som muligt.

Middeltallet af de to Grændseværdier, der saaledes ere bestemte med saa ringe Afvigelse fra det sande Normaltryk som muligt, vil endelig bestemme den søgte Approximationsværdi for dette. Til Lettelse ved denne Beregning tjener, at den sidst omtalte, finere Bestemmelse af den øvre Grændse kan erstattes af den simplere, som bestaar i at sætte $\varphi' = \varphi''$, idet det kan vises, at man ved da til den lavere Grændseværdi at lægge $\frac{1}{2}$ af Differensen mellem den øvre og den vil finde en Værdi, der kun afviger forsvindende fra det omtalte Middeltal.

Det vilde føre for vidt her at gaa nærmere ind paa denne Tilnærmelsesberegning, som i Hovedsagen er analog med Boussinesq's, og som, skjøndt lidt vittløftig, ikke frembyder nogen egentlige Vanskeligheder. Resultatet af Boussinesq's Beregninger, til hvilke derfor henvises, er anført ovenfor, Side 71 og 72, baade for det almindelige Tilfælde og det specielle, hvor Jordoverfladen er horizontal og Væggen vertical.

Idet det resulterende Normaltryk paa Væggen er sat lig K Gange det hydrostatiske Tryk derpaa af en Vædske af Jordens Vægtfylde $\tilde{\omega}$ og med Overfladen i Højde med Væggens Top $\circ$: $N_r = \frac{1}{2} \tilde{\omega} \frac{h^2}{\cos \varepsilon} K$, bliver selve det resulterende Tryk, der mod Væggens Normal holder under Frictionsvinklen φ' : $R = \frac{1}{2} \tilde{\omega} \frac{h^2}{\cos \varepsilon \cos \varphi'} K$, og Kantringsmomentet heraf, virkende i $\frac{1}{3}$ af Væggens Højde over dennes Fod, kan da let udtrykkes. —

Formlerne, der dog forudsætte ω og ε positive, ere temmelig complicerede, og om de end ved Forsøg og mere videnskabelige Undersøgelser kunne levere værdifulde Til-

nærmelser, er det tvivlsomt, om de ved de i Anvendelserne almindelige Tilfælde, hvor Forudsætningerne om Homogenitet, manglende Cohæsion, Constanternes nøjagtige Bestemmelse etc. kun ufuldstændigt ere opfyldte, virkelig give en i Forhold til de vidtløftige Beregninger staaende Finhed.

— I Praxis vil man derfor i saadanne Tilfælde hyppigt med Fordel kunne forlade den rationelle Theori og vende tilbage til den ældre, uagtet man herved ingen Sikkerhed har for, om det fundne Tryk er for stort eller for lille. Ved Beregningen af Beklædningsmure maa man da vælge Sikkerhedsgraden, α : Forholdet imellem Stabilitetsmomentet og Kantringsmomentet, tilstrækkelig stor, $s = 1\frac{1}{2} - 3$, desto større, jo flere Rystelser Jorden er udsat for, og jo lavere den beklædte Dæmning er.¹⁾

Blandt de forskjellige graphiske Bestemmelser af Trykket, som da frembyde sig, og hvoraf nogle ere omtalte i det foregaaende, synes særlig Rebhann's at være at anbefale, baade paa Grund af dens Elegance og dens Almen-gyldighed. Til den nærmere Omtale af denne, Side 39, henvises derfor.

Anden Begrænsning af Jorden.

§ 32. I det foregaaende er behandlet det Tilfælde, at Jordmassen har plan Overflade, til den ene Side er begrændset af en fast Væg, men iøvrigt er ubegrændset. I Anvendelserne kan der dog hyppigt blive Tale om andre Forhold.

Er Jorden indesluttet imellem to parallelle Mure, kommer der til Betingelsesligningen (37) for den ene af disse endnu en af samme Form for den anden. Er imidlertid Afstanden imellem dem saa stor, at de for den ubegrændsede Masse bestemte Glideflader gennem de to Bagvægges Fodpunkter begge skjære Jordoverfladen og ikke træffe den anden Væg, saa vil for hver af Murene den foregaaende Undersøgelse kunne benyttes uden Hensyn til

¹⁾ Rebhann sætter: $s = 1.44 + \frac{1.05}{H}$ à $1.89 + \frac{2.11}{H}$, hvor H er Dæmnings Højde, udtrykt i Meter.

den andens Tilstedeværelse. For det imellem hver Væg og dennes Glideflade indesluttede Jordprisme vil nemlig da de ovenfor fundne indre Tryk virkelig repræsentere Løsningen, idet Betingelserne langs hele Begrænsningen ere opfyldte. De to isostatiske Planer gennem ethvert Punkt af Væggene maa altsaa træffe Jordoverfladen imellem dem. — Er Afstanden imellem Murene derimod mindre, kan Trykket paa hver især tilnærmelsesvis bestemmes af den Del af Brudprismet, som indesluttet imellem dem.

Jordoverfladen kan dernæst ogsaa være krum eller brækket i Stedet for plan i det uendelige, men den forudsættes dog stadig cylindrisk med Frembringerne parallelle med Væggens Længderetning. Er imidlertid den ved Muren nærmestliggende Del deraf plan, og findes intet Knæk i Profilet før hinsides Skjæringslinien mellem denne Plan og den ved det foregaaende bestemte Glideflade gennem Væggens Fod, saa gjælder atter her for Brudprismet de ovenfor fundne Resultater, og Trykket faas altsaa uafhængigt af de fjernere liggende Forandringer i Overfladen. Er dette derimod ikke Tilfældet, kan Terrainfladen tænkes reguleret, saa at det bliver det, eller man benytter den ældre Theori, der navnlig ved Hjælp af Rebhann's Construction temmelig let vil føre til Maalet.

Er Væggen ikke plan, men sammensat af flere plane Elementer, der hvert for sig opfylder de fornødne Betingelser, kan Theorien anvendes paa hvert især af dem. I modsat Fald kan Rebhann's Construction, som tidligere anført, føre til en Tilnærmelse.

Er endelig Jordoverfladen belastet, og er den plan samt Belastningen ensformig, kan de udviklede Formler let udvides til ogsaa at gjælde derfor. Betegnes nemlig Belastningen pr. vandret Arealenhed ved q , saa vil Trykket deraf paa en med Overfladen parallel Plan være lodret og i Størrelse lig $q \cos \omega$, saa at dets Normal- og Tangential-Composant ere henholdsvis $q \cos^2 \omega$ og $q \cos \omega \sin \omega$. Heraf i Forbindelse med (41), (42) og (53) vil fremgaa, at Formlerne (53), (54), (59) alle kunne benyttes i dette Tilfælde, naar blot overalt $\tilde{\omega} d$ erstattes af $\tilde{\omega} d + q$ og $\tilde{\omega} l$ af $\tilde{\omega} l + \frac{q \cos \omega}{\cos(\varepsilon - \omega)}$. Det resulterende Tryks Angrebspunkt vil her ikke ligge i $\frac{2}{3}$ af Væggens Højde fra dens Top, men i en

langs den maalt Afstand derfra, ζ , der ligesom selve Trykket faas ved Integration o:

$$\left. \begin{aligned} R &= \left(\frac{\tilde{\omega} L^2}{2} + \frac{\varrho L \cos \omega}{\cos(\varepsilon - \omega)} \right) \frac{\sin \varepsilon \cos(\varepsilon - \omega)}{\sin(\varepsilon - \omega + \varphi_1)} \\ \zeta &= \frac{2 \tilde{\omega} L^2 \cos(\varepsilon - \omega) + 3 \varrho L \cos \omega}{3 \tilde{\omega} L \cos(\varepsilon - \omega) + 6 \varrho \cos \omega} \end{aligned} \right\} \dots (63)$$

idet L betegner Væggens hele Udstrækning fra dens Top til dens Fod. Den første (63) vil kunne udledes af (61), naar deri $\tilde{\omega}$ ombyttes med:

$$\tilde{\omega} \left(1 + \frac{2 \varrho}{\tilde{\omega} h} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \omega} \right),$$

analogt med, hvad den ældre Theori vilde give. —

Naar derimod ikke Overfladen er plan eller Belastningen ensformig, kan denne paa hvert Punkt deraf reduceres til en Jord søjle, der afsættes lodret op fra Punktet, og om det saaledes dannede nye Overfladeprofil gjælder da det ovenfor sagte. Man kan ogsaa ganske vende tilbage til den ældre Theori og betragte Brudprismet med dets Belastning som et Hele, men i begge Tilfælde faas kun en temmelig raa Tilnærmelse.

For at danne sig en mere exact Forestilling om Indflydelsen af et uregelmæssigt Overfladeprofil eller af en Jordbelastning paa Overfladen maa man betragte Trykkets Fordeling paa det Underlag, som bærer en given Jordmasse. Ligesom i det hele taget de indre Ligevægtsforhold i Massen vil ogsaa denne Fordeling i høj Grad afhænge af Delenes indbyrdes Ordning. Antages imidlertid Partiklerne alle sphæriske eller ellipsoideformede, ligestore og ordnede som i en Kuglestabel, saa vil Trykkene imellem dem overalt have samme constante Heldning.

Er nu Jordlegemet et nendelig langt, tresidet Prisme, hvis to Sidefladers Heldning mod Horizontalplanen er Fric-tionsvinklen, saa vil Verticaltrykket være ensformig fordelt over Underlaget, medens Horizontaltrykket paa dette vil aftage fra Siderne ind imod Midten, hvor det er Nul (jvnf. S. 18). Er Profilet af Jordprismet derimod trapezoidalt med en vandret Flade foroven og de to Sideflader parallelle med de naturlige Skraaninger, saa vil Verticaltrykket voxe

Trykket angivet ved Vægten af en Jordsejle, maa Ordinaten i hvert Punkt, maalt paa Længdemaalestokken, multipliceres med Forholdet imellem Arealerne $BabcC$ og $BdefgC$. Det horizontale Tryk i et vilkaarligt Punkt, D , er proportionalt med Differensen imellem Projectionerne af Di og Dk , og Proportionalitetsconstanten er det omtalte Forhold imellem Arealerne, divideret med $\sin \varphi$ og multipliceret med Forholdet imellem Dh og $Di + Dk$ (i Figuren lig $\frac{1}{2}$). For en vilkaarlig Brudplan AD haves nu alle paa Brudprismet virkende Kræfter: Vægten af ABD , det lodrette Tryk af Belastningen, som er proportionalt med Arealet $BdhD$ og det vandrette Tryk af den, som er proportionalt med Arealet Dkb i D Gange $\cot \varphi$ og virker i Retningen fra D imod B . Antages den ældre Theori, kan man da ved at prøve sig frem bestemme AD , saaledes at Trykket paa Væggen er Maximum.

Ligesom man her har bestemt det til en given Jordbelastning svarende, verticale Tryk, kan man ogsaa omvendt af dette finde hin, men det maa erindres, at man ved en saadan Overgang tillige indfører et horizontalt Tryk.

Activt og passivt Jordtryk.

§ 33. Den i det foregaaende undersøgte Grændseligevægtstilstand, der svarer til det Tilfælde, at Jorden er ifærd med at skride ud, idet Væggen giver efter for dens Tryk, er kun en af uendelig mange mulige Tilstande. Idet Frictionen og Cohæsionen kunne optræde med alle mulige Værdier imellem deres positive og negative Maxima, faas nemlig en hel Række af Ligevægtstilstande af Jordmassen og en tilsvarende Række af Tryk imod Væggen. De to Grændsetilfælde, hvor Frictionen og Cohæsionen overalt antage deres største positive og negative Værdier, benævnes den nedre og den øvre Grændseligevægtstilstand. Den første, ved hvilken Trykket imod Væggen er Minimum, vil svare til det active Jordtryk, den anden, ved hvilken det er Maximum, svarer til det passive.

De udviklede Formler (40) og (41) ville gjælde i begge Tilfælde, og med nogle Tegnforandringer kunne de fleste af de følgende transformeres fra det ene til det andet. Idet

man af (45) og (47) finder Maximumsheldningen af Trykket imod Normalen til det tilsvarende Element at være for et vilkaarligt Punkt:

$$tg \varphi_{1Max} = + \frac{k-1}{2\sqrt{k}}, \text{ hvor } k = \frac{P_1}{P_2},$$

bliver, naar φ_{1Max} sættes lig φ , Forholdet imellem de to Hovedtryk:

$$k = \frac{P_1}{P_2} = \begin{cases} \cot^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \\ tg^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \end{cases}$$

henholdsvis for den nedre og den øvre Grændseligevægt. Løsningerne (53) ville ogsaa gjælde for denne, idet blot σ gives den anden af de to Værdier af (41) σ :

$$\sigma = \frac{\cos \omega + \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi}$$

Horizontal- og Vertical-Composanten af Elementartrykket paa Muren faas af (54):

$$N \cos \varepsilon + T \sin \varepsilon = \tilde{\omega} d \sigma^2 \cos (\omega - \varepsilon) \cos \omega$$

$$N \sin \varepsilon - T \cos \varepsilon = \tilde{\omega} d [\sin \varepsilon + \sigma^2 \cos (\omega - \varepsilon) \sin \omega]$$

og følgelig forholde de resulterende Horizontaltryk henholdsvis ved den nedre og den øvre Grændseligevægt sig som de respective Værdier af σ^2 σ : som:

$$\left(\frac{\cos \omega - \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi} \right)^4 = \sigma^4.$$

Er $\omega = 0$, bliver dette Forhold lig $tg^4 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$, der for $\varphi = 30^\circ$ beløber sig til $\frac{1}{9}$; Verticaltrykkene blive derimod i dette Tilfælde ens. Er $\omega = \varphi$, falde de to Grændser, og altsaa alle Ligevægtstilstandene, sammen.

Vil man antage den ældre, specielt Rebhann's Theori, findes det passive Tryk ved i Stedet for Π_{Max} at søge Π_{Min} , hvor Π er bestemt ved Udviklingen Side 37, naar heri α' , β og k gives modsat Tegn. Ligningen (3) vil da erstatte af:

