DTU Bibliotek
Danmarks Tekniske Universitet
Anker Engelunds Vej 1
2800 Kgs. Lyngby
Tlf. 45 25 72 50
bibliotek@dtu.dk
www.bibliotek.dtu.dk

A. Ostenfeld.
Forelæsninger
over Teknisk
Mekanik og
Grafisk Statik.

III.

1898

INDUSTRI-
FORENINGEN.

Forelæsninger

over

Teknisk Mekanik og Grafisk Statik

med Anvendelse paa

Jærnkonstruktioner

3 Del,

af

A. Ostenfeld.

1898.

Skrevet af F. P. Stensballe.

Chr. J. Tauber & Søn, Kjøbenhavn.

Indholdsfortegnelse.

Kap. 1. Almindelig Behandling af statisk ubestemte Systemer.

1. Gitterkonstruktioner.

§1. De virtuelle Forskydningers Princip.

Fra rationel Mekanik er det bekendt, at de virtuelle Forskydningers (Hastighedernes) Princip leverer den nödvendige og tilstrækkelige Ligevægtbetingelse ogsaa for saadanne Systemer, som vi her specielt betragte, nemlig Systemer af Punkter forbundne ved elastiske Stænger og paavirkede (i Knudepunkterne) af ydre Kræfter. Da imidlertid en stor Del af de fölgende Undersögelser beror herpaa, ville vi betragte Sagen lidt nærmere.

For et System som omtalt kunne vi opskrive Ligevægtbetingelserne derved, at vi anvende de virtuelle Forskydningers Princip paa hvert Knudepunkt for sig, idet Knudepunktet tænkes lösgjort fra Forbindelsen med Systemet og altsaa paavirket, foruden af de ydre Kræfter, af de overskaarne Stængers Spændinger, og til Slut addere alle disse Ligninger.

Vi foretage altsaa Forskydninger af Knudepunkterne (for det fölgendes Skyld maa vi antage dem uendelig smaa), projicere dem ind paa de forskellige i Knudepunkterne angribende Kræfter og danne Produkterne af Kræfterne og de tilsvarende Projektioner af Forskydninger. Ved Addition af disse Produkter for alle Knudepunkterne antage vi, at de ydre Kræfter alene give $\Sigma Q.\delta$; for at finde det fra Spændingerne hidrørende Bidrag til Summen ville vi betragte to ved en Stang forbundne Knudepunkter og finde den Del af Summen, der hidrører fra Spændingen S i Forbindelsesstangen. De to Knudepunkter faa de vilkårlige Forskydninger ($\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$) og ($\delta x_2, \delta y_2, \delta z_2$), og idet Stangen med Koordinaternes Axer danner Vinklerne α, β, γ, faas Spændingens <u>virtuelle Arbejde</u> (Stangens Længde $= s$):

$$S\cos\alpha(\delta x_1 - \delta x_2) + S\cos\beta(\delta y_1 - \delta y_2) + S\cos\gamma(\delta x_1 - \delta z_2) =$$

$$S\frac{x_1 - x_2}{s}(\delta x_1 - \delta x_2) + S\frac{y_1 - y_2}{s}(\delta y_1 - \delta y_2) + S\cos\gamma(\delta z_1 \div \delta z_2);$$

idet $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 \div z_2)^2 = s^2$ faas

$$(x_1 - x_2)(\delta x_1 \div \delta x_2) + (y_1 \div y_2)(\delta y_1 \div \delta y_2) + (z_1 \div z_2)(\delta z_1 \div \delta z_2) = s\,\delta s,$$

hvorved Spændingernes virtuelle Arbejde bliver lig <u>$S\delta s$</u>. Dette sidste Resultat er kun rigtigt under Forudsætning af uendelig smaa Forskydninger, altsaa uendeligt lille δs. I det følgende anvende vi det imidlertid saaledes, at δs kommer til at betyde Stangens elastiske Forlængelse, som ganske vist er lille; det bliver da kun en — ganske vist tilstrækkelig nöjagtig — Tilnærmelse; vi ville betegne denne Forlængelse ved Δs.

Fra hver Stang i Systemet faa vi saaledes et Bidrag til det virtuelle Arbejde lig $S\Delta s$, og Summen af alle disse skal adderes til $\Sigma Q\delta$; den samlede Sum lig Nul er da Ligevægtsbetingelsen. Her maa man imidlertid lægge Mærke til Fortegnet for Störrelsen $S\Delta s$; S betyder en Spænding og regnes positiv for Træk, negativ for Tryk; Δs betyder en Længdeforandring og regnes positiv for Forlængelse, negativ for Forkortelse. Idet vi nu betragte Spændingerne som Kræfter, der virke paa Knudepunkterne, ses det, at en Trækspænding $+S$ stræber at nærme Knudepunkterne til hinanden, medens et positivt Δs forudsætter en Forögelse af Afstanden; naar baade S og Δs ere positiv, maa altsaa det virtuelle Arbejde $S\Delta s$ være negativt, og fölgelig kommer Ligevægtsbetingelsen til at hedde:

$$\underline{\Sigma Q.\delta \div \Sigma S\Delta s = 0, \text{ eller } \Sigma Q.\delta = \Sigma S\Delta s.}$$

Störrelserne Q og S ere heri sammenhörende, Spændingerne S holde Ligevægt med de ydre Kræfter Q; ligeledes ere ifölge Udviklingen Störrelserne δ og Δs begge saadanne, der fölge af Knudepunktsforskydningerne, altsaa δ og s ere sam=

menhørende. Derimod ere Q og S paa den ene Side og δ og Δs paa den anden ganske uafhængige af hinanden; i det følgende ville vi altid komme til at bruge saadanne Knudepunktsforskydninger (og altsaa δ og Δs), som følge af en bestemt Belastning – vi ville altsaa bruge de til en eller anden Belastning svarende elastiske Deformationer som Forskydninger – men denne Belastning behøver ikke at være lig den Belastning Q, der giver Spændingen S; man kan altsaa i ovenstaaende Ligning indføre de fra en Belastning hidrørende Q og S og de fra en anden hidrørende Deformationer δ og Δs, men som specielt Tilfælde kan naturligvis ogsaa anvendes de til Belastningen Q svarende δ og Δs. — $\Sigma\, S\Delta s$ kaldes Systemets virtuelle Deformationsarbejde, og Ligningen ovenfor udsiger altsaa, at dette er lig de ydre Kræfters virtuelle Arbejde.

Idet vi her ligesom tidligere forudsætte, at de ydre Kræfter virke saaledes, at de begynde med Værdien Nul og derefter voxe jævnt, saa der ingen Svingninger om Ligevægtstilstanden indtræder, vil det virkelige Arbejde, som udrettes af de indre Kræfter, det virkelige Deformationsarbejde, være lig $\frac{1}{2}\Sigma\, Q\delta$; for en enkelt Stang med Spændingen S og Forlængelsen Δs er dette Arbejde nemlig tidligere fundet lig $\frac{1}{2} S \Delta s$; ved Summation faas, da for hele Systemet $\frac{1}{2} \Sigma S \Delta s$, men dette er ifölge Ligningen ovenfor — anvendt paa sammenhörende Belastning og Deformation — lig $\frac{1}{2} \Sigma Q \delta$. Denne Sætning er först fremsat af Clapeyron.

I Ligningen $\Sigma Q\delta = \Sigma S\Delta s$ indbefattes under Q alle de ydre Kræfter; vi ville imidlertid hellere dele disse i to Slags: de aktive Kræfter P og Understötningernes Reaktioner C og altsaa i Alm. skrive Ligningen:

$$\underline{\Sigma P.\delta + \Sigma C\Delta c = \Sigma S\Delta s} \ldots\ldots \underline{(1)};$$

Δc betyder Projektionen af Understötningspunktets Forskydning paa Reaktionen.
Forlængelserne Δs er bekendte Funktioner af Spændingen S, Stangens Længde s og Temperaturen.

Fra Spændingen alene faas: $\Delta s = \frac{Ss}{EF} = \frac{\sigma s}{E}$, idet F er Stangens Tværsnitsareal (uden Fradrag af Nittehuller), σ Spændingen pr. Arealenhed. Ved en Tilvæxt til Temperaturen af $t°$ haves $\Delta s = \varepsilon.t.s$, idet ε betyder Udvidelseskoefficienten for $1°C$.

Ganske i Almindelighed har man altsaa:

$$\Delta s = \frac{Ss}{EF} + \varepsilon t s = \frac{\sigma + \varepsilon E t}{E}.s \ldots\ldots (2).$$

Af den sidste Skrivemaade ses, at en Temperaturtilvæxt af $t°$ har samme Virkning som en

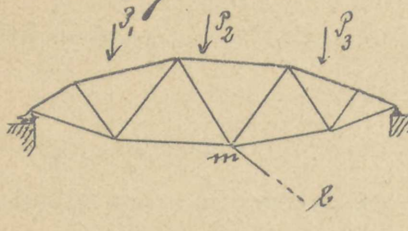
Tilvæxt til Spændingen pr. Arealenhed ε E . t. Man kan regne med fölgende Talværdier:

for Svejsjern : $\varepsilon = 0.000012$, $E = 2000000$ } $\varepsilon E = 24$ kg. pr. qcm. (240 t pr. qm)
– Flusjern : $\varepsilon = 0.000011$, $E = 2150000$ }

– Stöbejern : $\varepsilon = 0.000011$, $E = 1000000$, $\varepsilon E = 11$ kg/qcm. (110 t/qm)

Ligningen (1) skal i det fölgende navnlig anvendes til at bestemme de statisk ubestemmelige Störrelser i statisk ubestemte Systemer.

Her ville vi dog strax vise dens Anvendelse til Lösning af forskellige Opgaver ogsaa for statisk bestemte Systemer.



Vi ville f. Ex. bestemme, hvor stor Forskydningen δ_m i Retningen mb er for Knudepunktet m i den i Fig. viste Gitterbjælke med den givne Belastning $P_1 - P_3$. Vi beregne da de af denne Belastning fölgende Spændinger i alle Gitterstængerne og deraf atter Forlængelserne Δs, og Forskydningerne Δc (hvis Bjælken hviler paa murede Piller, er Δc kun lille, og da man vanskelig kan skaffe Oplysning om den virkelige Störrelse, sættes den som oftest lig Nul; dannes Understötningen derimod f. Ex. af Jernsöjler, kan Δc beregnes ligesom Δs for Gitterstængerne).

Dernæst anbringe vi en Kraft 1 i Punktet m og i Retningen mb og beregne Reaktionerne C_1 og

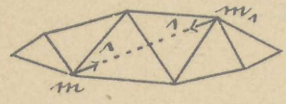
Spændingerne S_1 hidrørende fra denne Kraft alene, og nu anvende vi Ligningen (1) paa sidstnævnte Belastningstilstand, men med de af Kræfterne $P_1 - P_3$ følgende Forskydninger, hvorved faaes:

$$1 \cdot \delta_m + \sum C_1 \Delta c = \sum S_1 \Delta s,$$

og med $\Delta c = 0$: $\delta_m = \sum S_1 \Delta s$.

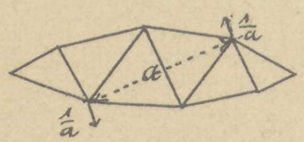
Ligningen (1) er en Relation mellem de forskellige virkende Kræfters virtuelle Arbejder; blandt disse Kræfter kunne ogsaa findes Kraftpar, og som bekendt udtrykkes et Kraftpars Arbejde ved Momentet gange Vinkeldrejningen; δ bliver altsaa her til et rent Tal (Vinkel), medens det ellers betegner en Længde. –

De Opgaver, der kunne løses ved Ligning (1), ere af følgende Arter: man kan, som i Exemplet ovenfor, bestemme den af en given Belastning følgende Forskydning af et eller andet Punkt i en given Retning; man anvender blot Ligningen (1) med de virkelige Forskydninger paa en saadan tænkt Belastning, at dens virtuelle Arbejde er lig $1 \cdot \delta_m$ (den tænkte Belastning er altsaa her: en Kraft 1 i den søgte Forskydningsretning). – Man kan bestemme den af en given Belastning følgende Variation i Afstand mellem to givne Punkter; Ligningen (1) anvendes atter med de virkelige Forskydninger, men med en tænkt Belastning, hvis virtuelle Arbejde er lig 1. δ_m, altsaa her: to Kræfter 1 virkende paa de to Punkter i deres Forbindelseslinje, som vist i hosstaaende Figur. Denne Belastning kaldes „Belastningsenheden for Punktparret m, m_1", og δ_m kaldes her den

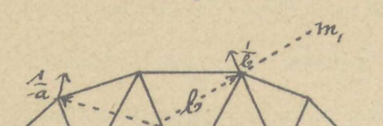


gensidige Forskydning af Punkterne m, m_1".

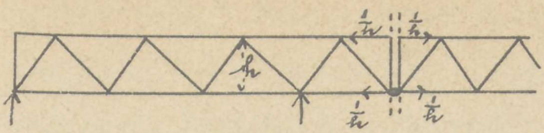
Man kan bestemme den af en given Belastning følgende Vinkeldrejning af en eller anden Linje; man benytter atter de virkelige Forskydninger og en tænkt Belastning, hvis virtuelle Arbejde er 1. δ_m, altsaa her to Kræfter af Størrelsen $1/a$, saa de tilsammen danne et Kraftpar med Moment 1. —



Endelig kan man bestemme den af en given Belastning følgende Variation i Vinklen mellem to Linier; den tænkte Belastning er her to Kraftpar begge med Momenter 1 og virkende paa hver sin af Linjerne (drejende i modsat Retning). Denne Belastning kaldes „Belastningsenheden for Linjeparret m, m_1", og δ_m kaldes „den gensidige Drejning af Linjeparret m, m_1".



Paa denne Maade kan man f. Ex. be-



stemme den af en given Belastning følgende Vinkeldrejning i Charnieret for en Gerberdrager.

§2. Almindelig Behandling af en statisk ubestemt Gitterbjælke.

En saadan kan altid tænkes gjort statisk bestemt ved Borttagelse af nogle Stænger eller Reaktioner. Er Bjælken indvendig statisk ubestemt, findes der, som tidligere omtalt, en eller flere overtallige Stænger, ved hvis Fjernelse Systemet bliver statisk bestemt (det er naturligvis ikke ligegyldigt, hvilke Stænger man fjerner; man *kan* borttage saadanne Stænger, at den statiske Ubestemthed vedbliver for nogle Dele af Systemet, medens andre Dele derved blive bevægelige). Er Bjælken udvendig statisk ubestemt, vil dette jo sige, at der findes for mange Reaktioner, til at de alle kunne bestemmes ved de statiske Ligevægtsbetingelser, og man vil da altid kunne skaffe den statiske Bestemthed til Veje ved Borttagelsen af nogle af Reaktionerne. Begge disse Tilfælde skulle imidlertid i det følgende behandles under ét, og vi tale da blot om visse overtallige Størrelser X uden at præcisere deres Natur nærmere. Det statisk bestemte System, der faas ved Fjernelsen af de overtallige Störrelser X, ville vi kalde Hovedsystemet. Idet vi nu tanke os Spændingerne i de overtallige Stænger og de overtallige Reaktioner virkende som Belastninger paa Hovedsystemet, kunne vi fremstille en hvilkensomhelst Spænding eller Reaktion ved Ligningerne:

$$\left.\begin{aligned} S &= S_0 \div S_a X_a - S_b X_b \div S_c X_c \div \dots \\ C &= C_0 \div C_a X_a \div C_b X_b \div C_c X_c \div \dots \end{aligned}\right\} (3).$$

Heri er $S_0, S_a, S_b, \dots$ $C_0, C_a, C_b \dots$ uafhængige af Störrelserne X. S_0 og C_0 betyde Störrelsen af Spændingen S eller Reaktionen C, naar alle X forsvinde, altsaa når Hovedsystemet kun er paavirket af de givne ydre Kræfter; S_a, C_a betyde Værdierne af S eller C, naar alle ydre Kræfter forsvinde og ligeledes alle X med Undtagelse af X_a, som antager Værdien $\div 1$, altsaa når Hovedsystemet kun er paavirket af Kraften $X_a = \div 1$; denne Belastningstilstand ville vi i det fölgende kalde: „Belastningstilstanden $X_a = \div 1$". S_b, C_b o.s.v. have analoge Betydninger. Alle Störrelserne S_a, C_a, S_b, C_b --- ere uafhængige af de ydre Kræfter P.

Ligningerne (3) gælde först og fremmest for Hovedsystemets Stænger og Reaktioner, men man kan let udvide Begreberne saaledes, at de gælde for alle det statisk ubestemte Systems Stænger og Reaktioner. I den Anledning lade vi følgende to Ting være ganske ensbetydende: at en Stangeller Reaktion ikke findes, og at Stangens Spænding eller Reaktionens Störrelse er Nul. I saa Fald kan Spændingen X_a i en overtallig Stang skrives paa Formen (3), idet her blot $S_o = 0$, $S_b = 0$, $S_c = 0 \dots$ og $S_a = \div 1$; ligeledes den overtallige Reaktion X_b, idet saa blot $C_b = \div 1$, medens $C_o = C_a = C_c = \dots = 0$. – I det følgende tænke vi os Ligningerne gældende for alle Stænger og Reaktioner. Endelig er det klart, at Ligningerne (3) gælde for af hinanden uafhængige Værdier af de ydre Kræfter P og Störrelserne X; disse sidste kunne jo opfattes som Kræfter, der virke paa Hovedsystemet, og ganske uafhængigt af Störrelsen af Belastningen paa dette kunne Spændingerne skrives paa Formen (3).

Som Følge heraf kunne Konstanterne i Ligningerne (3) ogsaa skrives som partielle Differentialquotienter: $\div S_a = \frac{\partial S}{\partial X_a}$, $\div S_b = \frac{\partial S}{\partial X_b}$, $\dots$ $\div C_a = \frac{\partial C}{\partial X_a}$, hvilket vi ville faa Brug for i det følgende. –

Bestemmelsen af Störrelserne X kan nu ske paa følgende Maade: Ligning (1) i §1 i Forbindelse med (3) giver:

$$\Sigma P\delta + \Sigma (C_o \div C_a X_a \div C_b X_b \div \dots)\Delta c = \Sigma (S_o \div S_a X_a \div S_b X_b \div \dots)\Delta s.$$

Heri sætte vi alle Kræfterne $P = 0$, ligeledes alle Störrelser X med Undtagelse af X_a, som sættes lig $\div 1$; derved faaes:

$\Sigma C_a \Delta c = \Sigma S_a . \Delta s$; Δc og Δs lade vi betyde de virkelige Deformationer af det statisk ubestemte System. Paa samme Maade faa vi med Störrelserne P og X lig Nul undtagen X_b, som sættes lig $\div 1$: $\Sigma C_b \Delta c = \Sigma S_b \Delta s$. – o.s.v.

De fundne Ligninger kunne ogsaa direkte opskrives som specielle Tilfælde af Ligning (1), nemlig ved at opskrive <u>Arbejdsligningen for Hovedsystemet i Belastningstilstanden $X_a = \div 1$ og med de virkelige Forskydninger</u>, ligesaa med Belastningstilstanden $X_b = \div 1$ o.s.v. – Derved faas nemlig direkte: $1.\delta + \Sigma C_a \Delta c = \Sigma S_a \Delta s$, hvor Summationerne kun skulle udstrækkes over Hovedsystemets Stænger og Reaktioner; men hvis vi lade Summerne gælde for hele det statisk ubestemte System, forsvinder Leddet $1.\delta$, idet Kraften 1 er lig S_a eller C_a for den overtallige Störrelse X_a, eftersom denne er en Spænding eller en Reaktion.

Paa denne Maade faa vi ligesaa mange Ligninger, som der er Störrelser X at bestemme. Disse Ligninger kunne nu omformes ved Hjælp af Relationen (2) i §1:

$$\Delta s = \frac{Ss}{\varepsilon F} + \varepsilon t.s = \frac{s}{\varepsilon F}\left(S_0 \div S_a X_a \div S_b X_b \div \cdots\right) + \varepsilon t s,$$

hvorved faas, idet $\frac{s}{\varepsilon F}$ sættes lig ρ:

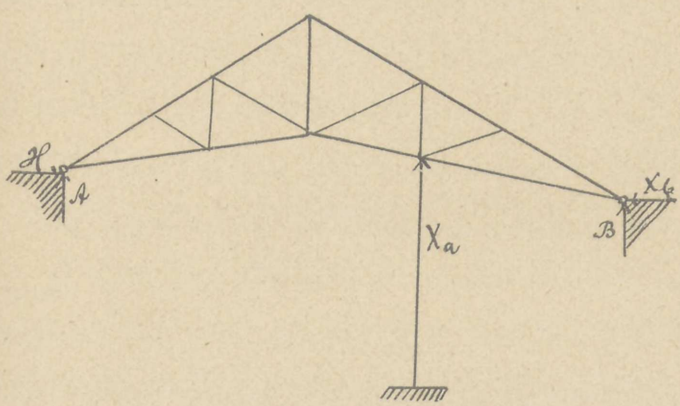
$$\left.\begin{aligned}\Sigma \mathcal{C}_a \Delta c \div \Sigma \mathcal{S}_a \varepsilon t s &= \Sigma \mathcal{S}_0 \mathcal{S}_a \rho \div X_a \Sigma S_a^2 \rho \div X_b \Sigma S_a S_b \rho \div \cdots \\ \Sigma \mathcal{C}_b \Delta c \div \Sigma \mathcal{S}_b \varepsilon t s^0 &= \Sigma S_0 S_b \rho \div X_a \Sigma S_a S_b \rho \div X_b \Sigma S_b^2 \rho \div \cdots\end{aligned}\right\} (4)$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Ved Hjælp af disse Ligninger kunne alle de ube=kendte bestemmes. Det fordres, at man kender Di=mensionerne af alle Systemets Stænger (F), saa Metho=den egner sig forelöbig kun til Undersögelse af Git=terbjælker med givne Dimensioner.

Summationen skal udstrækkes over <u>alle</u> det statisk ubestemte Systems Stænger og Reaktioner, og=saa de overtallige. —

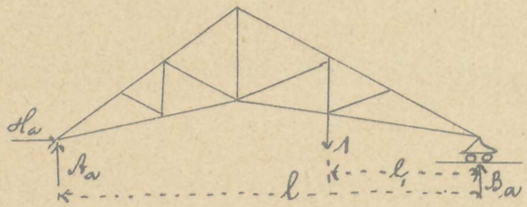
Inden vi gaa videre med den almindelige Theo=ri, ville vi anvende det nu viste paa et Par Exempler.



Ex. 1. Vi betragte et Tagværk som i Fig. med to faste simple Understöt=ninger, der altsaa giver Reaktioner med en vand=ret og en lodret Komposant, og som tillige er under=stöttet af en Jernsöjle staaende usymmetrisk; den=ne sidste giver kun en lodret Reaktion. Hvis vi bort=tage Söjlen og gör den ene af Understötningerne (tilhöjre) bevægelig, have vi et statisk bestemt System (engelsk Sparfag); vi indför altsaa Söjlens

Reaktion X_a og den vandrette Komposant af Reaktionen tilhöjre X_b som de overtallige Störrelser.

Vi kunne gennemföre Beregningerne fra Grunden uden Benyttelse af de ovenfor udledede almindelige Ligninger, idet vi da begynde med at opskrive Arbejdsligningerne for det statisk bestemte Hovedsystem blot paavirket af Kræfterne $X_a = \div 1$ eller $X_b = \div 1$.



I hosstaaende Figur er vist den förste Belastningstilstand; der findes:

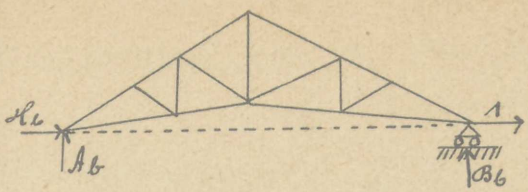
$H_a = 0;\ A_a = 1.\frac{l_1}{l};\ B_a = 1.\frac{l \div l_1}{l};$

og Spændingerne S_a fra den viste Belastning kunne let beregnes. Antages det nu, at for det statisk ubestemte System vil under Belastningens Indflydelse Spændvidden l voxe med δl paa Grund af Understötningernes Eftergiven, og at af samme Grund Understötningen A vil sænke sig δ_a Understötningen B δ_b i lodret Retning, og at endelig Söjlen vil sammentrykkes Δh, saa bliver Arbejdsligningen for den viste Belastning:

$$1.\Delta h \div 1.\frac{l_1}{l}.\delta_a \div 1.\frac{l-l_1}{l}\delta_b = \Sigma S_a \Delta s =$$

$$\Sigma S_0 S_a \rho \div X_a \Sigma S_a^2 \rho \div X_b \Sigma S_a S_b \rho + \Sigma S_a \varepsilon t.s.$$

Belastningstilstanden $X_b = \div 1$ er vist i hosstaaende Fig.; der findes: $H_b = \div 1$, $A_b = B_b = 0$;

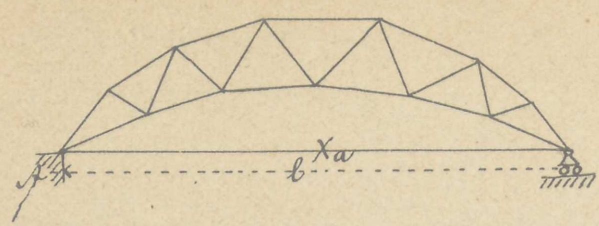


Spændingerne S_b findes ved et Diagram. Arbejdsligningen bliver her:

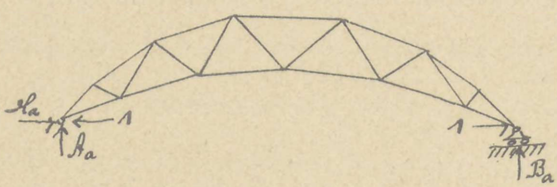
$$1.\Delta l = \Sigma S_b \Delta s = \Sigma S_0 S_b \rho \div X_a \Sigma S_a S_b \rho \div X_b \Sigma S_b^2 \rho + \Sigma S_b \varepsilon t s.$$

Spændingerne S_0 findes ved et Diagram. For at kunne benytte Ligningerne til Beregning af X_a og X_b maa man kende Størrelserne Δl, δ_a, δ_b, Δh. De 3 første kunne kun findes ved Iagttagelse; de ere afhængige af Murværkets Elasticitet og Grundens Fasthed; men da Formaalet for Beregningen alm. er en Dimensionsbestemmelse (hvorom nærmere siden), og den altsaa foretages, inden Iagttagelser kunne finde Sted, er der ikke andet for end at skønne disse Værdier; som oftest sætter man dem lig Nul. Δh derimod kan under Forudsætning af Søjlefundamentets Urokkelighed angives; man har $\Delta h = \frac{X_a h}{\varepsilon F} \div \varepsilon . t . h$. — Efter dernæst at have beregnet X_a og X_b af de to Ligninger, findes Spændingerne ved: $S = S_0 \div S_a X_a \div S_b X_b$ og Reaktionerne ved: $H = H_0 \div H_a X_a \div H_b X_b = H_0 + 1.X_b$ og de analoge.

<u>Ex. 2.</u> En halvmaaneformet Bue har en fast og en bevægelig simpel Understøtning i samme Højde; Horizontaltrykket paa Pillerne optages af en Trækstang.



Idet Buen selv er en statisk bestemt Bjælke, ses, at man ved Fjernelsen af Trækstangen vilde faa en statisk bestemt Konstruktion (seglformet Bjælke, simpelt understøttet ved begge Ender.) Vi indføre da Spændingen i Trækstangen som overtallig og kalder den X_a. Da Systemet er udvendig statisk bestemt, ville mulige Synkninger af Pillerne ingen Indflydelse have paa Spændingerne; det viser sig ogsaa neden for at Leddet $\Sigma C_a \Delta c$ er Nul. Temperaturen antages at voxe t°. — Forinden vi direkte kunne anvende Ligningerne (4), maa vi bestemme Spændingerne S_a og Reaktionerne C_a fra den i Fig viste Belastning $X_a = \div 1$.



Reaktionerne ere: $A_a = 0$, $B_a = 0$, $H_a = 0$. Ligeledes maa Spændingerne S_0 bestemmes. Dernæst haves:

$$\div \sum S_a \varepsilon t s = \sum S_0 S_a \rho \div X_a \sum S_a^2 \rho.$$

Summerne skulle ogsaa udstrækkes over Trækstangen, idet for denne $S_a = \div 1$, $S_0 = 0$. Vil man holde den udenfor, faas

$$\div \sum S_a \varepsilon t s = \sum S_0 S_a \rho \div X_a \sum S_a^2 \rho \div X_a \cdot \frac{l}{EF} \div \varepsilon t l.$$

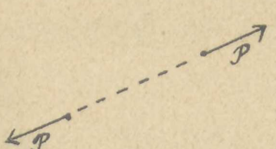
Havde man uden direkte at anvende Lign. (4) vilde opskrive Arbejdsligningen for Tilstanden $X_a = \div 1$ og herved strax holde Trækstangen (som ikke findes i Hovedsystemet, paa hvilket Arbejdsligningen skal anvendes) udenfor Summationstegnene, vilde man faa:

$$1.\Delta l = \Sigma S_a \Delta s = \Sigma S_o S_a \rho \div \Sigma S_a^2 \rho + \Sigma S_a \varepsilon t s.$$

hvor $\Delta l = \frac{X_a . l}{E . F} + \varepsilon . t . l$ betyder Forlængelsen af Trækstangen.

§ 3. Ligning (1) i § 1 hed $\Sigma P\delta + \Sigma C \Delta c = \Sigma S \Delta s$. Heri betød P en ydre Kraft, δ Projektionen af Angrebspunktets Forskydning paa P's Retning. Vi ville nu imidlertid tillægge disse Størrelser en noget videre Betydning i Overensstemmelse med Slutningen af § 1.

Vi ville saaledes lade P betyde „Belastningen af et Punktpar“, d. v. s. to Kræfter P virkende hver paa sit Punkt og efter de to Punkters Forbindelseslinje; δ betyder da den gensidige Forskydning af de to Punkter, saa de to Kræfters virtuelle Arbejde i alt bliver P.δ.



Ligeledes skal P kunne betyde „en Linjes Belastning“ eller et „Linjepars Belastning“, d. v. s. et Kraftpar virkende til Drejning (δ) af Linjen eller to ligestore Kraftpar virkende til gensidig Drejning (δ) af Linjerne; ogsaa her er Belastningens virtuelle Arbejde P.δ. – Ganske i Alm. tale vi herefter om en Belastning P og denne „Belastnings“

Vej"d.

Forskydningerne δ – også i den udvidede Betydning – er lineære Funktioner af Belastningerne. For statisk bestemte Systemer er dette bevist i Slutningen af § 1. Her saas det nemlig, at man kan finde disse Forskydninger ved Hjælp af Ligningen (1): $\Sigma Q\delta = \Sigma S \Delta s$; man skal blot anvende Ligningen paa de virkelige Forskydninger og paa en tænkt Belastning, hvis virtuelle Arbejde er lig den søgte Forskydning δ_m, og man faar da: $1.\delta_m = \Sigma S_1 \Delta s$; heri er S_1 Spændingerne fra den tænkte Belastning, altsaa konstante, medens Δs er en lineær Funktion af Spændingerne (de virkelige, altsaa af Belastningerne. –

For statisk ubestemte Systemer findes Forskydningerne ganske paa samme Maade, saa også her gælder ovenstaaende Sætning. δ_m er nemlig også her bestemt ved: $1.\delta_m = \Sigma S_1 \Delta s$, hvor S_1 er Spændingerne i det statisk ubestemte System, svarende til Belastningen 1 i Punktet m, og hvor Δs er Forlængelsen af Stængerne også i det statisk ubestemte System. For at finde δ_m skulde man altsaa egentlig to Gange bestemme Spændinger i det statisk ubestemte System. (ved Hjælp af Elasticitetsligningerne.)

Man kan imidlertid ved Beregning af Forskydningerne for et statisk ubestemt System bestem=

ne Spændingerne S_1, idet man sætter alle X lig Nul, altsaa her regner med Hovedsystemet alene. Arbejdsligningen (1), som skal anvendes, kan nemlig skrives (benyttet i § 2):

$$\Sigma P.\delta + \Sigma(C_0 - C_a X_a - C_b X_b \div \dots)\Delta c = \Sigma(S_0 \div S_a X_a \div S_b X_b \dots)\Delta s,$$

men til Beregning af Størrelserne X har man benyttet:

$$\Sigma C_a \Delta c = \Sigma S_a \Delta s, \quad \Sigma C_b \Delta c = \Sigma S_b \Delta s \dots,$$

hvorved ovenstaaende Arbejdsligning bliver til:

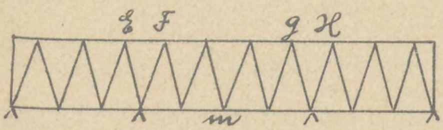
$$\Sigma P.\delta + \Sigma C_0 \Delta c = \Sigma S_0 \Delta s.$$

Naar der nu kun virker Kraften 1 i m faas:

$1.\delta_m + \Sigma C_{0,1} \Delta c = \Sigma S_{0,1} \Delta s$, og med $\Delta c = 0$: $1.\delta_m = \Sigma S_{0,1} \Delta s$

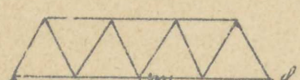
og herved er netop udtrykt, at man kan beregne Spændingerne S_1 for Hovedsystemet alene. Dette er i og for sig ogsaa ret naturligt, da Spændingerne netop ere bestemte saaledes, at de overtallige Stængers og Hovedsystemets Deformationer ere i Overensstemmelse med hinanden.

<u>Ex.</u> Bestem Nedbøjningen den i lodret Retning af Punktet m i hostegnede kontinuerlige Drager under en given Belastning.



Man bestemmer først de af Belastningen følgende Spændinger, som ovenfor sagt; der er to overtallige Størrelser, der kunne vælges paa forskellig Maade; man kan vælge to af Reaktionerne eller Momenterne over Mellemunderstøtningerne eller

f. Ex. Spændingerne i Stængerne EF og GH, hvorved Hovedsystemet bliver 3 adskilte, simpelt understøttede Bjælker o.s.v. For dernæst at beregne δ_m anvender man Arbejdsligningen paa Hovedsystemet (og selv om man ved Spændingernes Beregning har indført f. Ex Reaktionerne B og C som X_a og X_b, kan man godt her vælge andre Størrelser), hvortil mest praktisk vælges det, der faas ved Borttagelsen af EF og GH.



Man anbringer altsaa en lodret Kraft 1 i m, finder de deraf følgende Spændinger S_1 i Bjælken BC, og har da: $1. \delta_m = \Sigma S_1 . \Delta s.$ under Forudsætning af urokkelige Understøtninger (Δs er Forlængelserne i det statisk ubestemte System.)

Ifølge det nu viste kan man skrive den fra Belastningerne $P_a, P_b, \ldots P_m$ hidrørende Forskydning δ_a af P_a's Angrebspunkt a og i P_a's Retning som:

$$\delta_a = \delta_{aa} \cdot P_a + \delta_{ab} \cdot P_b + \ldots \delta_{am} \cdot P_m + \ldots$$

hvor $\delta_{aa}, \delta_{ab} \ldots$ er uafhængige af Belastningerne. Sættes alle Størrelser P lig Nul undtagen P_m, der sættes lig 1, faas $\delta_a = \delta_{am}$, saa δ_{am} betyder den Forskydning af Punktet a, der bevirkes af Belastningen 1 i m. Lignende Betydning have alle Størrelserne med dobbelt Index: dennes første

Bogstav refererer sig til det Punkt (Linje) hvis Forskydning (Drejning) der er Tale om, det sidste til Punktet (Linjen), hvorpaa den Kraft virker, der frembringer Forskydningen; dennes Retning er givet ved Retningen af Kraften i Punktet (a's Forskydning regnes i P_a's Retning).

Vi betragte nu et System paavirket af Belastningen $P_m = 1$ og bestemme de herved fremkaldte Spændinger S_m og Forlængelser af Stængerne $\Delta s_m = \frac{S_m \cdot s}{EF}$; dernæst borttage vi P_m og anbringe Belastningen $P_n = 1$ og bestemme de tilsvarende S_n og $\Delta s_n = \frac{S_n s}{EF}$. Vi betegne nu i Overensstemmelse med ovenstaaende ved δ_{mn} Forskydningen af m som Følge af Belastningen $P_n = 1$ og i Retningen $P_m = 1$ og ved δ_{nm} Forskydningen af n som Følge af $P_m = 1$ og i Retningen $P_n = 1$ og anvende dernæst Arbejdsligningen $\Sigma P\delta = \Sigma S \Delta s$

1. paa Belastningstilstanden $P_m = 1$, Spændingerne S_m og Forskydningen $\delta_{m.n}$, Forlængelserne Δs_n
2. paa Belastningstilstanden $P_n = 1$, Spændingerne S_n og Forskydningen $\delta_{n,m}$, Forlængelserne Δs_m

Man faar herved:

$$1.\ \delta_{mn} = \Sigma S_m \cdot \Delta s_n = \Sigma S_m \cdot \frac{S_n s}{EF},$$

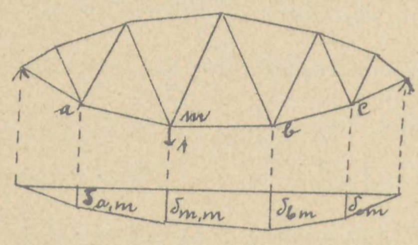
$$1.\ \delta_{nm} = \Sigma S_n \Delta s_m = \Sigma S_n \cdot \frac{S_m s}{EF},$$

hvoraf $\underline{\delta_{m,n} = \delta_{n,m}}$ (<u>Maxwell's Sætning</u>). –

Denne Sætning er overordentlig vidtrækkende, idet man kan tillægge δ alle de tidligere omtalte Betydninger; man udleder saaledes heraf:

Forskydning af et Punkt m (Drejning af en Linje m) som Fölge af Belastningen $P_n = 1$ er ligesaa stor som Forskydningen af Punktet n (Drejningen af Linien n) som Fölge af $P_m = 1$. Den gensidige Forskydning af Punktparret m (Drejning af Linjeparret m) som Fölge af $P_n = 1$ er lig den gensidige Forskydning af Punktparret n (Drejning af Linjeparret n) som Fölge af $P_m = 1$. Ogsaa kan Forskydning af et Punkt (Punktpar) stilles over for Drejning af en Linje (Linjepar.)

Ex.



Kraften 1 (lodret) i Punktet m bevirker Nedböjningerne δ_{am}, δ_{bm}, δ_{cm} af Punkterne a, b, c; altsaa maa Kraften 1 i a bevirke en Nedböjning af m $= \delta_{am}$ ($\delta_{am} = \delta_{ma}$). Kraften 1 i b bevirker Nedböjningen δ_{bm} i m o.s.v. Kraften P_a i a maa bevirke Nedböjningen $P_a \delta_{am}$ i m, og Kræfterne P_a, P_b, P_c samtidig maa bevirke Nedböjningen: $P_a \cdot \delta_{am} + P_b \delta_{bm} + P_c \delta_{cm}$ i m.

Maxwells Sætning kan benyttes til en i mange Tilfælde bekvemmere Beregningsmaade af de statisk ubestemmelige Störrelser X end den i § 2 viste. Vi tænke os de overtallige Störrelser X virkende som Belastninger paa Hovedsystemet. Under Indflydelse af de givne ydre Kræfter P og Belastningerne X ville da Angrebspunkterne (Linjer, Punktpar, Linjepar) a, b, c for X_a, X_b, X_c - - - forskydes Stykkerne $\delta_a, \delta_b, \delta_c$ - - - i Retningerne $X_a = \div 1, X_b = \div 1, X_c = \div 1$ - - -, og disse Forskydninger kunne skrives:

$$\delta_a = \sum P_m \cdot \delta_{am} \div X_a \delta_{aa} \div X_b \delta_{ab} \div X_c \delta_{ac} \cdots + \delta_{at} + \delta_{au},$$

$$\delta_b = \sum P_m \cdot \delta_{bm} \div X_a \delta_{ba} \div X_b \delta_{bb} \div X_c \delta_{bc} \cdots + \delta_{bt} + \delta_{bu},$$

- -

δ_{am} er Forskydningen af a i Retningen $X_a = \div 1$ paa Grund af Kraften $P_m = 1$, δ_{aa} Forskydningen af a i samme Retning som Følge af Kraften $X_a = \div 1$, o.s.v. δ_{at} betyder heri den Forskydning, som a faar, naar en Temperaturvariation paa t° er det eneste Virkende, δ_{au} betyder den Forskydning, som a faar, naar alle Størrelser P, X og t ere Nul, men Understøtningerne give efter. Retningerne af Forskydningerne er Kraftretningerne paa det statisk bestemte System.

Ifølge Maxwell's Sætning kunne disse Ligninger skrives:

$$\delta_a = \sum P_m \cdot \delta_{ma} \div X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ba} \div X_c \delta_{ca} \cdots + \delta_{at} + \delta_{au} \cdots (5).$$

og de analoge. For at kunne benytte dem til Beregning af Størrelserne X maa man kende alle Størrelserne δ paa højre Side. Det vil senere blive vist, hvorledes man ofte let kan udføre denne Bestemmelse; her skal blot bemærkes, at naar der foreløbig ses bort fra Temperaturvariationers og eftergivende Understøtningers Indflydelse, ere alle δ i Udtrykket for δ_a de Forskydninger, der fremkaldes ved Belastningen $X_a = \div 1$ virkende paa Hovedsystemet, ligesaa ere Störrelserne δ i Udtrykket for δ_b de Forskydninger, der fremkaldes ved Belastningen $X_b = \div 1$ paa Hovedsystemet o. s. v., og efter det i § 1 viste angaaende Bestemmelsen af Forskydninger ved Hjelp af Arbejdsligningen vil det allerede nu være klart, at en Beregning ved Hjelp af disse Ligninger er mulig.

Sat og δ_{a0} bestemmes paa lignende Maade som de andre δ, hvorom som sagt senere; δ_a, δ_b - - - ere enten Funktioner af Störrelserne X eller givne, konstante Störrelser (ofte Nul). (Hvis X_a f. Ex. er Spændingen i en overtallig Stang, hvis $\delta_a = \frac{X_a \cdot s}{EF} + \varepsilon t \cdot s$; hvis X_a er en overtallig Reaktion, betyder δ_a Forskydningen af Understötningspunktet i X_a's Retning). Der findes da kun af ubekendte i Ligningerne Störrelserne X, og disses Antal er lig Ligningernes. — Ligningerne (5) ere forövrigt kun en anden Form for Ligningerne (4). For at indse dette tænke vi os foreløbig, at det betragtede System hviler paa absolut faste Understötninger, og at Temperaturen er konstant. Dernæst benytte vi Arbejdsligningen $\Sigma P\delta = \Sigma S\Delta s$, idet vi som Kræfter og Spændinger indføre dem, der svare til Belastningstilstanden $X = 0$ (d. v. s. Hovedsystemet kun paavirket af de ydre Kræfter P, der fremkalder Spændingerne S_0), medens vi som Forskydninger og Forlængelser tage de til Belastningstilstanden $X_a = \div 1$ svarende (δ_{ma} og

$\Delta s_a = \frac{S_a \cdot s}{E \cdot F}$); vi faa da:

$$\Sigma P_m \cdot \delta_{ma} = \Sigma S_0 \Delta s_a = \Sigma S_0 \frac{S_a \cdot s}{E \cdot F} = \Sigma S_0 S_a \rho .$$

Ved at ombytte Forskydningerne heri med de fra $X_b = \div 1$ hidrörende faas:

$$\Sigma P_m \cdot \delta_{mb} = \Sigma S_0 \Delta s_b = \Sigma S_0 S_b \rho, \text{ o.s.v. –}$$

Nu indsætte vi i Arbejdsligningen Belastningstilstanden $X_a = \div 1$ og efterhaanden de Forskydninger, der fölge af $X_a = \div 1$, $X_b = \div 1 \ldots\ldots$, herved faas:

$$1 . \delta_{aa} = \Sigma S_a \Delta s_a = \Sigma S_a^2 \rho, \quad 1 . \delta_{ab} = \Sigma S_a \Delta s_b = \Sigma S_a S_b \rho .$$

Paa denne Maade kunne vi identificere alle Led i Ligningerne (4) og (5), der ikke refererer sig til Temperaturvariationer eller Eftergiven af Understötningerne. Ved at anvende Arbejdsligningen paa Belastningstilstandene $X_a \div 1$, $X_b = \div 1 \ldots$ og hver Gang indsætte de af Temperaturvariationerne fölgende Forskydninger, faas:

$$1 . \delta_{a.t} = \Sigma S_a \Delta s_t = \Sigma S_a \varepsilon t s, \quad 1 . \delta_{bt} = \Sigma S_b . \varepsilon t s \ldots\ldots$$

Ved endelig at anvende Arbejdsligningen paa Belastningstilstandene $X_a = \div 1$, $X_b = \div 1 \ldots\ldots$ og hver Gang indsætte de af en Eftergiven af Understötningerne fölgende Forskydninger (idet altsaa alle de ydre Kræfter og Temperaturvariationen er Nul, bliver $\Delta s = 0$) faas:

$$\Sigma b_a \Delta c + 1 . \delta_{a\bar{n}} = \Sigma S_a \Delta s = 0, \quad \delta_{a\bar{n}} = \div \Sigma b_a \Delta c, \text{ og de analoge.–}$$

Vi have nu identificeret alle Led i de to Ligninger, kun have vi ikke i Ligning (4) noget tilsvarende til $\delta_a, \delta_b \ldots$ i Ligningerne (5). Her maa det imidlertid erindres, at i Ligning (4) skal Σ udstrækkes over alle Stænger, i Ligning (5) kun over Hovedsystemets; omskrives (4) saaledes, at Σ ogsaa her kun gælder Hovedsystemet, maa tilföjes Leddet (paa höjre Side) $\div X_a \frac{s}{EF} \div \Sigma ts$, men dette er netop lig $\div \delta_a$. Paa ganske samme Maade, hvis X_a er en Reaktion.

Da Leddene i (4) og (5) altsaa ét for ét ere identiske, kan man godt skrive nogle af dem under Formen (4), andre under Formen (5), hvis der er nogen Fordel forbunden dermed. Saaledes kan det ofte være lettest at bestemme Indflydelsen af Understötningernes Eftergiven og af Temperaturvariationer efter Formen (4), medens de andre Störrelser maaske lettest findes efter (5); eller det kan undertiden være bekvemt at benytte (4) helt undtagen for Leddet, der indeholder S_0 ($\Sigma S_0 S_a s \ldots$), hvilket ofte lettere skrives $\Sigma P_m \delta_{ma} \ldots$.

Inden vi gaa nærmere ind paa Anvendelsen af de fundne Ligninger, som kun gælde for Gitterkonstruktioner, der paavirkes i Knudepunkterne, ville vi före Behandlingen af massive Bjælker, der paavirkes til Böjning, frem til samme Standpunkt. For senere at kunne se Analogien mellem de to Slags Systemer ville vi dog endnu medtage fölgende Sætninger for Gitterkonstruktioner:

En Stangs virkelige Deformationsarbejde, idet Spændingen vaxer fra Nul til S uden Temperaturvariationer er $\frac{1}{2} S \Delta s = \frac{1}{2} S \cdot \frac{Ss}{EF} = \frac{1}{2} \frac{S^2 s}{EF}$; hele Systemets Deformationsarbejde er da under de samme Forudsætninger $A = \Sigma \frac{1}{2} \cdot \frac{S^2 s}{EF}$. Vi have nu i § 2 set, at Störrelserne X_a,

X_b ... skulle bestemmes ved Ligningerne

$$\Sigma S_a \Delta s = \Sigma C_a \Delta c, \quad \Sigma S_b \Delta s = \Sigma C_b \Delta c \ldots .$$

Under Forudsætning af urokkelige Understötninger ($\Delta c = 0$), og idet man erindrer, at $\div S_a = \frac{\delta S}{\delta X_a} \ldots$, kunne disse Ligninger skrives:

$$\Sigma \frac{\partial S}{\partial X_a} \cdot \frac{S_s}{EF} = 0, \quad \Sigma \frac{\partial S}{\partial X_b} \cdot \frac{S_s}{EF} = 0 \ldots ,$$

men man ser let, at disse Ligninger netop ere Betingelserne for, at A bliver Minimum. $\left(\frac{\partial^2 A}{\partial X_a^2} = \div \frac{\partial\left(S_a \frac{S_s}{EF}\right)}{\partial X_a} = + \frac{S_a^2 s}{EF}\right)$.

Naar Spændingernes Begyndelsesværdi er Nul, og naar Temperaturvariationer og Forskydninger af Understötningerne forsvinde, skulle altsaa <u>de statisk ubestemmelige Störrelser X bestemmes saaledes, at de gjöre Deformationsarbejdet til Minimum</u>.

Bestemmelsen af en vis Forskydning δ_m sker jo som tidligere vist ved Hjælp af Arbejdsligningen:

$$\Sigma P.\delta = P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + \ldots P_m \cdot \delta_m + \ldots = \Sigma S \Delta s,$$

ved nemlig heri at sætte alle P lig Nul undtagen $P_m = 1$. Ligningen gælder for ganske vilkaarlige Kræfter P og de tilsvarende S, medens δ og Δs er uafhængige af P.

Man kan derfor ved Differentiation m. H. t. P_m betragte alle de andre P samt δ og Δs som Konstanter, hvorved

$$\delta_m = \Sigma \frac{\delta S}{\delta P_m} \cdot \Delta s = \Sigma \frac{\delta S}{\delta P_m} \cdot \frac{S_s}{EF} = \frac{\delta A}{\delta P_m},$$

hvilken Ligning gælder under samme Forudsætning som ovenfor ($\Delta c = 0$, $t = 0$). Ved Hjælp af disse to Sætninger kunne alle Opgaver vedrörende Bestemmelsen af de statisk ubestemmelige Störrelser og af Formforandringen löses, men det vil i Alm. være en Omvej at benytte dem i Stedet for de tidligere udledede Ligninger. –

II. Massive Bjælker.

§4. De virtuelle Forskydningers Princip.

Vi betragte et fast Legeme eller rettere en uendelig lille Del af et fast Legeme f. Ex. et Parallelopipedum. I dettes Sideflader virke visse Kræfter F (Tryk, Træk eller Forskydning fra de omliggende Deles Indvirkning), og desuden kan Parallelopipedet være paavirket af visse Massekræfter M (Tyngden o. l). Der forudsættes, at der er Ligevægt mellem de paa Parallelopipedet virkende Kræfter, og vi ville nu søge at opskrive Ligevægtsbetingelsen ved Hjælp af de virtuelle Forskydningers Princip. Vi meddele da det betragtede Element en virtuel Forskydning, d. v. s en vilkaarlig, men dog mulig Forskydning. Herved er det muligt, at man ikke kan undgaa Formforandring af Elementet, og i saa Fald maa man tage Hensyn til det af de indre Spændinger udförte virtuelle Arbejde, ligesom tidligere ved Gitterkonstruktioner ($\Sigma S \Delta s$); i Alm. antage vi altsaa, at Forskydningen kan oplöses i en Formforandring og en Flytning (Parallelforskydning + en Drejning). Det virtuelle Arbejde, som Kræfterne M udförer, er ganske uafhængigt af Formforandringen, vi kalde det δA_m. De indre Spændingers Arbejde er uafhængight af Flytningen; vi ville kalde det dA_v, det virtuelle Deformationsarbejde. Endelig har vi Kræfterne F, som udføre Arbejdet dA_f; en Del (dA_{f_1}) heraf hidrører fra Flytningen alene, en Del (dA_{f_2}) fra Formforandringen, og regne vi begge disse Dele positive ($dA_f = +dA_{f_1} + dA_{f_2}$), maa vi nødvendigvis regne dA_v negativ; dA_v og dA_{f_2} ere nemlig Produktet af en Forskydning, der gaar i samme Retning begge Gange, og visse Kræfter, der holde hinanden i Ligevægt (en Del af Overfladekræfterne bevirker Formforandringen) og altsaa have modsat Fortegn. – Summen af de enkelte Kræfters virtuelle Arbejde sat lig Nul giver da Ligevægtsbetingelsen:

$$dA_m + dA_f \div dA_v = 0.$$

Man kan opskrive lignende Relationer for alle Legemets Smaadele og ved Summation faas da:

$$A_m + A_f = A_v.$$

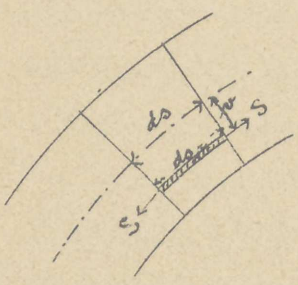
I $A_f = \Sigma dA_f$ hæve alle de Led, der hidrøre fra Kræfter, som ikke virke i Legemets Overflade, hinanden (i hvert Snit i Legemet virke ligestore og modsat rettede Kræfter F), altsaa betyder $A_m + A_f$ det virtuelle Arbejde af alle ydre Kræfter, og det kan ligesom for Gitterkonstruktioner skrives som $\Sigma Q\delta$, eller hvis man skelner mellem aktive Kræfter og Understøtningsreaktioner, som $\Sigma P\delta + \Sigma C\Delta c$.

Man har altsaa nu:

$$\Sigma Q\delta = A_v \text{ eller } \Sigma P\delta + \Sigma C\Delta c = A_v.$$

Denne Ligning er ganske analog med Ligning (A) i §1, men for at kunne benytte den paa samme Maade, maa man have et Udtryk for A_v. Dette er naturligvis afhængigt af Paavirkningsmaaden, og her ville vi indskrænke os til det for Praxis vigtigste Tilfælde, at det massive Legeme, vi betragte, er en lige eller plankrum Bjælke, som er paavirket til Böjning og maaske tillige til Strækning eller Sammentrykning.

Alle de ydre Kræfter forudsættes at ligge i en Plan, der indeholder Bjælkens Axe (ved krumme Bjælker altsaa Kurvens Plan). Paavirkningen i et vilkaarligt Tversnit kan da opfattes som hidrörende fra en forskydende Kraft i Tversnittets Plan og en excentrisk virkende Normalkraft; den förstes Indflydelse paa Formforandringen er forsvindende, hvorfor her ses bort derfra; vi regne altsaa blot de forskellige Elementer af Tversnittet paavirkede af Normalspændinger. — Vi tænke os nu to uendelig nær ved hinanden liggende Tversnit i den i almindeligste Tilfælde krumme Bjælke. Afstanden mellem disse Tversnit maalt paa Bjælkens Axe er ds, i Afstanden v derfra ds_v. Vi betragte et



Prisme (skraveret) med Tversnit dF og Længde ds_v, paavirket af Normalkraften $S = \sigma\, dF$, idet σ betyder Spændingen pr. Arealenhed i Afstanden v fra Axen. Hvis nu ved den virtuelle Forskydning Længden ds_v faar Tilvæxten δds_v, saa bliver det virtuelle Deformations=

arbejde for det betragtede Prisme lig $S \cdot \Delta ds_v$, og ved Summation af de elementære Arbejder – först mellem de to betragtede Tversnit og dernæst over hele Legemet – faaes:

$$A_v = \int S \Delta ds_v = \int \sigma dF \Delta ds_v = \int \sigma \frac{\Delta ds_v}{ds_v} \cdot dV,$$

hvor dV betyder et Volumenelement, $dV = dF \cdot ds_v$.

Man har nu Arbejdsligningen:

$$\Sigma P\delta + \Sigma C \Delta c = \int \sigma \cdot \frac{\Delta ds_v}{ds_v} \cdot dV, \text{ - - - - - } (1)$$

og om denne gælder ganske det samme som om Ligning (1) i §1, at P, C og σ ere sammenhörende – svare til samme Belastningstilstand – ligesaa δ, Δc og Δds_v, men disse Forskydninger kunne godt svare til en helt anden Belastningstilstand end P, C og σ.

Δds_v udtrykkes ved Spændingerne og Temperaturtilvoxten: $\frac{\Delta ds_v}{ds_v} = \frac{\sigma'}{\varepsilon} + \varepsilon t$, men som sagt kan denne Spænding σ' godt være en helt anden end Spændingen σ i Ligning (1).

Ved Indförelse heraf i Ligning (1) faaes:

$$\Sigma P\delta + \Sigma C \Delta c = \int \frac{\sigma \sigma'}{\varepsilon} dV + \int \sigma \varepsilon t \, dV.$$

I Stedet for Spændingerne σ og σ' er det for Anvendelsens Skyld simplere at have Momenter og centrale Normalkræfter indgaaende i Formlen. Vi ville her forudsætte, at de krumme Bjælker, paa hvilke Ligningen skal anvendes, have saa store Krumningsradier, at de for lige Bjælker udledede Böjningsformler ere tilstrækkelig nöjagtige (saa man kan sætte $ds_v = d\bar{s}$) og indskrænke os til det Tilfælde, at de ydre Kræfters Plan skærer Tværsnittet i en Hovedaxe. I saa Fald haves, som bekendt

$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M v}{J}$, idet N er Normalkraften, M Momentet, F Tværsnitsarealet, J Inertimomentet om den paa Kraftlinien vinkelrette Hovedaxe og v den vinkelrette Afstand fra sidstnævnte Axe til Punktet med Spænding σ.

Ved Indførelse heraf, og idet $dV = ds.\,dF$ (for retlinede Bjælker: $dV = dx\,dF$) faas:

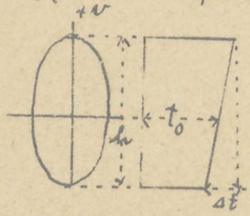
$$\int\frac{\sigma\sigma' dV}{E} = \iint\left(\frac{N}{F}+\frac{M.v}{J}\right)\frac{\sigma' d\bar{s}.\,dF}{E} =$$

$$\int\frac{N.\,d\bar{s}}{EF}\int\sigma' dF + \int\frac{M\,d\bar{s}}{EJ}\int\sigma' v.\,dF,$$

og idet $\int\sigma' dF = N'$, $\int\sigma'.v.\,dF = M'$:

$$\int\frac{\sigma\sigma' dV}{E} = \int\frac{N.\,N' d\bar{s}}{EF} + \int\frac{M.\,M' d\bar{s}}{EJ}.$$

Paa samme Maade faas, idet vi sætte Temperaturtilvæxten $t = t_0 + \Delta t.\frac{v}{h}$, hvorved indføres den Forudsætning, at t varierer med v og i den neutrale Axe er t_0 (det kan f. Ex være ønskeligt at kunne undersøge Ind-



flydelsen af en stærkere Opvarmning af Dragerens Hoved ved direkte Solbestraaling end af Dragerfoden): $\int\sigma\varepsilon t.\,dV =$

$$\iiint\sigma\left(t_0+\Delta t\frac{v}{h}\right)\varepsilon\,ds\,dF = \int\varepsilon t_0 d\bar{s}\int\sigma dF + \int\varepsilon.\frac{\Delta t}{h}.\,d\bar{s}\int\sigma v\,dF$$

$$= \int\varepsilon t_0 N d\bar{s} + \int\varepsilon.\Delta t.\frac{M}{h}.\,d\bar{s}.$$

Det positive Fortegn foran det sidste Integral forudsætter, at

Momentet M regnes positivt, naar det bevirker Træk foroven; det ved Integralet fremstillede Arbejde er da positivt.

Nu kan Ligning (1) skrives:

$$\Sigma P\delta + \Sigma C\Delta c = \int \frac{N\cdot N'}{EF}\cdot d\sigma + \int \frac{M M'}{EJ} d\sigma + \int \varepsilon t_0 N d\sigma + \int \varepsilon \Delta t\cdot \frac{M}{h}\cdot d\sigma. \quad (1a).$$

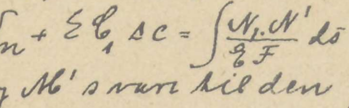
For retlinede Bjælker erstattes $d\sigma$ med dx.

Heri er P, C, N og M sammenhørende, hidrørende fra den valgte Belastningstilstand, ligeledes δ, Δc, N' og M' sammenhørende, refererende sig til den valgte Forskydningstilstand eller til den Belastning, der giver denne Forskydning.

Denne Lignings Anvendelser ere ganske analoge med Anvendelserne af den tilsvarende for Gitterkonstruktioner. Vi ville strax her vise Beregning af Formforandringer af statisk bestemte Bjælker ved Hjælp af den. For at finde det af en given Belastning følgende δ_m sættes blot i Ligningen Belastningstilstanden $P_m = 1$, og den virkelige Forskydningstilstand; hvis Belastningen $P_m = 1$ frembringer $C = C_1$, $N = N_1$, $M = M_1$ (Funktioner af x) haves:

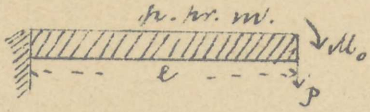
$$1\cdot\delta_m + \Sigma C_1 \Delta c = \int\frac{N_1\cdot N'}{EF} d\sigma + \int \frac{M_1 M'}{EJ}\cdot d\sigma + \int \varepsilon t_0 N_1 d\sigma + \int \varepsilon\Delta t\cdot\frac{M_1}{h} d\sigma.$$

N' og M' svare til den givne Belastning og er altsaa bekendte Funktioner af x, Δc maa alm. skønnes (ofte lig Nul). δ_m kan ganske som omtalt ved Gitterkonstruktioner betyde en Længdeforandring eller en Drejning; specielt kan der blive Tale om at be-



stemme Drejningen af en Tangent til en krum Bjælkes Axe; den tænkte Belastning er i saa Fald et Kraftpar med Moment 1.

Ex. En i den ene Ende indspændt Bjælke er paavirket af en ensformig fordelt Belastning p pr. Længdeenhed og af Kraften P og Momentet M_0 i den fri Ende. Find Nedbøjningen i den fri Ende.



Den givne Belastning giver $N' = 0$, $M' = M_x = \frac{1}{2} px^2 + Px + M_0$ (Begyndelsespunktet i den fri Ende). Δc sættes lig Nul. Dx anbringes dernæst, som eneste Belastningen en lodret Kraft 1 i den fri Ende; den giver $N_1 = 0$, $M_1 = 1 \cdot x$. E, J og h ere konstante.
Ved Indsættelse heraf faas:

$$\delta_m = \frac{1}{EJ}\int_0^l x\left(\frac{1}{2} px^2 + Px + M_0\right) dx + \frac{\varepsilon \Delta t}{h}\int_0^l x\, dx =$$

$$\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{8} pl^4 + \frac{1}{3} Pl + \frac{1}{2} M_0 l^2\right) + \frac{\varepsilon \Delta t}{2h} l^2.$$

Vilde man beregne Drejningen af Tangenten i den fri Ende, skulde man lade den tænkte Belastning være et Moment 1 angribende her, hvorved $M_1 = 1$ og

$$\delta_m = \frac{1}{EJ}\int_0^l 1\left(\frac{1}{2} px^2 + Px + M_0\right) dx + \frac{\varepsilon \Delta t}{h}\int_0^l 1. dx = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{6} pl^3 + \frac{1}{2} Pl^2 + M_0 l\right) + \frac{\varepsilon \Delta t . l}{h}.$$

§5. Almindelig Behandling af en statisk ubestemt massiv Bjælke.

Bøjningsmomenter, Normalkræfter og Understøtningsreaktioner for en statisk ubestemt Bjælke kunne skrives paa Formen:

$$M = M_0 \div M_a X_a \div M_b X_b \div \dots\dots ,$$

$$N = N_0 \div N_a X_a \div N_b X_b \div \dots\dots ,$$

$$C = C_0 \div C_a X_a \div C_b X_b \div \dots ,$$

idet $X_a, X_b \dots$ betegne visse statisk ubestemmelige Störrelser, Momenter, Reaktioner e. l., ved hvis Fjernelse Bjælken vilde blive statisk bestemt. Den statisk bestemte Bjælke, der faas, naar alle X forsvinde, kaldes Hovedsystemet.

Betydningerne af $M_0, M_a, \dots N_0, N_a, \dots$ er ganske analoge med Betydningen af de tilsvarende Bogstaver i § 2. Specielt er M_0 Værdien af M, naar alle X er Nul, altsaa naar Hovedsystemet kun er paavirket af de givne ydre Kræfter, M_a er Værdien af M, naar de ydre Kræfter og alle X er Nul undtagen X_a, som er lig $\div 1$, altsaa naar Hovedsystemet kun er paavirket af Kraften (Momentet) $X_a = -1$ o. s. v.

Ogsaa de statisk ubestemmelige Störrelser kunne skrives paa denne Form; hvis saaledes X_b betegner et Moment, faas $M = X_b$ for $M_0 = M_a = \dots = 0$, $M_b = \div 1$. I det fölgende tænke vi os Ligningerne gældende for alle Momenter, Normalkræfter o. s. v. i den statisk ubestemte Bjælke. —

Endelig er det klart, at Ligningerne gælde for af hinanden uafhængige Værdier af de ydre Kræfter og Störrelserne X (cfr. § 2). Som Fölge heraf kunde Konstanterne $M_a, N_a, \dots$ ogsaa skrives som partielle Differentialkvotienter: $\div M_a = \frac{\partial M}{\partial X_a}$, $\div N_b = \frac{\partial N}{\partial X_b}$ …. o. s. v.

Bestemmelsen af de statisk ubestemmelige Störrelser kan nu foregaa ganske som vist i § 2 for Gitterkon=

struktioner.

I Arbejdsligningen (1a) § 4 indføre vi:

$$M = M_o \div M_a X_a \div M_b X_b \div \cdots\cdots,$$

og de analoge for N og C. Den fundne Ligning anvende vi paa det specielle Tilfælde, at alle ydre Kræfter forsvinde (hvorved $M_o = 0$, $N_o = 0 \cdots\cdots$), og at alle X forsvinde undtagen X_a, som sættes lig $\div 1$. Derved faas:

$$\Sigma C_a \Delta c = \int \frac{N_a N'}{EF} ds + \int \frac{M_a \cdot M'}{EJ} ds + \int N_a \varepsilon t_o ds + \int M_a \varepsilon \frac{\Delta t}{h} ds \cdot (4)$$

Ved at sætte alle ydre Kræfter lig Nul og alle X lig Nul undtagen X_b som sættes lig $\div 1$, faas en ny Ligning, og i det hele ses, at man paa denne Maade faar ligesaa mange Ligninger, som der er ubekendte.

Ved i disse Ligninger at indføre:

$$N' = N_o \div N_a X_a \div N_b X_b - - - - - -,$$

$$M' = M_o \div M_a X_a \div M_b X_b - - - - -,$$

hvor Størrelserne X nu er afhængige af de ydre Kræfter og af hinanden (det er nu de til de givne ydre Kræfter svarende X) og ordne Ligningerne faas:

$$\Sigma C_a \Delta c = \int \frac{N_o N_a}{EF} \cdot ds + \int \frac{M_o M_a}{EJ} \cdot ds \div X_a \left[\int \frac{N_a^2 ds}{EF} + \int \frac{M_a^2 ds}{EJ} \right]$$

$$\div X_b \left[\int \frac{N_a N_b}{EF} \cdot ds + \int \frac{M_a M_b}{EJ} \cdot ds \right] + \int N_a \varepsilon t_o ds + \int M_a \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \cdot ds,$$

og de analoge.

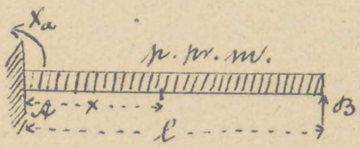
For at kunne anvende dem fordres det, at man kender Dimensionerne (F, J, h, o.s.v.)

Det skal endnu blot bemærkes, at man kan faa med

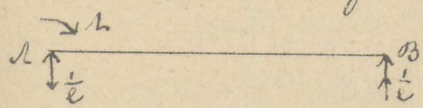
Systemer at gøre, der ere Kombinationer af Gitterkonstruktioner og massive Bjælker. Ligningerne til Bestemmelse af Størrelserne X komme da til at indeholde en Række Led som ovenstaaende, der kun gælde for massive Bjælker, og en Række Led som i (1) § 2, gældende for Gitterstangerne, altsaa:

$$\sum b_a \Delta c = \int \frac{N_0 N_a}{EF} ds + \int \frac{M_0 M_a}{EJ} ds + \sum S_0 S_a \rho \div X_a \left[\int \frac{N_a^2}{EF} ds + \int \frac{M_a^2}{EJ} ds + \sum S_a^2 \rho \right] \div \cdots$$

Ex. 1.



En Bjælke med konstant Tværsnit er indspændt ved A, simpelt understøttet ved B og ensformig belastet med p pr. Længdeenhed. Momentet i A kaldes X_a. Hovedsystemet er altsaa en ved begge Ender simpelt understøttet Bjælke. Der findes:



$$M_0 = \tfrac{1}{2} p . l . x \div \tfrac{1}{2} p x^2 = \tfrac{1}{2} p x (l \div x)$$

$$M_a = 1 \div \frac{1}{l} x = \frac{l \div x}{l}, \quad N = 0.$$

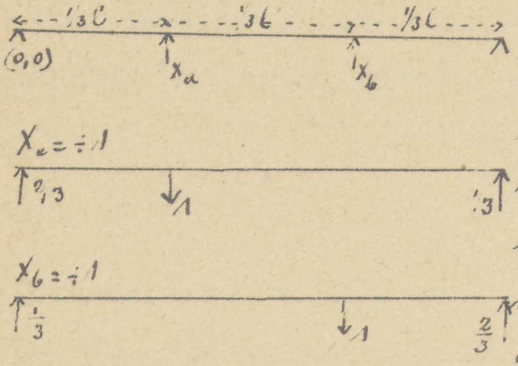
Antages Understøtningerne urokkelige og Temperaturen konstant, haves altsaa:

$$0 = \int \frac{M_0 M_a}{EJ} ds \div X_a \int \frac{M_a^2}{EJ} ds$$ og ved Indsættelse

af Værdierne: $$\int_0^l \frac{\tfrac{1}{2} p x (l \div x)^2}{l} dx \div X_a \int_0^l \frac{(l-x)^2}{l^2} dx = 0,$$

$$\frac{\tfrac{1}{24} p l^4}{l} \div \frac{\tfrac{1}{3} l^3}{l^2} X_a = 0, \quad X_a = + \tfrac{1}{8} p l^2.$$

Ex. 2. En kontinuerlig Bjælke med konstant Tværsnit ligger over 4 Understøtningspunkter og er belastet med p pr. Længdeenhed over hele Længden. Tage-ne ere lige lange. Mellemunderstötningerne sænke sig Stykkerne Δc og Δd i Forhold til Endeunderstötningerne.



Som statisk ubestemmelige Störrelser indföre vi Mellemunderstötningernes Reaktioner. Alle Normalkræfter ere Nul. M_a er Momentet i Afstanden x fra venstre Ende hidrörende fra Belastningen $X_a = \div 1$, altsaa $M_a = \frac{2}{3}x$ for $x < \frac{1}{3}l$, $M_a = \frac{2}{3}x \div (x \div \frac{1}{3}l) = \frac{1}{3}(l-x)$ for $x > \frac{1}{3}l$.

Ligesaa $M_b = \frac{1}{3}x$ for $x < \frac{2}{3}l$, $M_b = \frac{1}{3}x \div (x \div \frac{2}{3}l) = \frac{2}{3}(l \div x)$ for $x > \frac{2}{3}l$.

$$M_0 = \tfrac{1}{2}plx \div \tfrac{1}{2}px^2.$$

Paa Grund af Diskontinuiteten i Udtrykkene for M_a og M_b maa Integralerne deles; man faar:

$$1.\ \Delta c = \frac{1}{EJ}\int_0^{\frac{1}{3}l} \tfrac{2}{3}x\left(\tfrac{1}{2}plx \div \tfrac{1}{2}px^2\right)dx + \frac{1}{EJ}\int_{\frac{1}{3}l}^{l} \tfrac{1}{3}(l-x)\left(\tfrac{1}{2}plx \div \tfrac{1}{2}px^2\right)dx$$

$$\div X_a\left[\frac{1}{EJ}\int_0^{\frac{1}{3}l}\frac{4}{9}x^2dx + \frac{1}{EJ}\int_{\frac{1}{3}l}^{l}\frac{1}{9}(l-x)^2dx\right] \div X_b\left[\frac{1}{EJ}\int_0^{\frac{1}{3}l}\tfrac{2}{3}x\cdot\tfrac{1}{3}x\cdot dx +\right.$$

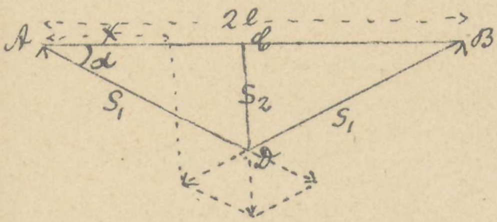
$$\left.\frac{1}{EJ}\int_{\frac{1}{3}l}^{\frac{2}{3}l}\tfrac{1}{3}(l-x)\cdot\tfrac{1}{3}x\,dx + \frac{1}{EJ}\int_{\frac{2}{3}l}^{l}\tfrac{1}{3}(l-x)\,\tfrac{2}{3}(l-x)\,dx\right] \div \int_0^{\frac{1}{3}l}\varepsilon\cdot\frac{\Delta t}{h}\,\tfrac{2}{3}x\,dx$$

$$\div \int_{\frac{1}{3}l}^{l}\varepsilon\,\frac{\Delta t}{h}\cdot\tfrac{1}{3}(l-x)\,dx$$ og den analoge Ligning $1.\ \Delta d = - - - - -$

Det negative Fortegn foran de to sidste Integraler hidrörer fra, at M_a her giver Tryk foroven.

Naturligvis kan man langt hurtigere benytte den tidligere udviklede Clapeyron'ske Formel i dette specielle Tilfælde; man benytter heller ikke Metoden paa det Udviklingstrin, hvortil vi hidtil har fört den — senere skal den videre udvikles, saa den kan före til Influensliniérne og derved til farligste Belastning.

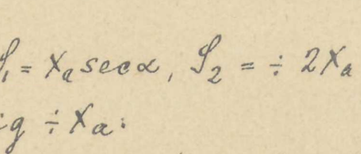
Ex. 3. En armeret Bjælke med vilkaarlig Belastning.



Bjælken AB gaar uafbrudt forbi C; AB understöttes i C (Midten) af en Stiver CD, der bæres af Trækbaandene AD og DB; Forbindelserne ved A, B, C og D ere friktionsløse Led. Som statisk ubestemmelig Störrelse (der findes kun én) indfören viden vandrette Komposant af Spændingen i Trækbaandene, X_a.

$S_1 = X_a \sec\alpha$, $S_2 = \div 2X_a \operatorname{tg}\alpha$. Normalkraften for Bjælken er lig $\div X_a$.

Momentet M_o for Bjælken AB (det Moment, som vilde optrede, hvis Armeringen bortoges) afhænger af Belastningen; vi indfören den vilkaarlige Værdi M_o i de fölgende Beregninger. Normalkraften N_o for Bjælken er Nul, ligesaa $S_{1,0} = 0$, $S_{2,0} = 0$. Lade vi kun $X_a = \div 1$ virke paa Systemet (ingen ydre Kræfter), faaes: $S_{1,a} = \div \sec\alpha$, $S_{2,a} = 2\operatorname{tg}\alpha$, $N_a = +1$, $M_a = +y$. (Spændingen $1.\sec\alpha$ i AD kan opløses i en Komposant



i det lodrette Snit i Afstanden x fra A og i en Komposant 1 vinkelret paa Snittet.) og kaldes Tversnit og Elasticitetskoefficient for Trækstængerne F_1 og E_1, for Stiveren

F_2 og E_2 og for Bjælken F og E (Inertimomentet = J), faas til Bestemmelse af X, idet der ses bort fra Temperatur-variationer:

$$\int_0^{2l}\frac{M_0\,y}{EJ}\,dx \div X_a\left[\int_0^{2l}\frac{1.dx}{EF}+\int_0^{2l}\frac{y^2dx}{E.J}+2\sec^2\alpha\frac{l\sec\alpha}{E_1F_1}+4tg^2\alpha\frac{l\,tg\alpha}{E_2F_2}\right]=0,$$

$$X_a=\frac{\int_0^{2l}M_0\,y\,dx}{K},$$ idet K er en Konstant, der kun afhænger af Bjælkens Længde og Dimensioner.

$$K=\left[\frac{2l}{EF}+\frac{2/3\,.\,l^3tg^2\alpha}{EJ}+2l\frac{\sec^3\alpha}{E_1F_1}+4l\frac{tg^3\alpha}{E_2F_2}\right]E.J.$$

Naar nu Belastningen er bekendt, kan Integralet i Tælleren beregnes, og naar X_a er funden, ere Spændingerne i de forskellige Punkter lette at udtrykke som Funktioner heraf.

Lignende Formler gælde for Hænge- og Sprængeværker, hvilke Konstruktioner ere viste i Kost.

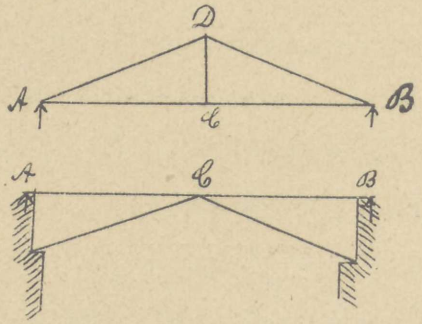
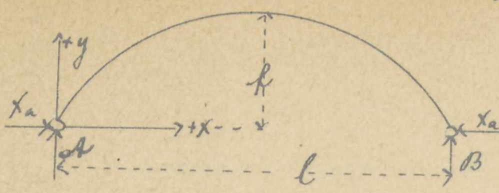


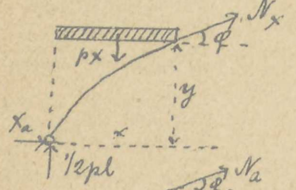
Fig. Hængeværket er blot en omvendt armeret Bjælke; alle Spændingerne efter Stængernes Længderetning skifte Fortegn. Ved Sprængeværket faar Bjælken kun Bøjningsspændinger, og Stiverne meddele deres Sidetryk til Muren. Man tillader sig ofte at beregne disse Konstruktioner tilnærmende, f. Ex. saaledes at man forudsætter Midtpunktet C af Bjælken liggende i samme Højde som A og B;

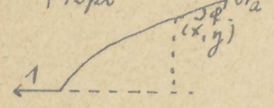
i det Trykket i Stiveren CD (Trækket i Hængesöjlen CD) da det findes ved Clapeyrons Formel. Hvis Bjælken f. Ex. er ensformigt belastet med p pr. Længdeenhed, bliver Trykket i Stiveren CD (Trækket i Hængesöjlen) lig $\frac{5}{8} \cdot p \cdot 2l$ (lig Trykket paa Mellemunderstötningen fra en kontinuerlig Bjælke), og ved Oplösning findes da $S_1 = \frac{5}{8}\, pl \cosec \alpha$ og Trykket (Trækket) i Bjælken (Sidetrykket paa Muren) $= \frac{5}{8}\, pl \cot \alpha$. Största Moment i Bjælken er lig $\frac{1}{8}\, pl^2$ (ved C), största Fiberpaavirkning faas ved Sammensætning af Trykket hermed. –

Ved ovenstaaende nöjagtige Beregning forudsættes, at alle Spændingerne ere Nul i ubelastet Tilstand. Dette er maaske sjældent Tilfældet, idet man ofte indretter det saaledes, at en Efterspænding kan udföres (ved den armerede Bjælke kan Trækbaandenes Længde regüleres, ved Hængeværket kan Bjælken löftes ved Forbindelsen med Hængesöjlen); denne Efterspænding foretages gærne paa fri Haand, og i saa Fald er det klart, at en tilnærmende Beregning er god nok. Tilnærmelsen ovenfor vil i Alm. være paa den sikre Side. –

<u>Ex. 4.</u> En Bue med konstant Tværsnit understöttes paa to Piller ved Hjælp af Charnierer; Belastningen er ensformig fordelt over hele Horizontalprojektionen (p pr. Længdeenhed), Charniererernes Forbindelseslinie er vandret.







Vi indför Reaktionernes vandrette Komposant som X_a. Hovedsystemet er altsaa en (krum) ved begge Ender simpelt understöttet Bjælke. I Punktet (x, y) haves:

$$N_x + X_a\cos\varphi + p(\tfrac{1}{2}l \div x)\sin\varphi = 0,$$

$$N_x = \div p(\tfrac{1}{2}l - x)\sin\varphi \div X_a\cos\varphi.$$

$$M_x = \tfrac{1}{2}plx \div \tfrac{1}{2}px^2 \div X_a y.$$

Hvis kun ɔ: Kraften, $X_a = \div 1$ virker paa Hovedsystemet, haves: $N_a = 1\cdot\cos\varphi$, $M_a = +y$. Hvis $X_a = 0$ faas:

$$N_0 = \div p(\tfrac{1}{2}l - x)\sin\varphi\,,\quad M_0 = \tfrac{1}{2}plx \div \tfrac{1}{2}px^2.$$

Antages nu $\Delta t = 0$ og $\Delta c = \Delta l$ (en given Forlængelse af Afstanden mellem Understötningerne), faas, idet $ds = \sec\varphi\cdot dx$:

$$1.\quad \Delta l = \int_0^l \frac{(\div p(\tfrac{1}{2}l \div x)\sin\varphi)\cos\varphi}{\mathcal{E}F}\sec\varphi\,dx + \int_0^l \frac{(\tfrac{1}{2}plx - \tfrac{1}{2}px^2)y}{\mathcal{E}J}\sec\varphi\,dx$$

$$\div X_a\left[\int_0^l \cos^2\varphi\sec\varphi\,dx + \int_0^l y^2\sec\varphi\,dx\right] + \int_0^l \varepsilon t_0\cos\varphi\sec\varphi\,dx.$$

Her skal nu φ, ds og y udtrykkes som Funktioner af x, hvorefter Integrationerne kunne udföres. Naar X_a derved er bestemt, er Paavirkningen i et vilkårligt Tversnit givet ved de ovenfor opskrevne Udtryk for M_x og N_x. —

§6. I den almindelige Arbejdsligning $\Sigma P.\delta + \Sigma \mathfrak{S}\Delta c = ---$ kan man naturligvis her ved Behandlingen af massive Bjælker tillægge P og δ samme udvidede Betydning som i §3 for Gitterkonstruktioner og alt=

saa ganske i Almindelighed tale om en Belastning P (en eller flere Enkeltkræfter eller Kraftpar) og denne Belastnings Vej δ, saa hele Belastningens virtuelle Arbejde er $P.\delta$.

Endvidere ere Forskydningerne δ lineære Funktioner af Belastningerne (ligesom for Gitterkonstruktioner); for statisk bestemte Bjælker er det nemlig i §4. Slutn. vist, at man finder δ af Ligningen:

$$1.\ \delta_m + \Sigma \mathfrak{C}_1 \Delta c = \int \frac{N_1 N'}{\varepsilon F} d\sigma + \int \frac{M_1 M'}{\varepsilon J} d\sigma + \int N_1 \varepsilon t_0 d\sigma + \int M_1 \varepsilon \frac{\Delta t}{h} d\sigma,$$

hvori $\mathfrak{C}_1$, N_1 og M_1 ere uafhængige af den givne Belastning, medens N' og M' ere lineære Funktioner af denne. For statisk ubestemte Bjælker findes δ ved Hjælp af samme Ligning, idet baade N_1, M_1 og N', M' beregnes ved Elasticitetsligningerne ovenfor, saa ogsaa her gælder Sætningen. — For øvrigt kan man ved Beregningen af N_1 og M_1 sætte alle Størrelser $X = 0$; i den alm. Arbejdsligning $\Sigma P_m \cdot \delta_m + \Sigma \mathfrak{C} \Delta c = \int \frac{N N'}{\varepsilon F} d\sigma + \cdots$ kan man nemlig sætte $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0 \div \mathfrak{C}_a X_a \div \mathfrak{C}_b X_b \cdots$ og N og M analogt hermed, og idet det erindres, at man til Bestemmelsen af X_a, $X_b \cdots$ har benyttet:

$$\Sigma \mathfrak{C}_a \Delta c = \int \frac{N_a N'}{\varepsilon F} d\sigma + \cdots,$$

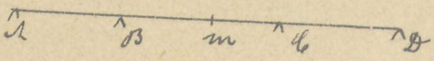
$$\Sigma \mathfrak{C}_b \Delta c = \int \frac{N_b N'}{\varepsilon F} d\sigma + \cdots,$$

faar man ved Indførelse heraf i den alm. Arbejdsligning:

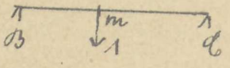
$$\sum P_m \delta_m + \sum C_0 \Delta c = \int \frac{N_0 N'}{EF} d\sigma + \int \frac{M_0 M'}{EJ} \cdot d\sigma + \dots ,$$

og $$1 \cdot \delta_m + \sum C_{0,1} \Delta c = \int \frac{N_{0,1} N'}{EF} \cdot d\sigma + \int \frac{M_{0,1} M'}{EJ} d\sigma + \dots ,$$

<u>Ex.</u> Bestem Nedböjningen δ_m (i lodret Retning) af Punktet m af hostegnede kontinuerlige Drager under en given Belastning.



Man bestemmer först de af Belastningen fölgende Momenter og Normalkræfter, M' og N', som ovenfor lært; dernæst göres Drageren statisk bestemt ved at sætte Störrelserne $X = 0$; disse kunne være valgte paa forskellig Maade, bl. a kan man vælge Momenterne over Mellemunderstötningerne, og sættes disse lig Nul, faar man tre simpelt understöttede Bjælker, af hvilke man kun behöver at betragte den ene. Man lader nu den lodrette Kraft 1 virke i m paa den simpelt understöttede Bjælke BC, bestemmer de heraf fölgende Momenter og Normalkræfter, M_1 og N_1, og har da under Forudsætning af urokkelige Understötninger:



$$1 \cdot \delta_m = \int \frac{N_1 N'}{EF} d\sigma + \int \frac{M_1 M'}{EJ} d\sigma + \dots .$$

Ifölge ovenstaaende kunne vi ligesom i § 3 for Gitterkonstruktioner ogsaa her skrive:

$$\delta_a = \delta_{aa} P_a + \delta_{ab} \cdot P_b + \dots + \delta_{am} P_m + \dots ,$$

og ligeledes kunne vi vise, at Maxwell's Sætning ogsaa gælder for massive Bjælker. Under Forudsætning af urokkelige Understötninger og konstant Temperatur har vi nemlig (idet $\delta_{m,n}$ betegner den af Belastningen $P_n = 1$ fremkaldte Forskydning af m i Retningen P_m):

$$\left.\begin{aligned} 1 . \delta_{mn} &= \int \frac{N_m . N_n}{EF} ds + \int \frac{M_m M_n}{EJ} ds \\ 1 . \delta_{n.m} &= \int \frac{N_n . N_m}{EF} ds + \int \frac{M_n . M_m}{EJ} ds \end{aligned}\right\} \delta_{mn} = \delta_{nm}.$$

Raisonnementet er ganske det samme som i § 3, ligeledes angaaende Sætningens Betydning kunne ganske de samme Bemærkninger göres. —

Det vil fremdeles være klart, at man ogsaa her kan bruge Ligningerne (5) i § 3 til Bestemmelse af X_a, X_b - - - - .

Til Slutning ville vi blot endnu bevise et Par Sætninger, der vise den fuldstændige Analogi med Gitterkonstruktioner; de svare Ord til andet til de to Sætninger om Deformationsarbejdet i § 3, Slutningen. Ligesom vi i § 4 har fundet et Udtryk for en massiv Bjælkes virtuelle Deformationsarbejde, kunne vi finde dens virkelige Deformationsarbejde.

Med Betegnelserne fra § 4 haves dette lig

$A = \int \frac{1}{2} S \Delta ds_v = \frac{1}{2} \int \sigma \frac{\Delta ds_v}{ds_v} . dV$, og ved Indförelse af $\frac{\Delta d\sigma_v}{d\sigma_v} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ (Temperatur konstant): $A = \frac{1}{2}\int \frac{\sigma^2 \cdot dV}{\varepsilon}$ eller

$$A = \int \frac{N^2 d\sigma}{2EF} + \int \frac{M^2 d\sigma}{2EJ}.$$

Vi have nu tidligere set, at $X_a, X_b \cdots$ bestemmes ved (urokkelige Understøtninger forudsættes):

$$\int \frac{N_a \cdot N}{EF} \cdot d\sigma + \int \frac{M_a M}{EJ} \cdot d\sigma = 0,$$

$$\int \frac{N_b \cdot N}{EF} \cdot d\sigma + \int \frac{M_b \cdot M}{EJ} d\sigma = 0,$$

$$- - - - - - - - - - - - ,$$

men idet $N_a = \div \frac{\partial N}{dX_a}$, $N_b = \div \frac{dN}{dX_b}$ o. s. v., kunne disse skrives:

$$\int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial X_a} \cdot d\sigma + \int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{dX_b} \cdot d\sigma = 0$$ og de analoge, og disse Ligninger ere Betingelser for, at A bliver Minimum. <u>De statisk ubestemmelige Størrelser skulle altsaa ogsaa her bestemmes saaledes, at de gøre Deformationsarbejdet til Minimum.</u>

Bestemmelsen af en vis Forskydning δ_m sker jo, som oftere omtalt, ved Ligningen:

$$1 \cdot \delta_m = \int \frac{N'N}{EF} d\sigma + \int \frac{M'M}{EJ} d\sigma$$

(urokkelige Understøtninger og konstant Temperatur forudsat). N' og M' svare til Belastningen $P_m = 1$, N og M til de givne Kræfter $P_1, P_2, \cdots P_n$. Altsaa kan man da sætte:

$$N = N_1 P_1 + N_2 P_2 + \cdots + N' P_m + \cdots$$ og analogt for M, og heraf faas $N' = \frac{\partial N}{\partial P_m}$, $M' = \frac{\partial M}{\partial P_m}$.

Derved bliver Ligningen til Bestemmelse af ∂_m:

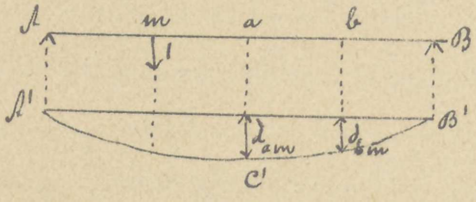
$$\partial_m = \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial P_m} dx + \int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_m} dx = \frac{\partial A}{\partial P_m}.$$

§7. Hidtil er der kun talt om, hvorledes man skal finde de af en given Belastning fölgende Spændinger. Ved Beregning af Brodragere er dette imidlertid ikke tilstrækkeligt; man maa her have fat paa den farligste Stilling af Belastningen og de deraf fölgende störste og mindste Spændinger eller Nedböjninger. For at löse denne Opgave betjener man sig af Influensliniern; har man faaet dem tegnet op – enten det undrejer sig om at finde Grænseværdier for en Formforandring eller en Spænding –, saa er dermed Opgaven löst, ifölge hvad der tidligere er meddelt om Influenslinier og deres Benyttelse.

Konstruktionen af Influenslinierne kunde ske paa den Maade, at man lod Kraften 1 vandre hen over Bjælken (her behandles massive Bjælker og Gitterkonstruktioner under et) og til hver Kraftsstilling bestemte Værdien af den söghe Störrelse, hvorved man altsaa havde fundet Ordinaten i Influenslinien lodret under Kraftstillingen. Dette vilde imidlertid blive altfor vidtlöftigt; men man kan ogsaa altid komme hurtigere til Maalet, nemlig ved Hjælp af Maxwell's Sætning.

Vi ville först behandle Influenslinierne for en eller anden Formforandring og begynde med et Exempel.

Ex. 1. Der søges Influenslinien for Nedbøjningen δ_m i lodret Retning af Punktet m i Bjælken AB (Gitter- eller massiv).



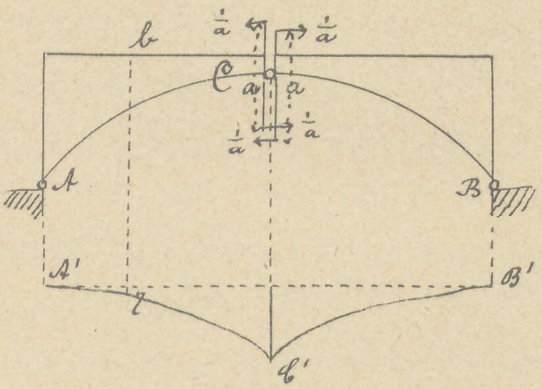
Man har $\delta_m = \delta_{ma} \cdot P_a + \delta_{mb} P_b + \text{----} + \delta_{mn} P_n + \text{----}$, men ifølge Maxwells Sætning kan dette skrives:

$$\delta_m = \delta_{am} P_a + \delta_{bm} P_b + \text{----} + \delta_{nm} P_n + \text{----}$$

og nu betyder Størrelserne δ paa højre Side Nedbøjningerne af Punkterne a, b, --- n, -- alle fremkaldte af Belastningen $P_m = 1$. Man anbringer altsaa den lodrette Kraft 1 i m og konstruerer en Kurve A'C'B', hvis Ordinater fremstille de derved bevirkede Nedbøjninger af Bjælkens forskellige Punkter (denne Konstruktions Udførelse vises i næste Afsnit). Denne Nedbøjningslinie er Influenslinien for δ_m; dens Ordinater ere nemlig δ_{am}, δ_{bm} ---, eller hvad der er det samme δ_{ma}, δ_{mb} ----, og idet man erindrer, at δ_{ma} er Nedbøjningen af Punktet m paa Grund af Kraften 1 i a o.s.v, er det klart, at δ_{ma} netop er Ordinaten i Influenslinien for δ_m i Punktet a. — Overhovedet ligger det i Sagens Natur, at naar man har $\delta_m = \delta_{ma} P_a + \delta_{mb} P_b + \text{----}$, saa ere δ_{ma}, δ_{mb}, --- Ordinaterne i Influenslinien for δ_m i Punkterne a, b . . . ; thi $P_a = 1$, alle andre P. lig Nul, giver $\delta_m = \delta_{ma}$ o. s. v.

Ovenstaaende Bevis er almengyldigt; vilde man holde sig til det specielle Exempel, faas maaske mere forstaaeligt, idet A'C'B' er Nedbøjningslinjen for Belastningen $P_m = 1$: Kraften 1 i m giver Nedbøjningen δ_{am} i a (se Fig.); altsaa giver (jf. Maxwell) Kraften 1 i a ogsaa Nedbøjningen δ_{am} i m o. s. v. —

Ex. 2. Der søges Influenslinien for den gensidige Drejning af Verticalerne paa hver sin Side af Topcharnieret C i en 3-Charniersbue. (Denne Bue er en statisk bestemt Drager, som endnu ikke er omtalt).



De to Linier belastes med hver sit Kraftpar med Momentet 1 (der f. Ex. begge dreje i en saadan Retning, at Vinklen forøges); de derved fremkaldte Spændinger i Gitterstangerne (Momenter og Normalkræfter i den massive Bjælke) beregnes, og ved Hjælp heraf konstrueres den tilsvarende Bøjningslinie A'C'B' (næste Afsnit). Kaldes Ordinaten under Punktet b for η, haves, at Belastningen 1 af de to Linier giver en lodret Nedbøjning i b lig η, altsaa maa en lodret Kraft 1 i b bevirke en Drejning af de to Linier lig η.

Nedböjningsliniem er altsaa Influensliniе for Drejningen. Ordinaterne η betyde altsaa Vinkler (rene Tal); for at bestemme Enhederne (Maalestokken) maa man erindre, at Vinkeldrejningen δ_m ifölge Maxwell findes af $1^{ton. m.} \cdot \delta_m = 1^{ton.} \cdot \eta$, hvorved Maalestokken for δ_m er givet, naar man kender Maalestokken for η. —

Disse Exempler maa være tilstrækkelige til at vise Fremgangsmaaden til Konstruktion af Influenslinier for Formforandringerne; under Ex 1 er taget en almengyldig Bevisförelse. Influensliniеn findes altid som Nedböjningslinie svarende til en eller anden speciel Belastning. —

Metoden kan ogsaa anvendes paa statisk ubestemte Systemer; har man först fundet Nedböjningsliniеn hidrörende fra Belastningsenheden, kan den fortolkes som Influenslinie paa samme Maade; og ved Konstruktion af Nedböjningsliniеn kan man indskrænke sig til at behandle det statisk bestemte Hovedsystem, vel at mærke naar man först har fundet de fra Belastningsenheden hidrörende Forlængelser i det statisk ubestemte System.

Vi gaa dernæst over til Influensliniеrne for Spændingerne i statisk ubestemte Systemer. Man har som tidligere vist:

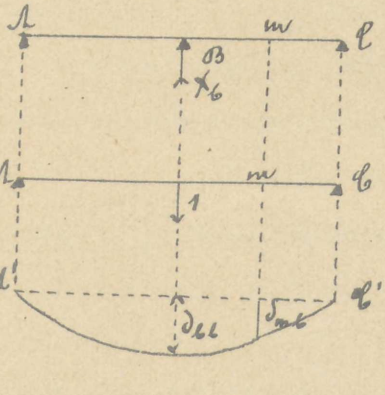
$$S = S_o \div X_a S_a \div X_b S_b - - - - ;$$

$$M = M_o \div M_a X_a \div M_b X_b - - - ;$$

$$- - - - - - - - - - - - - - -$$

Influenslinierne for S_o, M_o, N_o - - - -, d. v. s for Spændinger, Momenter, Normalkræfter ... i det statisk bestemte Hovedsystem, konstrueres efter bekendte Metoder. S_a, S_b, M_a - - - ere Konstanter, uafhængige af Belastningen og dens Stilling. Hvis man altsaa blot kender Influenslinierne for X_a, X_b - - -, kan man let udlede Influenslinierne for S, M, N - - - ved blot at summere (m. H. t. Fortegnet) Ordinaterne i Influenslinierne for S_o, X_a (efter Multiplikation med S_a), X_b (efter Multiplikation med S_b) - - - eller M_o, X_a (efter Multiplikation med M_a), X_b (efter Multiplikation med M_b) - - - -. I det følgende drejer det sig derfor blot om Bestemmelsen af Influenslinierne for X_a, X_b - - - -. Vi ville begynde med nogle Exempler.–

Ex 3. En kontinuerlig Bjælke med 3 Understøtninger. Som statisk ubestemmelig Størrelse indføre vi Reaktionen X_b fra Mellemunderstøtningen.



Ifølge Ligning (5) § 3 have vi:

$$\delta_b = \Sigma P_m \delta_{m,b} \div X_b \delta_{bb} + \delta_{bt},$$

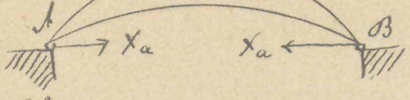
hvori δ_b betyder Forskydningen af B i lodret Retning (Retningen $X_b = \div 1$) i det statisk ubestemte System, altsaa Sænkningen af Pillen B (alle ydre Kræfter forudsættes lodrette); $\delta_{m,b}$ betyder Sænkningen af det vilkaarlige Punkt m i den statisk bestemte

Bjælke AC som Fölge af Belastningen $X_6 = \div 1$, δ_{66} Sænkningen af B i den statisk bestemte Bjælke AC som Fölge af samme Belastning. Antage vi forelöbig δ_6 og δ_{6t} lig Nul, faaes $X_6 = \frac{\Sigma P_m \cdot \delta_{m6}}{\delta_{66}}$, hvorved udtrykkes, at Influensliniem for X_6 i Punktet m har Ordinaten $\frac{\delta_{m6}}{\delta_{66}}$ (virker der kun den ene Kraft 1 i m, faaes $X_6 = \frac{\delta_{m6}}{\delta_{66}}$). δ_{66} er en konstant Störrelse, δ_{m6} varierer derimod med Punktet m, men ifölge Betydningen af δ_{m6} haves alle δ_{m6} fremstillede som Ordinater til Nedböjningslinien for den statisk bestemte Bjælke AC belastet med Kraften 1 nedad i Punktet B. Konstruktionen af denne Nedböjningslinie læres i næste Afsnit; ved at dividere alle dens Ordinater med δ_{66} faaes altsaa Influenslinien for X_6. (Ofte udförer man dog ikke denne Division paa Tegningen, men benytter selve Nedböjningslinien som Influenslinie; de derved fundne Resultater ($\Sigma P\eta$) skulle da bagefter multipliceres med $\frac{1}{\delta_{66}}$; denne Störrelse kaldes „Multiplikator" for Influenslinien).

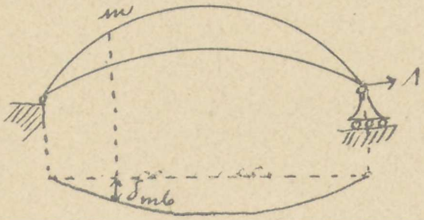
Undersögelsen af en Temperaturvariations Indflydelse eller af Virkningen af en Sænkning af Piller B foretages bedst særskilt, uafhængigt af Influenslinierne. Man har $X_{6t} = \frac{\delta_{6t}}{\delta_{66}}$, og analogt for en Sænkning af B: $X_{6.u} = \div \frac{\delta_6}{\delta_{66}}$.

<u>Ex. 4.</u> Buen med to Charnierer (lodret Belastning).

Horizontaltrykkene paa de to Piller ere ligestore; dette Tryks Störrelse indföre vi som X_a. Det



A og B ligge i samme Höjde.



statisk bestemte Hovedsystem er da en simpelt understöttet Bjælke.

Ligesom ovenfor har vi:

$\delta_a = \sum P_m \delta_{ma} \div X_a \delta_{aa}$, idet vi se bort fra Temperaturvariationer. δ_a betyder Forlængelsen af Afstanden mellem Understötningerne A og B for det statisk ubestemte System, og antage vi Pillerne urokkelige, faaes $\delta_a = 0$ og $X_a = \frac{\sum P_m \delta_{ma}}{\delta_{aa}}$, hvorved udtrykkes, at Influenslinien for X_a i Punktet m har Ordinaten $\frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}$. δ_{ma} betyder Nedböjningen i Punktet m som Følge af Belastningen $X_a = \div 1$ paa Hovedsystemet, δ_{aa} betyder Forlængelsen af Afstanden mellem Understötningspunkterne for Hovedsystemet som Følge af samme Belastning. δ_{aa} er en Konstant, og Kurven med Ordinater δ_{ma} (Nedböjningslinien) er altsaa Influenslinie for X_a med Multiplikator $\frac{1}{\delta_{aa}}$. Konstruktionen af δ_{aa} skal ligesom Konstruktionen af Nedböjningslinierne vises i næste Afsnit, men her ville vi med det samme vise en lidt anden Fremgangsmaade.

I Stedet for at skrive Ligningerne til Bestemmelse af X_a (ingen Temperaturvariationer, og faste Understötninger) som: $\sum P_m \delta_{ma} \div X_a \delta_{aa} = 0$, kan man benytte Formen: $\sum S_0 S_a \rho \div X_a \sum S_a^2 \rho = 0$ for Git=

terkonstruktioner (Lign. (4) i § 2) og

$$\left[\int \frac{N_o N_a}{EF} \cdot ds + \int \frac{M_o M_a}{EJ} \cdot ds\right] \div X_a \left[\int \frac{N_a^2 ds}{EF} + \int \frac{M_a^2 ds}{EJ}\right] = 0 \text{ for}$$

massiv Bjælker (Lign. (4) i § 5).

Naar det drejer sig om at bestemme Influensliniern vil det dog være simplest at skrive det af X_a uafhængige Led som $\Sigma P_m \cdot \delta_{ma}$, derimod kan det ofte vær praktisk at benytte den anden Form for Leddet med X_a.

For Gitterkonstruktioner faas altsaa:

$$\Sigma P_m \cdot \delta_{ma} \div X_a \Sigma S_a^2 \rho = 0 \text{ (analogt for massiv}$$

Bjælker) og deraf $X_a = \frac{\Sigma P_m \delta_{ma}}{\Sigma S_a^2 \rho}$, hvor man beregner $\Sigma S_a^2 \rho$ en Gang for alle.

Störrelsen $1 : \Sigma S_a^2 \rho$ er altsaa Multiplikator for Influensliniern.

Den i disse to Exempler benyttede Fremgangsmaade förer altid til Maalet, saalænge der kun er en statisk ubestemmelig Störrelse, eller saalænge hver af Ligningerne: $\delta_a = \Sigma P_m \delta_{ma} \div X_a \delta_{aa} \div X_b \delta_{ba} \cdots$ og de analoge kun indeholderen af de overtallige Störrelser. For at dette sidste skal være Tilfældet, maa $\delta_{ab} = 0$, $\delta_{ac} = 0$, $\delta_{bc} = 0 \cdots$; man kan nu ganske vist altid vælge Störrelserne X saaledes, at dette er Tilfældet, men dette vilde före os for vidt her; vi komme senere til at benytte denne Metode i et specielt Exem=

pel (Broen uden Charnierer.)

Indeholder hver af Ligningerne mere end en af Störrelserne X, kan man naturligvis komme til Influensliniene (ligesaavel som man kan bestemme Störrelserne X) ved at löse Ligningerne m. H. t. X_a, X_b - - - -

Man deler bedst Undersögelsen saaledes, at man bestemmer Virkningen af de ydre Kræfter for sig ved Hjælp af Influenslinier og Virkningen af en Temperaturvariation eller en Eftergiven af Understötningerne for sig en Gang for alle.

Anvender man til det sidstnævnte Formaal f. Ex Formen (4) i § 2 og § 5 af Elasticitetsligningerne, hvori alle de ydre Kræfter sættes lig Nul, faas for Gitterkonstruktioner (analogt for massive Bjælker):

$$X_a \cdot \Sigma S_a^2 \rho + X_b \Sigma S_a S_b \rho + X_c \Sigma S_a \cdot S_c \cdot \rho + \cdots = \Sigma S_a \varepsilon t s \div \Sigma C_a \Delta c$$

$$X_a \Sigma S_b S_a \rho + X_b \Sigma S_b^2 \rho + X_c \Sigma S_b S_c \cdot \rho + \cdots = \Sigma S_b \varepsilon t s \div \Sigma C_b \Delta c$$

- - - - - - - - - - - - - - - - -

her ere alle Störrelserne undtagen X bekendte, og de kunne altsaa findes.

Til dernæst at finde Influensliniene for de ydre Kræfters Virkning har man Ligningerne:

$$X_a \cdot \delta_{aa} + X_b \delta_{ba} + X_c \delta_{ca} + \cdots = \Sigma P_m \cdot \delta_{ma},$$

$$X_a \cdot \delta_{ab} + X_b \delta_{bb} + X_c \delta_{cb} + \cdots = \Sigma P_m \cdot \delta_{mb},$$

- - - - - - - - - - - - - - - -

hvor dog Konstanterne paa venstre Side godt kunne skrives paa den anden Form $(\Sigma S_a^2 \rho \ldots)$. $\delta_a, \delta_b \ldots$ ere her udeladte; hvis nemlig X_a er en overtallig Re=

aktion sættes ved Konstruktionen af Influensliniernes $\delta_a = 0$, idet en Eftergivning af Understøtningerne undersøges for sig; hvis X_a derimod er en overtallig Spænding e. l., skriver man bedst $\Sigma S_a^2 \rho$ i Stedet for δ_{aa}, $\Sigma S_a S_b \rho$ i Stedet for δ_{ab} o. s. v., idet disse Summer skulle udstrækkes ogsaa over de overtallige Stænger.

Ved Løsning af Ligningerne faar man:

$$X_a = \alpha \Sigma P_m \delta_{ma} + \beta \Sigma P_m \delta_{mb} + \gamma \Sigma P_m \delta_{mc} + \cdots\cdots,$$
$$X_b = \alpha_1 \Sigma P_m \delta_{ma} + \beta_1 \Sigma P_m \delta_{mb} + \gamma_1 \Sigma P_m \delta_{mc} + \cdots,$$
— — — — — — — — — — — — — —

hvor $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1$ - - - - - ere Funktioner af Konstanterne δ_{aa}, δ_{ab} - - -, altsaa uafhængige af Belastningen og dens Stilling, saa de kun behøve at beregnes én Gang for alle. (Ved Løsning af Ligningerne ovenfor til Bestemmelse af Temperaturvariationens Indflydelse benytter man naturligvis de samme Konstanter α, β - - -).

Virker der kun den ene Kraft 1 i Punktet m, blive de dertil svarende Værdier af $X_a, X_b, \ldots$ lig Størrelsen af Ordinaterne $\eta_a, \eta_b \ldots$ i Influensliniene for $X_a, X_b, \ldots$ i Punktet m.

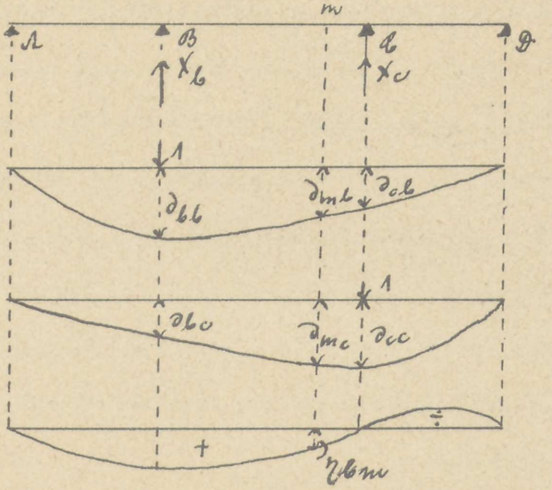
Altsaa: $\eta_a = \alpha\, \delta_{ma} + \beta\, \delta_{mb} + \gamma \cdot \delta_{mc} + \cdots$

$\eta_b = \alpha_1 \delta_{ma} + \beta_1 \delta_{mb} + \gamma_1 \cdot \delta_{mc} + \cdots$

For at faa Influensliniene konstruerer man altsaa de Kurver, hvis Ordinater ere $\delta_{ma}, \delta_{mb} \ldots$, d. v. s. Nedbøjningslinierne for Belastningerne

$X_a = \div 1$, $X_b = \div 1$ - - - virkende paa Hovedsystemet, og disse Kurvers Ordinater adderer man efter at have multipliceret hver med sin af Størrelserne α, β, γ - - - - .

Ex. 5. En kontinuerlig Bjælke med 4 Understøtninger. Som statisk ubestemmelige Størrelser indfør vi Reaktionerne fra de to Mellemunderstøtninger, X_b og X_c.



Uden Hensyn til Temperaturvariationer og Eftergivn af Pillerne har vi:

$$X_b \cdot \delta_{bb} + X_c \cdot \delta_{cb} = \Sigma P_m \cdot \delta_{mb}.$$
$$X_b \cdot \delta_{cb} + X_c \, \delta_{cc} = \Sigma P_m \cdot \delta_{mc},$$

hvoraf

$$X_b = \alpha \, \Sigma P_m \, \delta_{mb} + \beta \, \Sigma P_m \delta_{mc},$$
$$X_c = \alpha_1 \Sigma P_m \cdot \delta_{mb} + \beta_1 \Sigma P_m \, \delta_{mc}.$$

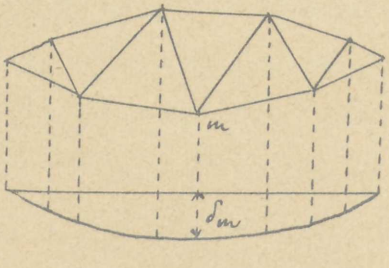
Man tegner (ved Hjælp af næste Afsnit) Nedbøjningslinien for Belastningen $X_b = \div 1$. hvorved findes δ_{mb}, δ_{bb} og δ_{cb}, og Nedbøjningslinien for Belastningen $X_c = \div 1$, hvorved δ_{mc}, δ_{bc} og δ_{cc}; naturligvis skal $\delta_{bc} = \delta_{cb}$. α, β, α_1 og β_1 ere kun Funktioner af de konstante δ_{bb}, δ_{bc} og δ_{cc}, og de ere altsaa bekendte. Nu er Ordinaten i Punktet m i Influenslinien for X_b:

$\eta_{bm} = \alpha \cdot \delta_{mb} + \beta \cdot \delta_{mc}$, saa denne Influenslinie let kan konstrueres; ligesaa Influenslinien for X_c. —

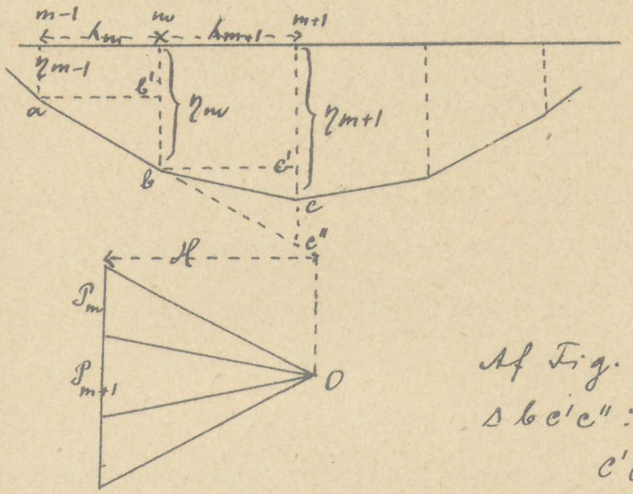
Som det af det nu udviklede vil være klart, kan man fuldstændigt behandle Indvirkningen af en vilkaarlig lodret Belastning paa et statisk ubestemt System, hvis man blot er i Stand til at tegne Nedböjningsliniene for visse specielle Belastninger ($X_a = \div 1$ - - - -), d. v. s. de Kurver, hvis Ordinater angive de af Belastningen fölgende Forskydninger af Systemets Punkter i lodret Retning. Vil man ogsaa kunne behandle Virkningen af vilkaarligt rettede Kræfter, er det nödvendigt at finde Systempunkternes virkelige Forskydninger, ikke blot Forskydningernes lodrette Komposanter. Bestemmelsen af Forskydningerne kan naturligvis ogsaa i og for sig være Formaalet for en Beregning (Nedböjningerne for en Pröve-belastning paa en Brodrager, o. l.). Med Bestemmelsen af disse Forskydninger ville vi nu beskæftige os i det fölgende Afsnit.

Kap. 2. Bestemmelse af Nedböjningerne.

§ 8. Gitterkonstruktioner.



Beregner man for hvert Knudepunkt i en Gitterbjælke den af en eller anden Belastning bevirkede Forskydning i lodret Retning af Knudepunkterne, og afsætter disse Forskydninger som Ordinater ud fra en vandret Axe lodret under det tilsvarende Knudepunkt, faar man ved at forbinde Endepunkterne af Ordinaterne en Polygon, som man kalder Nedbøjningslinien; den kan angive Nedbøjningen af alle Knudepunkterne eller kun af Hovedets eller Fodens.



Denne Nedbøjningslinie kan betragtes som Tovpolygon til lodrette Kræfter med en vilkaarlig Poldistance H.

Af Fig. faas, idet $\Delta\, ab'b \sim \Delta\, bc'c''$:

$$c'c'' = \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m}\, bb'$$

$$cc'' = \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m}(\eta_m \div \eta_{m-1}) \div (\eta_{m+1} \div \eta_m)$$

Ved dernæst gennem et vilkaarligt Punkt O at trække Linier parallele med Nedbøjningsliniens Sider og i Afstanden H fra O indlægge en lodret Linie, faar man en Figur, der som Kraftpolygon svarer til Nedbøjningslinien som Tovpolygon, idet Kraftstørrelserne ere de Længder P_m, P_{m+1} - - - -, der afskæres paa den omtalte lodrette Linie. Vi ville bestemme disse Kraftstørrelser. — Ved Ligedannethed faas:

$$cc'' = P_m \cdot \frac{\lambda_{m+1}}{H}, \text{ altsaa:}$$

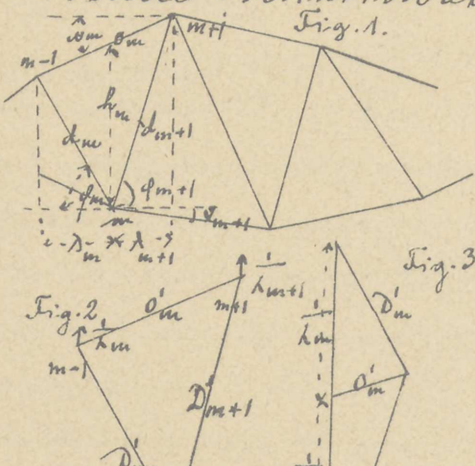
$$P_m = H\left[\frac{\eta_m \div \eta_{m-1}}{\lambda_m} \div \frac{\eta_{m+1} \div \eta_m}{\lambda_{m+1}}\right].$$

Her betyde η_m, η_{m+1} - - - Nedböjningerne i Knudepunkterne m, m+1 - - -, λ_m, λ_{m+1} - - - Fagviddene i Gitterbjælken; H er den vilkaarlige Poldistance, som vi i det fölgende ville sætte lig 1.

Vi kunne nu tegne Nedböjningslinien som en Tovpolygon, hvis vi blot kunne udtrykke Störrelsen af Kræfterne P ved de bekendte Forlængelser af Gitterstængerne; dette skal være Formaalet i det fölgende.

Vi begynde med en <u>Gitterbjælke uden Verticaler</u>. Ifölge ovenstaaende have vi, at Kraften v_m, der skal virke i Punktet m er; $v_m = \frac{\eta_m - \eta_{m-1}}{\lambda_m} \div \frac{\eta_{m+1} \div \eta_m}{\lambda_{m+1}}$, altsaa afhængig af Nedböjningerne i tre paa hinanden fölgende Knudepunkter.

Denne Funktion af Nedböjningerne kan bestemmes ganske paa samme Maade som en enkelt Nedböjning. En saadan findes jo ved at anvende den almindelige Arbejdsligning med en speciel Belastning, hvis virtuelle Arbejde er lig den sögte Forskydning; for at finde den hersögte Funktion af Forskydningerne skulle vi nu blot anvende en saadan Belastning, at dens virtuelle Arbejde er lig den sögte Funktion.



Leddet $\Sigma P\delta$ i Arbejdsligningen bliver da til v_m, og Ligningen hedder nu: $v_m = \Sigma S'\Delta s$, hvor S' ere de til den anvendte Belastning svarende Spændinger, Δs de virkelige Forlængelser. En Belastning med de nævnte Egenskaber faar man ved paa en Gang at anbringe Kraften $\frac{1}{\lambda_m}$ i $m \div 1$, $\frac{1}{\lambda_{m+1}}$ i $m+1$ og $\frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda_{m+1}}$ i m. Störrelsen $\Sigma Q\delta$ (Krafternes virtuelle Arbejde) er nemlig:

$$\div \frac{1}{\lambda_m} \cdot \eta_{m-1} \div \frac{1}{\lambda_{m+1}} \cdot \eta_{m+1} + \left(\frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda_{m+1}}\right)\eta_m = \frac{\eta_m \div \eta_{m-1}}{\lambda_m} \div \frac{\eta_{m+1} \div \eta_m}{\lambda_{m+1}} = v_m;$$

Nu haves altsaa: $v_m = \Sigma S'\Delta s = O'_m \Delta o_m + D'_m \Delta d_m + D'_{m+1} \Delta d_{m+1}$,
idet Δo_m betegner Forlængelsen af Stangen $(m-1) - (m+1)$, hvis Længde er o_m, o.s.v. – Spændingerne O'_m, D'_m og D'_{m+1} er findes ved Diagrammet Fig. 3, hvoraf faas med Betegn. i Fig 1:

$$\frac{O'_m}{\left(\frac{1}{\lambda_m}\right)} = \frac{\lambda_m \sec \omega_m}{h_m}, \quad \frac{D'_m}{\left(\frac{1}{\lambda_m}\right)} = \frac{d_m}{h_m} = \frac{\lambda_m \sec \varphi_m}{h_m}, \quad \frac{D'_m}{\left(\frac{1}{\lambda_{m+1}}\right)} = \frac{\lambda_{m+1} \cdot \sec \varphi_{m+1}}{h_m};$$

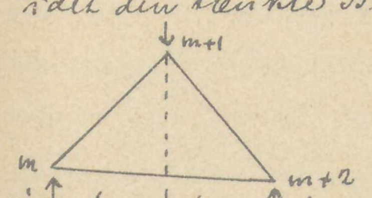
idet nu O'_m er et Tryk, D'_m og D'_{m+1} Træk, og idet Δo_m, Δd_m ... regnes positive, naar de betegne Forlængelser, faas ved Indförelse heraf:

$$(1)\quad v_m = \frac{\div \Delta o_m \sec \omega_m + \Delta d_m \sec \varphi_m + \Delta d_{m+1} \cdot \sec \varphi_{m+1}}{h_m}.$$

Ved en lignende Fremgangsmaade findes for et Knudepunkt i Undelt:

$$(1)\quad v_{m+1} = \frac{+ \Delta \breve{u}_{m+1} \sec \nu_{m+1} \div \Delta d_{m+1} \sec \varphi_{m+1} \div \Delta d_{m+2} \cdot \sec \varphi_{m+2}}{h_{m+1}},$$

idet den tænkte Belastning her bliver den i Fig. viste.



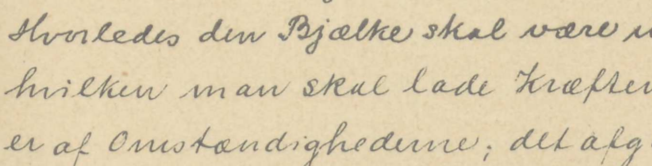
Vinklerne, der indgaa i Formlerne, betegne i ovenstaaende Fig. de spidse Vinkler, og da de kun indgaa med deres sec., er dens positive Retning ligegyldig. Dette vil altid være Tilfældet, naar Verticalen gennem m ligger imellem m-1 og m+1. Undtagelser herfra ere sjældne.

For at bestemme Nedböjningerne for en Gitterbjælke med en given Belastning ved Hjælp af ovenstaaende, beregner man först de af Belastningen fölgende Spændinger O, U, D, dernæst Forlængelserne Δo, Δu, Δd, hvortil haves f. Ex. $\Delta o = \frac{Oo}{EF}$ (o er Længden af Stangen), og danner Udtrykkene v (rene Tal). Naar man saa tegner en Tovpolygon med Poldistance 1 til Kræfterne v virkende i Knudepunkterne, haves dermed Nedböjningslinien.

Endnu mangler man blot en Axe (Slutlinie for Tovpolygonen), hvorfra Nedböjningerne skulle maales, men den faas i Alm. let derved, at man kender Nedböjningen i nogle Punkter (over Understötningerne er Nedböjningen alm. lig Nul, eller i alt Fald er det bekendt, hvormeget Understötningen sænker sig.). —

Hvis man tegner Tovpolygonen med Poldistance 1 (rent Tal, afsættes efter samme Maalestok som Tallene v), faar man Nedböjningerne i Tegningens Længdemaalestok, men derved blive de saa smaa, at man slet ikke kan maale dem. For at faa et brugeligt Resultat maa man have dem multiplicerede med en eller anden Konstant n, hvorfor man maa vælge Poldistancen lig $\frac{l}{n}$. Vil man have Nedböjningerne i sand Störrelse, vælger man blot $\frac{1}{n}$ lig Tegningens Maalestoksforhold. Ved Beregningen af Forlængelserne maa man indföre det fulde Tversnit (uden Fradrag af Nittehuller), men da Nittehullerne dog altid bevirke en Svækkelse, regner man alm. E til kun 1800000 – 2000000 i Stedet for den virkelige Værdi (2000000 – 2150000).

I Stedet for at bestemme Störrelsen af Nedböjningerne ved Tegning, er det ofte bedre at regne. Da Nedböjningerne kunne bestemmes som Ordinater i en Tovpolygon, maa de ogsaa kunne bestemmes som Momenter i en Bjælke, belastet med Kræfterne v. Hvorledes den Bjælke skal være understöttet, paa hvilken man skal lade Kræfterne v virke, afhænger af Omstændighederne; det afgöres ved Sammenligning med Tovpolygonen, specielt med den Maade, hvorpaa Slutlinien indlægges (cfr. I § 28). Er det en Bjælke, der kun naar over én Aabning, (simpelt understöttet Bjælke, Brodrager o. l), hvis Nedböjningen man skal bestemme, vil det være en simpelt understöttet Bjælke, hvorpaa Kræfterne v skulle virke. Er det en <u>Gerberdrager</u>, man behandler, og



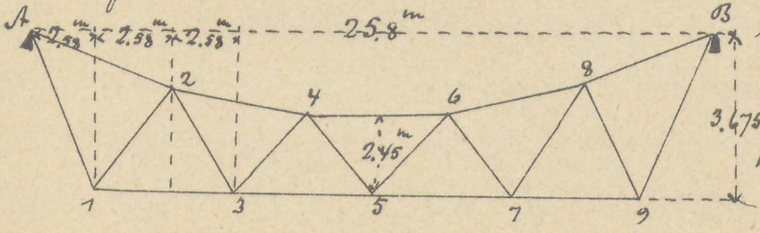
man har faaet tegnet Tovpolygonen A'L'B'M'C'N'D', saa skal Slutlinien indlægges derved, at Nedböjningerne i A. B. C og D er Nül (eller i hvert Fald bekendte; vil man regne maa man helst först antage Nedböjningen lig Nül over Pillerne og bagefter tage særligt Hensyn til eventüelle Sænkninger af disse); man faar derved Slütlinien $B'C'$, hvorved g_1' og g_2' bestemmes, og derved atter $A'g_1'$ og $D'g_2'$; men det ses nü let, at denne Slütlinie er indlagt, ganske som man vilde gjöre det, _hvis Bjælken var ünderstöttet ved g_1 og g_2 og havde Charnierer ved B og C, og Formaalet var at bestemme Momenterne fra Kræfterne v._

Er det en Bjælke, der er forlænget üd over Understötningerne B og C til g_1 og g_2, ses, at man finder Nedböjningerne som Momenter i en af Kræfterne v paavirket Bjælke, der er indspændt ved g_1 og g_2 og har Charnierer ved B og C (ses af Slütliniens Indlæggelse).

Man vil lægge Mærke til, at i de fündne Formler for Kræfterne v indgaa Diagonalerne med _samme_ Fortegn. Nü ville imidlertid Spændingerne i to paa hinanden fölgende Diagonaler som Regel have modsat Fortegn, hvorved ogsaa Fortegnene for Diagonalernes Led i Formlerne for v blive modsatte. Diagonalernes Virkning vil altsaa til dels ophæve hinanden, og man kan derfor, hvis det kün drejer sig om en Tilnærmelse (som ganske vist ikke altid er videre nöjagtig) ganske se bort fra Diagonalerne. Derved blive Kræften

v_m (m i Foden): $v_m = \div \frac{\Delta o_m \cdot \sec \omega_m}{h_m} = \div \frac{\Delta o_m}{r_m}$, idet r_m betegner den vinkelrette Afstand fra m til den lige ovenfor liggende Stang i Hovdet. Paa samme Maade er (for m i Hovdet): $v_m = + \frac{\Delta u_m}{r_m}$. — I alle Tilfælde, hvor Hovdet er trykket, Foden strakt, altsaa Δo negativ, Δu positiv, bliver alle Kræfterne v positive og man kan almindeligt skrive: $v_m = \frac{\Delta s_m}{r_m}$ uden Hensyn til om m ligger i Hovedet eller i Foden. Denne meget simple Formel anvendes meget i det følgende ved Beregning af statisk ubestemte Systemer.

Exempel.



Find Nedbøjningen af alle Knudepunkterne i en Bjælke som i Fig., der er simpelt understøttet i A og B og belastet med 5,3 t pr. m. Drageren er symmetrisk om Vertikalen gennem 5 (den særegne Form hidrører fra, at den indgaar som Led i en større Konstruktion). Vi give Beregningerne i tabellarisk Form:

Stang Nº	Spænding i t	Tværsnit i q. cm.	σ kg. pr. q. cm.	l cm	sec	180. Δl. sec φ	
A - 2	÷ 48	135	÷ 355	522	$\frac{522}{516}$	÷ 18,70	Hoved.
2 - 4	÷ 140	338	÷ 415	518	$\frac{518}{516}$	÷ 21,60	
4 - 6	÷ 183	417	÷ 440	516	1	÷ 22,70	
1 - 3	+ 98	270	+ 363	516	1	+ 18.73	Fod.
3 - 5	+ 172	417	+ 413	516	1	+ 21,33	

Stang No	Spænding i ts.	Tværsnit i qcm.	σ kg. pr. qcm.	l cm.	sec	$180 \cdot \sigma l \cdot \sec\varphi$	
A-1	+82.	225	+365	449	$\frac{449}{258}$	+28,50	Diagonaler.
1-2	÷74	180	÷411	385	$\frac{385}{258}$	÷23,60	
2-3	+60	152	+395	385	"	+22.70	
3-4	÷45	152	÷296	356	$\frac{356}{258}$	÷14,50	
4-5.	+10	76	+132	356	"	+6,50	

Rubrikken σ giver Spændingen pr. Arealenhed, l Længden af Stangen. Tallet i sidste Rubrik er lig $\frac{\sigma . l . \sec\varphi}{10000}$ (φ er Stangens Vinkel med den vandrette); egentlig skulde man beregne Störrelsen $\frac{\sigma . l . \sec\varphi}{E}$, hvor E regnes lig 1800000 (kg. pr. q. cm), men det er bekvemmere (for ikke at faa alt for smaa Tal) at multiplicere alle Störrelser med 180 (undlade at dividere med 180), nemlig hvis man vil tegne Tovpolygonen.

Man skal nu gaa videre med Beregningen af Kræfterne v:

Punkt No	h cm.	Tælleren i Udtrykket for v	v (180. v)
1	327	+18.7 + 28.5 ÷ 23.6 = + 23,60	+0.0722
2	286	+18.73 + 23.6 ÷ 22.7 = + 19,63	+0.0686
3	265	+21,6 + 22.7 ÷ 14,5 = + 29,80	+0.1124
4	245	+21,33 + 14,5 ÷ 6,5 = + 29,33	+0,1198
5	245	+22,7 + 6.5 + 6.5 = + 35.70	+0,1455

Nu faas Nedbøjningslinien som Tovpolygon til de i sidste Rubrik staaende Kraftstörrelser. Disse ere rene Tal, og vi maa derfor vælge en Maalestok for at kunne afsætte dem, f. Ex 1 = 100 m/m. Da Kræfterne ere multiplicerede med 180, skal det samme göres ved

Poldistancen, hvis Tovpolygonens Ordinater skulle blive uforandrede; man skulde altsaa egentlig bruge Poldistancen $180 = 18000$ m/m, men dels er det i og for sig umuligt, dels vilde det give Nedbøjningerne i Tegningens Maalestok, (som vi antage er 1 : 50) altsaa altfor smaa til at kunne maales.

Hvis vi ville have Nedbøjningerne multiplicerede med n, skulle vi vælge Poldistancen lig $\frac{180}{n}$; hvis vi specielt ville have dem i sand Størrelse, sættes $n = 50$, hvorved Poldistancen $= \frac{180}{50} = 3.6 = 360$ m/m. - Her ville vi imidlertid hellere beregne Nedbøjningerne som Momenter i Bjælken AB fra Kræfterne $180 \cdot v$, idet vi benytte den tidligere (II, S. 171) viste Metode til successiv Beregning af Transversalkræfter og Momenter. Man faar:

$$
\begin{array}{rll}
Q_{4-5} = & 0.0727 & = \frac{1}{2} v_5 \\
 & \underline{0.1198} & = v_4 \\
Q_{3-4} = & 0.1925 & \\
 & \underline{0.1124} & = v_3 \\
Q_{2-3} = & 0.3049 & \\
 & \underline{0.0686} & = v_2 \\
Q_{1-2} = & 0.3735 & \\
 & \underline{0.0722} & = v_1 \\
Q_{A-1} = & 0.4457. &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rll}
\frac{M_1}{\lambda} = & 0.4457 & = Q_{A-1} \\
 & \underline{0.3735} & = Q_{1-2} \\
\frac{M_2}{\lambda} = & 0.8192 & \\
 & \underline{0.3049} & = Q_{2-3} \\
\frac{M_3}{\lambda} = & 1.1241 & \\
 & \underline{0.1925} & = Q_{3-4} \\
\frac{M_4}{\lambda} = & 1.3166 & \\
 & \underline{0.0727} & = Q_{4-5} \\
\frac{M_5}{\lambda} = & 1.3893. &
\end{array}
$$

Nedbøjningerne ere nu lig Momenterne, Tallene $\frac{M_1}{\lambda}$ skulle altsaa multipliceres med $\lambda = 258$ cm; men da vi ovenfor have multipliceret Kræfterne v med 180, skulle vi her kun multiplicere med $\frac{258}{180}$.

Der findes da:

Nedböjningen i Punkt 1 = 0,64 cm

— — — — — 2 = 1,18 —

— — — — — 3 = 1,61 —.

— — — — — 4 = 1,88 —

— — — — — 5 = 2,00 —.

Vi gaa dernæst til Behandlingen af en <u>Gitterdrager med Verticaler</u>. Medens Nedböjningslinien ovenfor paa en Gang angav Nedböjningerne af Hovedets og Fodens Knudepunkter, maa vi her behandle Nedböjningerne af Hoved og Fod hver for sig. Fremgangsmaaden er iövrigt ganske den samme som ovenfor; vi anbringe den tænkte Belastning $\frac{1}{\lambda_m}$, $\frac{1}{\lambda_{m+1}}$ og $\frac{1}{\lambda_m}+\frac{1}{\lambda_{m+1}}$ i tre paa hinanden fölgende Knudepunkter af den (Hovedets eller Fodens), hvis Nedböjninger söges; denne Belastnings virtuelle Arbejde er som ovenfor $= \frac{\eta_m \div \eta_{m-1}}{\lambda_m} \div \frac{\eta_{m+1} \div \eta_m}{\lambda_{m+1}}$ og altsaa lig v_m. For at finde v_m behöver vi altsaa blot at opskrive de indre Spændingers Arbejde.

<u>Nedböjningslinien for Foden.</u>

Vi betragte först den i Fig. 1 viste Stilling af Diagonalerne; i Fig. 2 er den tænkte Belastning vist og de Stænger punkterede, der ere spændingsløse. Fig. 3 er Diagrammet, der giver Spændingerne. Derved findes (ved Ligedannethed):

$$O'_m = \div \frac{1}{\lambda_m} \cdot \frac{s_m}{h_m} = \div \frac{\sec w_m}{h_m}, \quad U'_m = + \frac{\sec v_{m+1}}{h_m},$$

$D'_m = +\frac{\sec\varphi_m}{h_m}$, $D'_{m+1} = \div\frac{\sec.\varphi_{m+1}}{h_m}$,

$V'_{m\div1} = \div\frac{1}{\lambda_m}$, $V'_m = +\frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}\cdot h_m}$, idet h'_{m+1} har den i Fig 2 viste Betydning.

Fig. 1.

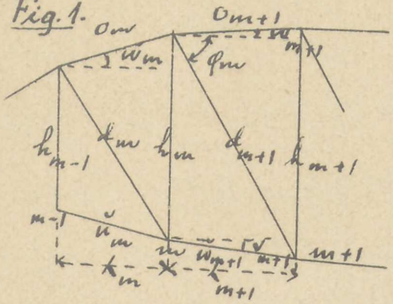


Fig. 2.

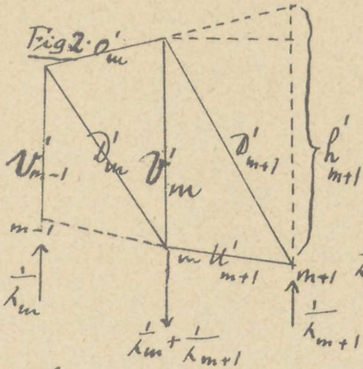
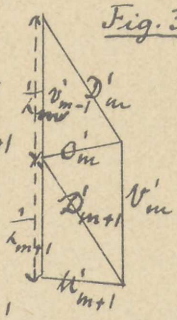


Fig. 3.



Man har nu disse Spændingers Arbejde lig

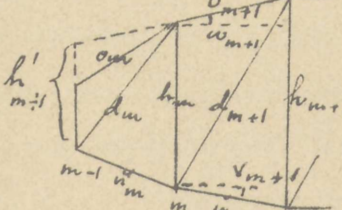
$$v_m = \frac{1}{h_m}\Big[\div\Delta o_m \sec.\omega_m + \Delta u_{m+1}\sec.\nu_{m+1} + \Delta d_m \sec.\varphi_m \div \Delta d_{m+1}\sec.\varphi_{m+1} \div \Delta h_{m-1}\cdot\frac{h_m}{\lambda_m} + \Delta h_m\frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}}\Big],$$

eller kortere, idet vi indfører Betegnelsen $\Delta o_m \sec\omega_m = \Delta' o_m$, $\Delta d_m \sec.\varphi_m = \Delta' d_m$ o.s.v.:

(2). $v_m = \frac{1}{h_m}\left[\div\Delta' o_m + \Delta' u_{m+1} + \Delta' d_m \div \Delta' d_{m+1} \div a_{m-1} + b_m\right]$,

hvor $a_{m-1} = \Delta h_{m-1}\cdot\frac{h_m}{\lambda_m}$, $b_m = \Delta h_m\cdot\frac{h_{m+1}}{\lambda_{m+1}}$.

Ved at gennemføre Beregningerne ganske paa samme Maade for den i Fig viste Stilling af Diagonalerne faaes:



(3) $v_m = \frac{1}{h_m}\left[-\Delta' o_{m+1} + \Delta' u_m \div \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1} \div a_{m+1} + b_m\right]$,

hvor $a_{m+1} = \Delta h_{m+1}\cdot\frac{h_m}{\lambda_{m+1}}$, $b_m = \Delta h_m\cdot\frac{h'_{m+1}}{\lambda_m}$.

Hvis dernæst Diagonalerne har den i hosst. Fig. viste 5: Stilling, faaes af Diagrammet ved Ligedannethed:

$O'_m = \div \frac{sec.\,\omega_m}{h_m}$, $O'_{m+1} = \div \frac{sec.\,\omega_{m+1}}{h_m}$,

Fig. 1.

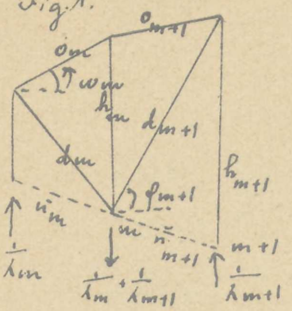
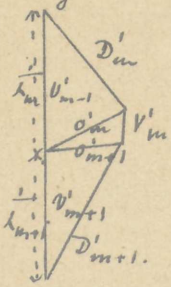


Fig. 2.



$D'_m = +\frac{sec.\,\varphi_m}{h_m}$, $D'_{m+1} = +\frac{sec.\,\varphi_{m+1}}{h_m}$,

$V'_{m-1} = \div \frac{1}{\lambda_m}$, $V'_{m+1} = \div \frac{1}{\lambda_{m+1}}$,

$v'_m = \div O'_m \sin\omega_m + O'_{m+1} \sin\omega_{m+1}$

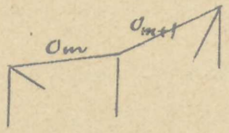
$= +\frac{1}{h_m}(tg\,\omega_m \div tg\,\omega_{m+1})$, og

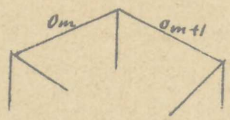
altsaa (4) $v_m = \frac{1}{h_m}(\div \Delta' o_m \div \Delta' o_{m+1} + \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1} + c_m \div a_{m-1} \div a_{m+1})$,

hvor $c_m = \Delta h_m (tg\,\omega_m \div tg\,\omega_{m+1})$, $a_{m-1} = \Delta h_{m-1} \cdot \frac{h_m}{\lambda_m}$,

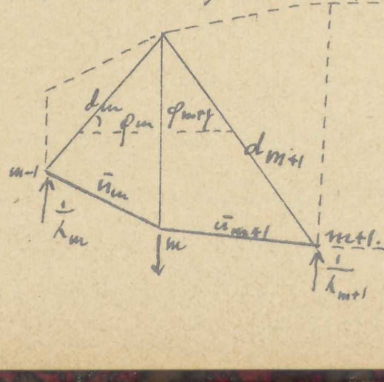
$a_{m+1} = \Delta h_{m+1} \cdot \frac{h_m}{\lambda_{m+1}}$.

I Formlerne ovenfor indgik Vinklerne kun med deres sec., og deres positive Omløbsretning var derfor ligegyldig; her forekommer imidlertid tg., og vi maa derfor vedtage en positiv Retning (Pilen i Fig.) I Fig. 1 ovenfor ere baade ω_m og $\omega_{m+1} > 0$ og $\omega_m > \omega_{m+1}$, hvorfor c_m er > 0; i den øverste af de to hosst. Fig. er c_m derimod negativ, i den nederste faas i Virkeligheden en Addition af de to tg. —





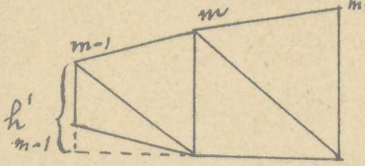
Hvis endelig Diagonalerne indtage den i hosst. Fig. viste Stilling, faas paa samme Maade:



(5): $v_m = \frac{1}{h_m}[+\Delta' u_m + \Delta' u_{m+1} \div \Delta' d_m \div \Delta' d_{m+1} + e_m]$

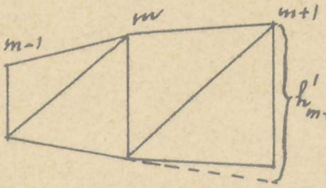
hvor $e_m = \Delta h_m (tg\,\varphi_m + tg\,\varphi_{m+1})$.

Kræfterne v_m, der give Nedbøjningslinien for Hovedet, kunne findes paa ganske samme Maade; vi ville blot opskrive Formlerne.



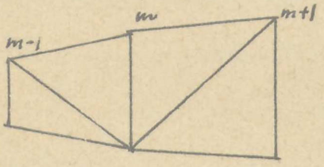
(6): $v_m = \frac{1}{h_m}\left[\div \Delta' o_m + \Delta' u_{m+1} + \Delta' d_m \div \Delta' d_{m+1} \div b_m + a_{m+1}\right]$,

hvor $b_m = \Delta h_m \cdot \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m}$, $a_{m+1} = \Delta h_{m+1} \cdot \frac{h_m}{\lambda_{m+1}}$.



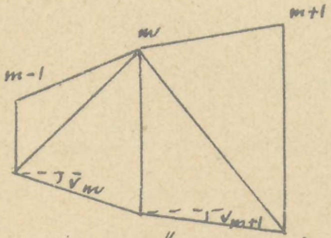
(7): $v_m = \frac{1}{h_m}\left[\div \Delta' o_{m+1} + \Delta' u_m \div \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1} + a_{m-1} \div b_m\right]$,

hvor $a_{m-1} = \Delta h_{m-1} \cdot \frac{h_m}{\lambda_m}$, $b_m = \Delta h_m \cdot \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}}$.



(8): $v_m = \frac{1}{h_m}\left(\div \Delta' o_m \div \Delta' o_{m+1} + \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1} \div e_m\right)$,

hvor $e_m = \Delta h_m (\mathrm{tg}\, \varphi_m + \mathrm{tg}\, \varphi_{m+1})$.

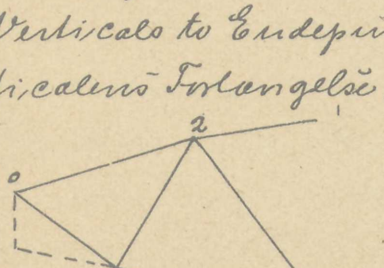


(9): $v_m = \frac{1}{h_m}\left[+ \Delta' u_m + \Delta' u_{m+1} \div \Delta' d_m \div \Delta' d_{m+1} \div c_m + a_{m\div 1} + a_{m+1}\right]$,

hvor $a_{m\div 1} = \Delta h_{m\div 1} \cdot \frac{h_m}{\lambda_m}$, $a_{m+1} = \Delta h_{m+1} \cdot \frac{h_m}{\lambda_{m+1}}$,

$c_m = \Delta h_m (\mathrm{tg}\, v_m - \mathrm{tg}\, v_{m+1})$.

Har man konstrueret Nedbøjningslinien for f. Ex. Hovedet og vil have den for Foden, benyttes den Omstændighed, at den indbyrdes Forskydning af en Verticals to Endepunkter i lodret Retning er lig Verticalens Forlængelse (Forkortelse).



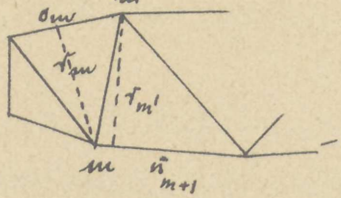
Hvis Hoved og Fod løbe sammen til en Spids over Understøtningerne, (hvis Forholdet f. Ex. er som i hosst. Fig.), maa Stangen 0-1 betragtes som en Diagonal, forat dens Indflydelse paa Formforandringen kun blir regnet med (man kan tænke sig tilføjet to Stænger efter de punkterede Linier med Forlængelserne Nul (uendelig stive).

Til Slutning skal ogsaa her gøres opmærksom paa, at i alle Formler indgaa Gitterstængernes Forlængelser med saadanne Fortegn, at de modvirke hinandens Indflydelse (hvis to i Formlen indgaaende Gitterstængers Forlængelser der have samme Fortegn, vil det vise sig, at deres Spændinger have modsat Fortegn, saa de resulterende Fortegn blir modsatte; ligesaa hvis Fortegnene i Formlerne ere modsatte, have Spændingerne samme Fortegn, saa de resulterende Fortegn ogsaa her blir modsatte.

Man faar derfor en Tilnærmelse ved at se bort fra Gitterstængerne, hvorved Formlerne simplificeres overordentligt.

Man faar da for et Knudepunkt i Foden:

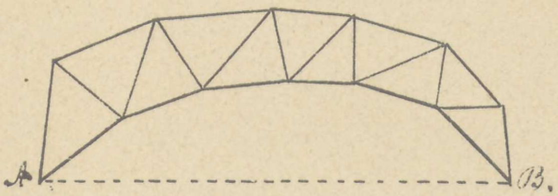
$$v_m = \frac{\div \Delta o_m \sec \omega_m}{h_m} + \frac{\Delta u_{m+1} \sec . \nu_{m+1}}{h_m} = \div \frac{\Delta o_m}{r_m} + \frac{\Delta u_{m+1}}{r_{m'}}.$$



Dette Resultat vilde man ogsaa være kommen til, hvis man til at begynde med forudsatte Stangen $m m'$ ikke lodret og brugte Formlerne for Gitterbjælker uden Vertikaler. Naar Stangen $m m'$ dernæst blev drejet, til den blev lodret, vilde Kræfterne v_m og $v_{m'}$ virke i samme Linie og kunde derfor adderes (se Slutn. af §10)

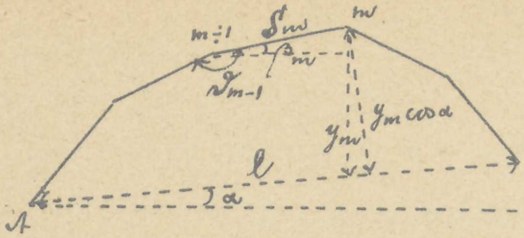
Foruden de ovenfor beregnede lodrette Forskydninger ville vi i det følgende endnu faa Brug for Bestemmelsen af <u>Længdeforandringen af en Korde</u>. Denne kan naturligvis findes ved Benyttelse af den almindelige Arbejdsligning, men en simpel Formel kan ogsaa udledes paa følgende Maade.

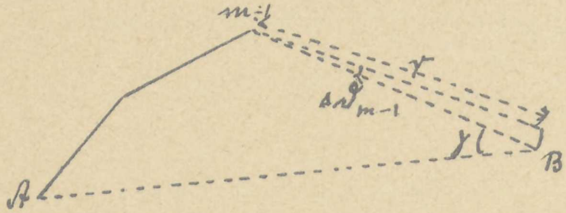
Hvis vi skulle bestemme Forlængelsen af Korden AB, kunne vi tænke os denne Forlængelse hidrørende fra, at den stærkt optrukne



Polygon forandrer baade sine Sidelængder og sine Vinkler, eller vi kunne med andre Ord i Stedet for at betragte hele Gitterkonstruktionen nøjes med at betragte den stærkt optrukne Polygon, naar vi til Gengæld tænke os, at den gør netop saa stor en Modstand mod at forandre sine Vinkler, som de andre Gitterstænger betinge.

Hvis Stangen s_m forlænges med Δs_m, vil som Følge deraf AB forlænges med $\Delta s_m \cos(\beta_m \div \alpha)$, idet AB danner Vinklen α med den vandrette. Hvis Vinklen ϑ_{m-1} vokser med $\Delta\vartheta_{m-1}$, medens alt andet forbliver uforandret, og vi tænke os Stykket A – (m÷1) fastholdt, saa vil Stykket (m-1) – B drejes Vinklen $\Delta\vartheta_{m-1}$, og idet Afstanden (m-1) – B kaldes r, vil B bevæge sig Stykket $r \cdot \Delta\vartheta_{m-1}$.



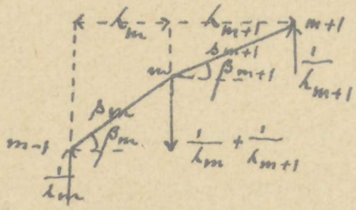


Komposanten heraf efter Linien AB er lig $r \cdot \Delta\vartheta_{m-1} \sin\gamma$, men $r \sin\gamma = y_{m-1} \cos\alpha$, altsaa Forlængelsen af AB lig $y_{m-1} \Delta\vartheta_{m-1} \cos\alpha$.

Vi have nu hele Forlængelsen af AB:

$$\Delta l = \cos\alpha \sum y_m \Delta\vartheta_m + \sum \Delta s_m \cos(\beta_m \div \alpha).$$

Heri ville vi indføre de ovenfor beregnede Kræfter V, ved Hjælp af hvilke de lodrette Nedbøjninger fandtes, og vi maa i den Anledning først udlede et Udtryk for V ved Vinkeldrejningen $\Delta\vartheta$. Vi betragte da et Stykke af Polygonen mellem tre paa hinanden følgende Knudepunkter, og anbringe i disse den i Fig. tænkte Belastning, hvis virtuelle Arbejde, som bekendt, er lig V_m.



De indre Kræfter blive: Spændingen i s_m er: $\div \frac{1}{\lambda_m} \sin\beta_m$, i s_{m+1}: $+ \frac{1}{\lambda_{m+1}} \sin\beta_{m+1}$, og idet Leddet m betragtes som stift, virker der paa hver af Stængerne et Moment 1 $(\frac{1}{\lambda_m} \cdot \lambda_m \dots)$, der søger at forøge Vinklen ϑ_m. Arbejdsligningen giver altsaa:

$$V_m = 1\,\Delta\vartheta_m \div \frac{\Delta s_m}{\lambda_m} \sin\beta_m + \frac{\Delta s_{m+1}}{\lambda_{m+1}} \sin\beta_{m+1} \quad \text{eller}$$

$$V_m = \Delta\vartheta_m \div \frac{\Delta s_m}{s_m} \, tg\,\beta_m + \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \cdot tg\,\beta_{m+1} \dots \quad (10)$$

Ved dette Udtryk kan man finde Nedböjningen af en vilkaarlig Stangpolygons Knudepunkter. Nu skal den her betragtede Stangpolygon imidlertid have samme Nedböjninger som den Gitterkonstruktion, vi gik ud fra, hvorfor Kræfterne v_m maa være de samme. Ved at benytte de for Gitterkonstruktionen beregnede v_m indförer man da den Betingelse, at Vinkelændringerne $\Delta\vartheta_m$ bliver de samme som for Gitterkonstruktionen, og ved Indsættelse af det saaledes fundne $\Delta\vartheta$ i Udtrykket ovenfor findes:

$$\Delta l = \cos\alpha \left[\Sigma y_m v_m + c \right], \text{ hvor}$$

$$c = \Sigma y_m \left[\frac{\Delta s_m}{s_m} \cdot tg\beta_m \div \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} tg\beta_{m+1} \right) + \frac{\Sigma \Delta s_m \cos(\beta_m \div \alpha)}{\cos\alpha}.$$

Til Udtrykket c kommer fra Stangen s_m fölgende Bidrag:

$$(y_m \div y_{m-1}) \frac{\Delta s_m}{s_m} tg\beta_m + \frac{\Delta s_m \cdot \cos(\beta_m \div \alpha)}{\cos\alpha};$$ indföres heri:

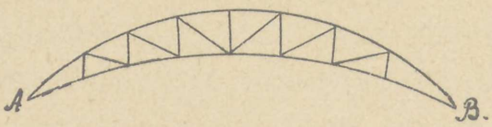
$$y_m \div y_{m-1} = l_m (tg\beta_m \div tg\alpha) = s_m \cos\beta_m \cdot \frac{\sin(\beta_m \div \alpha)}{\cos\beta_m \cdot \cos\alpha} = s_m \frac{\sin(\beta_m \div \alpha)}{\cos\alpha},$$

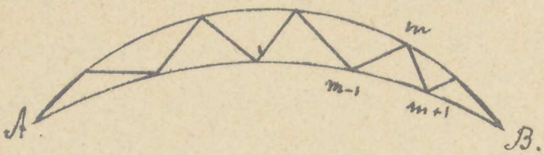
faaes $c = \Sigma \frac{\Delta s_m}{\cos\alpha} \left(\sin(\beta_m \div \alpha) tg\beta_m + \cos(\beta_m \div \alpha) \right) = \Sigma \Delta s_m \sec\beta_m$,

og altsaa: $\underline{\Delta l = \cos\alpha \left[\Sigma y_m v_m + \Sigma \Delta s_m \sec.\beta_m \right]}$ - - - (11)

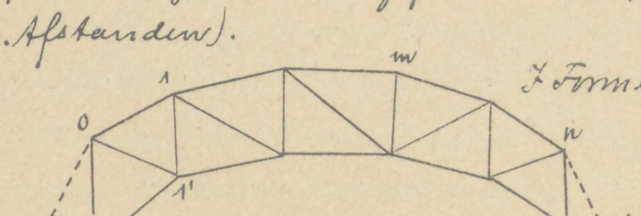
Udtrykket er særlig bekvemt, da baade Störrelserne v og $\Delta s. \sec. \beta$ ere beregnede for at finde de lodrette Nedböjninger. — Ved Benyttelsen er det ganske ligegyldigt, hvorledes man vælger den Stangpolygon, der forbinder A og B (det er kun dens Stænger, der indgaa i $\Sigma \Delta s_m \sec. \beta_m$); kun maa man i=

agttage, at de anvendte Kræfter v ere dem, der giver Nedbøjningerne af den valgte Polygons Knudepunkter.





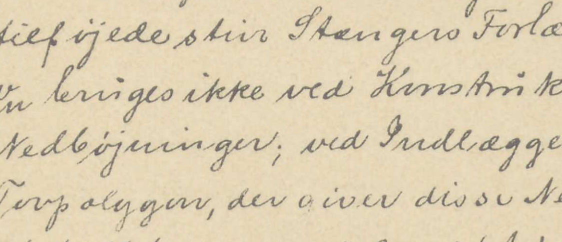
Kender man de Kræfter v, der giver Nedbøjningerne af Foden i øverste Fig., vælger man Foden som den omtalte Polygon; ere v'erne beregnede for Hovedets Knudepunkter, vælger man Hovedet. — I den nederste Fig. er Forholdet lidt anderledes; Kræfterne v, der faas efter Formlen (1) for en Gitterbjælke uden Vertikaler, virke baade i Hovedets og Fodens Knudepunkter og give Nedbøjningerne af begge; man maa derfor vælge den af Gitterstængerne dannede stærkt optrukne Polygon, eller ogsaa, hvad der er simplere, vælge Hoved eller Fod og saa fordele Kræfterne v, der egentlig skulde virke baade paa Hoved og Fod, paa de nærmeste Knudepunkter i den valgte Polygon (altsaa f. Ex. vælge Foden og fordele v_m paa $m \div 1$ og $m+1$ efter Afstanden).



I Formlen for Δl forudsættes, at ingen af Vinklerne β er 90°, hvorved Δl vilde blive uendelig. Imidletid er det ikke saa sjældent, at man har med en Gitterbjælke som i hosstaaende Figur at gøre, og at man kender Kræfterne v for Hovedet, saa man altsaa skulde vælge Polygonen Aom u B, hvori Ao og Bu ere lodrette. Man kan imidlertid omgaa denne Vanskelighed ved at tilføje de absolut stive (uelastiske) Stænger AA', A'o, og BB', B'u. Forlængelsen af A'B' beregnet ved Hjælp af Polygonen A'om u B' er da den samme, som Forlængelsen af AB. I $\Sigma y_m v_m$ kommer der saa blot Led med indeholdende v_o og v_u, der beregnes efter de tidligere udviklede Formler, for Knudepunkterne o og u, idet man blot sætter de tilføjede stive Stængers Forlængelser lig Nul. (v_o og v_u bruges ikke ved Konstruktionen af de lodrette Nedbøjninger; ved Indlæggelsen af Slutlinien i den Tovpolygon, der giver disse Nedbøjninger, erindres, at Nedbøjningen i O er $\Delta(Ao)$ i u $\Delta(Bu)$).

Størrelserne $\Sigma \Delta s_u \sec \beta_u$ forandres ikke ved Tilføjelsen af de stive Stænger, da disses Forlængelser ere Nul.

Ved Hjælp af Formlerne for Δl kan man løse en Opgave angaaende Bestemmelsen af Nedbøjninger, hvortil det tidligere udviklede ikke er tilstrækkeligt, nemlig at bestemme Nedbøjnings-



linien for f. Ex. Hovedet i en Buedrager med 3 Charnierer.

For alle Knudepunkterne (0, 1, 2, --- 6) undtagen 3 kan man beregne v efter de tidligere Formler, men i 3 har man et Charnier. — Nu er det alm. givet, at Vederlagene ved A og B ere urokkelige, altsaa at $\Delta l = 0$ — eller i alt Fald er Δl givet —, og af Ligningen

$$0 = \sum y_{mi} v_m + \sum \Delta s_{mi} \sec \beta_m \quad (AB \text{ er vandret})$$

kan da v_3 beregnes, idet alle andre Størrelser ere bekendte.

Naar v_3 er fundet, lader man Kræfterne v virke paa Bjælken AB (uden Charnier ved 3).

De til en Temperaturvariation svarende Nedbøjninger kunne findes paa samme Maade, som de af en Belastning følgende; man skal blot i Formlerne for Kraftstørrelserne v indføre de til Temperaturvariationen svarende Forlængelser af Stangerne. —

§9. Massive Bjælker.

Det i Begyndelsen af forrige § viste, at Nedbøjningslinien kan betragtes som Tovpolygon til visse Kræfter v virkende i Gitterbjælkens Knudepunkter, gælder naturligvis ogsaa, selv om Afstanden mellem Knudepunkterne bliver uendelig lille, saa de blive konsekutive Punkter af en massiv Bjælkes Axe.

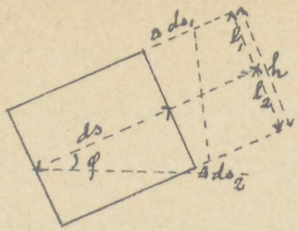
I Slutningen af forrige § er fundet (Ligning (10)), at $v_m = \Delta\vartheta_m \div \frac{\Delta s_m}{s_m} tg\beta_m + \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} tg\beta_{m+1}$ giver Störrelsen af de Kræfter, til hvilke Nedböjningsliniens for en Stangpolygon er Tovpolygon. Den Betragtning, der förte til denne Ligning, gælder, selv om Knudepunkterne rykke uendelig tæt sammen, hvorved Ligningen kan anvendes paa de her betragtede Bjælker. Kaldes Vinklen mellem et Par konsekutive Tangenter til Bjælkens Axe $d\varphi$ (φ er Tangentens Vinkel med den vandrette), saa bliver det Ændringen af $d\varphi$. altsaa $\Delta d\varphi$, der her maa sættes i Stedet for $\Delta\vartheta_m$; s_m erstattes med ds, Δs_m med Δds; der haves da:

$$v_m = \Delta d\varphi + d\left(\frac{\Delta ds}{ds}\cdot tg\varphi\right).$$

v_m er den Kraft, der skal virke i Punktet m, altsaa paa det uendelig lille Stykke $(m-1)$ — m eller paa Længden dx. Fordi Kraften her bliver kontinuerlig fordelt, ville vi hellere have fat paa Störrelsen af Belastningen pr. Længdeenhed (som naturligvis varierer fra Punkt til Punkt og altsaa kan opfattes som Ordinat i en Belastningskurve); kaldes den i Punktet m for z er det ovenfor fundne $v_m = z.dx$, og altsaa:

$$z = \frac{\Delta d\varphi}{dx} + \frac{d\left(\frac{\Delta ds}{ds} tg\varphi\right)}{dx} \;\ldots\ldots\ (1)$$

Vi betragte ~~et~~ ~~en~~ Buelement af en krum Bjælke, hvor Paavirkningen hidrörer fra en Normalkraft N, et böjende Moment M og en Temperaturvariation af den i §4 forudsatte Beskaffenhed (Variationen lig t_0 i den neutrale Axe og Differensen mellem Va=



riationerne t_1 og t_2 i de øverste og nederste Fibre lig Δt). Bueelementets Axe ds vil da forlænges et Stykke $\Delta ds = \frac{N ds}{\varepsilon F} + \varepsilon . t_0 ds$; de øverste og nederste Fibre ville forlænges Stykkerne:

$$\Delta ds_1 = ds\left(\frac{\sigma_1}{\varepsilon} + \varepsilon t_1\right) = ds\left(\frac{N}{\varepsilon F} + \frac{M e_1}{\varepsilon J} + \varepsilon t_1\right) \text{ og}$$

$$\Delta ds_2 = ds\left(\frac{\sigma_2}{\varepsilon} + \varepsilon t_2\right) = ds\left(\frac{N}{\varepsilon F} \div \frac{M e_2}{\varepsilon J} + \varepsilon t_2\right),$$

og Vinklen, som Tværsnittet vil drejes i Forhold til det konsekutive Tværsnit, bliver $\Delta d\varphi = tg(\Delta d\varphi) = \frac{\Delta ds_1 \div \Delta ds_2}{h}$, altsaa:

$$\Delta d\varphi = \frac{ds}{h}\left(\frac{N}{\varepsilon F} + \frac{M e_1}{\varepsilon J} \div \left(\frac{N}{\varepsilon F} - \frac{M e_2}{\varepsilon J}\right) + \varepsilon(t_1 \div t_2)\right) =$$

$$\frac{ds}{h}\left(\frac{M h}{\varepsilon J} + \varepsilon . \Delta t\right) = \left(\frac{M}{\varepsilon J} + \varepsilon . \frac{\Delta t}{h}\right) sec.\varphi . dx.$$

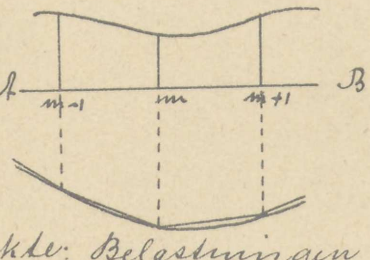
Ved Indsættelse af de fundne Værdier af Δds og $\Delta d\varphi$ i Ligning (1) ovenfor faaes:

$$Z = \frac{d\left[\left(\frac{N}{\varepsilon F} + \varepsilon t_0\right) tg\varphi\right]}{dx} + \left(\frac{M}{\varepsilon J} + \varepsilon . \frac{\Delta t}{h}\right) sec\,\varphi \ldots (2)$$

Man kan nu beregne Værdien af Z svarende til hvert Punkt af Axen og afsætte de fundne Størrelser som Ordinater ud fra en vandret Linie; Endepunkterne bestemme da en Kurve, og til den, som Belastningskurve, svarer Nedbøjningslinien som Tovpolygon. I Stedet for at tegne en Tovpolygon kan man naturligvis beregne Momenter. Det er i Almindelighed for besværligt at regne med det kontinuerligt varierende Z. Vil man konstruere Tovpolygo=

nen til Belastningen z, er man nödt til at erstatte den kontinuerligt fordelte Belastning med enkelte Kræfter, og ogsaa naar man finder Nedböjningerne ved Beregning af Momenter, vil det som oftest være bekvemmest at indföre en Belastning med Enkeltkræfter.

Vi tænke os Bjælkens Axe delt i et Antal Stykker med vandrette Projektioner h_m, h_{m+1} --- ved „Knudepunkterne" m, $m+1$, . . . og vi ville erstatte den kontinuerlige Belastning z med Enkeltkræfter virkende i Knudepunkterne, saaledes at vi i disse Punkter faa de rigtige Nedböjninger. Tænke vi os Belastningen z virkende indirekte paa Bjælken AB, saaledes at dens Tryk kun overförs til Bjælken i m, $m+1$, ---, vil det



være bekendt, at Momenterne m. H. t. Knudepunkterne blir de samme, som om Belastningen virkede direkte: Belastningen z skal altsaa fordeles paa Knudepunkterne, som om den virkede indirekte. Vi vælge altsaa et Antal Knudepunkter paa Bjælkens Axe, tilstrækkelig nær ved hinanden til, at vi kunne betragte Bjælken som retliniet mellem to paa hinanden fölgende; ligesaa betragte vi z-Kurven som retliniet og Tversnit og Inertimoment som konstante mellem Knudepunkterne.

Betegnelserne i det fölgende ere:

M_m — Moment i m

N_m — Normalkraften paa Stykket (m-1) m (konstant Middelværdi).

s_m — Længden af Korden (m-1) — m.

φ_m — Vinklen mellem denne Korde og den vandrette.

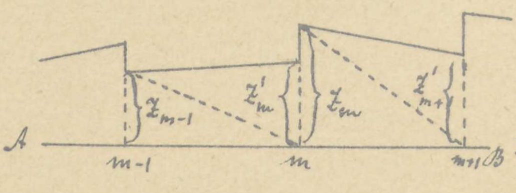
F_m — Tversnittet. } paa Stykket (m-1) — m.

J_m — Inertimomentet. }

y_m — Ordinaten til m.

λ_m — den vandrette Afstand (m-1) — m.

Ved Bestemmelsen af Enkeltkræfterne w i Knudepunkterne ville vi behandle de enkelte Virkninger: Momenter, Normalkraft, Temperaturvariation for sig. Idet vi begynde med Momenternes Virkning alene, er det Ligningen $z = \frac{M}{\varepsilon J}\cdot \sec\varphi$, der skal benyttes for Belastningskurven.



I Fig. er afsat

$$z_{m-1} = \frac{M_{m-1}}{\varepsilon J_m}\cdot \sec\varphi_m,$$

$$z'_m = \frac{M_m}{\varepsilon J_m} \sec\varphi_m,$$

$$z_m = \frac{M_m}{\varepsilon J_{m+1}}\cdot \sec\varphi_{m+1}, \qquad z'_{m+1} = \frac{M_{m+1}}{\varepsilon J_{m+1}} \sec\varphi_{m+1},$$

hvorved den z-Kurve, der skal regnes med, er funden. Hvis Belastningskurvens Areal (= Belastningen) kun trykker paa Bjælken AB i Knudepunkterne (ved Hjælp af Tværbjælker), bliver den Kraft w, der virker i m (ved Deling i Trekanter):

$$w_m = \frac{1}{2}\lambda_m z_{m-1}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\lambda_m\cdot z'_m\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\lambda_{m+1} z_m\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\lambda_{m+1} z'_{m+1}\cdot\frac{1}{3}.$$

eller $w_m = \frac{h_m}{6}(z_{m-1} + 2z'_m) + \frac{h_{m+1}}{6}(2z_m + z'_{m+1})$,

og ved Indførelse af Værdierne for z_{m-1} - - - faas endelig:

$$w_m = \frac{h_m}{6EF_m} \sec\varphi_m (M_{m-1} + 2M_m) + \frac{h_{m+1}}{6EF_{m+1}} \sec\varphi_{m+1}(2M_m + M_{m+1}) \cdots (2)$$

Ved Behandlingen af Normalkraftens Virkning skal bruges Belastningskurven $z = \frac{d\left(\frac{N}{EF}\cdot tg\varphi\right)}{dx}$; men idet denne Omsætning til Enkeltkræfter jo i Virkeligheden betyder en Tilbagevenden til Stangpolygonen med endelige Sidelængder, have vi allerede tidligere fundet Enkeltkræfternes Störrelse:

$\overset{\vee}{u}_m = \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} tg\varphi_{m+1} \div \frac{\Delta s_m}{s_m} \cdot tg\varphi_m$ (Normalkraftens Bidrag til v_m kaldes $\overset{\vee}{u}_m$); ved Indførelse af

$\frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} = \frac{N_{m+1}}{EF_{m+1}}$, $\frac{\Delta s_m}{s_m} = \frac{N_m}{EF_m}$, faas:

$$\overset{\vee}{u}_m = \frac{N_{m+1}}{EF_{m+1}} tg\varphi_{m+1} \div \frac{N_m}{E.F_m} tg\varphi_m \text{ - - - - - - } (3)$$

For at finde en Temperaturvariations Virkning skal man blot i w_m og $\overset{\vee}{u}_m$ i Stedet for $\frac{M\sec\varphi}{EF}$ sætte $\varepsilon.\frac{\Delta t}{h}.\sec\varphi$ og i Stedet for $\frac{N}{EF}$ sætte εt_0; antages t_0 og Δt konstante over hele Længden, faas Bidraget

$$t_m = \frac{\varepsilon.\Delta t}{2}\left(\frac{h_m}{h_m}\sec\varphi_m + \frac{h_{m+1}}{h_{m+1}}\sec\varphi_{m+1}\right) + \varepsilon t_0 (tg\varphi_{m+1} \div tg\varphi_m) \cdots (4),$$

Endelig har man $v_m = w_m + \overset{\vee}{u}_m + t_m$.

For en retliniet Bjælke, der kun er paavirket af böjende Momenter, men ikke af Normalkræfter og Temperaturvariationer, er Belastningskurven:

$$z = \frac{M}{EF}.$$

Dette er i Overensstemmelse med det allerede i I, § 28, viste, at en Bjælkes elastiske Linie er en Tovpolygon med Poldistance 1 til Belastningen $z = \frac{M}{EJ}$ eller med Poldistance $E.J_0$ til Belastningen $z = M.\frac{J_0}{J}$. En lignende Transformation vil det ved variabelt J være praktisk at foretage i de ovenfor givne Udtryk for w_m, u_m - - -; i Stedet for Poldistancen 1 benyttes $E J_0$, og Kræfterne bliver da: $v'_m = w'_m + u'_m + t'_m$, hvor

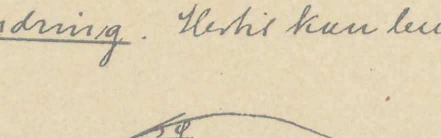
$$w'_m = \frac{l_m}{6}\cdot\frac{J_0}{J_m}\sec\varphi_m(M_{m-1} + 2M_m) + \frac{l_{m+1}}{6}\cdot\frac{J_0}{J_{m+1}}\sec\varphi_{m+1}(2M_m + M_{m+1}),$$

$$u_m = J_0\left(\frac{N_{m+1}}{F_{m+1}}\operatorname{tg}\varphi_{m+1} \div \frac{N_m}{F_m}\operatorname{tg}\varphi_m\right),$$

$$t'_m = \varepsilon.E.J_0\left[\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{l_m}{h_m}\sec\varphi_m + \frac{l_{m+1}}{h_{m+1}}\sec\varphi_{m+1}\right) + t_0(\operatorname{tg}\varphi_{m+1} \div \operatorname{tg}\varphi_m)\right].$$

Det i I, § 28 om Maalestoksforholdet bemærkede gælder ordret ogsaa her; ligeledes angaaende den Bjælke, hvorpaa Kræfterne v skulle virke, for at Nedbøjningerne skulle kunne beregnes som Momenter.

Ligesom ved Gitterbjælker kan der ogsaa her blive Tale om Bestemmelse af en <u>Kordes Længdeforandring</u>. Hertil kan benyttes den almindelige Arbejdsligning, anvendt paa den i Fig. viste, tænkte Belastning og den virkelige Forskydning.



I et vilkaarligt Punkt har man, at den tænkte Belastning frembringer et Moment $M' = 1.y$ og en Normalkraft $N' = 1.\cos\varphi$; altsaa

$$\Delta l = \int \frac{M y\, ds}{E \cdot J} + \int \frac{N \cos\varphi \cdot ds}{E F} + \int \varepsilon \cdot t_0 \cos\varphi\, ds \div \int \varepsilon \cdot \frac{\Delta t}{h} \cdot y \cdot ds$$

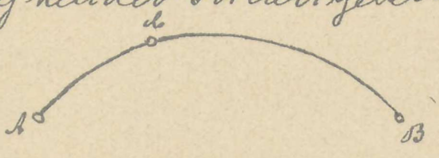
(÷ foran det sidste Led, da Momentet 1. y giver Tryk foroven.)

Et i mange Tilfælde bekvemmere Udtryk faar man ved Indförelse af Kræfterne v, der bruges til Bestemmelse af den lodrette Nedböjning. Den i Slutningen af forrige § givne Udvikling gælder ogsaa for den Stangpolygon med endelige Sidelængder, som vi ved Bestemmelsen af Kræfterne v satte i Stedet for den krumme Bjælke, saa at vi ogsaa her faa:

$$\Delta l = \cos\alpha \left(\Sigma y_m v_m + \Sigma \Delta s_m \sec\varphi_m \right), \quad \ldots \quad (5)$$

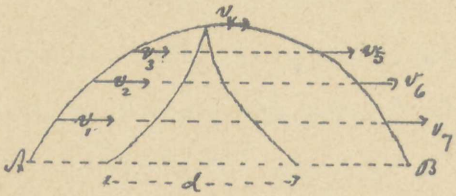
idet AB danner Vinklen α med den vandrette, medens y maales lodret. – Ved Hjælp af denne Formel kan man bl. a. ligesom ved Gitterkonstruktioner behandle det Tilfælde, hvor der er indskudt et Charnier i Bjælken.

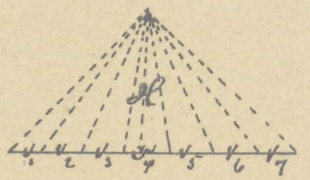
Enhver Böjningslinie, altsaa ogsaa den her betragtede, kan jo betragtes som Tovpolygon. Her kender man blot ikke den Kraft v, som skal virke i Charnieret. Hvis man imidlertid ad anden Vej kender Forlængelsen Δl af en Korde AB (i en Bue



med 3 Charnierer ere A og B Vederlagene; med urokkelige Piller er $\Delta l = 0$), kan man benytte Ligning (5) til Bestemmelse af Kræften v i C.

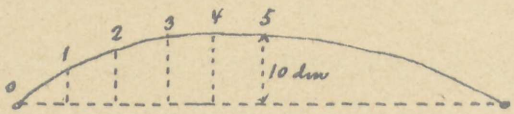
Störrelserne $\cos\alpha\, \Sigma y_m v_m$ kan baade her og ved Behandlingen, af Gitterkonstruktioner fortolkes som det statiske Moment af Kræfterne v m. H. t. Linien AB. Den kan derfor findes ved en Tovpolygon til Kræfterne v, virkende parallelt med AB.

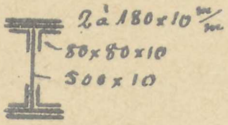




Med Betegnelserne i Fig. faas $H \cdot d = \Sigma v_m \cdot y_m \cos\alpha$. Forövrigt er Beregning almindelig simplere.

<u>Talexempel</u>. En Pladejernsbue (parabolsk) med 10^m Spændvidde og 1^m Pilhöjde belastes med 20 t. i Toppen. Buen har Charnier i Vederlagene; find Nedböjningerne. Ingen Temperaturvariation.





Der regnes med Enhederne ton. og dm. Buen deles ved Knudepunkter med 10 dm Horizontalafstand. Tversnittet antages at være det i Fig. viste, saaledes at der paa Stykket 0-1 ingen Lameller anvendes, paa Stykket 1-3 anvendes en Lamel og paa Stykket 3-5 to.

Tversnittet uden Lameller (uden Fradrag af Nittehüller) er 110 qcm = 1.1 qdm. Inertimomentet J_1 = c 37500 cm^4 = 3.75 dm^4, Tværsnittet med en Lamel er 1.46 qdm, J her c. 5.625 dm^4, med to Lameller Tværsnittet = 1.82 qdm, $J = 7.5$ dm^4. Vi ville beregne Kræfterne w', u', som jo ere lig Kræfterne w, u, multiplicerede med EJ_0. Vi vælge $J_0 = 7.5$ dm^4. Vinkelen φ regnes lig den Vinkel, Korden fra Knudepunkt til Knudepunkt danner med den vandrette. Momenter og Normalkræfter fra den givne Belastning antages beregnede (læres senere) og ere opførte i efterfølgende Tabel.

Knude-punkt No	y i dm	$tg\,\varphi$	$sec\,\varphi$	$\frac{J_0}{F} sec\,\varphi$	M i ts. dm	F i q. dm	N i ts	$\frac{N}{F} tg\,\varphi$
0	0							
		0,36	1,064	2,13		1,1	÷42,6	÷13,94.
1	3,6				÷40			
		0,28	1,041	1,38		1,46	÷41,6	÷7,98.
2	6,4				÷50			
3	8,4	0,20	1,020	1,36	÷28	1,46	÷40,8	÷5,60.
4	9.6	0,12	1,007	1,01	+24	1,82	÷40.2	÷2,65.
5	10,0	0,04	1,001	1,00	+110	1,82	÷40,0	÷0,88.

Heraf faas, idet h er konstant = 10 dm;

$$w'_1 = \div \frac{10}{6}\left[2.13(0+2\times 40) + 1.38(2\times 40+50)\right] = \div 583,67.$$

$$w'_2 = \div \frac{10}{6}\left[1,38\times 140 + 1.36\times 128\right] = \div 612,13.$$

$$w'_3 = \div \frac{10}{6}\left[1,36\times 166 + 1,01\times 32\right] = \div 294,13.$$

$$w'_4 = + \frac{10}{6}\left[1.01\times 20 + 1,01\times 158\right] = +297,0.$$

$$w'_5 = + \frac{10}{6}\left[1.00\times 244 + 1.00\times 244\right] = +813,33.$$

$$u'_1 = 7.5(\div 7,98 + 13.94) \quad - \quad - \quad - \quad = +44.70.$$

$$u'_2 = 7.5(\div 5,60 + 7,98) \quad - \quad - \quad - \quad = +17,85.$$

$$u'_3 = 7,5(\div 2.65 + 5,60) \quad - \quad - \quad - \quad = +22,13.$$

$u'_4 = 7{,}5\,(\div 0{,}88 + 2{,}65)$ - - - - $= +13.27$.

$u'_5 = 7{,}5\,(\div 0{,}88 + 0{,}88)$ - - - - $= +0{,}00$.

og idet $v' = w' + u'$, faaes:

$v'_1 = \div 538{,}97,\ v'_2 = \div 594{,}28,\ v'_3 = \div 272{,}0,\ v'_4 = +310{,}27,\ v'_5 = +813{,}33$

Ved at tegne en Tovpolygon til disse Kræfter med Poldistancen $E.J_0 = 200000 \times 7{,}5 = 1500000$ ($E = 2000000\ \mathrm{kg/qcm} = 200000\ \mathrm{t/qdm}$) findes Nedböjningerne i Tegningens Maalestoksforhold; vil man have dem i sand Störrelse, og Tegningens Maalestoksforhold er 1:50, skal man bruge Poldistancen $\frac{1500000}{50} = 30000$, som afsættes efter samme (forövrigt vilkaarlige) Maalestok som Kræfterne v'. Her ville vi heller beregne Nedböjningerne som Momenter i en Bjælke (med 100 dm Længde) og faa derved:

$Q_{4-5} = \frac{1}{2} v'_5 =$	$+406{,}66$	$\frac{M_1}{\lambda} = Q_{0-1}$	$= \div 688{,}32$
	$\underline{+310{,}27} = v'_4$		$\underline{\div 149{,}35} = Q_{1-2}$
$Q_{3-4} =$	$+716{,}93$	$\frac{M_2}{\lambda} =$	$\div 837{,}67$
	$\underline{\div 272{,}00} = v'_3$		$\underline{+444{,}93} = Q_{2-3}$
$Q_{2-3} =$	$+444{,}93$	$\frac{M_3}{\lambda} =$	$\div 392{,}74$
	$\underline{\div 594{,}28} = v'_2$		$\underline{+716{,}93} = Q_{3-4}$
$Q_{1-2} =$	$\div 149{,}35$	$\frac{M_4}{\lambda} =$	$+324{,}19$
	$\underline{\div 538{,}97} = v'_1$		$\underline{+406{,}66} = Q_{4-5}$
$Q_{0-1} =$	$\div 688{,}32$	$\frac{M_5}{\lambda} =$	$+730{,}85$.

Nedböjningen i 1 er lig M_1, men da vi ovenfor have multipliceret Kræfterne med $E.J_0 = 1500000$, skal der nu divideres dermed; der faas da:

Nedböjningen i $1 = \div \frac{688{,}32 \times 10}{1500000} = \div 0{,}0046$ dm, i 2: $\div 0{,}0056$ dm, i 3: $\div 0{,}0026$ dm, i 4: $+0{,}0022$ dm, i 5: $+0{,}0049$ dm.

§ 10. Almindelige Bemærkninger angaaende Beregningerne ved Nybygning.

I Kap. 1 er det vist, at Konstruktionen af Influenslinierne for de statisk ubestemmelige Störrelser – og derved af Influenslinierne for Spændingerne i et hvilket som helst Punkt af Systemet – afhænger af Bestemmelsen af visse Nedböjningslinier (for $X_a = \div 1$, $X_b = \div 1 \cdots$), og idet nu tilendebragte Afsnit er Konstruktionen af disse Nedböjningslinier fört tilbage til Tegning af Tovpolygoner eller Beregning af Momenter. Imidlertid forudsættes ved Bestemmelsen af Nedböjningslinien alle Tværsnit bekendte, men ved Projekteringsarbejder er det jo netop Bestemmelsen af Tværsnittene, der er Formaalet. Man har derfor kun den Udvej foreløbig at vælge Tværsnittene efter bedste Skön og gennemföre Beregningerne dermed; naar de fundne Resultater da ikke stemme tilstrækkelig godt med de valgte Dimensioner, er der ikke andet at göre end at rette paa disse, vejledet af den förste Beregning, og saa at gentage Beregningen.

Under disse Omstændigheder er det af stor Betydning, at der i alle praktisk forekommende Tilfælde kun angives Simplificationer i Beregningen. Ved de specielle Former af Drager, som vi i det fölgende skulle behandle, faa vi disse Tilnærmelser at se i Enkelthederne, men her ville vi strax angive det alm. Princip for den. – Ved massive Bjælker foretager man, hvis man slet intet ved om Tværsnittenes Variation, den første Beregning under Forudsætning af konstant Tværsnit, og i Almindelighed ogsaa i det man ser bort fra Normalkraftens Indflydelse paa Formforandringerne (den vil i Alm. være lille i Sammenligning med Momentets).

Er der kun en statisk ubestemmelig Störrelse, har man jo til Bestemmelse af Influenslinien for den:

$$\sum P_m \cdot \delta_{ma} \div X_a\left(\int \frac{N_a^2}{EF}\,ds + \int \frac{M_a^2\,ds}{EJ}\right) = 0,$$

hvor δ_{ma} er Ordinaten i m i Nedböjningslinien for Belastningen $X_a = \div 1$. Til Beregning af δ_{ma} benyttes de i §9 bestemte Kræfter $v_m = w_m + u_m$, hvor man dog som oftest kan bortkaste u_m; hvis man i Stedet for v_m benytter v'_m, der er lig $E \cdot J_0 \cdot v_m$, hvorved δ_{ma} er multipliceret med $E \cdot J_0$, maa man ogsaa multiplicere det andet Led i Ligningen ovenfor med EJ_0. I Almindelighed kan man inddele saaledes, at Faglængderne k blive ligestore, og regnes tillige Tværsnittet konstant, altsaa $J_m = J_{m+1}$, saa haves, idet det vilkaarlige J_0 sættes lig det konstante J,

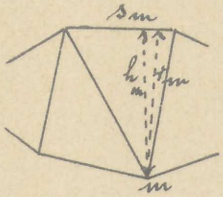
$$v'_m = \frac{k}{6}\sec\varphi_m\left(M_{m-1} + 2M_m\right) + \frac{k}{6}\sec\varphi_{m+1}\left(2M_m + M_{m+1}\right);$$

heri indsættes saa blot de af Belastningen $X_a = \div 1$ fölgende Momenter.

Ved Gitterbjælker gaar Tilnærmelsen först og fremmest ud paa, at man bestemmer Formforandringen, altsaa Kræfterne v, uden Hensyn til Gitterstængerne, kun Hoved og Fod medtages. Har man f. Ex. et Gitter uden Verticaler faas som tidligere bemærket:

$v_m = \div \frac{\Delta O_m \sec \omega_m}{h_m}$ eller $v_m = \frac{\Delta U_m \sec \omega_m}{h_m}$, eftersom m ligger i Hoved eller Fod; almindeligt kunne vi da skrive:

$v_m = \mp \frac{\Delta s_m}{r_m}$, idet r_m er den vinkelrette fra m paa s_m.



Naar heri indføres:

$\mp \Delta s_m = \mp \frac{S_m \cdot s_m}{E \cdot F_m} = + \frac{M_m \, s_m}{E \cdot F_m \cdot r_m}$,

idet $S_m = \mp \frac{M_m}{r_m}$, faas $v_m = \frac{M_m \, s_m}{E \cdot F_m \cdot r_m^2}$.

M_m er Momentet m. H. t. m; $\mp$ er hele Tiden skrevet saaledes, at øverste Fortegn gælder for Spandingen i Hovedet, nederste i Foden; under Forudsætning af at Belastningen $X_a = \div 1$ giver Tryk i Hovedet, Træk i Foden, faas kun + foran M_m.

Det vil nu være praktisk at multiplicere med EF_c, idet F_c betegner et konstant Tversnit (analogt med F_o ovenfor), hvorved $v_m = \frac{M_m \, s_m}{r_m^2} \cdot \frac{F_c}{F_m}$. I Ligningen

$\sum P_m \cdot \delta_{ma} \div X_a \sum S_a^2 \frac{s}{EF} + \sum \varepsilon t \cdot S_a \cdot s \div \sum C_a \Delta c = 0$

bliver derved δ_{ma} multipliceret med EF_c, hvorfor ogsaa de andre Led maa multipliceres hermed.

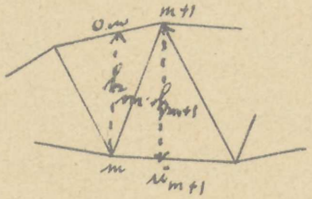
De ydre Kræfters Virkning bestemmes da af:

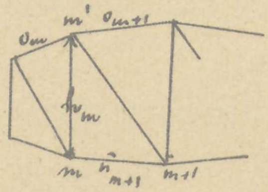
$\sum P_m \cdot \delta_{ma} = X_a \sum S_a^2 \cdot s \cdot \frac{F_c}{F}$, Virkningen af Temperaturforandringer o.s.v. af: $X_a \sum S_a^2 s \frac{F_c}{F} = E \cdot F_c \cdot \sum S_a \varepsilon t \cdot s \div EF_c \sum C_a \Delta c$.

Videre Simplificationer bliver mulige i de specielle Tilfælde; har man saaledes en Parelleldrager med konstant Faglængde, bliver $r = h$ (Højden), $s = \lambda$; man sætter da bedst: $v_m = M_m \cdot \frac{F_c}{F}$, og de ydre Kræfters Virkning bestemmes af:

$$\sum P_m \cdot \delta_{ma} = X_a \cdot \frac{h^2}{\lambda} \sum s_a^2 \cdot s \cdot \frac{F_c}{F},$$ idet alle Leddene i Ligningen skulle multipliceres med $\frac{h^2}{\lambda}$, naar v_m og dermed δ_{ma} multipliceres dermed.

Endnu bemærkes blot, at de i § 8 givne Formler for v_m for Gitterbjælker uden og med Verticaler falde sammen, naar man ser bort fra Gitterstængerne. For





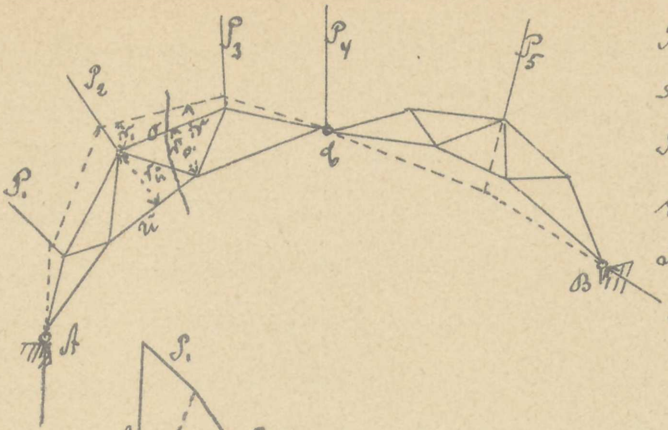
øverste Figur har vi f. Ex.: $v_m = \frac{\div \Delta' o_m}{h_m}$, $v_{m+1} = \frac{+\Delta' u_{m+1}}{h_{m+1}}$; for sidste Figur: $v_m = \frac{\div \Delta' o_m + \Delta' u_{m+1}}{h_m}$, men dette faas ogsaa ved i øverste Fig. at lade Linien $m-(m+1)$ dreje sig hen til den lodrette Stilling, og da Kræfterne v_m og v_{m+1} nu virke i samme Linie, addere dem.

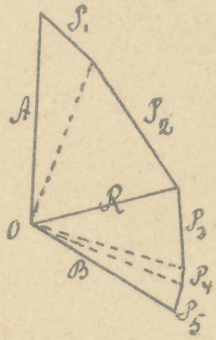
Vi ville nu gaa over til Behandlingen af Buen med to Charnierer (ved Vederlagene); dog maa vi forinden vise, hvorledes Spændingsbestemmelsen udføres i den statisk bestemte 3-Charniersbue.

Kap. 3. Buedragere med 3 eller 2 Charnierer.

§ 11. Buen med 3 Charnierer.

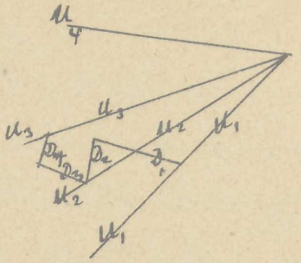
Hvilende Belastning. Spændingerne fra en eller anden vilkaarligt rettet Belastning kunne findes





ved Cülmanns eller Ritters Metoder, saasnart man kender Resültanten af Kræfterne paa den ene Side af Snittet. Resültanten af en Række vilkaarligt rettede Kræfter kan findes ved en Tovpolygon, og specielt er det i I, §44. S. 276 vist, hvorledes man lægger en Tryklinie gennem tre Punkter (Charniererne) og derved paa en Gang finder Reaktionerne A og B og Resültanten af Kræfterne for et hvilketsomhelst Snit. Naar denne Tryklinie er tegnet, finder man f. Ex for Snittet i Fig.: $O = \div \frac{Rr}{r_o}$, $U = + \frac{Rr.}{r_u}$, og ligeledes kan D findes ved at tage Momenterne m. H. t. Skæringspunktet for O og U; dog falder dette Skæringspunkt alm. saa langt borte, at det er bekvemmest kün at bestemme O og U paa denne Maade; Spændingerne D künne saa findes ved at tegne Kraftpolygonerne for Knüdepünkterne.

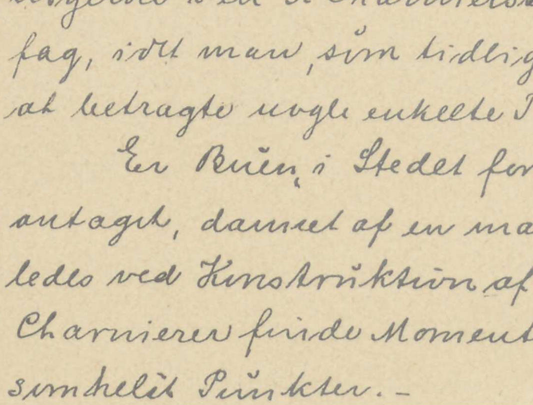
Kraftpolygonerne for f. Ex. alle Fodens Knüdepünkter künne praktisk tegnes i en Figür (se næste Side), idet man begynder med at tegne et Liniebündt parallelt med alle Fodens Stænger (lægges bedst fast ved Regning);



Har man først ved den omtalte Tryklinie faaet Reaktionerne bestemt, kan man naturligvis ogsaa tegne et Diagram for Buen; dog er den første Metode sædvanligvis at foretrække.

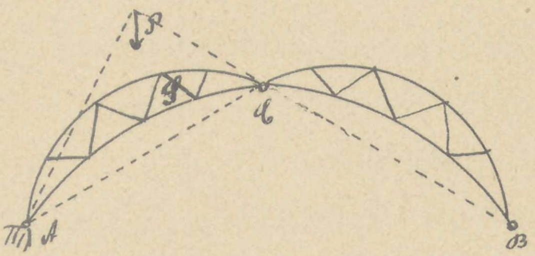
Ved Hjælp af ovenstaaende kan man beregne Spændingerne i en 3. Charnierbue, der anvendes som Sporfag, idet man, som tidligere vist, gerne her nøjes med at betragte nogle enkelte Tilfælde af hvilende Belastning.

Er Buen, i Stedet for som ovenfor nærmest antaget, dannet af en massiv Stang, kan man ligeledes ved Konstruktion af Tryklinien gennem de 3 Charnierer finde Momenter og Normaltryk i hvilkesomhelst Punkter. –

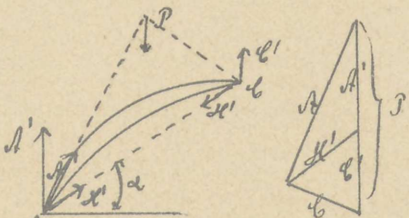


Virker der kun en enkelt Kraft S paa Buen, medens denne iøvrigt tænkes ganske vægtløs, findes Reaktionerne som i Fig. antydet. Naar Stykket BC er ganske ubelastet, maa Reaktionen B og Charniertrykket C fra Stykket AC som de eneste paa BC virkende Kræfter holde hinanden i Ligevægt og følgelig virke i samme Linie BC. Betragtes dernæst Buen ACB som et Hele, maa Kraften S og Reaktionerne A og B som de eneste virkende Kræfter holde hinanden i Ligevægt, altsaa gaa gennem samme Punkt, hvorved Retningslinien for A er bestemt; Størrelsen af A og B findes dernæst ved en Krafttrekant.

Bevægelig lodret Belastning, Influenslinier.



Vi ville undersøge Spændingen i Stangen S. Belastningen antages foreløbig kun at virke mellem A og C og at have Resultanten P; Reaktionen B er da rettet efter BC, og Reaktionen A's Retningslinie gaar gennem Skæringspunktet for P og BC. Vi kunne nu tanke os Reaktionen B flyttet op til C og nøjes med at betragte Stykket AC af Buen. Størrelsen af Reaktionerne A og C findes ved Opløsning af P; dernæst opløses A og C i de lodrette Komposanter A' og C'



og i de ligestore og modsat rettede Kræfter H' efter AC. At de to Kræfter H' blive ligestore ses af Kraftpolygonen; endvidere ses, at denne kan betragtes som Kraftpolygon til ASC som Tovpolygon; AC er da Slutlinien, og heraf følger, at Reaktionerne i lodret Retning

A' og C' ere de samme som dem, man vilde finde, hvis Kraften P virkede paa en i A og C simpelt understøttet Bjælke.

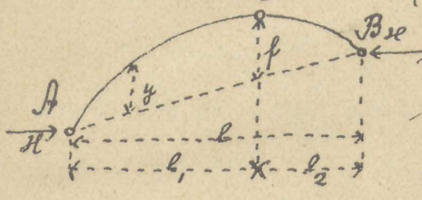
Af det nu udviklede følger, at man kan betragte Spændingerne S (i Stedet herfor kan ogsaa sættes Momentet m. H. t. et eller andet Punkt) som hidrørende fra to Aarsager: fra Belastningen virkende paa den simpelt understøttede Bjælke AC og fra de to Kræfter H'. Man kan altsaa skrive:

$S = S_0 \div S_{H'} H'$, $M = M_0 \div M_{H'} H'$, o. s. v.,

hvor $S_0, M_0, ----$ betegne de Spændinger eller Momenter, der optræde i den simpelt understøttede Bjælke AC som Følge af den lodrette Belastning mellem A og C. (Belastning paa Stykket BC har ingen Indflydelse paa S_0 og M_0) og hvor $S_{H'}, M_{H'}, ----$ betegne de Spændinger og Momenter, der frembringes af Belastningstilstanden $H' = \div 1$ (d. v. s. der virker kun to Kræfter $H' = \div 1$ paa Buen). Størrelserne $S_{H'}, M_{H'} \dots$ ere Konstanter, som let bestemmes, $S_{H'}$ f. Ex. ved et Diagram; $M_{H'}$ m. H. t. Punktet m er lig $1 \cdot z$.

Disse Ligninger gælde først og fremmest for Buen paa den Side af Charnieret, hvor Belastningen virker; men man ser let, at de ogsaa gælde for den anden Halvdel, idet blot her $S_0 = 0$, $M_0 = 0$, ----.

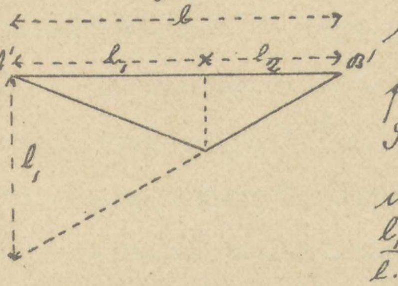
Influenslinierne for S, M, ---- kunne nu findes, hvis man kender Influenslinierne for S_0, M_0 --- og for H'; de førstes Konstruktion er vist tidligere. Influenslinierne for H' eller hellere for H – Buens vandrette Sidetryk paa Pillerne ($H = H' \cos\alpha$) – findes paa fölgende Maade: hvis Charnieret C ikke fandtes – hvis altsaa AB var en sammenhængende Bue –, kunde Momentet m. H. t. et vilkaarligt Punkt skrives: $M = M_0 \div H.y$; M_0 betegner her det fra de ydre Kræfter hidrörende Moment m. H. t. det betragtede Punkt i en simpelt understöttet Bjælke AB; $H.y$ er Virkningen af Pillens Sidetryk paa Momentet



(Belastningen kan tænkes bestaaende dels af de givne lodrette Kræfter, dels af Pillens Sidetryk, og Momentet bliver Summen af de fra hver af disse to Aarsager hidrörende.)

Lader man det Punkt m. H. t. hvilket Momentet tages, falde i Charnieret, og erindrer, at et Charnier medförer den Betingelse, at Momentet deri er Nul, faas: $0 = M_{0,C} \div H.f$, $H = \frac{M_{0C}}{f}$.

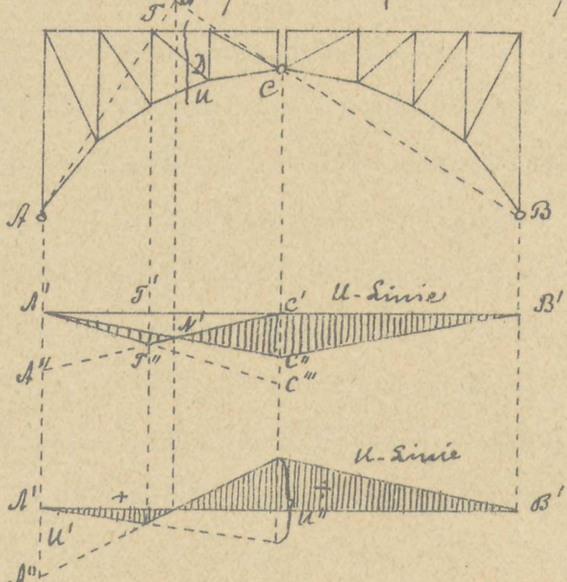
Influenslinien for Momentet i C i den simpelt understöttede Bjælke AB er en Trekant med Toppunkt lodret under C og Höjde $\frac{l_1 l_2}{l}$; Influenslinien for H er altsaa en Trekant med Toppunkt lodret under Charnieret og med Höjde $\frac{l_1 l_2}{l.f}$; for en symmetrisk Bue



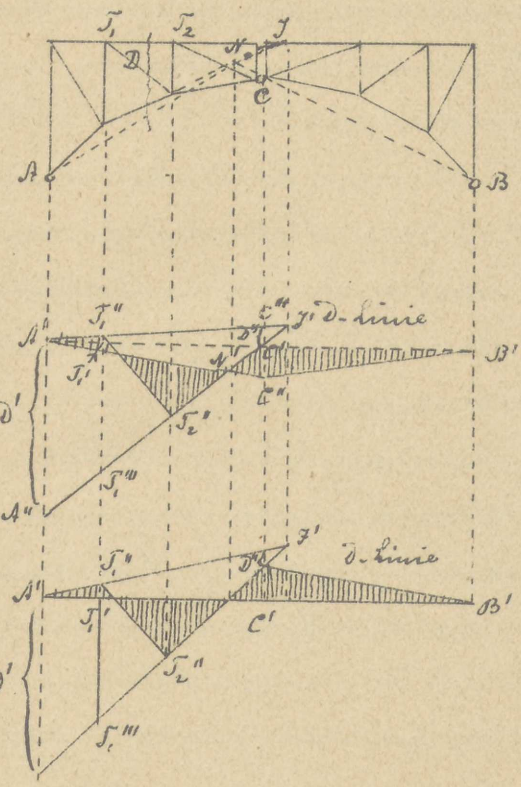
er $l_1 = l_2 = \frac{1}{2}.l$ og Höjden i Influenslinien $\frac{l}{4f}$. Influenslinien for H' er da en Trekant med Höjde $\frac{l_1 l_2}{l.f} \sec\alpha$. –

Man kan nu finde alle Influenslinierne ved Ligningerne ovenfor: til Influenslinien for S_0 adderes Ordinaterne i Influenslinien for H' efterat være multiplicerede med $S_{H'}$.

A'T''C'' er f. Ex. S_0-Influenslinie for Stangen U i Foden af Buen; man afsætter da $C'C'' = \frac{l_1 l_2}{l \cdot f} \sec \alpha \, U_{H'}$, hvorved faas den skraverede Influensflade.



Metoden anvendes ligeledes for Gitterstænger og for Hoved og Fod. For den i Fig. tegnede U-Linie er A'A'' = U', C'C''' = U'' (U' og U'' ere Spændingerne i U hidrørende fra en Belastning, der giver A = 1 eller C = 1). Punktet N' ligger lodret under N, der bestemmes som Skæringspunkt for AT og BC; en lodret Kraft gennem N giver nemlig en Reaktion A, der er rettet efter Linien AT, og da A er den eneste Kraft tilvenstre for Snittet, bliver Momentet m. H. t. T Nul, altsaa Spændingen U = 0. Ved Hjælp af Punktet N faar man en Kontrol paa Tegningens Nøjagtighed, eller man kan undlade at bestemme en af de andre Størrelser (U', U'', $U_{H'}$). Nederste Fig. er Influenslinien afsat ud fra en gennemgaaende retlinet Axe; Betegnelsernehe ere de samme som ovenfor, saa man strax ser, hvorledes U', U'' . . . skulle afsættes for umiddelbart at faa Influenslinien i denne Form.



Influenslinien for D findes ved at afsætte $A'A'' = D'$, $C'C''' = D'$ (Spændingerne i D fra Reaktionerne $A = 1$ eller $C = 1$).

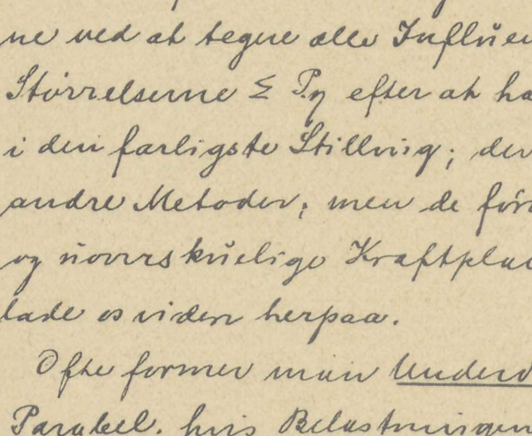
$C'C'' = \frac{l_1 l_2}{l \cdot f} \sec\alpha \, D_H'$.

Punktet N' ligger lodret under Skæringspunktet N for BC og AJ, idet J er Skæringspunktet for de af Snittet trufne Stanger i Hoved og Fod; Kraften 1 i N giver en Reaktion A gennem J, og da J er Momentcentret for D, faar Spændingen Nul i D.

Da $A'T_1''T_2''C'$ er Influenslinie for Spændingen D i den simpelt understøttede Bjælke AC, maa for den gælde de samme Egenskaber, som tidligere er vist for simpelt understøttede Bjælker; derfor maa $A'C'''$ og $A''C'$ skære hinanden lodret under T_1 og $T_1'T_1''$ maa være lig den Spænding i D, der findes ved Opløsning af Kraften 1 efter D og T_1T_2 (Kraften 1 anbringes i T_1, d. v. s. i det belastede Endepunkt af D; til venstre for Snittet virker da denne Kraft 1 og den deraf fremkaldte Reaktion A, og disse to tilsammen frembringe Spændingen $T_{,}'T_{,}''$ i D; hvis den omtalte Reaktion A var den eneste Kraft tilvenstre for Snittet, vilde man faa Spændingen $T_{,}'T_{,}'''$; idet $A = 1$ giver $D = D' = A'A''$; altsaa maa Kraften 1 i $T_{,}$ alene, hvis Reaktionen A ikke findes, give $D = T_{,}''T_{,}'''$). — I den nederste Figur er Influenslinien for D afsat ud fra en gennemgaaende retlinet Axe A'B'; Betegnelserne her er de samme som ovenfor, saa det ses, hvorledes man skal afsætte Störrelserne D', D'', ... for umiddelbart at faa Influenslinien i denne Form.

Man finder bedst og mest anskueligt Spændingerne ved at tegne alle Influenslinierne op og danne Störrelserne ΣP_y efter at have anbragt Belastningen i den farligste Stilling; der kan ganske vist angives andre Metoder, men de före til meget komplicerede og uoverskuelige Kraftplaner, saa vi skulle ikke indlade os videre herpaa.

Ofte former man Underdelen af en Bue efter en Parabel; hvis Belastningen da er ensformig fordelt og dækker hele Længden (antages virkende paa Overdelen) vil den i Begyndelsen af denne § omtalte



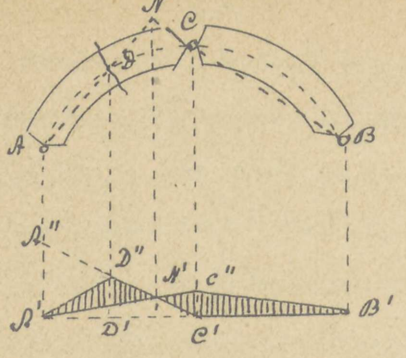
Tovpolygon til Belastningen (Tovkurven) falde sammen med Underdelen; Underdelen er Ligevægtsform svarende til Belastningen. Verticalerne har da kun den Funktion at overföre Belastningens Tryk til Underdelens Knudepunkter, deres Spænding er lig Knudepunktbelastningen. Diagonalerne og Overdelen ere upaavirkede; man kan jo nemlig finde Spændingerne i D og O (se Fig.) af Momenterne m. H. t. d eller c, men Kræfterne tilvenstre for Snittet har deres Resultant beliggende i cd, saa de omtalte Momenter ere Nül.

Heraf fölge nogle Egenskaber ved Influensfladerne (det positive Areal kaldes F_1, det negative F_2):

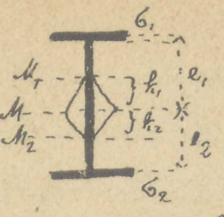
for Overdel og Diagonaler: $F_1 = F_2$,

for Verticaler: $p.(F_1 \div F_2) = \div \frac{1}{2} p (\lambda_m + \lambda_{m+1}) =$ Knudepunktsbelastningen.

Ved Omtalen af Influenslinierne ovenfor er nærmest tænkt paa en Gitterbüe; er Büen massiv, fordres der til Bestemmelse af Dimensionerne Kendskab til Moment og Normaltryk i ethvert Tversnit og specielt til den Kombination af disse to, der giver störste Fiberpaavirkning . Man foretager da bedst en foreløbig Beregning paa fölgende Maade: man gaar üd fra, at Tversnittet bliver stærkest paavirket, naar Momentet bliver saa stort som mülig, og tegner derfor Influenslinier for Momenterne m. H. t. Punkter af Büens Midtlinie. Man har: $M = M_o \div M_{H'} \cdot H'$, A'D"C' er Influenslinien for M_o, idet A'A" = A'D; A'C"B' er Influenslinie for $M_{H'} \cdot H'$, idet C'C" $= \frac{l_1 l_2}{l f} \cdot \sec \alpha \, M_{H'}$; den skra=



vende Flade er da Influensflade for M; N' ligger lodret under Skæringspunktet N for BC og AD. Ved at anbringe Belastningen i sin farligste Stilling findes nu M_{max}; dernæst skal man have fat paa det samtidig med M_{max} optrædende Normaltryk. Dette kunde tænkes fundet ved at tegne Tryklinien gennem A, C og B til den Belastning, der giver M_{max}; men idet Retningen af Tryklinien i de enkelte Punkter aldrig vil afvige meget fra Retningen for Buens Tangent, vil det ved denne foreløbige Beregning være nøjagtigt nok (i alt Fald ved de hyppigst forekommende flade Buer) at sætte $N = H \sec \varphi$, idet φ betyder Vinklen mellem Buens Tangent og den vandrette; heri indsættes den til M_{max} svarende Værdi af H (findes ved Influenslinien for H). Ved Hjælp af de nu fundne M og N bestemmes Dimensionerne, paa den Maade, at man forsøgsvis vælger et Tværsnit og undersøger den resulterende Paavirkning, og man beregner dernæst Afstanden fra Buens Midtlinie til øverste og nederste Punkt af Tværsnittets Kerne (<u>Kerneradius</u> i Buens Plan). Som bekendt (I, S. 169) kan man nu udtrykke Fiberpaavirkningen fra en kombineret Bøjning og central Sammentrykning ved Momenterne m. H. t. Kernepunkterne; man har:



$k_1 = \frac{J}{F e_2}$, $k_2 = \frac{J}{F e_1}$, og sættes

$\frac{J}{e_1} = W_1$, $\frac{J}{e_2} = W_2$, haves:

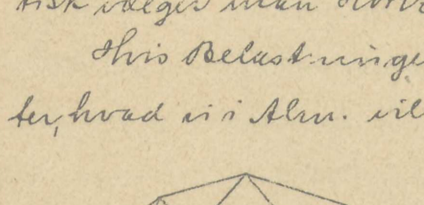
$$\sigma_1 = \pm \frac{M_2}{W_1}, \quad \sigma_2 = \mp \frac{M_1}{W_2}.$$

Naar altsaa k_1 og k_2 ere beregnede for de Tversnit, for hvilke man vil anstille en nöjagtigere Beregning, tegner man Influenslinierne op for M_1 og M_2 (ganske paa samme Maade som for M för, blot at M_H nu faar en anden Værdi) og undersöger, om de derved fremkomne σ_1 og σ_2 ligge indenfor den tilladelige Grænse.

§12. Buen med to Charnierer (ved Vederlagene).

Buen har to faste, simple Understötninger, som begge ere i Stand til baade at give lodrette og vandrette Reaktioner. Der er da – som ogsaa flere Gange udtalt i det foregaaende – en statisk ubestemmelig Störrelse, som naturligvis kan vælges forskelligt; mest praktisk vælger man Horizontaltrykket H.

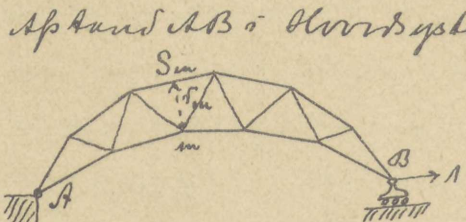
Hvis Belastningen kun bestaar af lodrette Kræfter, hvad vi i Alm. ville gaa ud fra i det fölgende,



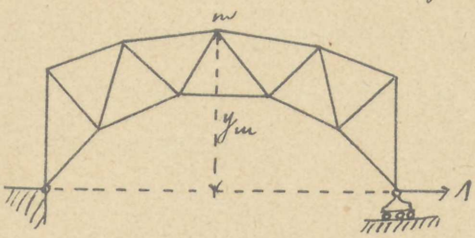
kunne Reaktionerne oplöses i de lodrette Komposanter A og B og i de ligestore og modsat rettede Komposanter H' efter Charniererenes Forbindelseslinie. De lodrette

Komposanter have de samme Störrelser, som hvis Buen var simpelt understöttet i A og B (uden Sidetryk), idet de bestemmes ved Momenterne m. H. t. A og B; ved Projektion paa en vandret Linie findes, at de to Kræfter H' ere lige store. – Ved Horizontaltrykket forstaas H = H' cos α; naar dette indföres som den statisk ubestemmelige Störrelse, bliver Hovedsystemet en i A og B simpelt understöttet Bjælke. For at kunne finde Influensliniene for Spændinger, Momenter o.s.v., gælder det först om at bestemme Influenslinien for H, og hermed ville vi da forelöbig beskæftige os, idet vi dog ville forudsætte, at Charniererne ligge i samme Höjde. Indflydelsen af en Temperaturvariation og af eftergivende Piller ville vi senere undersöge særskilt; forelöbig tænke vi os Pillerne urokkelige og Temperaturen konstant.

1. <u>Gitterbue</u>. I § 7, Ex. 4 er vist Fremgangsmaaden til Bestemmelsen af Influenslinien for H: Ordinaterne i Influenslinien ere $\frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}$ eller $\frac{\delta_{ma}}{\sum S_a^2 \frac{s}{EF}}$; δ_{ma} er Ordinaten i Nedböjningslinien for Hovedsystemet belastet med $H = \div 1$, δ_{aa} er Forlængelsen af den vandrette Afstand AB i Hovedsystemet som Fölge af samme Belastning; S_a er Spændingen i Hovedsystemets Stænger for samme Belastning. I § 8 er det vist, hvorledes man skal bestemme δ_{ma} og δ_{aa},



hvis man kender Dimensionerne af alle Stænger, og i § 10 er det almindelige Tilnærmelsesprincip omtalt, som man slaar ind paa, naar Formaalet er en Dimensionsbestemmelse. Ser man herefter saa bort fra Gitterstængernes Indflydelse paa Formforandringerne, kan man bestemme δ_{ma} som Momenter i den simpelt understøttede Bjælke AB, belastet med Kræfterne $v_m = \mp \frac{\Delta s_m}{r_m}$ (se § 10, $\mp$ gælde for $\left\{\begin{matrix}\text{Hoved}\\ \text{Fod}\end{matrix}\right.$), hvor Δs_m betyde Forlængelserne af Stængerne i Hoved eller Fod i Bjælken AB belastet med $H = \div 1$. Man har $\Delta s_m = \frac{S_m s_m}{E F_m}$ og $S_m = \mp \frac{M_m}{r_m}$, idet M_m er det af Kraften $H = \div 1$ fremkaldte Moment m. H. t. Knudepunktet m. Af hosst. Fig.



faas $M_m = +1 \cdot y_m$, og ved Indførelsen heraf endelig:

$$v_m = \mp \frac{S_m s_m}{r_m \cdot E F_m} = \frac{M_m s_m}{r_m^2 \cdot E F_m} = \frac{y_m \cdot s_m}{r_m^2 \cdot E F_m}$$

Det vil som ogsaa i § 10 berørt for det følgendes Skyld være praktisk at multiplicere Kræfterne v med EF_c, hvor F_c betyder et eller andet konstant Middeltværsnit; derved faas: $v_m = \frac{y_m s_m}{r_m^2} \cdot \frac{F_c}{F_m}$.

Dernæst skulle vi bestemme δ_{aa} eller $\Sigma S_a^2 \frac{s}{EF}$. I § 8 Ligning (11) har man fundet Længdeforandringen af en Korde:

$$\Delta l = \cos\alpha \left[\Sigma y_m v_m + \Sigma \Delta s_m \sec\beta_m \right].$$

Sidste Led i Parenthesen refererer sig til Stængerne i en brækket Linie, der forbinder Kordens Endepunkter, hvis vi hertil vælge den af Diagonalerne sammede

Polygon, og hvis vi saa se bort fra Diagonalernes Længdevariationers Indflydelse paa Δl, faas (i det α forudsættes lig Nul): $\delta_{aa} = \Delta l = \sum y_m v_m$.

Samme Resultat komme vi til for Værdien af $\sum S_a^2 \frac{s}{EF}$; Spændingen S_a fra Belastningen $H = \div 1$ er ovenfor fundet at være lig $\mp \frac{y}{r}$ for $\left\{\begin{matrix}\text{Hovd}\\ \text{Fod}\end{matrix}\right.$; altsaa:

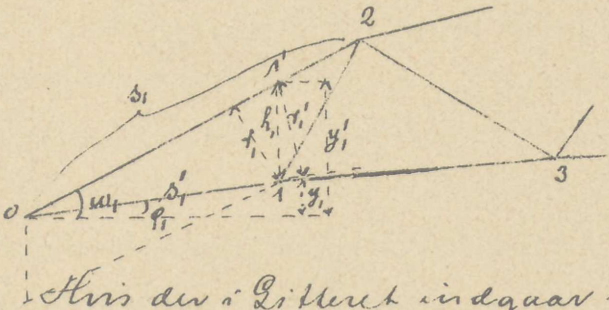
$$\sum S_a^2 \frac{s}{EF} = \sum \frac{y^2 s}{r^2 EF} = \sum y \cdot v = \sum z_m.$$

Naar man bruger denne Form, hvori Kræfterne v indgaa, kan man multiplicere Kræfterne v med vilkaarlige Faktorer, idet saa baade Tæller og Nævner i $\frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}$ multipliceres dermed.

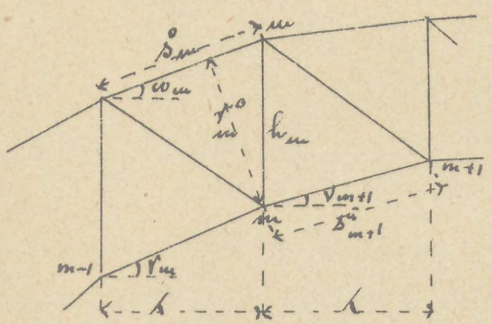
<u>Fremgangsmaaden til Bestemmelse af Influensliniеn for H er altsaa følgende</u>: man beregner Størrelserne $v_m = \frac{y_m \cdot s_m}{r_m^2} \cdot \frac{F_c}{F_m}$, lader dem virke som Kræfter paa den simpelt understøttede Bjælke AB og beregner Momenterne m. H. t. Knudepunkterne; disse Momenter, divideret med den konstante Størrelse $\sum y_m \cdot v_m$, ere da Ordinaterne i Influensliniеn lodret under Knudepunkterne, og imellem Knudepunkterne er Influensliniеn retliniet.

En Undtagelse fra den nu angivne Regel for Beregningen af Kræfterne v danner Knudepunkt 1 i en Bjælke som i nedenstaaende Fig., hvor Hovd og Fod løbe sammen til en Spids; efter Reglen ovenfor faar man ikke Indflydelsen af 0–1's Længdeforandring med. Man kan da som ovenfor antydet i § 6, tænke sig et Par uendelig stive Stænger tilföjede, saa 0-1 bliver til en Diagonal, og i saa Fald faas efter de alm. Formler i § 8:

$$v_1 = \div \frac{\Delta S_1 \sec. w_1 + \Delta S_1' \sec. \varphi_1}{h_1} = \div \frac{\Delta S_1}{r_1} + \frac{\Delta S_1'}{r_1'} = \frac{y_1 s_1}{r_1^2 \varepsilon . F_1} + \frac{y_1' s_1'}{r_1'^2 . \varepsilon F_1'}$$; ved Multiplikation med $\varepsilon . F_c$ faas da $v_1 = \frac{y_1 s_1}{r_1^2} . \frac{F_c}{F_1} + \frac{y_1' s_1'}{r_1'^2} . \frac{F_c}{F_1'}$, et Resultat, som man kan tænke sig fremkommet ved, at der ligger et Knudepunkt 1' lodret over 1, og at Kraften v svarende til dette Punkt er adderet til Kraften v svarende til Knudepunkt 1. –



Hvis der i Gitteret indgaar Verticaler, komme to og to af de ovenfor beregnede Kræfter v til at ligge i samme Lodrette, hvorfor man bedst sammensætter dem til en Kraft z.



Ordinaten y til Knudepunkt m i Hovedt. betegnes $\overset{o}{y}_m$, i Foden $\overset{u}{y}_m$; Faglængden λ antages konstant.

Indføres: $\overset{o}{s}_m = \lambda \sec w_m$, $\overset{u}{s}_m = \lambda \sec v_m$, $\overset{o}{r}_m = h_m \cos w_m$ o.s.v.

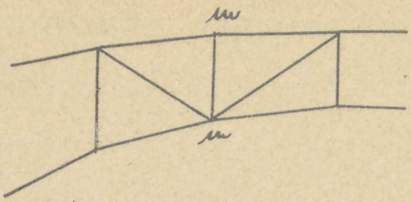
faas:

$$v_m = \overset{o}{y}_m \frac{\lambda \sec v_{m+1}}{h_m^2 \cos^2 v_{m+1}} . \frac{F_c}{\overset{u}{F}_{m+1}} + \overset{u}{y}_m \frac{\lambda \sec w_m}{h_m^2 \cos^2 w_m} . \frac{F_c}{\overset{o}{F}_m}$$

$$\text{eller } v_m = \frac{\lambda}{h_m^2} \left[\overset{o}{y}_m \sec^3 v_{m+1} \frac{F_c}{\overset{u}{F}_{m+1}} + \overset{u}{y}_m \sec^3 w_m \frac{F_c}{\overset{o}{F}_m} \right] \text{ og}$$

$$z_m = \frac{\lambda}{h_m^2} \left[\overset{o}{y}{}_m^2 \sec^3 v_{m+1} \frac{F_c}{\overset{u}{F}_{m+1}} + \overset{u}{y}{}_m^2 \sec^3 w_m . \frac{F_c}{\overset{o}{F}_m} \right]$$

Med en Ordning af Diagonalerne som i hosst. Fig. faas:

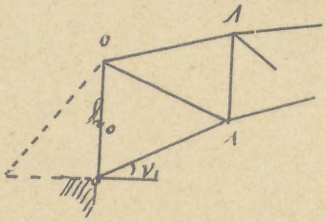


$$v_m = y_m^u \frac{h}{h_m^2}\left[\sec^3 \omega_m \frac{F_c}{F_m^o} + \sec^3 \omega_{m+1} \frac{F_c}{F_{m+1}^o}\right],$$

og hvis to Diagonaler udgaa fra det øverste Knudepunkt m:

$$v_m = y_m^o \frac{h}{h_m^2}\left[\sec^3 v_m \frac{F_c}{F_m^u} + \sec^3 v_{m+1} \frac{F_c}{F_{m+1}^u}\right].$$

Ved Beregningen af $\Sigma y_m v_m = \Sigma z_m$ er der endnu en Ting at mærke, hvis Drageren afsluttes med en Vertical for Enden, idet man da ikke faar Indflydelsen af Stangen 0-1 i Foden med. Man kan da tænke sig de uendelig stive (punkterede) Stænger tilføjede, og idet for disse $F = \infty$, faas:



$$v_0 = \frac{h}{h_0} \sec^3 v_1 \frac{F_c}{F_1^u}, \quad z_0 = h \sec^3 v_1 \frac{F_c}{F_1^u} \quad (h_0 = y_0^o)$$

v_0 bruges ikke, kun z_0 benyttes.

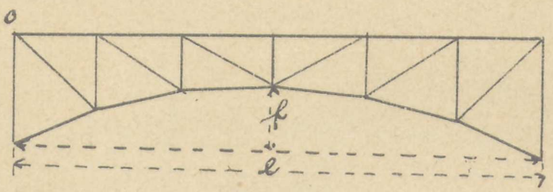
<u>En Temperaturvariations Indflydelse paa H</u> findes ved Ligningen: $X_a \Sigma S_a^2 \frac{s}{EF} = \Sigma S_a . \varepsilon t s$. Her er ovenfor fundet $\Sigma S_a^2 \frac{s}{EF} = \Sigma z$; anvendes Arbejdsligningen $\Sigma P.\delta = \Sigma S.\Delta s$ paa Belastningstilstanden $X_a = \div 1$ og paa de af Temperaturvariationen følgende Forskydninger ($\Delta s_t = \varepsilon t s$, $\Delta l_t = \varepsilon t l$), findes $\Sigma S_a \varepsilon t s = 1.\varepsilon t l$, og naar X_a her kaldes H_t, faas da: $H_t = \frac{\varepsilon t l}{\Sigma z}$. Det maa dog erindres, at vi i Nævneren have indført Factoren EF_c, hvorfor $H_t = \frac{\varepsilon E t l F_c}{\Sigma z}$. Man regner $t = \pm 35°C$.

Indflydelsen af en Eftergiven af Pillerne paa H findes af $H_c = \div \frac{E . F_c \Delta l}{\Sigma Z}$.

I de hidtil udviklede Formler indgaa endnu Tværsnittene F_m, der kunne variere for hver Stang i Hoved og Fod. Vi skulle nu vise, hvorledes man bedst udfører en tilnærmende Beregning, men maa i den Anledning betragte de forskellige Former. Buen kan faa, hver for sig.

1) Vandret (eller næsten vandret) Hoved.

Buens Højde i Toppen er alm. lille, og i saa Fald er det Størrelsen af Tværsnittene i Nærheden af Toppen, der har størst Indflydelse paa H (ses ved Beregning af Kræfterne v). Man regner da Tværsnittet af Hovedet konstant lig F_o, ligesaa i Foden, F_u, og sætter $F_c = F_o$.



Idet Gitteret saa godt som altid udføres med Verticaler som i hosst. Fig; og idet Foden danner en temmelig flad Bue, $\frac{f}{l} = \frac{1}{8}$ à $\frac{1}{10}$, saa man tilstrækkelig nøjagtig kan sætte $\sec \nu = 1$, faas under Forudsætning af konstant Fagvidde λ:

$$v_m = \frac{\lambda}{h_m^2}\left[y_m^o \cdot \frac{F_o}{F_u} + y_m^u\right]$$ eller simplere, idet λ kort divideres:

$$v_m = \frac{1}{h_m^2}\left(y_m^o \frac{F_o}{F_u} + y_m^u\right), \quad Z_m = \frac{1}{h_m^2}\left(y_m^{o\,2} \frac{F_o}{F_u} + y_m^{u\,2}\right)$$

I Toppen faas (Symmetri):

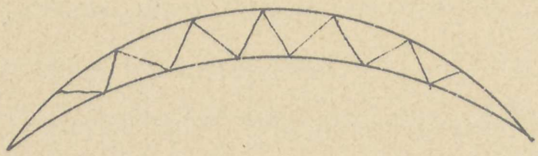
$$v = 2 . \frac{y^u}{h_m^2}, \quad Z = 2 . \frac{y^{u\,2}}{h_m^2}$$

Lodret over Vederlaget haves $z_0 = \frac{F_0}{F_u}$.

Idet vi have bortdivideret h, faaes Temperaturvariationens Indflydelse: $H_t = \frac{\varepsilon \cdot E \cdot t \cdot l \cdot F_0}{h \sum z}$.

Man antager nu en Værdi af $\frac{F_0}{F_u}$ og gennemfører Beregningen dermed; ved Dimensionsbestemmelsen maa man da holde det antagne Forhold mellem Stangernes Tværsnit i Nærheden af Toppen, selv om herved faaes Tværsnit, der passe mindre godt med de beregnede Spændinger i disse Stanger. En Afvigelse fra det forudsatte Forhold medfører nemlig en betydelig Variation af H og dermed af Spændingerne. Passe Spændinger og Tværsnit alt for daarligt sammen, maa man gøre Beregningerne om med et nyt $\frac{F_0}{F_u}$ som Udgangspunkt. Forholdet $\frac{F_0}{F_u} = 1$ vil ofte være passende.

2. Halvmaaneformer.



Man sætter $F_0 = F_u = F_c$ og faar da:

$v_m = \frac{y_m s_m}{r_m^2}$, $z_m = \frac{y_m^2 s_m}{r_m^2}$

eller hvis Gitteret indeholder Verticaler (og h er konstant):

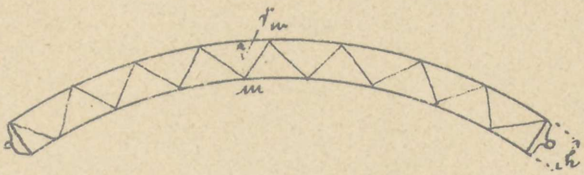
$$v_m = \frac{1}{h_m^2}\left(y_m^o \sec^3 \gamma_{m+1} + y_m^u \sec^3 w_m\right), \quad z_m = - - - - -,$$

hvor h er bortdivideret (erindres ved Beregningen af H_t).

Ved flade Buer sættes $\sec w = \sec \gamma = 1$, altsaa $s_m = h$, hvorved: $v_m = \frac{y_m}{r_m^2}$, $z_m = \frac{y_m^2}{r_m^2}$ (h bortdivideret), og med Verticaler: $v_m = \frac{1}{h_m^2}(y_m^o + y_m^u)$, $z_m = \frac{1}{h_m^2}(y_m^{o\,2} + y_m^{u\,2})$.

$H_t = \frac{\varepsilon . E . t . l . F_c}{\lambda\, \Sigma z}$; her indföres for F_c en Middelværdi af alle Tversnit.—

3. Konstant Höjde af Buen.



Hoved og Fod er da altid to koncentriske Cirkler. Kaldes Buens Höjde h, kan man sætte r = h. Kaldes Middeltversnittet i Hovedet F_o, i Foden F_u, faas, idet Buen antages saa flad, at man kan regne sec w = sec v = 1, $s_m = \lambda_m$, (hvad der altid er Tilfældet), og idet Faglængden λ er konstant, med $F_c = F_o$:

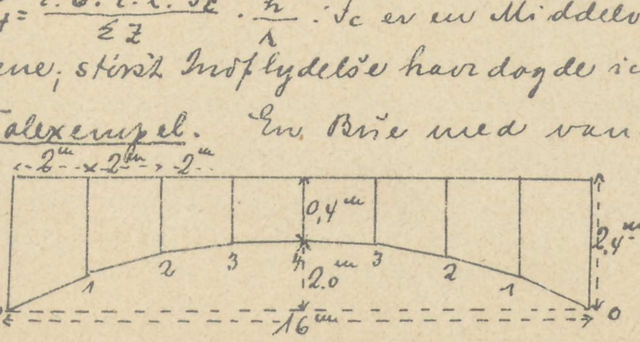
$$\left.\begin{array}{l} \text{for Hovedet: } v_m = y_m \cdot \frac{F_o}{F_u}, \quad z_m = y_m^2 \cdot \frac{F_o}{F_u} \\ \text{for Foden: } v_m = y_m, \quad z_m = y_m^2 \end{array}\right\} \text{hvor } \frac{\lambda}{h^2} \text{ er bortdivideret.}$$

Sættes ogsaa $F_o = F_u$, faas for alle Knudepunkter: $v_m = y_m$, $z_m = y_m^2$.

Indholder Gitteret Verticaler, adderer man blot de to i samme Lodrette virkende Kræfter v og Störrelsen z.

$H_t = \frac{\varepsilon . E . t . l . F_c}{\Sigma z} \cdot \frac{h^2}{\lambda}$; F_c er en Middelværdi for alle Tversnittene; störst Indflydelse have dog de i Nærheden af Toppen.

Talexempel. En Bue med vandret Overdel, parabelformet Underdel; Fagvidden 2^m, Spændvidde 16^m, Pilhöjde 2^m.—



Underdelens Ligning er $y^2 = 32x$, hvorved:

$y_1^u = 0.875^m$, $y_1^o = 2.40^m$, $h_1 = 1.525^m$,

$y_2^u = 1.50$, $y_2^o = 2.40$, $h_2 = 0.90$

$y_3^u = 1.875$, $y_3^o = 2.40$, $h_3 = 0.525$

$y_4^u = 2.0$, $y_4^o = 2,40$, $h_4 = 0.40$.

Med $F_o = F_n^o$ faaes da:

$$v_1 = \frac{2.4 + 0.875}{1.525^2} = 1.41 \qquad z_0 = \ldots = 1,00$$

$$v_2 = \frac{2.4 + 1.5}{0.9^2} = 4.82 \qquad z_1 = \frac{2.4^2 + 0.875^2}{1.525^2} = 2.81$$

$$v_3 = \frac{2.4 + 1.875}{0.525^2} = 15,51 \qquad z_2 = \frac{2.4^2 + 1.5^2}{0.9^2} = 9,89$$

$$v_4 = \frac{2.2,0}{0.4^2} = 25.00. \qquad z_3 = \frac{2.4^2 + 1.875^2}{0.525^2} = 33.63$$

$$z_4 = 2 \cdot \frac{2.0^2}{0.4^2} = 50.00$$

$$\Sigma z = 2.\sum_0^3 z + z_4 = 144,56$$

Momenterne i Punkterne 1.2. . . . af den med Kræfterne v belastede Bjælke findes nu:

$$Q_{3-4} = 12,50 = \tfrac{1}{2} v_4$$
$$\underline{15,51 = v_3}$$
$$Q_{2-3} = 28.01$$
$$\underline{4,82 = v_2}$$
$$Q_{1-2} = 32.83$$
$$\underline{1.41 = v_1}$$
$$Q_{0-1} = 34.24.$$

$$\frac{M_1}{\lambda} = 34.24 = Q_{0-1}$$
$$\underline{32.83 = Q_{1-2}}$$
$$\frac{M_2}{\lambda} = 67.07$$
$$\underline{28.01 = Q_{2-3}}$$
$$\frac{M_3}{\lambda} = 95,08$$
$$\underline{12,50 = Q_{3-4}}$$
$$\frac{M_4}{\lambda} = 107,58.$$

Ordinaterne i Influenslinien for H er $\frac{M_1}{\Sigma z}, \frac{M_2}{\Sigma z}$ - - - -; altsaa i Punktet 1: $\frac{34.24}{72.28} = 0.47$; ligesaa findes i Punktet 2: 0.93, i Punktet 3; 1.31, i Punktet 4: 1.49.

<u>En Temperaturvariation paa ± 35° bevirker;</u>

$$H_t = \frac{24.35.1600.\,F_o}{200.\,144.56} = 4,65.\,F_o \text{ kg.},$$ hvor F_o skal indføres i cm^2.

En Eftergiven af Vederlagene paa 0.5 cm bevirker:

$$H_c = \frac{2000000 \cdot F_0 \cdot 0.5}{200 \cdot 144.56} = 3.46 \cdot F_0 \cdot kg \cdot (F_0 \text{ i } cm^2)$$

Efterat Influensliniren for H paa denne Maade er bestemt, kan man finde Influensliniierne for Momenter eller Spandinger ved:

$$M = M_0 \div M_H \cdot H \quad , \quad S = S_0 \div S_H \cdot H$$

M_H og S_H er de Momenter eller Spandinger, der bevirkes af $H = 1$; de ere altsaa Konstanter, der bestemmes en Gang for alle ved et Diagram eller ved Beregning. M_0 og S_0 ere de Momenter eller Spandinger, der faaes, naar $H = 0$, altsaa naar Belastningen virker paa en simpelt understöttet Bjalke; Influensliniierne for disse Störrelser findes efter bekendte Metoder.
Man skal altsaa multiplicere alle Ordinaterne i H-Linien med M_H eller S_H og subtrahere fra M_0- eller S_0-Linien. Da imidlertid H-Linien er en Polygon med Knek under alle Tvorbjalker, er det simplere at beholde den uforandret, men dividere M_0 eller S_0-Linierne (som kun have faa Knek) med M_H eller S_H, altsaa skrive:

$$M = M_H\left(\frac{M_0}{M_H} \div H\right), \quad S = S_H\left(\frac{S_0}{S_H} \div H\right);$$

Multiplicationen med Factoren udenfor Parenthesen udføres da först, efter at man har dannet Udtrykket $\Sigma T\eta$; M_H eller S_H kaldes Multiplikator for Influenslinien (betegnes i det fölgende med μ).

<u>Influenslinien for Momentet</u> m. H. t. U er den i

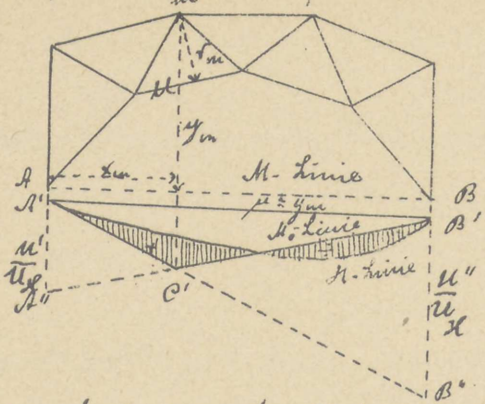


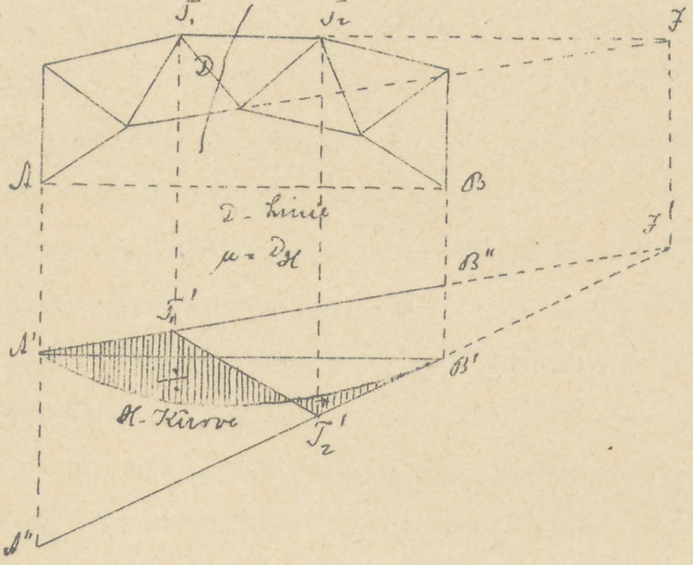
Fig. skraverede; idet $M_H = y_m$, faas $\frac{M_0}{M_H}$-Linien A'C'B' ved at afsætte $A'A'' = \frac{x_m}{y_m}$. Subtraktionen af H-Liniens Ordinater udføres ved at afsætte H-Linien til samme Side af Axen A'B' som M_0-Linien.

Den fundne Influenslinie kan ogsaa betragtes som Influenslinie for U, idet $U = \frac{M_m}{r_m}$; man kan benytte den tegnede Linie uden Forandring, naar blot Multiplicator sættes lig $\frac{y_m}{r_m}$. Man kan naturligvis ogsaa finde Influenslinierne for Spændingerne i Hoved og Fod direkte uden Momentet som Mellemled; f. Ex. er $U = U_H \left(\frac{U_0}{U_H} \div H\right)$; U_H er lig $\frac{y_m}{r_m}$; A'A'' og B'B'' er de til Reaktionerne A = 1 eller B = 1 svarende Spændinger U' og U'' i Stangen U i den simpelt understøttede Bjælke AB, dividerede med U_H; U' og U'' kunne findes ved Diagrammer eller Beregning, Multiplicator $\frac{y_m}{r_m}$ maa helst beregnes. –

Hvis C' ligger mellem to Tværbjælker, maa naturligvis Hjørnet skæres bort som sædvanligt. Bestemmelsen af Fortegnet for Spændingen i Hoved og Fod volder ingen Vanskelighed; M_0-Linien alene giver som altid i en simpel understøttet Bjælke Træk i Foden, Tryk i Hovedet.

<u>Gitterstængerne</u> kunne behandles ganske

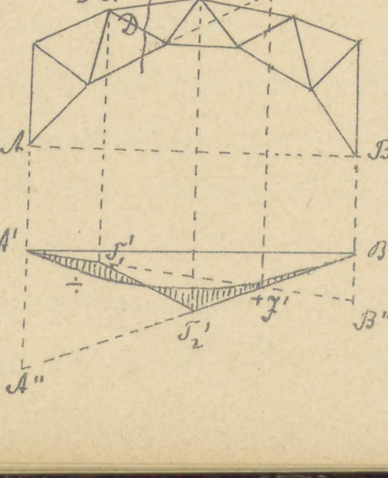
paa samme Maade, idet deres Spændinger kunne udledes af Momentet m. H. t. Skjæringspunktet for de af Snittet trufne Stænger i Hoved og Fod; men dette Punkt falder ofte saa langt borte, at Metoden bliver ubekvem. Derimod kan man sætte Spændingen $D = D_0 \div D_H \cdot H = D_H\left(\frac{D_0}{D_H} \div H\right)$, saaledes at man kun behøver at finde Influensliinien for D_0 eller $\frac{D_0}{D_H}$ samt Multiplikator D_H.



I Fig er $A'T_1'T_2'B'$ (med Axen $A'B'$) Influensliinien for $\frac{D_0}{D_H}$ (Belastning på Hoved) Hvis det var Influensliinien for D_0, vilde $A'A'' = D'$; $B'B'' = D''$, hvor D' og D'' betyde de til Reaktionerne $A = 1$, $B = 1$ svarende Spændinger D. — Nu er altså $A'A'' = \frac{D'}{D_H}$ og $B'B'' = \frac{D''}{D_H}$.
Hvis Punktet J ikke ligger for langt borte, kan man benytte, at $A'B''$ og $B'A''$ skulle skjære hinanden paa Verticalen gennem J; ligesaa kan man da beregne D_H, D' og D'' ved Momenterne m. H. t. J. Subtraktion af H-Liinien giver den skraverede Influensflade for D. Man maa her lægge Mærke til Fortegnet. Vi sætte

$D = D_H\left(\frac{D_0}{D_H} \div H\right)$, hvor Multiplikator D_H dog kun betegner den numeriske Værdi af den til $H = \div 1$ svarende Spænding D. Vi ville altid afsætte H-Linien nedenunder Axen A'B'. Der er da to Ting at afgöre, nemlig dels i hvilken Retning A'A'' og B'B'' skulle afsættes, dels den resulterende Influensflades Fortegn. A'A'' er jo lig $\frac{D'}{D_H}$; hvis da D' og D_H har samme Fortegn er det en virkelig Subtraktion, der skal udföres, og i saa Fald afsættes A'A'' nedad (samme Retning som H-Linien); ligesaa afsættes B'B'' nedad, hvis D'' og D_H har samme Fortegn. I Fig. ovenfor er D' et Træk, D_H et Træk (see ved Momentet m. H.t. F), D'' Tryk.

Med det samme har man fundet tilstrækkeligt til at bestemme Fortegnet: da A'A'' er positiv og Ordinaterne B'A'' paa Stykket B'T_2' ere större end Ordinaterne til H-Linien, er Strækningen nærmest B positiv; ligesaa vises Strækningen nærmest A at være negativ, fordi B'B'' er negativ, eller fordi D_H er positiv, altsaa H's Indvirkning negativ (D_H svarer til $H = \div 1$)



I hosst. Fig. ligger F mellem A og B; baade D', D'' og D_H er positiv. Influensfladens Fortegn er paaskrevet.

Naar man har konstrueret Influenslinierne, som nu beskrevet, gör man bedst i, inden man anvender dem til Spændingsbestemmelsen at afsætte dem ud fra en vandret Axe. Dernæst findes största og mindste Spændinger fra den bevægelige Belastning let. Spændingerne fra Egenvægten kunne ligeledes findes ved Influenslinierne, eller man kan nöjes med at finde det af Egenvægten fremkaldte Horizontaltryk paa den Maade og dernæst tegne et Diagram. –

Spændingerne fra Temperaturvariationen $\pm t^{\circ}$ findes let, naar man først har fundet H_t efter de tidligere givne Formler; Spændingen D_t er nemlig lig $\pm D_H \cdot H_t$, hvor D_H er fundet ovenfor (benyttet som Multiplikator for Influenslinierne.) De absolut största og mindste Spændinger findes endelig som:

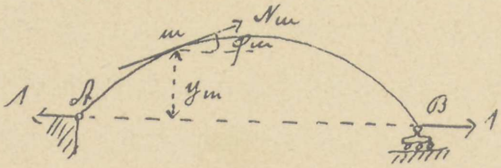
$S_g + \max. S_p + S_t$ og $S_g + \min S_p \div S_t$.

Den nu udviklede Tilnærmelsesmetode vil i Almindelighed være tilstrækkelig nöjagtig, saa man endog sjælden har nödig at gennemföre en nöjagtigere Beregning. Vil man ikke desto mindre dette, benytter man det nu vundne Kendskab til Dimensionerne, saa man altsaa for hver Stang indförer dens virkelige Tversnit (uden Fradrag af Nittehuller) og tillige tager Hensyn til Gitterstangernes Formforandringer. Man finder da Spændingerne fra Belastningen $H = \div 1$ (f. Ex. ved et Diagram) og beregner de deraf fölgende Længdeforandringer af alle Stanger;

dernæst beregnes Kræfterne v (§8), hvorved δ_{ma} og Forlængelsen δ_{aa} af Korden AB. Ordinaterne i H-Linien er da $\frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}$ -- $H_t = \frac{\Sigma S_a \varepsilon t.s}{\delta_{aa}}$.—

2. En massiv Bue.

Influenslinien for Horizontaltrykket bestemmes her ganske paa samme Maade som ovenfor; Ordinaterne ere $\frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}$, hvor δ_{ma} er Nedbøjningen i m for Kordsystemet belastet med $H = \div 1$. δ_{aa} Forlængelsen af Korden AB i Kordsystemet med samme Belastning. δ_{ma} beregnes som Momenterne i en simpelt



understøttet Bjælke AB belastet med Kræfterne $v_m = w_m + u_m$. (§9)

Istedet for Kræfterne v bruger man nu altid v' (= v. E. J_0), og i Udtrykket for v' skal altsaa blot indsættes Værdierne af Momenter og Normalkræfter for Belastningen $H = \div 1$. I et vilkaarligt Punkt m af Bjælkens Axe haves: $N_m = 1.\cos\varphi_m$, $M_m = 1.y_m$, og altsaa idet vi inddele i ligestore Faglængder λ:

$$w'_m = \frac{\lambda}{6}\frac{J_0}{J_m}\sec.\varphi_m(y_{m-1} + 2y_m) + \frac{\lambda}{6}\frac{J_0}{J_{m+1}}\sec.\varphi_{m+1}(2y_m + y_{m+1})$$

og

$$u'_m = J_0\left(\frac{\sin\varphi_{m+1}}{F_{m+1}} \div \frac{\sin\varphi_m}{F_m}\right).$$

I §9 er endvidere fundet Udtrykket for δ_{aa}; naar A og B ligge i samme Højde, lyder det:

$\delta_{aa} = \Sigma y_m \cdot v_m + \Sigma \Delta s_m \cdot \sec\varphi_m$. Da vi ovenfor har brugt Kræfterne $v' = E.J_0.v$, hvorved δ_{aa} er multipliceret med $E.J_0$, maa Faktoren EJ_0 ogsaa indføres her; sættes endvidere $\Delta s_m \sec.\varphi_m = \frac{N_m.s_m}{EF_m}\sec\varphi_m = \frac{\cos\varphi_m\, s_m}{EF_m}\sec\varphi_m$
$= \frac{\lambda \sec\varphi_m}{EF_m}$, faas $\delta_{aa} = \Sigma y_m v'_m + \lambda \Sigma J_0 \frac{\sec\varphi_m}{F_m}$.

<u>En Temperaturvariations Indflydelse</u> paa H findes ved Ligningen: $H_t \delta_{aa} = \int N_a \varepsilon t_0 ds \div \int M_a \varepsilon . \frac{\Delta t}{h} . ds =$
$\int_0^l \varepsilon . t_0 \cos\varphi\, ds - \int_0^l \varepsilon . \frac{\Delta t}{h} y\, ds = \varepsilon t_0 l \div \int_0^l \varepsilon . \frac{\Delta t}{h} . y . \cos\varphi\, dx$.
Beregnes δ_{aa} et det ovenfor givne Udtryk, maa ogsaa højre Side i Ligningen multipliceres med $E J_0$, antages $\Delta t = 0$, faas:

$$H_t = \frac{\varepsilon . E . t_0 . l . J_0}{\delta_{aa}}.$$

Indflydelsen af en Eftergiven af Pillerne findes af $H_c = \div \frac{E.J_0.\Delta l}{\delta_{aa}}$.

Ved den første Beregning forudsættes konstant Tværsnit, altsaa

$$J_m = J_{m+1} = J_0 = J,\quad F_m = F_{m+1} = F, \text{ hvorved}$$

$$w'_m = \lambda \frac{\sec.\varphi_m}{6}(y_{m-1} + 2y_m) + \lambda \frac{\sec\varphi_{m+1}}{6}(2y_m + y_{m+1}),$$

$$u'_m = \frac{J}{F}(\sin\varphi_{m+1} \div \sin\varphi_m),$$

$$\delta_{aa} = \Sigma y'_m \cdot v'_m + \frac{\lambda . J}{F} . \Sigma \sec\varphi_m .$$

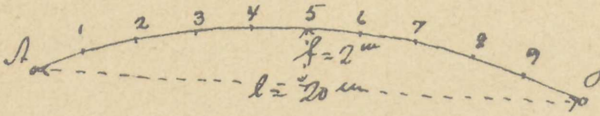
Størrelserne ū kunne altid uden væsentlig Fejl bortkastes. <u>Ved flade Buer</u> (med Forholdet $\frac{f}{l}$ mellem Pil og Korde lig $\frac{1}{8} - \frac{1}{10}$), som hyppigst forekomme, kan sættes $\sec\varphi = 1$, og man kan da ligefrem λ bortdivideres):

$$v'_m = w'_m = y_m, \quad \delta_{aa} = \Sigma y^2 + \frac{J}{F}\cdot\frac{l}{\lambda} = \Sigma y^2 + \frac{l}{\lambda}\, i^2.$$

Ovenfor har man nærmest tænkt sig, at Charniererne laa i Buens Axe, men dette er i og for sig ligegyldigt, naar blot Ordinaterne y til Buens Axe maales fra Charnierernes Forbindelseslinie.

i kan for nittede Pladejærnsbuer foreløbig regnes lig 0.45 h_0 (h_0 = Krophøjden); for massive rektangulære Tversnit (Hvælvinger) er $i^2 = \frac{1}{12}h^2$, $i = 0.29h$.

<u>Talexempel.</u>



En parabolsk Pladejærnsbue med Spandvidde 20m, Pilhøjde 2m og Charniererne liggende i Buens Midtlinie.

Midtliniens Ligning er: $y = \frac{4f}{l^2}\cdot x(l \div x) = \frac{2x(l \div x)}{100}$.

Der inddeles i Længder paa $\lambda = 2^m$

Ordinaterne ere: $y_1 = 0.72^m$, $y_2 = 1.28^m$, $y_3 = 1.68^m$, $y_4 = 1.92^m$, $y_5 = 2.0^m$. Dernæst beregnes Momenterne i den simpelt understøttede Bjælke AB paavirket af Kræfterne

$y_1, y_2, y_3, \dots y_9$:

$Q_{4-5} \quad 1.0 = \frac{1}{2} y_5$

$\underline{1.92 = y_4}$

$Q_{3-4} = 2.92$

$\frac{M_1}{\lambda} = 6.60 = Q_{0-1}$

$\underline{5.88} = Q_{1-2}$

$\frac{M_2}{\lambda} = 12.48$

$Q_{3-4} = 2.92$

$\underline{1.68} = y_3$

$Q_{2-3} = 4.60$

$\underline{1.28} = y_2$

$Q_{1-2} = 5.88$

$\underline{0.72} = y_1$

$Q_{0-1} = 6.60$

$\frac{M_2}{\lambda} = 12,48$

$\underline{4,60} = Q_{2-3}$

$\frac{M_3}{\lambda} = 17,08$

$\underline{2.92} = Q_{3-4}$

$\frac{M_4}{\lambda} = 20,00$

$\underline{1.00} = Q_{4-5}$

$\frac{M_5}{\lambda} = 21.00$

Endvidere haves:

$$y_1^2 = 0.5184$$
$$y_2^2 = 1.6384$$
$$y_3^2 = 2.8224$$
$$y_4^2 = 3.6864$$
$$\underline{\tfrac{1}{2}y_5^2 = 2.0000}$$

$$\Sigma y^2 = 2(y_1^2 + \cdots + \tfrac{1}{2}y_5^2) = 2.10,656 = 21,33$$

Antages Buens Krophöjde at blive 60^{cm}, kan sættes:

$i = 27^{cm}$, $i^2 = 729^{cm^2} = 0.0729^{m^2}$, $\frac{l}{\lambda} \cdot i^2 = 0.73$.

$$S_{aa} = \Sigma y^2 + \frac{l}{\lambda} i^2 = 22.16$$

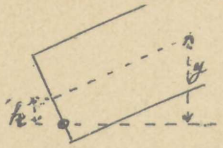
Ordinaterne i Influensliniien for H bliver $\eta = \frac{\lambda \cdot \left(\frac{M}{\lambda}\right)}{22.16}$ $= \frac{\left(\frac{M}{\lambda}\right)}{11.08}$. $\eta_1 = 0,60$, $\eta_2 = 1.13$, $\eta_3 = 1.54$, $\eta_4 = 1.80$, $\eta_5 = 1.89$.

<u>Virkningen af en Temperaturvariation</u> paa $\pm 35°$.

Man har $H_t = \frac{\varepsilon \cdot E \cdot t_0 \cdot l \cdot J_0}{\lambda \cdot S_{aa}}$. Antages $J_0 = 90000\ cm^4$, og indføres alle Længder i cm., hvorved bemærkes, at $S_{aa} = 22.16\ m^2$, faas: $H_t = \frac{24.35.2000.90000}{200.221600} = 3400\ kg$.

<u>Tilnærmelse for flade Buer.</u> Buens Midtlinie antages parabolsk, men Resultaterne herfra kunne

forøvrigt godt anvendes paa andre Former af flade Buer.— For at holde Udviklingen saa almindelig som muligt antage



vi Charniererne liggende et Stykke k under Endepunkterne af Buens Axe. Vi have da: $y = \frac{4f}{l^2}(lx \div x^2) + k$.

Vi foretage dernæst en Inddeling i uendelig smaa Stykker $\lambda = dx$ og maa da sætte: $v' = y\,dx$. $\delta_{aa} = \Sigma y^2 dx + li^2$. Vi skulle nu beregne Momenterne M for Kræfterne $v\,dx$; Momentkurvens Differentialligning er da:

$\div \frac{d^2M}{dx^2} = y$, altsaa: $\div M = \iint y\,dx^2 = \frac{4f}{l^2}\iint (lx - x^2)\,dx^2 + k\iint dx^2$ $= \frac{4f}{l^2}\left(\frac{1}{6}lx^3 \div \frac{1}{12}x^4\right) + \frac{1}{2}kx^2 + C_1x + C$. Da Kræfterne v virke paa en simpelt understøttet Bjælke AB, skal $x = 0$ og $x = l$ give $M = 0$, hvorfor

$$M = \div \frac{4f}{l^2}\left(\frac{1}{6}lx^3 \div \frac{1}{12}x^4\right) \div \frac{1}{2}kx^2 + \left(\frac{1}{3}f \cdot l + \frac{1}{2}kl\right)x.$$

$$\Sigma y^2 dx = \int_0^l y^2 dx = \frac{16f^2}{l^4}\int_0^l (l^2x^2 - 2lx^3 + x^4)\,dx + 2k\frac{4f}{l^2}\int_0^l (lx - x^2)\,dx + k^2\int_0^l dx$$

$$= \frac{16f^2}{l^4} \cdot \frac{l^5}{30} + 2k \cdot \frac{4f}{l^2} \cdot \frac{l^3}{6} + k^2 l = \frac{8}{15} \cdot f^2 l + \frac{4}{3}k \cdot f \cdot l + k^2 l.$$

Ordinaterne i Influenslinien for H ere nu lig $\frac{M}{\delta_{aa}}$; imidlertid er den Kurve, man derved faar, ikke meget forskellig fra en Parabel, og vi ville derfor erstatte den med en Parabel, saaledes at Influensfladens og Parablens Arealer blive lige store.

Kaldes Parablens Pilhøjde z, haves da:

$$\frac{2}{3}z \cdot l = \frac{\int_0^l M\,dx}{\delta_{aa}}, \quad z = \frac{3}{2 \cdot l\,\delta_{aa}}\int_0^l M\,dx.$$

$$\int_0^l M\,dx = \div \frac{1}{10}f \cdot l^3 \div \frac{1}{6}kl^3 + \frac{1}{6}fl^3 + \frac{1}{4}kl^3 = \frac{1}{15}fl^3 + \frac{1}{12}kl^3.$$

Nu haves:

$$Z = \frac{3}{2h} \cdot \frac{\frac{1}{15} \cdot f \cdot l^3 + \frac{1}{12} k l^3}{\frac{8}{15} \cdot f^2 \cdot l + \frac{4}{3} \cdot k \cdot f \cdot l + l k^2 + l i^2} = \frac{3}{16} \frac{l}{f} \cdot v,$$

hvor $v = \dfrac{\frac{1}{15} f + \frac{1}{12} k}{\frac{1}{15} \cdot f + \frac{1}{6} k + \frac{k^2 + i^2}{8f}} = \dfrac{8f + 10k}{8f + 20k + 15 \cdot \frac{i^2 + k^2}{f}}$.

Hvis Charniererne ligge i Buens Midtlinie, er $k = 0$,

$$v = \frac{8f}{8f + 15 \cdot \frac{i^2}{f}} = \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{i^2}{f^2}}.$$

Hvis Charniererne ligge ved Buens Underkant, er $k = \frac{1}{2} h$, $v = \dfrac{8f + 15h}{8f + 10h + 15 \frac{i^2}{f} + \frac{15}{4} \frac{h^2}{f}}$.

Beregnes Ordinaterne i H-Linien ad denne Vej for Talexemplet ovenfor, findes:

$$v = \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{0{,}27^2}{2^2}} = 0.967, \quad Z = \frac{3}{16} \cdot \frac{20}{2} \cdot 0.967 = 1{,}81.$$

H-Liniens Ligning er nu: $\eta = \frac{4Z}{20^2} \cdot x(l \div x)$, hvorved

$\eta_1 = 0.65$, $\eta_2 = 1.16$, $\eta_3 = 1.52$, $\eta_4 = 1.74$, $\eta_5 = 1.81$.

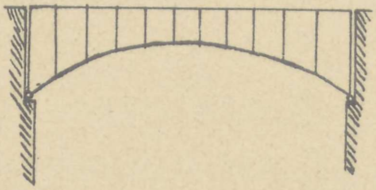
Den udviklede Tilnærmelsesformel for flade Buer kan ogsaa bruges for flade Gitterbuer med konstant Højde; man skal blot i Stedet for Inertiradius i indføre $\frac{1}{2} h$ (Tversnittet bestaar af to Arealer $\frac{1}{2} F$, der ligge i Afstanden h fra hinanden – Tyngdepunktsafstanden –; dets Inertimoment altsaa $= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot F \left(\frac{1}{2} \cdot h\right)^2$, og $i^2 = \frac{J}{F} = \frac{1}{4} h^2$). Man faar derved med Charniererne i Midtlinien: $v = \dfrac{1}{1 + \frac{15}{32} \cdot \frac{h^2}{f^2}}$, med Charniererne ved Buens Underkant: $v = \dfrac{8f + 5h}{8f + 10h + \frac{15}{2} \cdot \frac{h^2}{f}}$. Der er herved forudsat $F_0 = F_n$.

Temperaturvariationens Indflydelse findes af

$H_t = \frac{\varepsilon \cdot E \cdot t_0 \cdot l \, J_0}{\delta_{aa}}$, hvor $\delta_{aa} = \frac{8}{15} f^2 \cdot l + \frac{4}{3} k f \cdot l + (k^2 + i^2) l$; med Charniererne i den neutrale Axe faaes $H_t = \frac{\varepsilon \cdot E \cdot t_0 \cdot J_0}{\frac{8}{15} f^2 + i^2}$; med Charniererne ved Buens Underkant:

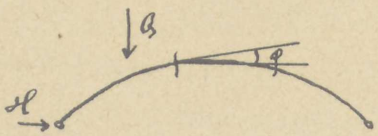
$H_t = \frac{\varepsilon \cdot E \cdot t_0 \cdot J_0}{\frac{8}{15} f^2 + \frac{2}{3} f \cdot h + \frac{1}{4} h^2 + i^2}$, hvilke Formler og saa kunne bruges for Gitterbuer, naar J_0 erstattes med $\frac{1}{4} \cdot F_c \cdot h^2$, i med $\frac{1}{2} h$; F_c er en Middelværdi af Tværsnittet i Hoved eller Fod.

I Alm. overføres Belastningen kun til Buen i



enkelte Punkter; i saa Fald er H-Linien en Polygon med Vinkelspidser i Verticalerne gennem disse Punkter.

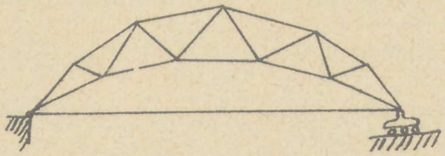
Naar Influenslinien for H er bekendt, findes Influenslinien for Momentet i et vilkaarligt Punkt ganske som vist ved Gitterbuen. Tværsnittets Paavirkning hidrører dels fra Momentet, dels fra Normalkraften; dennes



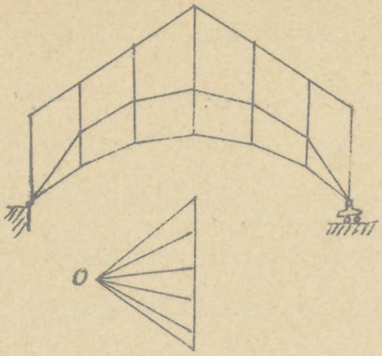
Størrelse findes ved Projection paa Tangenten at være $Q \sin\varphi \div H \cdot \cos\varphi$, idet Q betyder Resultanten af alle ydre lodrette Kræfter til venstre for Snittet (Reaktionens lodrette Komposant medregnet). Naar H kendes, kan man tegne den til Belastningen svarende Tryklinie gennem de to Charnierer og med H som vandret Komposant af Spændingen; og da denne Tryklinies

Retning aldrig vil afvige ret meget fra Buens Retning, kan man alm. tilstrækkelig nøjagtigt sætte $N = H . \sec \varphi$. — Forøvrigt gennemføres Dimensionsbestemmelsen bedst saaledes som beskrevet for den massive 3-Charniersbue: man foretager først en foreløbig Beregning, hvorved man finder største og mindste Værdi af Momentet m. H. t. Punkter af Midtlinien og de til samme Belastning svarende $H . \sec \varphi$ (ved Influenslinierne for M og H); derved fastslaas Dimensionerne foreløbigt, og man bestemmer Kerneradiis i de forskellige Tværsnit; nu foretages den endelige Beregning, hvor man tegner Influenslinierne for Momenterne m. H. t. Punkter i Kerneradiens Afstand fra Midtlinien (oven for og nedenfor), og derved undersøger man, om Paavirkningen intet Sted overskrider det tilladelige.

§13. Dragerformer, der afledes af Buen med to Charnierer.



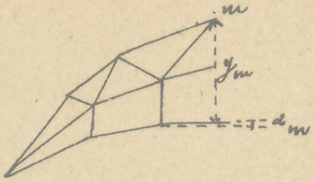
Forbinder man de to Charnierer med hinanden ved en Trækstang, der kan optage Horizontaltrykket, bliver Buen udvendig statisk bestemt; den statiske Ubestemthed vedbliver naturligvis, men man må tilskrive en overtallig Stang. Heraf kan nu udledes nye Dragerformer ved at gøre Trækstangen polygo=



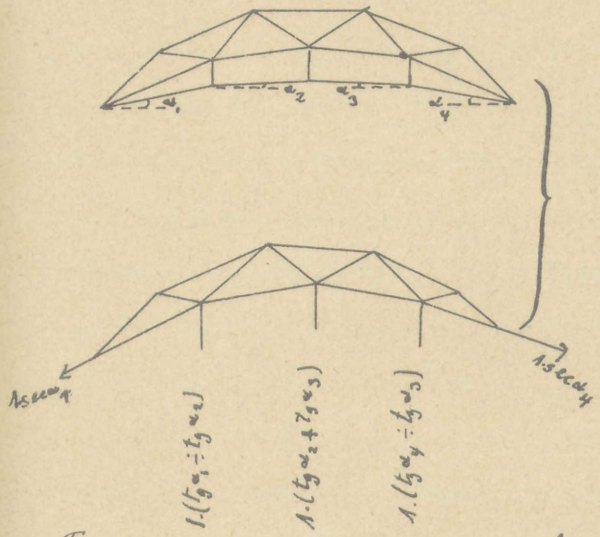
nal og ophænge dens Vinkelspidser til Buens Knudepunkter (særlig anvendt til Tagværker).

Spændingerne i alle Leddene af den polygonale Trækstang har samme Horizontalprojection, hvilket indses ved at tegne Kraftpolygonen for en af dens Vinkelspidser; kender man Horizontalkomposanten, kan man finde Spændingerne i alle Leddene og i Hængestængerne ved gennem samme Punkt O at trække Paralleler med Leddene til Skæring med en lodret Linie i en Afstand fra O lig Horizontalkomposanten.

Som statisk ubestemmelig Størrelse indføres Horizontalkomposanten H af Spændingen i Trækbaandet. Det statisk bestemte Hovedsystem er den simpelt understøttede Bjælke, der faaes ved Borttagelsen af Trækstangen og Hængestængerne. Hvis man kender Influenslinien for H (hvorom senere), findes Spændingerne i de forskellige Stænger paa samme Maade som ved Buen med to Charnierer. Man har saaledes: $M = M_H\left(\frac{M_0}{M_H} \div H\right)$, hvor M_H er lig Ordinaten y til Momentcentret, maalt fra Trækbaandet; søges nemlig M_H m.H.t. Punktet m i vedstaaende Fig; kan Kraften $1 \cdot \sec \alpha_m$ i den af Snittet træfne Del af Trækbaandet opløses i

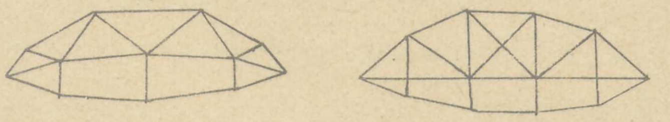


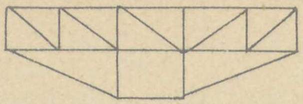
en lodret Komposant beliggende i Verticalen gennem m, og i en vandret Komposant 1, hvis Moment m. H. t. m er $1 \cdot y_m$. Paa samme Maade kan Spændingen i Buens Hovede og Fod findes: $O = O_H\left(\frac{O_0}{O_H} \div H\right)$, hvor $O_H = \div \frac{y}{r}$ (r er den vinkelrette Afstand fra O til Momentcentret). Endelig har man ligeledes for en Gitterstang: $D = D_H\left(\frac{D_0}{D_H} \div H\right)$, hvor D_H er den af $H = \div 1$ fremkaldte Spænding i D; D_H kan findes ved et Diagram for Belastningen $H = \div 1$ virkende paa Hovedsystemet (denne Belastning er fremstillet i hosst. Fig.)

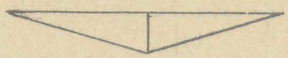


I Stedet for at krumme Trækstangen opad kan man krumme den nedad; derved bliver de lodrette Stænger mellem Trækstang og Bue paavirkede til Tryk, men forøvrigt forandres intet i Maaden, hvorpaa Beregningerne udføres. Hosst. Fig. vise forskellige nye Dragerformer, der kunne udledes paa denne Maade;

1. 2

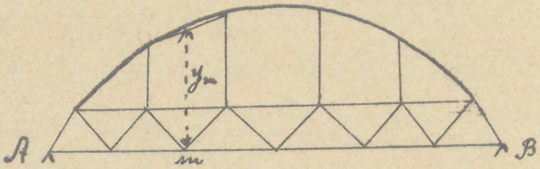


3. 

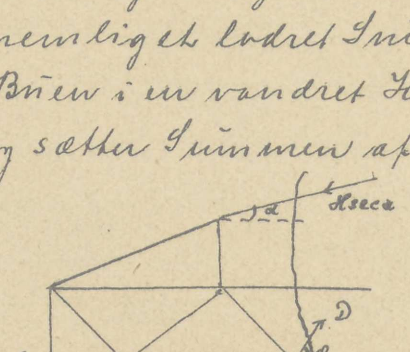
4. 

i 4 er Buens Underdel vandret, hvorved man har faaet en armeret Gitterbjælke med krum Overdel; 3 og 4 er almindelige armerede Bjælker.

Endelig kan man lægge den polygonale Trækstang op ovenover Buen; den bliver saa rigtignok paavirket til Tryk og Buen bliver til en Bjælke, der optager dens Sidetryk, hvorfor Drageren ogsaa benævnes en <u>Bue med Afstivningsbjælke</u> (analog med Hængebroer med Afstivningsbjælke, hvorom senere). Ogsaa her udføres Beregningen paa samme Maade; M_H er lig $1 \cdot y_m$, hvor y_m er Ordinaten fra m til Buen.



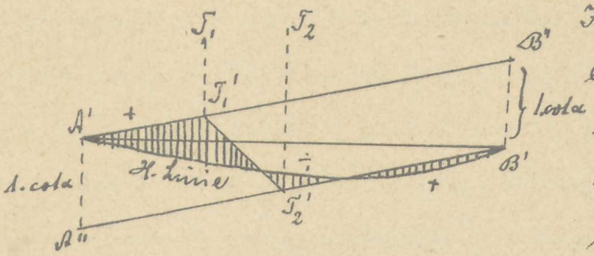
Hvis Gitterbjælken konstrueres som Paralleldrager, bliver Beregningerne af Gitterstangerne (Diagonaler i Gitterbjælken) særlig simpel. Lægger man nemlig et lodret Snit og opløser Kraften $H \cdot \sec\alpha$ i Buen i en vandret Komposant H og en lodret $H \operatorname{tg}\alpha$, og sætter Summen af Kræfterne tilvenstre for Snittet lig Nul, faas (idet de ydre Kræfter tilvenstre for Snittet er ΣP):



$$\div A + \Sigma P \div D\sin\varphi + H\operatorname{tg}\alpha = 0;$$

indføres $Q_0 = -A + \Sigma P$ = Transversalkraften i den simpelt understøttede Bjælke AB, faas:

$$D \sin\varphi = Q_0 + H \cdot tg\,\alpha = tg\,\alpha\,(Q_0 \cot\alpha + H).$$



Influenslinien for Q_0 er $A'T_1'T_2'B'$ (T_1 og T_2 er Verticalerne fra de Tværbjælker, mellem hvilke den betragtede Gitterstang ligger), idet $A'A'' = B'B'' = 1$; afsættes saa blot $A'A'' = B'B'' = 1.\cot\alpha$, faas Influenslinien for $Q_0 \cot\alpha$, og naar den er afsat saaledes, at dens Ordinater neden for Axen $A'B'$ er negativ, og naar H-Kurven, som her skal regnes positiv, ligeledes afsættes nedenunder Axen, faar man, at $Q_0 \cot\alpha + H$ er fremstillet ved Ordinaterne mellem H-Linien og $Q_0 \cot\alpha$-Linien.

<u>Bestemmelsen af Influenslinien for H</u> for alle disse Drageformer udføres som sædvanligt ved Ligningen:

$$\sum P_m \cdot \delta_{ma} \div H \cdot \sum \frac{S_a^2 s}{EF} = 0;$$

δ_{ma} betyder Nedbøjningen af Punktet m i det statisk bestemte Hovedsystem, og da dette faas ved at borttage den polygonale Trækstang og de mellem den og Buen indskudte lodrette Stænger — i det sidste Exempel, Buen med Afstivningsbjælke, er Hovedsystemet den simpelt understøttede Bjælke alene —, er Hovedsystemet her og ved den rene To-Charniersbue ganske det samme; δ_{ma} bestemmes derfor som Momenter af ganske de samme Kræfter v som der ($v = \frac{y_m s_m}{r_m^2 E F_m}$, hvorblot Ordinaterne y maales fra Trækstangen). I Udtrykket $\sum \frac{S_a^2 s}{EF}$ skal Summationen udstrækkes over alle Stænger i det statisk ubestemte System, altsaa ogsaa over Trækstangen og de indskudte Verticaler. Tidligere fandtes $\sum \frac{S_a^2 s}{EF} = \sum v_m \cdot y_m$, nu skal hertil föjes de fra Trækstangen og Hængestænger hidrörende Led.

Kaldes Spændingerne i Trækstangens Led $T_1, T_2, ----$ og i Verticalerne $V_1, V_2, \dots$, haves:

$$T_1 = H\sec\alpha_1,\ T_2 = H\sec\alpha_2, \dots \quad ;$$

$$V_1 = H(tg\,\alpha_1 - tg\,\alpha_2),\ V_2 = H(tg\,\alpha_2 \div tg\,\alpha_3) \dots \quad ;$$

altsaa de fra $H = \div 1$ hidrörende Spændinger:

$$T_{1,a} = \div\sec\alpha_1,\ T_{2,a} = \div\sec\alpha_2, \dots,\ V_1 = \div 1(tg\,\alpha_1 - tg\,\alpha_2) \dots$$

og de herfra hidrörende Led i $\sum\frac{S_a^2 s}{EF}$:

$$\sum\frac{s_t \cdot \sec^2\alpha}{EF_t} + \sum\frac{s_v(tg\,\alpha_r \div tg\,\alpha_{r+1})^2}{EF_v}.$$

Sættes Længden af Leddet i Trækstangen $s_t = \lambda\sec\alpha$ (λ antages konstant) og endvidere $F_t = F_b\sec\alpha$ (F_b konstant), samt regnes F_v for konstant, haves:

$$\delta_{aa} = \sum yv + \frac{\lambda}{EF_b}\sum\sec^2\alpha + \frac{1}{EF_v}\sum s_v(tg\,\alpha_r \div tg\,\alpha_{r+1})^2.$$

Ligesom ved St-Chamasbuen er det praktisk at multiplicere Kræfterne v og δ_{aa} med samme Faktor EF_c. Man beregner da Kræfterne $v = \frac{y_m \cdot s_m}{r_m^2}\cdot\frac{F_c}{F_m}$, finder de af dem fremkaldte Momenter δ_{ma} og dividerer disse med

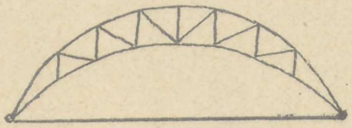
$$\delta_{aa} = \sum yv + \frac{\lambda \cdot F_c}{F_b}\sum\sec^2\alpha + \frac{F_c}{F_v}\sum s_v(tg\,\alpha_r \div tg\,\alpha_{r+1})^2;$$

derved faas Ordinaterne i H-Linien.

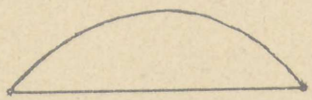
Haves der kun en vandret Trækstang, er $\delta_{aa} = \sum yv + \frac{F_c}{F_b}\,l$, hvilken Værdi ogsaa kan bruges, naar Træk=

stangen ikke, afviger for meget fra den vandrette; især ved Tagværker, hvor Beregningen jo aldrig behöver at gennemföres saa nöjagtigt. –

Naturligvis kan man i de specielle Tilfælde simplificere Udtrykket for v ved at bortdividere forskellige Störrelser; man maa da blot erindre at dividere de to sidste Led i δ_{aa} med de samme Störrelser.



Saaledes kan man for en Bue som i omst. Fig. sætte $v_m = \frac{1}{h_m^2}(y_m^o + y_m^u)$, idet man har bortdivideret den konstante Faglængde λ; i saa Fald maa man sætte $\delta_{aa} = \sum yv + \frac{F_o}{F_b} \cdot \frac{l}{\lambda}$. Sætter man for en massiv Bue med vandret Trækstang $v = y_m$, maa man sætte



$$\delta_{aa} = \left(\sum y_m^2 + \frac{l}{\lambda} i^2\right) + \frac{J_o}{F_b} \cdot \frac{l}{\lambda};$$

her er nemlig Kræfterne v multiplicerede med $\frac{\sum J_o}{\lambda}$ (ikke med $\sum F_o$ som ved Gitterbuer).

<u>En Temperaturvariations Indflydelse</u> bestemmes ved $H_t = \frac{\sum S_a \varepsilon t s}{\sum S_a^2 \frac{s}{EF}}$; anvendes imidlertid Arbejdsligningen: $\sum P\delta = \sum S \Delta s$ paa Belastningstilstanden $X_a = \div 1$ og paa de til Temperaturvariationen svarende Forskydninger, faas, idet man erindrer, at Summationerne udstrækkes over <u>alle</u> Stænger, og saa de overtallige: $\sum S_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot s = 0$ ($X_a = \div 1$ er en Spænding, ingen ydre Kraft). Derimod vil der her fremkomme et Tillæg til Spændingerne, hvis Temperaturtilvæxten

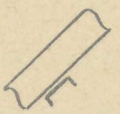
for Trækstangen er $t + \Delta t$, for alle de andre Stænger kun $t°$. Man har da: $H_t = \frac{\Sigma_1 S_a \varepsilon t.s + \Sigma_2 S_a \varepsilon.\Delta t.s}{\Sigma \frac{S_a^2 s}{EF}}$, hvor

Σ_1 skal udstrækkes over alle Stænger og altsaa er Nul, medens Σ_2 kun gælder Trækstangen; for denne haves $S_a = \div 1.\sec\alpha$, $s = l\sec\alpha$, altsaa $H_t = \div \frac{\varepsilon.\Delta t.\, l\, \Sigma \sec^2\alpha}{\Sigma \frac{S_a^2 s}{EF}}$, hvor $\div$ gælder, hvis Spændingen i Trækstangen virkelig er Træk, og hvis Δt er positiv, d. v. s. hvis Trækstangen er varmere end Buen. Man kan altid tillade sig at regne $\delta_{aa} = \Sigma y.v$, da Δt jo kun skønnes højst unøjagtigt; ved at indsætte dette og i Tælleren multiplicere med EF_c (for massive Buer EJ_0) faas med $\sec\alpha = 1$:

$$H_t = \pm \frac{\varepsilon E.\Delta t.\, l F_c}{\Sigma y v}.$$

Som i Begyndelsen af denne § fremhævet finde de her omtalte Drageformer navnlig Anvendelse til Tagværker, hvor man altsaa burde regne med en Del af Belastningen, Vindtrykket, som skraat virkende. I og for sig er dette ikke forbunden med nogen Vanskelighed, naar man kun vil finde Spændingerne fra en given hvilende Belastning, og det nøjes man jo gerne med ved Tagværker.

I Alm. ere disse Buetage flade, saa man nøjagtigt nok kan regne med lodret Belastning alene. En speciel Slags Bue-Tage er de saakaldte „<u>fritbærende Bølgebliktage</u>", hvor Bølgeblikket ikke blot er Dækningsmateriale, men tillige det bærende. Bølgeblikket böjes til denne Anvendelse efter Tagets Krumning; Stödene paa langs ad Bölgerne udföres som tidligere omtalt, Stödene paatværs maa derimod her göres saa stærke, at Normalkraften kan overföres derigennem (2-3 Nitterækker i Bölgetoppene). Ved Vederlaget nittes Bölgeblikket til et [-Jern, der



med 3-4^m Mellemrum hviler paa Stöbejernsstole eller understöttes paa anden Maade. Horizontaltrykket optages af Trækstænger fra Vederlag til Vederlag (med 3-4^m Mellemrum); Trækstængerne maa i nogle Punkter ophænges til Bölgeblikket. Saadanne Tage ere udförte med indtil 30^m Spændvidde.

§14. Buen uden Charnierer.

Vi ville her indskrænke os til Behandling af en massiv Bue med Vederlagene i samme Höjde og fuldstændig symmetrisk, hvad Dimensionerne og Formen angaar.

Som tidligere omtalt – ved Beregningen af Hvælvinger – er en saadan Bue tredobbelt statisk ubestemt. De overtallige Störrelser kunne vælges paa forskellig Maade; man kunde f. Ex. vælge Indspændingsmomenterne og Horizontaltrykket, eller man kunde tage Reaktionerne fra den ene Understötning (lodret og vandret Komposant af Reaktionen og Indspændingsmomentet). De tre ubekendte bestemmes ved de 3 Elasticitetsligninger:

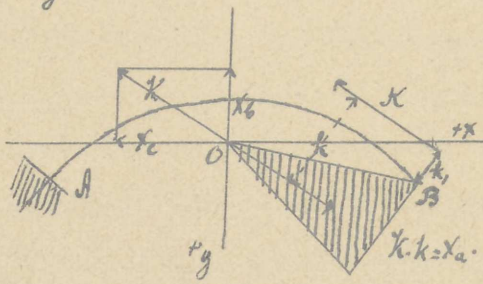
$$\sum P_m \cdot \delta_{ma} \div X_a \delta_{aa} \div X_b \delta_{ba} \div X_c \delta_{ca} = 0,$$
$$\sum P_m \cdot \delta_{mb} \div X_a \delta_{ab} \div X_b \delta_{bb} \div X_c \delta_{cb} = 0,$$
$$\sum P_m \delta_{mc} \div X_a \delta_{ac} \div X_b \delta_{bc} \div X_c \delta_{cc} = 0,$$

under Forudsætning af urokkelige Understøtninger og konstant Temperatur.

I §7 er det vist, hvorledes man ved Opløsning af Ligningerne kan faa Influensliniene for de 3 ubekendte, men samtidig er det antydet, at Løsningen vilde blive simpler, hvis man kunde vælge de overtallige Størrelser saaledes, at hver af Ligningerne kun kom til at indeholde en af dem. Betingelsen herfor er:

$$\delta_{ab} = \delta_{ba} = 0, \quad \delta_{ac} = \delta_{ca} = 0, \quad \delta_{bc} = \delta_{cb} = 0.$$

Vi ville her gennemføre Løsningen ad den sidst omtalte Vej, idet vi benytte os af Müller-Breslaus angivet Methode.

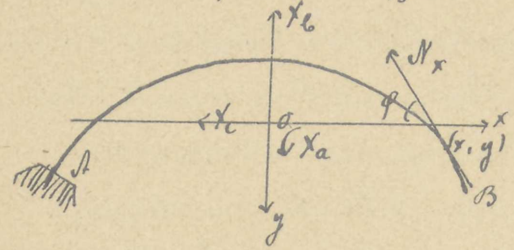


At Buen er indspændt ved Vederlagene, vil jo sige, at Reaktionen bestaar af en enkelt excentrisk virkende Kraft (K ved B), hvilket er ensgældende med en central Kraft K og et Moment K.k eller med en vandret og en lodret Kraft virkende i B og et Moment $K.k_1$. — Som det statisk bestemte Hovedsystem vælge vi en kun ved A indspændt Bue; de overtallige Størrelse skulle altsaa give Pillen B^s Indvirkning paa Buen. Hvis vi nu ligefrem valgte K^s vandrette og lodrette Komposant og Momentet $K.k_1$, vilde Betingelserne $\delta_{ab}=0$, $\delta_{ac}=0$. $\delta_{bc}=0$ ikke være opfyldte; dette kan derimod opnaas ved som X_b og X_c at vælge K^s lodrette og vandrette Komposant, men som X_a et Moment $K.k$, saaledes som antydet i Fig. At disse Størrelser erstatte Pillens Reaktion ses let: X_b og X_c give en Resultant af Størrelse K og med K^s Retning, og ved Sammensætning med Momentet $K.k = X_a$ flyttes Resultanten fra O til den virkelige Beliggenhed. O er et foreløbigt ubestemt Punkt, men Metoden gaar nu netop ud paa, at O skal bestemmes saaledes, at $\delta_{ab}=0$, $\delta_{bc}=0$, $\delta_{ac}=0$. (Ovenstaaende Udvikling er ikke strengt taget korrekt; O kan naturligvis kun bestemmes saaledes, at to af Betingelserne – $\delta_{ab}=0$ og $\delta_{ac}=0$ – tilfredsstilles; for en symmetrisk formet Bue vil den tredje af sig selv være opfyldt, naar X_b er lodret, X_c vandret, men ved en ikke symmetrisk Bue kunde man kun vælge f. Ex. X_b lodret, og man maatte saa bestemme Retningen for X_c saaledes, at $\delta_{bc}=0$).

(Punktet O maa naturligvis tænkes urokkeligt forbundet med Buens Endepunkt B eller med B's Tangent, saaledes at Virkningen af Kræfterne X overføres til Buen gennem B; hvis altsaa B forskydes et Stykke, eller B^s Tangent drejes en lille Vinkel, vil O forskydes det samme Stykke eller drejes den samme Vinkel om B.

Vi skulle nu vise, at ved det angivne Valg af Størrelserne X forsvinder δ_{bc}, og benytte $\delta_{ab}=0$ og $\delta_{ac}=0$ til Bestemmelse af O.

Vi lægge et Par paa hinanden vinkelrette Koordinatakser igennem O og have da for det vilkaarlige Punkt af Buen (x, y), ved Projektion paa Tangenten



af Kræfterne mellem (x, y) og B:

$N_x = N_0 \div X_b \sin\varphi \div X_c \cos\varphi$,

og ved at tage Momenterne af de samme Kræfter m. H. t. (x, y):

$$M_x = M_0 \div X_a + X_b \cdot x \div X_c \cdot y$$

Altsaa giver Belastningen

$X_a = \div 1$ alene: $N_a = 0$, $M_a = +1$,

$X_b = \div 1$ — : $N_b = +\sin\varphi$, $M_b = -x$,

$X_c = \div 1$ — : $N_c = +\cos\varphi$, $M_c = +y$.

Nedbøjningerne af Buens Punkter som Følge af en given Belastning kunne, som bekendt, beregnes som Momenter svarende til en ved Belastningskurven

$z = \frac{d\left(N \cdot \frac{J_0}{F} \operatorname{tg}\varphi\right)}{dx} + M \cdot \frac{J_0}{J} \sec\varphi$ given Belastning (z er multipliceret med $E \cdot J_0$); Nedbøjningerne fra $X_a = \div 1$ findes altsaa ved

$$z_a = \frac{J_0}{J} \sec\varphi.$$

Man har nu ved Anvendelse af den almindelige Arbejdsligning: $\delta_{ab} = \int \frac{N_a N_b}{EF} ds + \int \frac{M_a M_b}{EJ} ds$ og de analoge for δ_{ac} og δ_{bc}. Ved Indsættelse af Værdierne for N_a, M_a . . . . . findes (Integralerne skulle tages over hele Buelængden):

$$\delta_{ab} = \int \frac{1.(-x)}{EJ} . ds \text{, og } \delta_{ab} = 0 \text{ giver } \int x . \frac{J_0}{J} \sec\varphi \, dx = \int x . z_a \, dx = 0$$

$$\delta_{ac} = \int \frac{1.y}{EJ} ds \text{, og } \delta_{ac} = 0 \text{ giver } \int y . \frac{J_0}{J} \sec\varphi \, dx = \int y . z_a \, dx = 0.$$

$$\delta_{bc} = \int \frac{\sin\varphi . \cos\varphi}{EF} . ds + \int \frac{(-x)y}{EJ} ds \text{, og } \delta_{bc} = 0 \text{ giver:}$$

$\int \cos\varphi \frac{J_0}{J} . dy \div \int xy \, z_a \, dx = 0$. Her er imidlertid $\int \cos\varphi \frac{J_0}{F} . dy = 0$ paa Grund af Symmetrien, idet $\cos\varphi \frac{J_0}{F}$ har samme Störrelse og Fortegn i to symmetriske Punkter, medens dy i saadanne har modsat Fortegn. Altsaa, giver $\delta_{bc} = 0$:

$$\underline{\int xy \, z_a . dx = 0.}$$

De to förste af de fundne Ligninger vise, at Begyndelsespunktet O bestemmes som Tyngdepunkt for Belastningen z_a virkende i Buens Punkter, den sidste Ligning viser, at Centrifugalmomentet af samme Belastning maa være Nul m. H. t. de to Koordinataxer; dette er paa Grund af Symmetrien netop Tilfældet naar $X_c \perp X_b$. –

Efter at man har bestemt O paa denne Maade, har man:

$$X_a = \frac{\Sigma P_m . \delta_{ma}}{\delta_{aa}}, \quad X_b = \frac{\Sigma P_m . \delta_{mb}}{\delta_{bb}}, \quad X_c = \frac{\Sigma P_m . \delta_{mc}}{\delta_{cc}};$$

heraf följer, at Influensliniren for X_a har Ordinaterne $\frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}$, analogt for X_b og X_c.

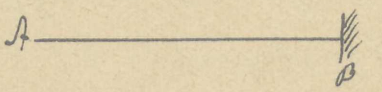
Vi skulle altsaa have fat paa Nedböjningsliniierne for $X_a = \div 1$, $X_b = \div 1$ og $X_c = \div 1$. de kunne bestemmes som Momentkurver for de kontinuerligt fordelte Belastninger z, men i Stedet herfor ville vi hellere sætte Enkeltkræfterne v, virkende i Knudepunkterne.

Ved Indsættelse af Værdierne for N_a, M_a, N_b, M_b - - -
i de almindelige Udtryk for v i §9 findes:

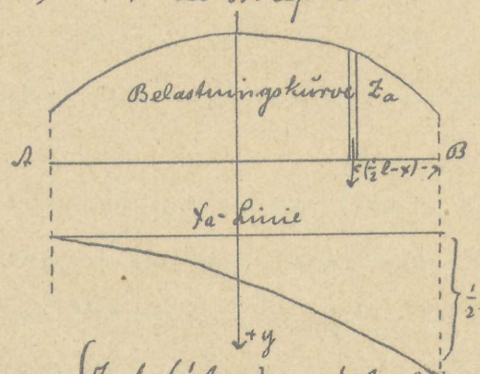
$$v_m^a = \frac{1}{2}\lambda_m \sec\varphi_m \cdot \frac{J_0}{J_m} + \frac{1}{2}\lambda_{m+1}\sec\varphi_{m+1}\frac{J_0}{J_{m+1}},$$

$$v_m^b = \div \frac{\lambda_m}{6}\cdot\frac{J_0\sec\varphi_m}{J_m}(x_{m-1}+2x_m) \div \frac{\lambda_{m+1}}{6}\cdot\frac{J_0\sec\varphi_{m+1}}{J_{m+1}}(2x_m+x_{m+1})$$
$$+ \sin^2\varphi_{m+1}\cdot\sec\varphi_{m+1}\frac{J_0}{F_{m+1}} \div \sin^2\varphi_m\cdot\sec\varphi_m\cdot\frac{J_0}{F_m}.$$

$$v_m^c = \frac{\lambda_m}{6}\cdot\frac{J_0\sec\varphi_m}{J_m}(y_{m-1}+2y_m) + \frac{\lambda_{m+1}}{6}\cdot\frac{J_0\sec\varphi_{m+1}}{J_{m+1}}(2y_m+y_{m+1})$$
$$+ \sin\varphi_{m+1}\cdot\frac{J_0}{F_{m+1}} \div \sin\varphi_m\cdot\frac{J_0}{F_m}.$$



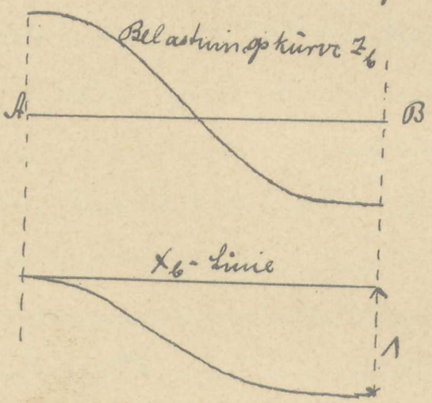
Nedbøjningerne beregnes nu som Momenter i en Bjælke AB, der er fri ved A, indspændt ved B.
δ_{aa} betyder Drejningen af Tangenten i B (hvorpaa Momentet X_a jo virker) som Følge af $X_a = \div 1$. δ_{aa} findes altsaa som Transversalkraft ved B i den med Kræfterne v^a belastede Bjælke AB, der er indspændt ved B. $\delta_{aa} = \sum v^a \left(= \int z_a\,dx\right)$, hvor Summationen udstrækkes over alle Kræfter v^a.



Hosstaaende Figur viser Udseendet af X_a-Linien. Ordinaten under B er $\frac{1}{2}l$. Den er nemlig lig Momentet af Belastningen z_a m. H. t. B divideret med δ_{aa}, altsaa lig $\frac{\int z_a dx\,(\frac{1}{2}l \div x)}{\delta_{aa}} = \frac{\frac{1}{2}l}{\delta_{aa}}\int z_a\,dx = \frac{1}{2}l$ (i det $\int x z_a\,dx = 0$); Inte=

-gralerne udstrækkes over hele Længden.

δ_{bb} betyder Forskydningen i lodret Retning af Punktet O (X_b's Angrebspunkt) som Følge af $X_b = \div 1$. Da man har $\delta_{ab} = 0$, vil Tangenten i B ikke drejes ved Belastningen $X_b = \div 1$, hvorfor Forskydningerne af O og B ere de samme; δ_{bb} kan derfor ogsaa siges at betyde Forskydningen i lodret Retning af B som Følge af Belastningen $X_b = \div 1$, eller altsaa Nedbøjningen af B. Denne findes imidlertid som Momentet ved B i den med Kræfterne v^b belastede Bjælke AB, der er indspændt ved B, altsaa $\delta_{bb} = \sum v^b(\frac{1}{2}l - x)$.



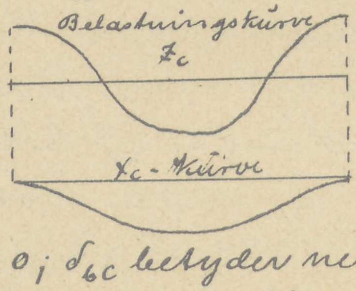
Hosstaaende Fig. viser Formen af Influenslinien for X_b; paa Verticalen gennem B afskærer den Stykket 1 if. ovenstaaende Udvikling af δ_{bb}'s Betydning.

δ_{cc} betyder Forskydningen i vandret Retning af Punktet O (X_c's Angrebspunkt) som Følge af $X_c = \div 1$. Da man har $\delta_{ac} = 0$, vil Tangenten i B ikke drejes ved Belastningen $X_c = \div 1$, hvorfor Forskydningerne af O og B ere de samme. δ_{cc} kan derfor ogsaa siges at betyde Forskydningen af B i vandret Retning eller Forlængelsen af Korden AB som Følge af $X_c = \div 1$. For en Kordes Forlængelse have vi tidligere (§ 9) fundet Udtrykket

$\Delta l = \sum y_m v_m + \sum \Delta s_m \sec \varphi_m$, hvor y er Ordinaten til et Punkt af Buen, maalt ud fra Korden. Hvis vi kalde Ordinaten til Linien AB (i Systemet med Begyndelsespunkt O) η haves da:

$$\delta_{cc} = \Sigma (y_m \div \eta) v_m^c + \Sigma \Delta s_m \sec\varphi_m = \Sigma y_m v_m^c \div \eta \Sigma v_m^c + \Sigma \Delta s_m \sec\varphi_m .$$

Δs_m er Forlængelsen af s_m som Følge af $X_c = \div 1$, og da $N_c = + \cos\varphi$, haves $\Delta s_m = \frac{s_m \cos\varphi_m}{E F_m} = \frac{\lambda_m}{E F_m}$; imidlertid ere Kræfterne v^c multiplicerede med $E F_0$, saa vi maa sætte $\Delta s_m = \lambda_m \cdot \frac{F_0}{F_m}$. Endelig er $\Sigma v_m^c = 0$; i Følge Bestemmelsen af O er nemlig $\delta_{ac} = 0$ d.v.s. Tangenten i B drejer sig ikke ved Belastningen $X_c = \div 1$; men Drejningen af denne Tangent faas som Transversalkraft ved B i Bjælken AB, der er indspændt ved B, fri ved A og belastet med Kræfterne v^c, altsaa $\Sigma v_m^c = 0$. Nu haves altsaa:



$$\delta_{cc} = \Sigma y_m v_m^c + \Sigma \lambda_m \frac{F_0}{F_m} \sec\varphi_m$$

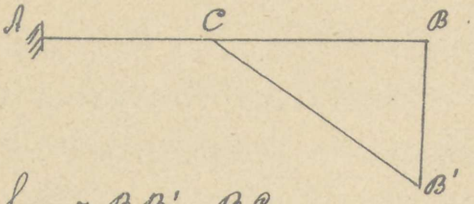
Hosst. Fig. viser Formen af Influenslinien for X_c; Ordinaten i B er Nul, da $\delta_{bb} = 0$; δ_{bc} betyder nemlig Forskydningen i lodret Retning af O (X_b's Angrebspunkt) som Følge af $X_c = \div 1$, men da $\delta_{ac} = 0$, falde O's og B's Forskydninger sammen.

Beregningen udføres altsaa paa følgende Maade: man inddeler Buens Axe i Intervaller λ_{m-1}, λ_m; .. (helst ligestore) og beregner Kræfterne v^a, v^b og v^c. O bestemmes som Tyngdepunkt for Kræfterne v^a virkende i Buens Punkter. Nu lader man de 3 Ræk=

ker Kræfter virke paa en ved B indspændt, ved A fri Bjælke og beregner Momenterne i Knudepunkterne; disse Momenter, dividerede med $\delta_{aa} = \Sigma v^a$, $\delta_{bb} = \Sigma v^b (\frac{1}{2} l \div x)$, $\delta_{cc} = \Sigma v^c y + \Sigma \lambda_{m} \frac{J_0}{F_m} \sec \varphi_m$, ere Influensliniernes Ordinater. Nu findes Influensliniernes for Momenterne M_x ved:

$M_x = M_0 \div X_a + X_b \cdot x \div X_c \cdot y$.

Influenslinien for M_0 i Punktet C ses i hosst. Fig,



hvor $BB' = BC$.

Multiplikationen af Ordinaterne i X_b- og X_c-Linierne med x og y udføres lettest grafisk ved en Reduktionsvinkel.

Ligesom ved de tidligere omtalte Buekonstruktioner udføres først en foreløbig Beregning (f. Ex. under Forudsætning af konstant Tversnit), hvorved Dimensionerne bestemmes af Momenterne m. H. t. Punkter af Buens Axe og de tilsvarende Normalkræfter, som herved tilstrækkelig nøjagtigt sættes lig $X_c \sec \varphi$ (X_c er Horizontaltrykket). Ved den endelige Beregning søger man derimod Momenterne m. H. t. Kernepunkterne (øverste og nederste Punkt af Kernen i de forskellige Tversnit); disse Momenter faas ved at lade x og y i $M_x = M_0 \div X_a + X_b \cdot x \div X_c \cdot y$ betyde Kernepunktets Koordinater.

<u>En Temperaturvariations Indflydelse</u> (vi antage, at Temperaturtilvæxten er ligestor i alle

Buens Punkter og lig t^o) bestemmes af:

$$X_{at} \cdot \delta_{aa} = \mathcal{E} \cdot J_o \int N_a \, \varepsilon \cdot t \cdot ds = 0, \quad X_{at} = 0;$$

$$X_{bt} \cdot \delta_{bb} = \mathcal{E} \cdot J_o \int N_b \, \varepsilon \cdot t \cdot ds = \varepsilon \, t \cdot \mathcal{E} J_o \int \sin\varphi \, ds = \varepsilon \cdot t \cdot \mathcal{E} J_o \int dy = 0, \; X_{bt} =$$

$$X_{ct} \cdot \delta_{cc} = \mathcal{E} \cdot J_o \int N_c \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds = \varepsilon \cdot t \cdot \mathcal{E} \cdot J_o \int \cos\varphi \, ds = \varepsilon \cdot t \cdot \mathcal{E} \cdot J_o \cdot l$$

$$X_{ct} = \frac{\varepsilon \cdot \mathcal{E} \cdot t \cdot l \cdot J_o}{\delta_{cc}}.$$

Herved fremkomme Momenterne $M_{xt} = \div X_{c \cdot t} \cdot y$.

Simplifikationer i den udviklede Beregning kunne faas ved i Udtrykkene for Kræfterne v at se bort fra Leddene af Formen $J_o \left(\frac{N_{m+1}}{F_{m+1}} tg\, \varphi_{m+1} \div \frac{N_m}{F_m} tg\, \varphi_m \right)$, hvilke altid ere forsvindende; derved bortfalde de to sidste Led i v_m^b og v_m^c.

Dernæst foretager man altid den første Beregning med konstant Tværsnit, og man kan som oftest sørge for at inddele saaledes, at $\lambda_m = \lambda_{m+1} = \dots \lambda$.

Sættes $J_m = J_{m+1} = J_o$, faas:

$$v_m^a = \frac{1}{2} \lambda (\sec\varphi_m + \sec\varphi_{m+1}),$$

$$v_m^b = \div \frac{1}{6} \lambda \left(\sec\varphi_m (x_{m-1} + 2x_m) + \sec\varphi_{m+1} (2x_m + x_{m+1}) \right),$$

og i Stedet derfor kan man tilstrækkeligt nøjagtigt sætte $v_m^b = \div \frac{1}{6} \lambda \cdot \frac{\sec\varphi_m + \sec\varphi_{m+1}}{2} (x_{m-1} + 4x_m + x_{m+1})$

$= \div \frac{1}{2} \lambda (\sec\varphi_m + \sec\varphi_{m+1}) \cdot x_m$, altsaa $\underline{v_m^b = \div x_m \cdot v_m^a}$.

Behandles Udtrykket for v_m^c paa samme Maade, faas:

$$v_m^c = \frac{1}{6} \lambda \cdot \frac{\sec\varphi_m + \sec\varphi_{m+1}}{2} (y_{m-1} + 4y_m + y_{m+1}) = \frac{1}{6} (y_{m-1} + 4y_m + y_{m+1}) \, v_m^a,$$

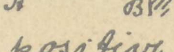
og ved en nogenlunde flad Bue eller ved lille Afstand mellem Knudepunkterne kan sættes

$$\underline{v_m^c = y_m \, v_m^a.}$$

For flade Buer kan man endelig sætte sec φ = 1, hvorved $v_m^a = h$, $v_m^b = \div h \cdot x_m$, $v_m^c = h \cdot y_m$, hvor h naturligvis kan bortdivideres, naar man blot erindrer ligeledes at dividere δ_{aa}, δ_{bb}, δ_{cc} og Tælleren X_{ct} med h.

<u>En flad parabolsk Bue.</u> Vi ville gennemføre Beregningen for en saadan, idet vi sætte sec φ = 1 og Tværsnittet konstant. I Stedet for Enkeltkræfterne v ville vi her hellere indføre de kontinuerlige Belastninger; med Begyndelsespunktet i O ende (idet $z\,dx = v$ og $h = dx$): $z_a = 1$, $z_b = \div x$, $z_c = y$, men idet vi her hellere tage Begyndelsespunktet i Buens venstre Endepunkt og y-Axen positiv opad, maa sættes $x \div \frac{1}{2}l$ for x og $\eta \div y$ for y, hvorved $z_a = 1$, $z_b = +\frac{1}{2}l \div x$, $z_c = \eta \div y$, hvor η er Punktet O's Højde over Vederlaget. η bestemmes ved $\eta \cdot \int z_a\,dx = \int y \cdot z_a\,dx$, altsaa idet $y = \frac{4f}{l^2}(lx \div x^2)$:

$$\eta \int_0^l dx = \int_0^l \frac{4f}{l^2}(lx - x^2)\,dx, \quad \eta = \frac{2}{3}f.$$

Som bekendt findes nu Momenterne fra en Belastning pr. Længdeenhed ved $\frac{d^2M}{dx^2} = \div p$, men da Momenterne i Bjælken A—B  ere negative, medens Nedbøjningerne ere positive, maa vi sætte $\delta_{ma} = -M$, altsaa:

$$\delta_{ma} = \int_0^x dx \int_0^x z_a\,dx = \frac{1}{2}x^2, \qquad \delta_{aa} = \int_0^l z_a\,dx = l,$$

$$\delta_{mb} = \int_0^x dx \int_0^x z_b \cdot dx = \frac{1}{4}lx^2 \div \frac{1}{6}x^3, \quad \delta_{bb} = \int_0^l dx \int_0^l z_b\,dx = \frac{1}{12}l^3,$$

$$\delta_{mc} = \int_0^x dx \int_0^x z_c\,dx = \frac{1}{3}fx^2 \div \frac{4f}{l^2}\left(\frac{1}{6}lx^3 - \frac{1}{12}x^4\right) = \frac{1}{3}f\,\frac{x^2(l-x)^2}{l^2}$$

For δ_{cc} haves med O som Begyndelsespunkt Udtrykket:

$\delta_{cc} = \Sigma y v^2 + l i^2 \left(\frac{J_0}{F} = i^2 \text{ og } \Sigma \lambda \sec\varphi \sim \Sigma\lambda = l\right)$;
altsaa vil: $\delta_{cc} = \Sigma(\eta \div y) v^c + l i^2 = \eta \Sigma v^c \div \Sigma y v^c + l i^2$, og
idet $\Sigma v^c = 0$ og $v^c = (\eta \div y)\,dx$:

$$\delta_{cc} = \int_0^l y^2 dx \div \int_0^l \eta \cdot y \cdot dx + l i^2 = \frac{4}{45} f^2 l + l i^2.$$

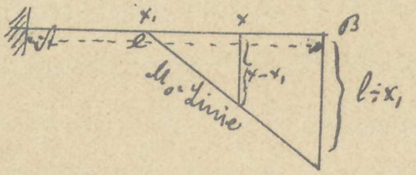
Influenslinien for X_c (Horizontaltrykket) faar vi Ligningen:

$$H = \frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}} = \frac{15}{4}\cdot\frac{(l-x)^2\cdot x^2}{l^3\cdot f}\cdot\frac{1}{1+\frac{45}{4}\cdot\frac{i^2}{f^2}} = \frac{15}{4}\cdot\frac{l}{f}\left(\frac{x}{l}\right)^2\left(1\div\frac{x}{l}\right)^2\cdot\xi,$$

idet $\xi = \frac{1}{1+\frac{45}{4}\cdot\frac{i^2}{f^2}}$.

Influenslinien for Momentet i Punktet (x_1, y_1) har Ligningen:

$$M_{x_1} = \div\frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}} + \left(x_1 \div \tfrac{1}{2} l\right)\frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}} + \left(y_1 \div \tfrac{2}{3} f\right)\frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}} + \left[x \div x_1\right]_{x_1}^{l};$$



Det sidste Led angiver Ordinaterne i M_0-Linien, som ses i hosst. Fig. Ved Skrivemaaden er antydet, at det kun skal medtages for Værdier af x mellem x_1 og l.

Ved at indføre Værdierne af Størrelserne δ og simplificere, faaes:

$$M_{x_1} = l\left[\left(\frac{x}{l}\right)^2\left[\div\frac{1}{2} + \left(\frac{x_1}{l}\div\frac{1}{2}\right)\left(3\div\frac{2x}{l}\right) + \left(\frac{15x_1}{l}\left(1\div\frac{x_1}{l}\right)\div\frac{5}{2}\right)\left(1\div\frac{x}{l}\right)^2\cdot\xi\right] + \left(\frac{x}{l}\div\frac{x_1}{l}\right)_{x_1}^{l}\right].$$

Heri er x_1 naturligvis en Konstant. Ved Hjælp af disse Ligninger for H og M_{x_1} beregnes nu let Ordinaterne i Influenslinierne f. Ex. for hver $\frac{1}{10}$ af Spændvidden. Størrelsen ξ angiver Indflydelsen af Normalkraften (den af den direkte Sammentrykning bevirkede

Forkortelse af Buen).

For at beregne ξ maa man kende <u>i</u> og altsaa have et forelöbigt Begreb om Dimensionerne; i Mangel heraf kan man ved den förste Gennemregning sætte $\xi = 1$. I Alm. kan <u>i</u> höjest blive $1/10\, f$, i hvilket Tilfælde $\xi = \frac{1}{1.11} = 0,9$.

Til Lettelse for Beregningerne anföres fölgende Tabel over Ordinaterne i Influenslinierne for $\xi = 1$:

		$\frac{x}{l} =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1.0	
H-Kurve			0	0,0304	0,0960	0,1654	0.2160	0.2344	0,2160	0.1654	0,0960	0,0304	0	$\times \frac{l}{f}$
M_{x_1}-Kurver		$\frac{x_1}{l} = 0,0$	0	+0,0607	+0,0640	+0,0367	0.0	÷0,0313	÷0,0480	÷0,0473	÷0,0320	÷0,0113	0	$\times l$
		$\frac{x_1}{l} = 0,3$	0	÷0,0053	÷0,0242	÷0,0595	÷0,0130	+0,0156	+0,0278	+0,0269	+0,0179	+0,0059	0	
		$\frac{x_1}{l} = 0,5$	0	+0,0051	+0,0120	+0,0101	÷0,0080	+0,0469	÷0,0089	+0,0101	+0,0120	+0,0051	0	

Kender man Værdien af ξ, kan man let korrigere Tallene i Tabellen; Ordinaterne i H-Linien skulle blot multipliceres med ξ og fra Ordinaterne i M_{x_1}-Linierne skal <u>subtraheres</u> $(y_1 \div \frac{2}{3} f)\, H.(1 \div \xi)$, hvor H betegner Ordinaterne i H. Linien.

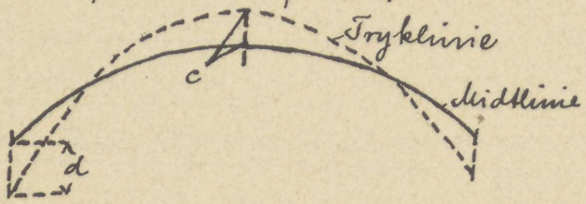
En Temperaturvariations Indflydelse bestemmes ved

$$H_t = \pm \frac{\varepsilon . E . t . l . J_0}{\frac{4}{45} f^2 l + l i^2} = \pm \frac{45 . \varepsilon . E . t . J_0}{4 f^2} . \xi .$$

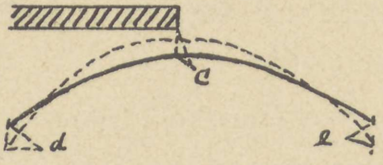
Til Slut skal kun anföres et Par Resultater, som kunne finde Anvendelse ved Beregning af Hvælvinger med ensformig Belastning. Af Fortegnene for Influensordinaterne ses, at Momentet i Punkterne $\frac{x_1}{l} = 0$ og $\frac{x_1}{l} = 0{,}3$ omtrent naar sin störste Værdi, naar den ene Halvdel af Buen er belastet, hvorfor man ofte ved Hvælvinger nöjes med at betragte de to Tilfælde: halv Belastning og fuld Belastning.

For en flad, parabolsk Bue, belastet med p over hele Længden, findes ved Udregning af Influensfladernes Arealer (idet vi sætte $\frac{45}{4}\cdot\frac{i^2}{f^2} = \varphi$):

$H = \frac{1}{8}\cdot\frac{p.l^2}{f}\cdot\mathfrak{Z} = \frac{1}{8}\cdot\frac{pl^2}{f}\cdot\frac{1}{1+\varphi}$; $M_{0,0} = +\frac{1}{12}\cdot p.l^2\frac{\varphi}{1+\varphi}$, $M_{0,5} = \div\frac{1}{24}p.l^2\cdot\frac{\varphi}{1+\varphi}$.



Ved Beregning af Hvælvinger nöjes man jo gerne med at tegne Tryklinier. Naar man har Tryklinien, er Momentet i et Tværsnit lig Horizontaltrykket Gange den lodrette Afstand fra Midtlinie til Tryklinie, og naar man omvendt kender Momentet i et Tværsnit, kan man derved finde et Punkt af Tryklinien. saaledes findes $d = \frac{2}{3}\varphi.f$, $c = \frac{1}{3}\varphi.f = \frac{1}{2}d$. ($d = \frac{M_{0,0}}{H}$, $c = \frac{M_{0,5}}{H}$).



For halv Belastning (den anden Halvdel af Buen vægtløs) findes:

$H = \frac{1}{16}\cdot\frac{p.l^2}{f}\cdot\frac{1}{1+\varphi}$, $M_{0,0} = +\frac{p.l^2}{64}\cdot\frac{1+\frac{11}{3}\varphi}{1+\varphi}$,

$M_{1,0} = \div\frac{p.l^2}{64}\cdot\frac{1\div\frac{5}{3}\varphi}{1+\varphi}$, $M_{0,5} = \div\frac{p.l^2}{48}\cdot\frac{\varphi}{1+\varphi}$, og herved

$d = \frac{1}{4}f(1+\frac{11}{3}\varphi)$, $c = \frac{1}{3}\varphi\cdot f$, $e = \frac{1}{4}f(1\div\frac{5}{3}\varphi)$;

Naar man lægger Tryklinien gennem de herved bestemte Punkter, faas den ved Elasticitetsteorien (med de her indførte Tilnærmelser) bestemte Tryklinie, og derved de rigtige Paavirkninger i hvert Snit.

Af det anførte ses, at skjønt Parablen er Ligevægtsform for en total ensformig Belastning, vil der dog optræde bøjende Momenter, og Grunden hertil er den centrale Sammentrykning (Momenterne forsvinde for $\varphi = 0$, $\zeta = 1$).

Ovenstaaende kan tilnærmelsesvis anvendes paa andre flade Hvælvinger end just den paraboliske.

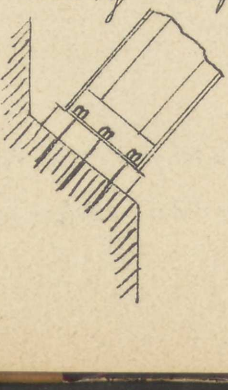
§15. Konstruktion af Bruedragere.

Angaaende Konstruktionen af Bruedragere er der intet væsentligt at føje til, hvad der er meddelt tidligere; alle de samme Tversnitsformer anvendes her; Former som I, ╬ anvendes hyppigere her end ved Bjælkedragere, men $\perp$, $\perp\!\perp$ o.s.v. ere maaske ogsaa her de almindeligste; til smaa Bruer ogsaa ╬, I.

Derimod skulle <u>Lejerne</u> og <u>Chamiererne</u> omtales her.

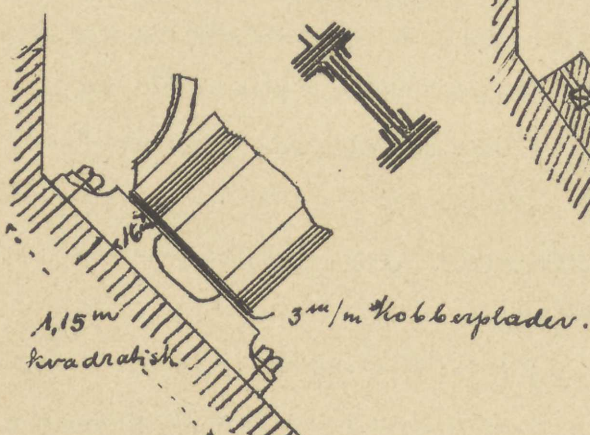
Lejerne ere forskellige, eftersom de skulle virke som <u>Chamierer</u> eller som <u>Indspændinger</u>; undertiden anvendes Mellemformer herimellem.

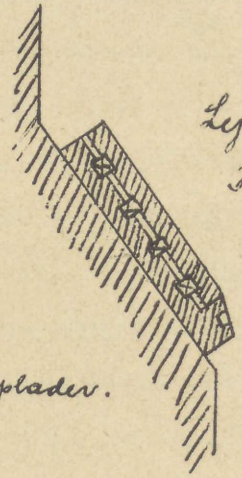
En virkelig Indspænding er sjældent anvendt; den udføres ved at bolte Drageren sammen med Underlagspladen. Denne kan se ud ganske som tidligere omtalt, kun er den hyppigere



delt i to Dele, saa den överste kan forskydes paa den nederste og fastholdes ved Kiler; ligeledes Regulering af Höjden ved Kiler; dette gælder ogsaa de fölgende Lejer. -
En virkelig Indspænding er udfört ved St. Louisbroen.
I Alm. er Indspændingen kun udfört paa den Maade, at Buen stöder stumpt mod Underlagspladen uden nogen særlig Forbindelse. Et saadant Leje virker kun som en Indspænding, hvis der ingen Trækspændingen kan opstaa i Vederlagstværsnittet, og dette maa man altsaa sikre sig; ellers finder der en Drejning Sted om den ene Kant, og naar denne Bevægelse er indtraadt, har man et Charnier i Kanten (teoretisk talt.)

Bro over <u>Mosel ved Güls</u>.

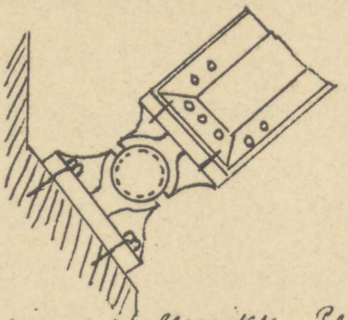




Leje med Kiler til Regulering.

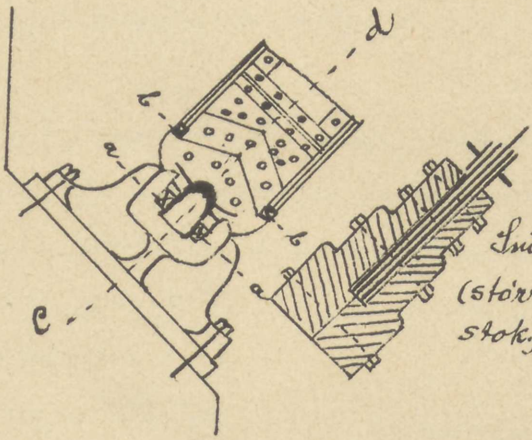
Skal Lejet virke som Charnier, konstrueres det som et Vuggeleje, og der er for saa vidt ikke meget nyt at föje til.

I den förste Fig. ses et alm.
Vuggeleje med lös cylindrisk
Tap uden nogen Slags Regulerings-
indretning. Buen er for Enden
kantet med Vinkeljærn, hvor-
til Overdelen af Lejet er boltet.
Kan kun bruges ved smaa Di-



mensioner (ellers ikke Plads til Nitter i Kantningsvinkeljærnet)

I den anden Fig. er
der en lös Halvtap,
der er kileformet,
hvorved Indstilling
i Höjden. Tappen
kan forstilles til Si-
den ved Kilerne a.
Overdelen af Lejet
er todelt (se Snittet)



og omslutter Buens Krop, der er forstærket med Paaforing-
er. Ved Kilerne b bringes Buens Hoved og Fod til at stöt-
te mod Skoen.

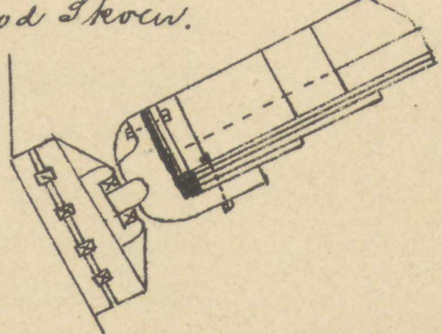
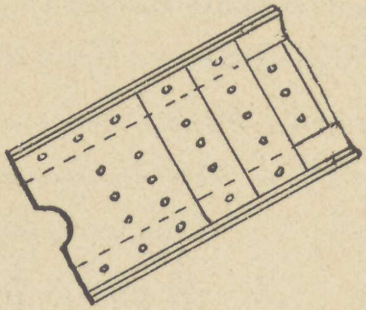


Fig. viser et Leje for en
Bue med T Tværsnit;
ved Paaforringer paa
baade Kroppen og La-
mellerne skaffes der en
större Flade til Over-
förelse af Trykket;

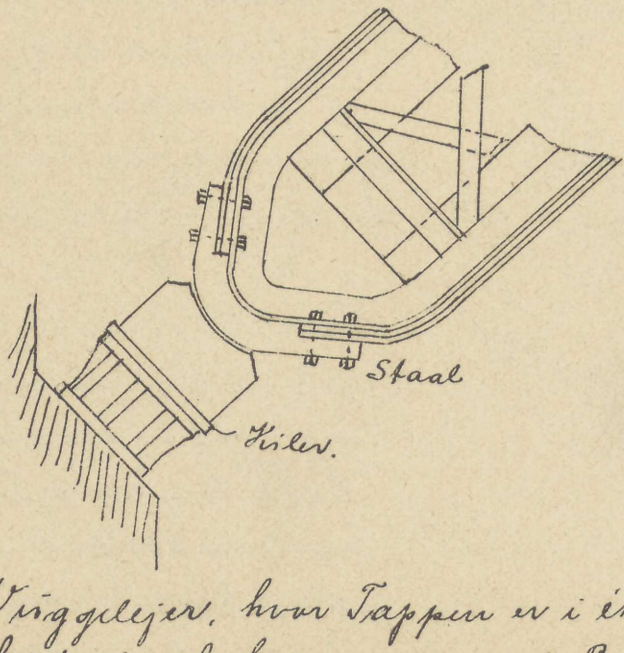
Boltene tjene kun til Forbindelsen ikke til Overførelsen af Trykket; dette gælder i Alm. for Befæstelsesboltene for disse Lejer.

I Stedet for at anbringe en Sko for Enden af Dra-



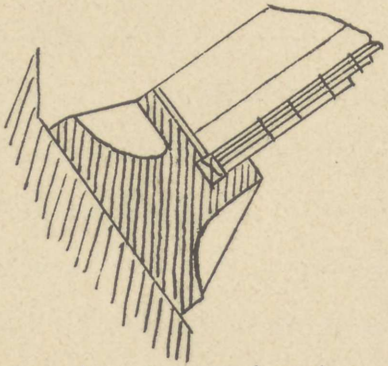
geren kan man ogsaa forstærke Kroppen ved Paaforingsplader, indtil man ved at udarbejde den halvcirkelformige Udskæring heri faar tilstrækkelig Anlægsflade for Bolten. –

I Stedet for de løse Tappe, som der ovenfor har været tænkt paa, kan Tappen være i et med den til Buen befæstede Del af Lejet. Dette kan f. Ex. udføres som i Fig. (Koblenz) ved at



føre Hoved og Fod af Buen sammen til en Spids, som rundes af med den Radius, Tappen skal have og beklædes med en tyk Staalplade. Eller paa lignende Maade som ved Vippelejer, hvor Tappen er i ét med Overdelen af Lejet; den forbindes da med Buen paa samme

Maade som i Fig. ovenfor. Ofte nöjes man ved mindre Buer med Kiler i Stedet for cylindriske Bolte, hvilket giver en simpel Konstruktion. I Fig. er det Paaforingen paa Lamellerne, og det er den, der stötte mod Kilen; naturligvis maa der sörges for, at Buen ikke kan forskubbes i Forhold til Lejet. – Undertiden har man ladet to Kiler træde i Stedet for



Charnieret; det virker da som en Indspænding, saalænge Trykket træffer imellem Kilerne, som Charnier, naar det træffer udenfor disse.

Angaaende Dimensionerne henvises til Vuggelejer.

Topcharnieret.

Dette dannes i Alm. af en lös Bolt, hvorimod de to Buehalvdele stötte vid hule halvcylindriske Flader. Fig. viser en Konstruktion ganske lignende det förste Vederlagscharnier, der er vist ovenfor.

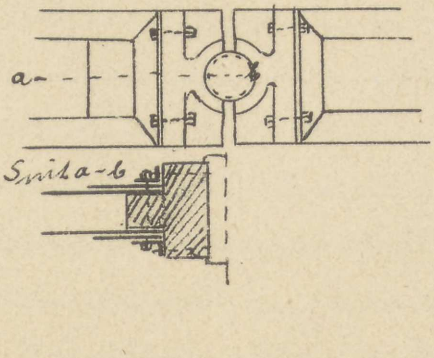
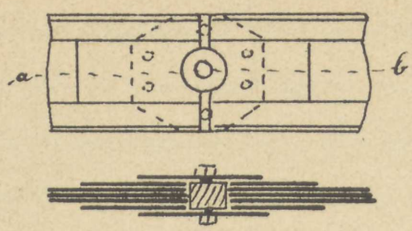
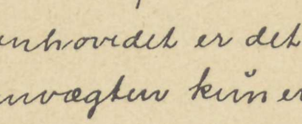


Fig. paa næste Side viser en ganske smuk Konstruktion; Charnier-

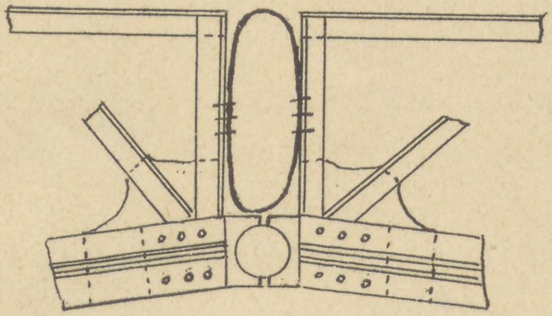


bolten er en Stöbejernsskive (eller Staal-), hvorimod Broen stötter sig med 5 Pladetykkelser (Paaforing). For at forhindre indbyrdes Forskydning er der for Enderne af Skiven boltet et Par sexkantede Plader (punkterede i överste Fig.) som et Bryst, og de i överste Fig. viste 6 punkterede Bolte gaa gennem store Huller i Broen, saa de ikke hindre Bevægelse; ved disse sidste Bolte er en Adskillelse af Charnieret ved Rystelser o. l. forbygget. Overhovedet er det ved mindre Jernbanebroer, hvor Egenvægten kun er lille i Forhold til Belastningen, tilraadeligt ikke at nöjes med at lade Brohalvdelene stötte mod Bolten, men man bör heller sörge for, at denne helt omsluttes; man kan da f. Ex. konstruere Charnieret som en alm. <u>Gerbersk Bolteforbindelse</u> (Passercharnier). Det er saadanne Betragtninger, der har fört til Konstruktioner som de to fölgende (Berlins Stadtbahn):



Vandret Snit.

Lamellerne i Foden ere ikke afbrudte, men hele det övrige Tversnit er. For at mildne Rystelsernes Indflydelse og for at faa Lamellerne mindre paavirkede af lodret Forskydning er der paa Siderne tilföjet to Staalfjedre som vist i Snittet; disse tillade en Vinkeldrejning og overföre dog de lodrette Kræfter.

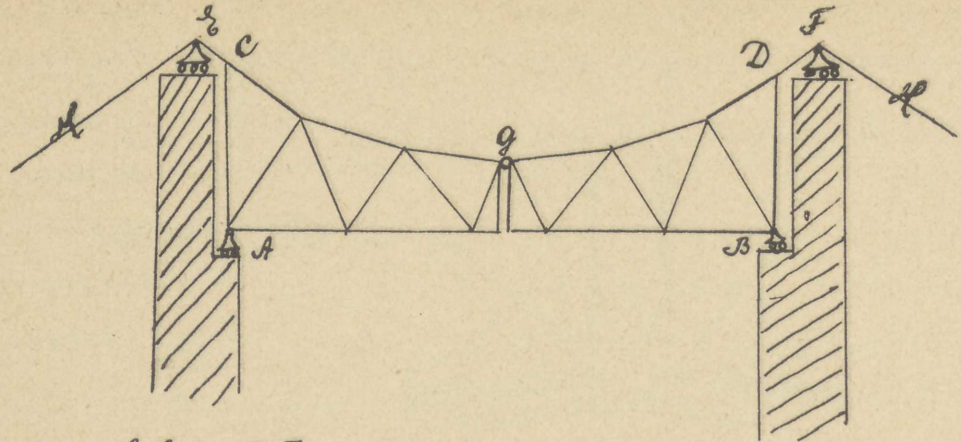


Paa lignende Maade skal Staalfjedren i hosstaaende Fig. virke:

Kap. 4. Hængebroer.

§16. Statisk bestemte, stive Hængebroer.

Ligesom ved Buedragerne maa vi her, inden vi gaa til Behandlingen af de statisk ubestemte Hængebroer, som maaske ikke ere de hyppigst forekommende, först omtale nogle statisk bestemte Konstruktioner. Disse ere navnlig to Slags: egentlige Kabel- eller Kædebroer (maaske med Afstivningsbjælke) og Broer, hvor Kæde og Afstivningsbjælke ere sammensmeltede til en stiv Gitterdrager; det er de sidstnævnte, vi her först ville betragte.
Den i Fig. övrist paa næste Side viste Drager har to bevægelige simple Understötninger ved A og B og et Charnier ved G; ved C og D have Kablerne CEK og DFH fat; de ere forankrede ved H og K og udöve altsaa Reaktioner paa Drageren i Retning-



ene CE og DF.

Ved E og F er der bevægelige simple Understøtninger. At denne Drager er statisk bestemt, kan eftervises ved Hjælp af den II, S. 139, udviklede Metode. Der haves nemlig 2 Skiver, 2 Knudepunkter (E og F), 2 Stænger (EC og DF), 6 ubekendte Reaktioner (K. E. A, B, F, H) og 1 Charnier af 1ste Orden. Ligningen:

$2(c_1 + 2c_2 + \cdots) + s + a = 3b + 2k$ bliver altsaa til:

$2 \times 1 + 2 + 6 = 10 = 3 \times 2 + 2 + 2.$

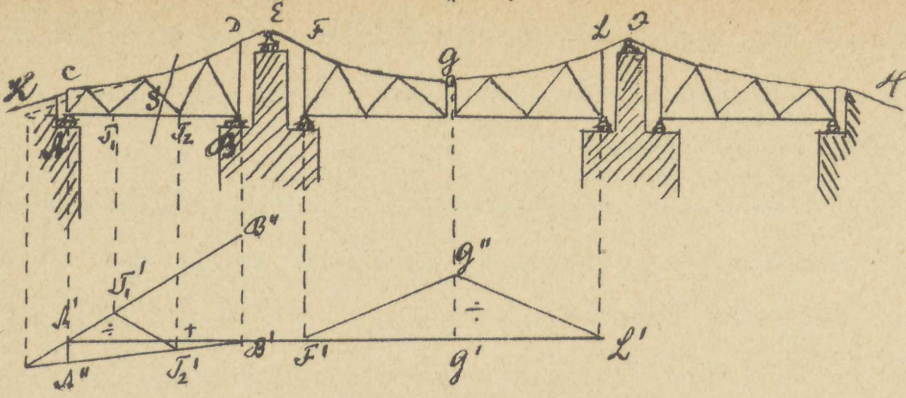
A og B kunne kun give lodrette Reaktioner; tænkes disse flyttede op til C og D, kan Drageren tænkes understøttet alene i C og D paa en saadan Maade, at Reaktionerne her kunne virke efter vilkaarlige skraa Retninger, altsaa som om Drageren her var hængt op i to Charnierer. Det indses saaledes, at Drageren kun er en omvendt 3-Charniersbue, og heraf følger atter, hvorledes den kan beregnes. Man behøver blot at vende op og ned paa den og beregne den som en 3-Charniersbue og tilsidst forandre

Fortegnet for alle Spændingerne (Kræfterne virke nemlig paa Drageren her i modsat Retning af den, hvori de virke paa Buen).

Belastningen angriber her i Trdens Knudepunkter, hvilket stemmer med, at Buen alm. har Brobanen hvilende paa Overdelen. Stængerne (Kablerne) EC, EK, DF og FH have Spændinger med samme vandrette Komposant (lodret Belastning forudsat), og denne er i Størrelse lig Buens Horizontaltryk og findes paa samme Maade.

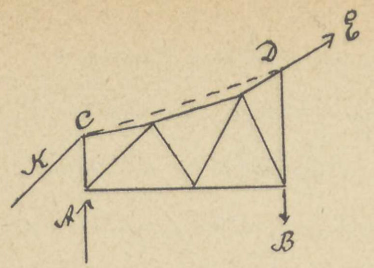
Reaktionen A er i Størrelse lig den lodrette Komposant af 3-Charniers Buens Vederlagstryk ÷ den lodrette Komposant af Spændingen i CE; ligesaa B. Reaktionerne kunne blive negative, saa Lejerne maa forankres. Kun for Verticalerne AC og BD finder man ikke de rigtige Spændinger ved at tænke sig Reaktionerne A og B flyttede op til C og D; Spændingerne her kunne derimod findes ved at tegne Kraftpolygonen for det ene Endepunkt (i Fig. C og D, i det Spændingerne EC og DF ere bekendte). Hvis EC falder i Forlængelsen af den første Stang i Overdel, er Spændingen i AC Nul. –

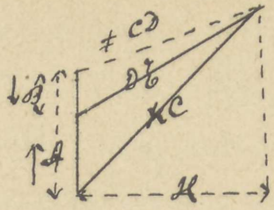
En videre Udvikling af denne Drageform ses i Fig. næste Side; Midterfaget er ganske som ovenfor, men her er tilføjet Bjælker over to Sideaabninger, og med deres Overdel falder Kablerne EK og FH i Drageren ovenfor sammen. Ved H og K



findes faste Forankringer. Den statiske Bestemthed af denne Drager kan efterviser paa samme som ovenfor. Man har: $6=4$, $k=2$ (E og J), $a=10$, $s=4$, $c_1=1$, og $2\times1+4+10=16=3\times4+2\times2$. Hvad först Midterfaget angaar, saa beregnes det ganske som ovenfor vist, uafhængigt af Sideaabningerne; hvis der virker en lodret Belastning (og kun om en saadan forudsættes der her at være Tale) over Sideaabningen, vil Bjælken AB her fungere som en i A og B simpelt understöttet Bjælke, der vil ingen Spænding fremkaldes i DE og altsaa heller ikke være Tale om en Indvirkning fra Sideaabningens Belastning paa Spændingerne i Midterfaget. Behandlingen af Indvirkningen af en Belastning over Sideaabningen paa Spændingerne i Bjælken AB udföres altsaa efter de tidligere viste Metoder for simpelt understöttede Gitterbjælker; men Spændingerne i Bjælken blive ogsaa paavirkede af en Belastning af Midteraabningen. En saadan vil nemlig frembringe en vis Trækspænding i EF, hvis Horizontalkomposant findes som ovenfor vist; derved frembringes atter en Spænding i DE med samme Horizontalkomposant, og idet Bjælken AB er fastholdt ved C, maa der altsaa frembringes Spændinger i Bjælkens Stænger. Disse Spændinger ere naturligvis proportionale med Spændingen i DE eller altsaa med Horizontaltrækket H fra Midterfaget, og da Influensliinien for H er en Trekant F'G''L' med Toppunkt lodret under Charnieret, maa Influensliinien for Spændingen i en hvilkensomhelst af Sidefagets Stænger paa Strækningen under Midteraabningen ligeledes være en Trekant med Toppunkt lodret under G.

Denne Del af Influensliinien er bestemt, naar man blot kender Ordinaten G'G'', og dens Störrelse er jo lig Spændingen S_g i den betragtede Stang fremkaldt af en Kraft 1 i G.
I Fig. ovenfor er tegnet Influensliinien for Spændingen S i en Diagonal i Sideaabningen. Stykket $A'T_1'T_2'B'$ er som sædvanligt bestemt ved $A'A'' = S'$, $B'B'' = S''$ (de ved Reaktionerne $A = 1$ og $B = 1$ fremkaldte Spændinger); Stykket $F'G''L'$ er bestemt ved $G'G'' = S_g$. S_g findes (ligesom S' og S'') ved et Diagram; man bestemmer det af Kraften 1 i G fremkaldte Horizontaltræk H (som for 3-Charniersbuen); af H findes Spændingen DE og ved Oplösning af DE efter CK og de lodrette gennem A og B findes de ydre Kræfter, der paavirke Bjælken AB, saa Diag=

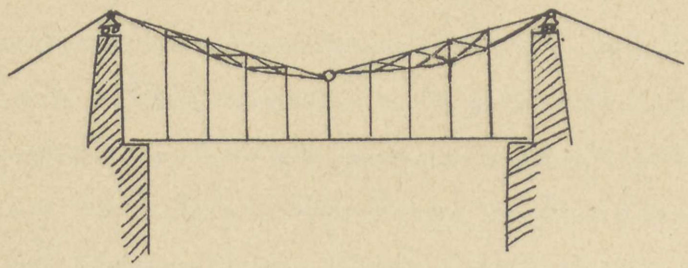




grammet nu kan tegnes; dette giver paa en Gang alle Spændingerne Sg.

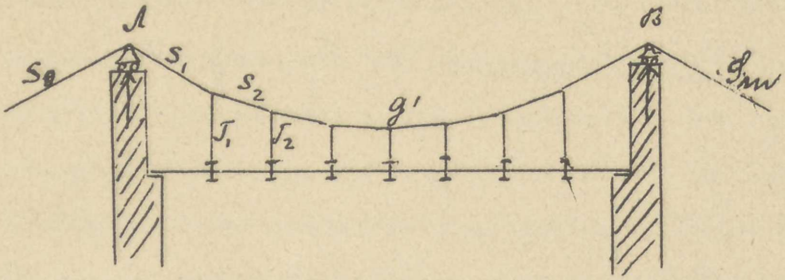
En statisk bestemt Hængebro efter omtrent dette Princip er i 1892-93 bygget over Elben lige syd for Dresden (Midteraabning 147m).

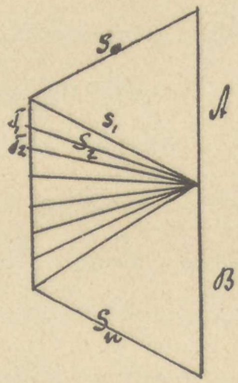
Ovenstaaende Betragtninger ere naturligvis ganske uafhængige af den stive Gitterdragers Form. Saaledes gælde de f. Ex. ogsaa for den i hosst. Fig. viste Form (Bro over Monongahella ved Pittsburg), hvor Drageren over Midteraabningen er en 3-Charniersbue



med lige Overdel, parabolsk Underdel. Den særlige Form giver naturligvis Anledning til Simplificationer, som vi dog ikke kunne gaa nærmere ind paa her. Lignende Dragerformer (med baade Over- og Underdel krumme) ere anvendte i Grand Avenue bridge, St. Louis, og Tower-bridge, London.

§17. Egentlige Hængebro (Kabel-Kæde-Bro) med en Aabning.





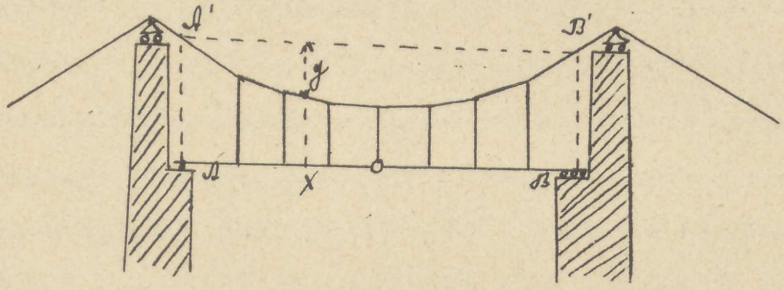
Vi begynde med at betragte en ikke afstivet Kædebro, hvor Hængestængerne bære Tværbjælkerne og disse atter Brobanen.

Kæden er paavirket af Kræfterne $T_1, T_2 \dots$ i Hængestængerne, og dens Ligevægtsform vil være en Tovpolygon til disse Kræfter. Den til en given Belastning svarende Ligevægtsform og de tilsvarende Spændinger i Kæden lade sig bestemme, saasnart 3 Punkter af Ligevægtsformen ere bekendte.

Man kan saaledes bestemme Ligevægtsformen, naar Egenvægten alene virker, idet man kender Punkterne A og B samt f. Ex. Midtpunktet af Kæden g'; man begynder da med at antage hele Egenvægten ensformigt fordelt over Horizontalprojektionen, hvorved Ligevægtsformen bliver en Parabel med lodret Axe gennem de tre Punkter

(Polygon indskrevet i en Parabel); under denne Forudsætning, som altid er tilladelig ved Beregning af Spændingerne, er Ligevægtsformen uafhængig af Belastningens Størrelse. De til en vis Størrelse af Belastningen svarende Spændinger i Kæde og Hængestænger findes ved at tegne den til Ligevægtsformen som Tovpolygon svarende Kraftpolygon, saaledes som vist i Fig. ovenfor. Forøges Belastningen, bliver den nye Kraftpolygon ligedannet med den oprindelige; störst Spænding i Kæde- og Hængestænger faas derfor ved total Belastning, og herefter bestemmes deres Dimensioner og nöjagtige Vægt. Nu kan man (til Brug ved Opstillingen) finde den til Egenvægten alene svarende Ligevægtsform nöjagtigere: Spændingen i en Hængestang er lig den Del af Brobanens Vægt, der bæres af den i Stangen ophængte Tværbjælke, plus Stangens Egenvægt, og i Kædens Knudepunkter virker denne Spænding plus Halvdelen af de tilstödende Kædeleds Vægt; Ligevægtsformen er Tovpolygon til disse Kræfter og kan altsaa bestemmes ved en Momentberegning. Nu kan ogsaa Kædeleddenes Længde beregnes; hvorved man erindres, at den fundne Ligevægtsform ikke svarer til spændingsfri Tilstand, og at Stangernes Længde altsaa maa udföres Stykkerne $\frac{S \cdot s}{E F}$ kortere end Længden af Polygonsiderne i Ligevægtsformen.

En Hængebro af den nu beskrevne Indretning vilde man dog aldrig bygge; til en delvis Belastning af Brobanen svarer nemlig en helt ny Ligevægtsform af Kæden, og Kæden vil naturligvis antage denne nye Form, hvorved der vil opstaa en bölgeformet Bevægelse ogsaa af Brobanen, idet Belastningen rykker frem; Konstruktionen er altsaa bevægelig. Man tilföjer derfor en gjennemgaaende Afstivningsbjælke som Mellemled mellem Hængestængerne og Brobanen. Bjælken har nu ved A og B en fast og en bevægelig Understötning; den hindrer ved sin Stivhed



Kæden i at antage en ny Ligevægtsform. Vi antage i det fölgende, at Bjælken er saa stiv, at dens Formforandringer og dermed ogsaa Kædens Formforandringer kunne regnes som forsvindende, ligesom vi jo i Alm. have forudsat det ved Beregning af baade Gitter- og massive Bjælker. Men paa den anden Side er det klart, at da Kæden beholder sin fulde Bevægelighed i Knudepunkterne, maa dens Form nödvendigvis være Ligevægtsform for de Kræfter, der paavirke den, nemlig Spændingerne i Hængestængerne, en Omstændighed man benytter til Bestemmelse af Fordelingen af Belastningens Virkning paa Kæde og Bjælke.

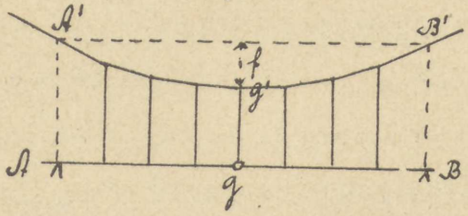
Man indretter det i Alm. saaledes, at Bjælken slet ikke paavirkes af Egenvægten; man bestemmer altsaa Kædens Form som Ligevægtsform svarende til Egenvægten og bestemmer Længden af Kædeleddene og Hængestængerne herefter, alt som ovenfor vist. For at være sikker paa denne Fordeling af Belastningen sørger man ved Monteringen for, at Bjælken er spændingsfri, naar der ingen tilfældig Belastning virker, idet man, hvis det f. Ex er en Gitterbjælke, først sætter Diagonalerne ind, efter at Ophængningen er udført; paa lignende Maade ved en massiv Bjælke. – Forøvrigt kan man ved Beregning af Spændingerne godt antage Kædens Form for parabolsk.

Spændingerne i Kæde- og Hængestængerne bestemmes ved en Kraftpolygon, som ovenfor vist, saa snart blot Horizontaltrykket H er bekendt. I det følgende behøve vi altsaa blot at bestemme H og Bjælkens Paavirkningen. – Vi antage Kædens Ophængningspunkter i samme Højde. – Bestemmelsen af H er forskellig, eftersom Systemet er statisk bestemt eller ikke; det er statisk ubestemt, hvis Bjælken AB er en sammenhængende Bjælke, men kan gøres statisk bestemt ved at indskyde et Charnier i Bjælken. I saa Fald haves nemlig (for det specielle Antal Fag i Fig. ovenfor): Skivernes Antal $b = 2$ (de to Bjælkehalvdele), Knudepunkternes Antal $k = 9$, $a = 7$, $s = 15$, $q_1 = 1$ og $2 \times 1 + 7 + 15 = 24 = 3 \times 2 + 2 \times 9$.

Bjælken paavirkes dels af den givne Belastning, dels af Spændingerne i Hængestængerne. Momentet i et vilkaarligt Tværsnit af Bjælken kan derfor skrives:

$$M_x = M_{o,x} \div M_{t,x}.$$

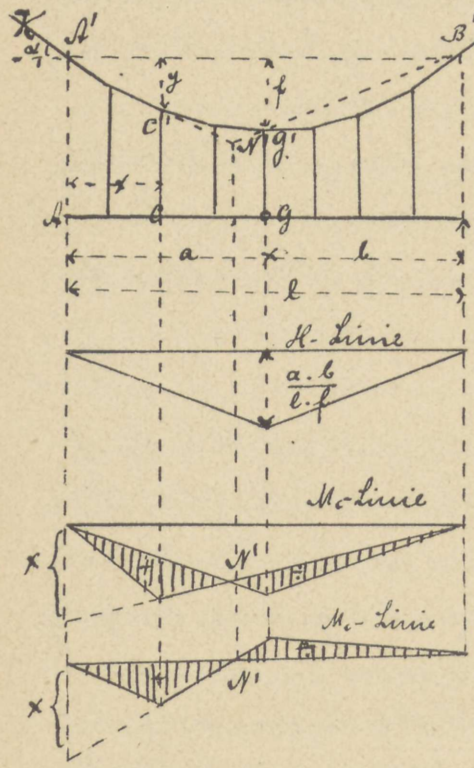
$M_{o,x}$ er Momentet af Belastningen m. H. t. Snittet x i en simpelt understøttet Bjælke AB; $M_{t,x}$ er den Del af Momentet, der hidrører fra Hængestængerne; det kan bestemmes ved at tegne en Tovpolygon til disse Spændinger. Nu er det imidlertid ovenfor vist, at Kædens Form er en Tovpolygon netop til disse Spændinger, og idet den tilhørende Poldistance er lig Horizontaltrækket H, haves: $M_{t,x} = H \cdot y$, hvor y er Ordinaten til Kæden maalt fra Slutlinien $A'B'$, hvor A' og B' ligge i Verticalerne gennem Bjælkens Understøtningspunkter. Nu haves altsaa: $M_x = M_{o,x} \div H \cdot y$.



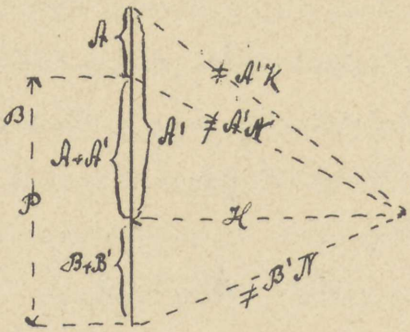
Har man et Charnier ved g, skal Momentet m. H. t. g være Nul, altsaa $H = \frac{M_{o,g}}{f}$.

Derved er H bestemt; haves derimod intet Charnier, kan H ikke be=

stemmes ved de statiske Ligevægtsbetingelser. – Vi ville först behandle den statisk bestemte Hængebro.

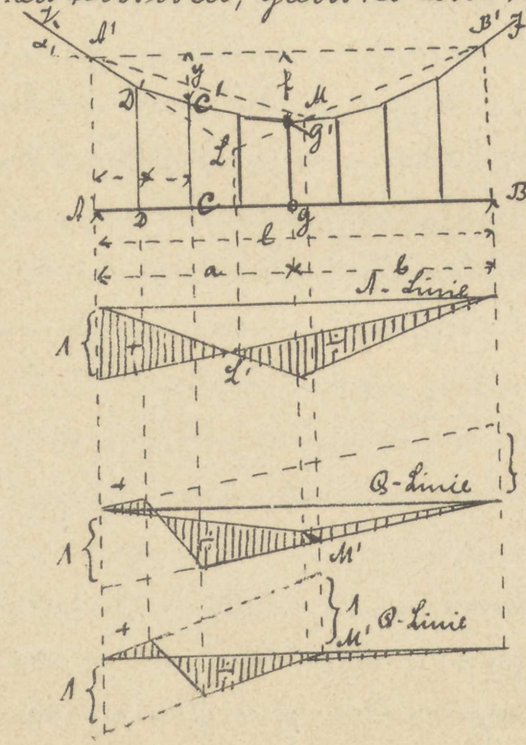


Da $H = \frac{M_{o,g}}{f}$, er Influensliniën for H en Trekant som vist i Fig. med Höjde $\frac{a.b}{l.f}$ lodret under g.



Influensfladen for M_c faas som Differens mellem $M_{o,c}$-Fladen og H.y Fladen. I Fig. er den ogsaa afsat ud fra en vandret Axe, og det ses, at den i denne Stilling kan bestemmes ved, at der afskæres Stykket AC = x paa Verticalen gennem A' og ved Nulpunktet N'.

N' bestemmes ved Skæringspunktet for B'G' og A'C'; hvis man nemlig anbringer en Kraft P i N, vil den give Momentet M_o – H.y m. H. t. et vilkaarligt Punkt; Δ A'NB' kan betragtes som M_o-Polygon, Kæden A'g'B' som H.y-Polygon, og da B'N gaar gennem g', have de to Momentpolygoner samme Poldistance; men saa er Momentet Nul i C, fordi A'N gaar gennem C'. Ved Hjælp af den sidste Betragtning kan man finde Reaktionerne fra en Kraft i N paa følgende Maade: man tegner den til Tovpolygonen A'NB' svarende Kraftpolygon; dens Poldistance er if. ovenstaaende lig H, altsaa lig den vandrette Komposant af Spændingen i de yderste Kædeled A'K og B'J, hvilke Spændinger altsaa faas bestemte; i Kraftpolygonen aflæser man endvidere Størrelsen A + A' af den lodrette Reaktion A + den lodrette Komposant af Spændingen i A'K; den sidste findes let, da A'K's Retning er givet, altsaa har man ogsaa A. Man ser, at Reaktionerne H og A + A' bestemmes, ganske som om Drageren var en 3-Charniersbue, understøttet i A og B' og med Midtercharnier ved g'. Influenslinien for A bestemmes ved: $A = (A + A') \div A' = A_0 \div H \cdot tg\alpha$, hvor A_0 er Reaktionen fra en simpelt understøttet Bjælke AB; Differencen mellem Influensfladerne for A_0 og $H \cdot tg\alpha$, giver A-Fladen, saaledes som Fig. viser; Nulpunktet L' bestemmes ved Skær=



ningspunktet L mellem $KA'L$ og $B'G'$ (en Kraft i L giver A = 0, ses af Kraftpolygonen). Influensfladen faas strax med vandret Axe ved Hjælp af Stykket 1, der afskæres paa Verticalen gennem A, og ved Nulpunktet L!

Transversalkraften Q for Bjælken i Taget C-D faas ved at lægge et lodret Snit, der overskærer Bjælke og Kæde i dette Fag, og tage Summen af de lodrette Kræfter tilvenstre for Snittet; idet Kædeleddet C-D danner Vinklen α_1 med den vandrette, haves $Q = \div(A+A') + \Sigma P + H.tg\,\alpha_1$ eller idet $\div(A+A') + \Sigma P = Q_0$ = Transversalkraften i den simpelt understøttede Bjælke AB, $Q = Q_0 + H.tg\,\alpha_1$. Q-Linien faas nu af Influenslinierne for Q_0 og $H.tg\,\alpha_1$. Nulpunktet M' (i Fig. er det kun uegentligt et Nulpunkt, hvorom nedenfor) findes ved Skæringspunktet M for $B'G'$ og $A'M \neq CD$; hvis der kun virker en Kraft i M, kan den opløses efter $B'G'$ og $A'M$, hvorved det tilsvarende $A+A'$ bliver lig $Htg\alpha_1$, altsaa det fra denne Kraft alene hidrørende $Q = \div(A+A') + Htg\,\alpha = 0$. Ved Analogi med 3-Charniersbuen ses, at M, for at det skal blive et egentligt Nulpunkt, maa ligge paa samme Side af G som CD.

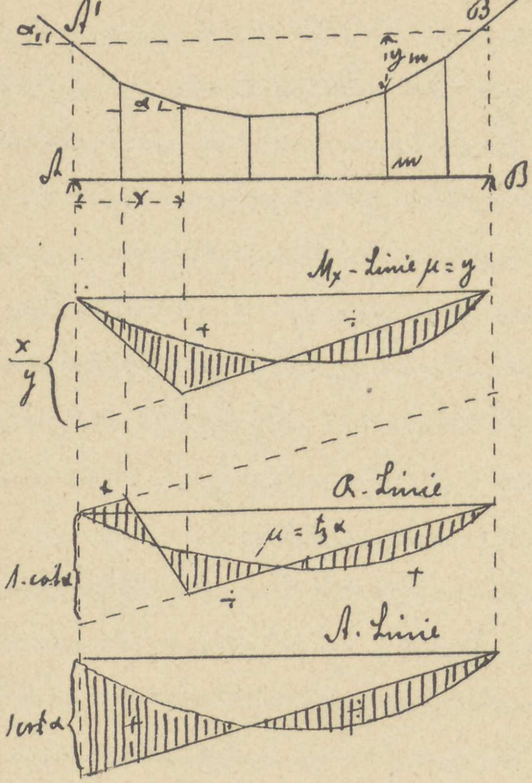
Da Dragerens Form er bestemt saaledes, at Egenvægten ingen Paavirkning giver i Bjælken, maa man have Influensfladernes positive og negative Arealer ligestore. –

Bjælken kan naturligvis godt være en Gitterbjælke; vi ville indskrænke os til at betragte det Tilfælde, at det er en Paralleldrager. Influensliniërne for Spændingerne i Hoved og Fod udledes da af de ovenfor bestemte Moment-Influensliniër (ved blot at ombytte det paa Verticalen gennem A afskaarne Stykke x med $\frac{x}{h}$, hvor h er Bjælkens Höjde), og Influensliniërne for Spændingerne i Gitterstængerne af Q-Liniërne (ved Ombytning af det paa Verticalen gennem A afskaarne Stykke 1 med sin φ; den lodrette Komposant af Spændingen i en Gitterstang er lig Transversalkraften).

Hvis der intet Charnier er indskudt i Bjælken, er Systemet <u>statisk ubestemt</u>, og H maa da bestemmes paa lignende Maade som ved Buen med to Charnierer. Hvis Influenslinien for H er bekendt, er Fremgangsmaaden til Bestemmelse af de andre Influensliniër den samme som ved den statisk bestemte Hængebro.

Influenslinien for Momentet faas saaledes af: $M = M_o \div H \cdot y = y\left(\frac{M_o}{y} \div H\right)$, hvilken sidste Omskrivning her foretages, fordi H-Linien ikke har en saa simpel Figur som M_o-Linien. y er Multiplicator. Fig. næste Side forstaaelig. Hvis Bjælken er en Gitterbjælke, kunne Spændingerne i Hoved og Fod beregnes af Momenterne, eller man kan direkte tegne Influensliniërne for disse Spænd=

niger (ved blot at forandre Multiplicator til $\frac{J}{r}$, hvor r er Spændingens Momentarm; for en Paralleldrager er $r = h$).

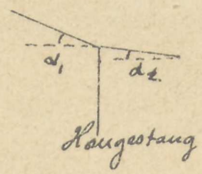


Influenslinien for Q faas af $Q = Q_0 + H \cdot tg\alpha = tg\alpha\,(Q \cot\alpha + H)$; Multiplicator er $tg\alpha$; Fig. forstaas let. Endelig viser Fig. ogsaa A-Linien, som kun er et speciell Tilfælde af Q-Linien. For en Paralleldrager faas Spændingerne i Gitterstængerne af Transversalkraften (der er lig Spændingens lodrette Komposant); for en vilkaarlig Form af Bjælken kunne Influenslinierne findes ganske paa lignende Maade som ved 2-Charniersbuen, men vi skulle ikke gaa videre ind herpaa.

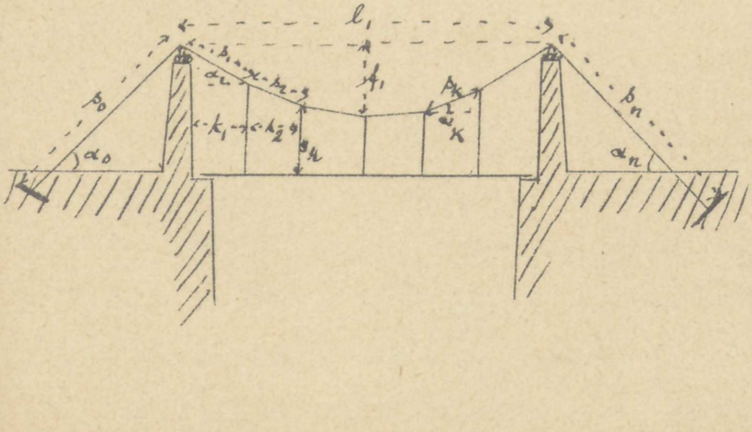
Tilbage staar kun Bestemmelsen af Influenslinien for H. Hertil benyttes Ligningen $\sum T_m \delta_{ma} = H \cdot \sum \frac{S_a \cdot s}{EF}$ og hele Bestemmelsesmaaden bliver forøvrigt ganske den samme som for en To-Charniersbue med polygonal Trækstang. δ_{ma} er Nedbøjningen af Punktet m i Hovedsystemet for

Belastningen $H = \div 1$, og Hovedsystemet faas ved at sætte $H = 0$, hvorved Kæde- og Hængestængerne falde bort og kun den simpelt understøttede Bjælke AB bliver tilbage. $\mathfrak{M}_{ma}$ betegnes altsaa som Momenter i Bjælken AB paavirket af Kræfterne $v = \frac{y_m \cdot s_m}{t_m^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon F_m}$ (naar Bjælken er en Gitterbjælke), (Belastningen $H = \div 1$ giver nemlig Momentet y_m m. H. t. Knudepunkt m (Fig. forrige Side)).

I Udtrykket $\sum \frac{S_a^2 s}{\varepsilon F}$ skal Summationen udstrækkes over alle Stængerne i det statisk ubestemte System, altsaa foruden over Bjælken ogsaa over Hængestænger og Kæde. Spændingen i et Kædeled, der danner Vinklen α med den vandrette, er $H \cdot \sec\alpha$; Spændingen i en Hængestang er $H(\operatorname{tg}\alpha_1 \div \operatorname{tg}\alpha_2)$. De til $H = \div 1$ svarende Spændinger



ere altsaa: $\div \sec\alpha$ og $\div(\operatorname{tg}\alpha_1 \div \operatorname{tg}\alpha_2)$. Den fra Bjælken hidrørende Del af $\sum \frac{S_a^2 s}{\varepsilon F}$ er lig $\sum y . v$.



Nu haves med de i Fig. benyttede Betegnelser: $\sum \frac{S_a^2 s}{\varepsilon F} =$

$$\sum y v + \sum \frac{s_k \sec^2\alpha_k}{\varepsilon F_k} + \sum \frac{s_h(\operatorname{tg}\alpha_r - \operatorname{tg}\alpha_{r+1})^2}{\varepsilon F_h}$$

Sættes Kædeleddets Længde $s_k = \lambda \sec\alpha_k$ (λ konstant) og Kædens Tværsnit $F_k = F_b \cdot \sec\alpha_k$ (F_b konstant), samt regnes F_h konstant, haves:

$$\sum \frac{S_a^2 s}{\varepsilon F} = \sum y \cdot v + \frac{\lambda}{\varepsilon F_b} \sum \sec^2\alpha_k + s_0 \frac{\sec\alpha_0}{\varepsilon F_b} + s_n \frac{\sec\alpha_n}{\varepsilon F_b} + \frac{1}{\varepsilon F_h} \sum s_h \left(tg\alpha_r \div tg\alpha_{r+1}\right)^2 \cdot tg\alpha_r \div t$$

Ligesom tidligere er det ogsaa her praktisk at multiplicere baade δ_{ma} og $\sum \frac{S_a^2 s}{\varepsilon F}$ med εF_c, hvorved faas:

$$v = \frac{y_m \cdot s_m}{r_m^2} \cdot \frac{F_c}{F_m},$$

$$\sum \frac{S_a^2 s}{\varepsilon F} = \sum y \cdot v + \lambda \cdot \frac{F_c}{F_b} \sum \sec^2\alpha_k + \frac{F_c}{F_b}\left(s_0 \sec\alpha_0 + s_n \sec\alpha_n\right) + \frac{F_c}{F_h} \sum s_h \left(tg\alpha_r \div tg\alpha_{r+1}\right)^2.$$

Udtrykket for $\sum \frac{S_a^2 s}{\varepsilon F}$ kan altid simplificeres betydeligt. Det sidste Led, som hidrører fra Hængestængerne, er forsvindende og kan bortkastes, og Leddet $\lambda \cdot \frac{F_c}{F_b} \cdot \sum \sec^2\alpha_k$ kan beregnes tilnærmende ved at antage Kæden hængende efter en kontinuerlig krum Linie med Ligning

$y = \frac{4f_1}{l_1^2}(l_1 x \div x^2)$. I saa Fald haves $\lambda = dx$, $tg\alpha = \frac{dy}{dx}$,
$\sec^2\alpha = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ og $\sum \lambda \sec^2\alpha = \int_0^{l_1} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx = l_1 + \int_0^{l_1} \frac{16 f_1^2}{l_1^4}(l_1 \div 2x)^2 dx$
$= l_1\left(1 + \frac{16}{3}\frac{f_1^2}{l_1^2}\right)$.

Er Bjælken en Parallelgitterdrager, kan man i ovenstaaende Udtryk for v regne F_m konstant, og det vilkaarlige F_c vælges da lig $F_m = F$. For en Paralleldrager haves endvidere $r_m = h$ = Dragerhöjden, $s_m = \lambda$ (konstant), og sidets man da bortdividerer $\frac{\lambda}{h^2}$, faas:

$$v = y_m,$$

$$\sum \frac{\mathfrak{S}_a^2 s}{\varepsilon F} = \sum y^2 + \frac{h^2}{\lambda} \cdot \frac{F}{F_b}\left[l_1\left(1+\frac{16}{3}\cdot\frac{f_1^2}{l_1^2}\right) + s_0 \sec\alpha_0 + s_n \cdot \sec\alpha_n\right].$$

For en massiv Afstivningsbjælke har man, idet der inddeles i ligestore Faglængder λ, og idet $M = y$, $N = 0$ (§ 9):

$$w'_m = \frac{\lambda}{6}\cdot\frac{J_0}{J_m}\left(y_{m-1} + 2y_m\right) + \frac{\lambda}{6}\cdot\frac{J_0}{J_{m+1}}\left(2y_m + y_{m+1}\right).$$

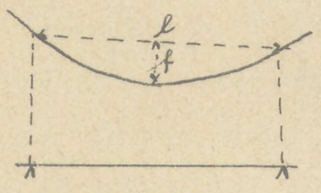
$$\sum \frac{\mathfrak{S}_a^2 s}{\varepsilon . F} = \sum y w' + \frac{J_0}{F_b} l_1\left(1+\frac{16}{3}\cdot\frac{f_1^2}{l_1^2}\right) + \frac{J_0}{F_b}\left(s_0 \sec\alpha_0 + s_n \cdot \sec\alpha_n\right)$$

ligesom ovenfor.

Regnes $J_m = J_0 = J$ (konstant), og bortdivideres λ, kan man sætte:

$$w'_m = y_m, \quad \frac{\sum \mathfrak{S}_a^2 s}{\varepsilon . F} = \sum y_m^2 + \frac{J_0}{\lambda F_b}\left[l_1\left(1+\frac{16}{3}\cdot\frac{f_1^2}{l_1^2}\right) + s_0 \sec\alpha_0 + s_n \sec\alpha_n\right].$$

Der kan forøvrigt her angives en Tilnærmelse, der fører til en parabolsk H-Linie, ganske analogt med det i § 12 viste for en flad Bue. —



Vi inddele i uendelig smaa Stykker $\lambda = dx$, regne Kedens Form som en Parabel: $y = \frac{4f}{l^2}(lx - x^2)$, sætte Kræfterne $w' = y\,dx$ og

$S_{aa} = \sum y^2 \cdot dx + \frac{J_0}{F_b}\cdot L$, hvor $L = l_1\left(1+\frac{16}{3}\frac{f_1^2}{l_1^2}\right) + s_0 \sec\alpha_0 + s_n \sec\alpha_n$.

De til Kræfterne $y\,dx$ svarende Momenter i Bjælken ere $\iint_0^x y \cdot dx^2$, men baade dette Integral og $\int_0^l y^2 dx$ ere beregnede i § 12 (her skal blot sættes $k = 0$): Man har $M = \frac{4f}{l^2}\left(\frac{1}{6}\cdot lx^3 - \frac{1}{12}x^4\right) - \frac{1}{3} f . lx$ og $\int_0^l y^2 dx = \frac{8}{15} f^2 . l$.

Ordinaterne i H-Linien ere nu $\frac{M}{\int y^2 dx}$; dens Ordinater afvige ikke synderligt fra en Parabels, og for en Parabel, der med Axen indeslutter sam=

me Areal, haves til Bestemmelse af Maximumsordinaterne Z: $\frac{2}{3}\cdot Z\cdot l = \frac{\int_0^l M dx}{\int y^2 dx}$.
Paa det anförte Sted er ligeledes beregnet $\int_0^l M dx = \frac{1}{15} f . l^3$, hvorved faaes: $Z = \frac{3}{2\cdot l}\cdot\frac{1}{15}\cdot\frac{f.l^3}{\delta_{aa}} = \frac{3}{16}\cdot\frac{f}{l}\cdot\nu$, hvor

$$\nu = \frac{1}{1+\frac{15}{8}\cdot\frac{J_o}{F_b}\cdot\frac{L}{f^2\cdot l}}.$$

Dette Resultat kan, ogsaa anvendes paa en Parallelgitterdrager med Höjde h og Tværsnit F af Hoved eller Fod (konstant), idet man blot sætter $J_o = 2.F.(\frac{1}{2}.h)^2 = \frac{1}{2}.Fh^2$, hvorved

$$\nu = \frac{1}{1+\frac{15}{16}\cdot\frac{F}{F_b}\cdot\frac{h^2}{f^2}\cdot\frac{L}{l}}.$$

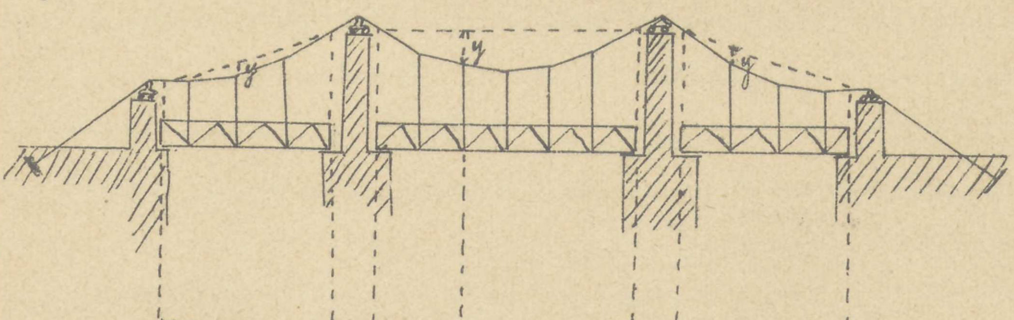
En Temperaturvariations Indflydelse bestemmes ved Ligningen: $H_t = \frac{\Sigma S_a\,\varepsilon.t.s}{\Sigma \frac{S_a^2 s}{EF}}$ og den analoge for massive Bjælker.
Dette Udtryk kan simplificeres ved at bortkaste Spændingerne S_a i Afstivningsbjælken, som ingen videre Indflydelse have herpaa, og i Hængestængerne. Vi skulle indskrænke os til at anföre, at naar man bruger en Parabel som H-Linie, kan skrives: $H_t = \div\,\Sigma\, E.\,F_b.\,t(1\div\nu)$.

§18. Egentlige Hængebroer med flere Aabninger.

Ved Hængebroer over flere Aabninger föres Kæden kontinuerlig igennem; Afstivningsbjælken kan derimod være kontinuerlig eller afbrudt.

Hvis den er kontinuerlig, bliver der mere end én statisk ubestemmelig Störrelse, men de overtallige Störrelsers Antal kan atter reduceres til én ved Indskydelse af Charnierer i Bjælken; Afstivningsbjælken bliver i saa Fald en Gerberdrager. Her ville vi dog indskrænke os til at betragte det Tilfælde, at Afstivningsbjælken er afbrudt over Mellempillerne, og at den er dannet af en Parallelgitterdrager.

Det statisk bestemte Hovedsystem er i saa Fald en Række simpelt understöttede Bjælker. Horizontalkomposanten af Spændingen i Kæden er den samme overalt. Influenslinien for H findes ganske paa samme Maade som ovenfor ved at beregne Kræfterne $v_m = \frac{y_m \cdot s_m}{r_m^2} \cdot \frac{F_c}{F_m}$, bestemme de herved fremkaldte Momenter i de enkelte Bjælker og dividere disse Momenter med $\sum S_a^2 \cdot \frac{s}{E \cdot F}$.



For $\sum S_a^2 \cdot \frac{s}{EF}$ haves Udtrykket:

$$\sum S_a^2 \frac{s}{EF} = \sum y_m \cdot v_m + \frac{F_c}{F_b}\left(\sum h \sec^2\alpha_k + s_0 \sec\alpha_0 + s_n \sec\alpha_n\right) + \frac{F_c}{F_h}\sum s_h\left(tg\alpha_r \div tg\alpha_{r+1}\right)^2,$$

og heri skal, som bekendt, Summationen udstrækkes over hele det statisk ubestemte System, altsaa $\sum y_m \cdot v_m$ over Kræfterne v i alle Aabninger og de to sidste Led over alle Kædeled og Hængestænger.

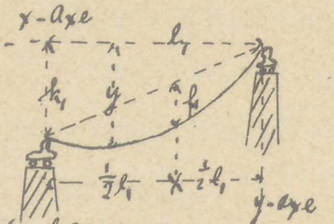
Naar H-Linien er funden paa denne Maade, kan man ganske ligesom ovenfor bestemme Influensliniere for Momenter, Transversalkræfter o.s.v. Fig. viser Influenslinien for Momentet i et Punkt af Midteraabningen; man har $M_x = M_0 \div H \cdot y = y\left(\frac{M_0}{y} \div H\right)$, saa M_x-Linien findes ganske simpelt ved Addition af Influenslinierne for $\frac{M_0}{y}$ og H, idet y er Multiplikator; i Sideaabningerne ere Ordinaterne i $\frac{M_0}{y}$-Linien Nul, saa her bruges den uforandrede H-Linie som Influenslinie for M_x, blot med Multiplikator y. (En Kraft i Sideaabningen kan kun paavirke Mellemaabningens Afstivningsbjælke gennem Kæden).

Udtrykkene for v_m og $\sum S_a^2 \cdot \frac{s}{EF}$ kunne naturligvis ogsaa her simplificeres; sættes $F_m = F_c = F$, $\frac{s}{m} = k$ og $r_m = h$, faas $v_m = y_m$,

$$\sum S_a^2 \cdot \frac{s}{EF} = \sum y_m^2 + \frac{h^2}{k} \cdot \frac{F}{F_b}\left(\sum k \sec^2\alpha_k + s_0 \sec\alpha_0 + s_n \sec\alpha_n\right),$$

idet Hængestængernes Indflydelse udelades.
Endelig kan naturligvis Leddet $\sum k \sec^2\alpha_r$ beregnes tilnærmende ligesom tidligere ved at an=

tage Kæden kontinuerlig krum. Man har Parablens Ligning, naar Pillerne ikke ere lige-



höje: $y = \frac{4f_1}{l_1^2}(l_1 x \div x^2) + \frac{k_1 x}{l_1}$ og

$$\Sigma\, \lambda \sec^2\alpha \approx \int_0^{l_1}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)dx = l_1\left(1+\frac{16}{3}\frac{f_1^2}{l_1^2}+\frac{k_1^2}{l_1^2}\right).$$

Altsaa kan man skrive:

$$\Sigma\, S_a^2 \frac{s}{\varepsilon F} \approx \Sigma\, y^2 m + \frac{h^2}{\lambda}\cdot\frac{F}{F_b}\Big[l_1\left(1+\frac{16}{3}\frac{f_1^2}{l_1^2}+\frac{k_1^2}{l_1^2}\right)+l_2\left(1+\frac{16}{3}\cdot\frac{f_2^2}{l_2^2}+\frac{k_2^2}{l_2^2}\right)\cdot$$

$$+\, l_3\left(1+\frac{16}{3}\cdot\frac{f_3^2}{l_3^2}+\frac{k_3^2}{l_3^2}\right) + s_0 \sec\alpha_0 + s_n \sec\alpha_n\Big],$$

hvor Mærkerne 1, 2 og 3 referere sig til de 3 Aabninger.

En Temperaturvariations Indflydelse bestemmes ved:

$$H_t = \frac{\varepsilon . F_c . \frac{h^2}{\lambda}\, \Sigma\, S_a\, \varepsilon . t . s}{\Sigma\, S_a^2 \frac{s}{\varepsilon F}},$$ hvor Summerne

skulle udstrækkes over hele Systemet.

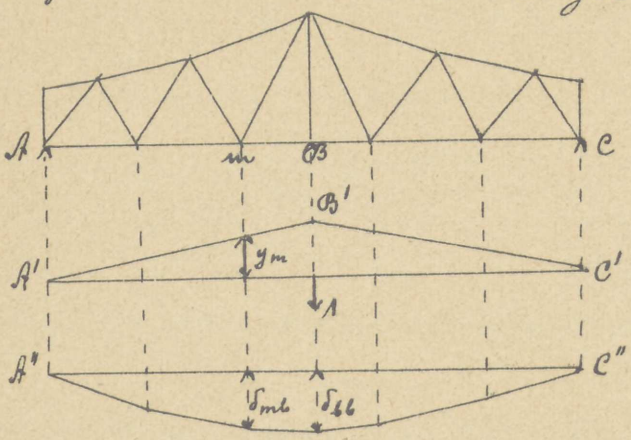
Kap. 5. Kontinuerlige Dragere.

§19. Kontinuerlige Dragere over to Aabninger.

Som statisk ubestemmelig Störrelse vælge vi Mellempillens Reaktion X_b; det statisk bestemte Hovedsystem er den simpelt understöttede Bjælke AC. X_b bestemmes ved

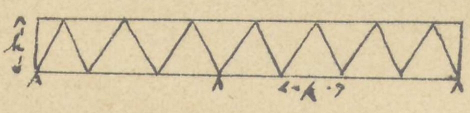
$$\Sigma\, P_m \cdot \delta_{mb} \div X_b\, \delta_{bb} = 0,$$

saa Ordinaterne i Influensliniern for X_b er $\eta_b = \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}$. δ_{mb} er Nedböjningen af Punktet m paa Grund af Belastningen $X_6 = \div 1$. δ_{66} er Nedböjningen af B for samme Belastning, altsaa en speciel Værdi af δ_{m6}. Kraften 1 giver i Bjælken A'C' Momenterne y_m (Ordinater i Trekanten A'B'C'); de Kræfter v, hvis Momenter give Nedböjningerne, ere for Gitterbjælker, idet vi se bort fra Gitterstængernes Indflydelse,



$$v_m = \frac{y_m \cdot s_m}{r_m^2} \cdot \frac{F_c}{F_m};$$

ved den förste Beregning sættes $F_m = F_c$ = konst., og for en Paralleldrager med konst. Fagvidde λ og Höjde h er $\frac{s_m}{r_m^2} = \frac{\lambda}{h^2}$ og her sættes da $v_m = y_m$.



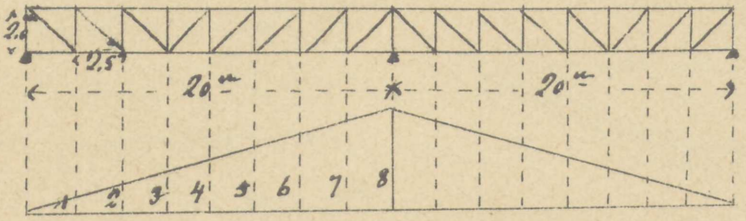
Hvis man for en Gitterdrager med Verticaler sætter $v_m = y_m$, har man bortdivideret $\frac{2\lambda}{h^2}$. — For massive Bjælker (retliniede) haves:

$$v_m = \frac{\lambda_m}{6} \cdot \frac{J_0}{J_m}(y_{m \div 1} + 2y_m) + \frac{\lambda_{m+1}}{6} \cdot \frac{J_0}{J_{m+1}}(2y_m + y_{m+1}),$$

og med konstant Inertimoment og Fagvidde kan sættes $v_m = y_m$. Momentkurven A"C" til Kræfterne v er Influenslinie for X_6 med Multiplikator $\frac{1}{\delta_{66}}$. Da δ_{66} er en speciel Værdi af δ_{m6}, er det ganske ligegyldigt, at man bortdividerer kon-

staute Faktorer af Udtrykkene for Kræfterne v;
ligeledes indsees det, at Höjden i Momenttrekanten $A'B'C'$ kan vælges vilkaarligt. –
Den fundne Influenslinie er en Polygon med Vinkelspidser lodret under Tværbjælkerne.

<u>Talexempel.</u>



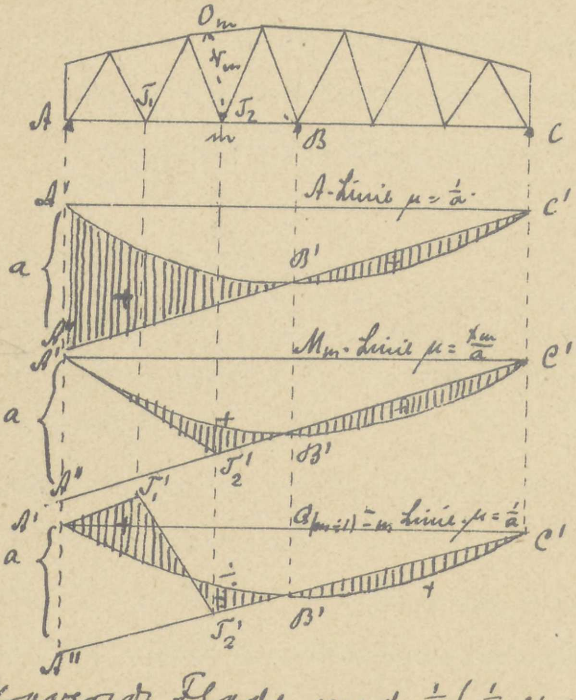
En symmetrisk Gitterdrager som vist i Fig. hviler paa 3 faste Piller. Beregn Influenslinien for X_6.

Man vælger Höjden i Momenttrekanten = 8, hvorved alle y under Knudepunkterne blive hele Tal. Tværsnittet regnes konstant, $v = y$, $\delta_{66} = 172$, $\eta_6 = \frac{\delta_{ma}}{\delta_{66}}$.

Punkt No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8
v =	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Q =		32	31	29	26	22	17	11	4
$\delta_{ma} = \frac{M}{h}$ =	0	32	63	92	118	140	157	168	172
η_6 =	0	0.186	0.368	0.535	0.686	0.814	0.913	0.979	1.000

Man finder nu let Influenslinierne for Spændingen, Momenter o.s.v. <u>Influenslinien for A</u>: naar $A'B'C'$ er B-Linien, trækker man blot den rette Linie $C'B'$ og faar derved den skraverede Influensflade. Man har nemlig $A = A_0 + A_6 X_6$; Influens-

Linien for A_0 er $C'A''$, hvis $A'A''=1$, og herfra skal trækkes Ordinaterne i X_b-Linien, multiplicerede med en saadan Konstant (A_b), at den resulterende Kurve faar Ordinaten 0 under B; man maa saa ogsaa kunne faa den resulterende Kurve ved at multiplicere den omtalte

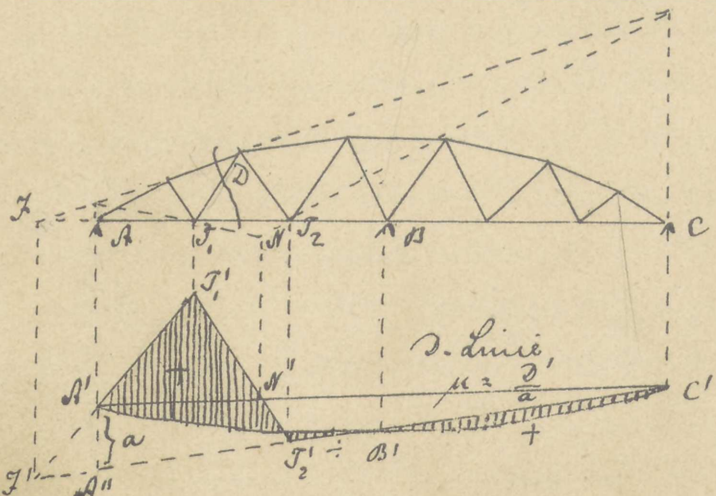


skraverede Flade med $\frac{1}{a}$ ($\frac{1}{a}$ = Multiplikator).

Influenslinien for M_m faas af A-Linien ved blot at føre Punktet m lodret ned paa $C'B'A''$ (til T_2') og trække $A'T_2'$. Hvis Kraften 1 nemlig befinder sig tilhøjre for m, virker der tilvenstre for m kun den ydre Kraft A, og altsaa er $M_m = A\cdot x_m$; paa Stykket mC maa derfor M_m-Linien være den samme som A-Linien, blot med Multiplikator $\frac{x_m}{a}$, naar A-Liniens Multiplikator er $\frac{1}{a}$. Endvidere har man: $M_m = M_{m,0} \div M_b \cdot X_b$, og M_0-Linien er en Trekant som $A'T_2'C'$ (hvis $A'A'' = x_m$); altsaa maa $A'T_2'$ være det manglende Stykke af Influenslinien. – Af Momenterne findes Spændingerne i Hoved og Fod, hvis Bjælken er en Gitterbjælke, den tegnede M_m-Linie kan ogsaa bruges som Influenslinien for O_m, naar blot bruges Multiplikator $\frac{x_m}{a \cdot r_m}$. –

Influensfladen for Transversalkraften i Faget $T_1 T_2$ udledes af A-Linien ved at trække $A'T_1' \mp C'B'$ og dernæst tilföje Linien $T_1'T_2'$. Tilhöjre for T_2 maa Q-Linien og A Linien være de samme (med samme Multiplikator). $A'T_1'T_2'C'$ vilde være Q_0-Linie, hvis $A'A'' = 1$; nu er Stykket $C'B'T_2'$ af Q_0-Linien bragt i rigtig Beliggenhed i Forhold til B-Linien, og herved er ogsaa Stykket $A'T_1'T_2'$ givet, da $Q = Q_0 \div Q_b \cdot X_b$. – Af Transversalkraften udledes Spændingerne i Gitterstængerne i en Paralleldrager.

Influenslinien for en Gitterstang D i en krumlinet Gitterbjælke.



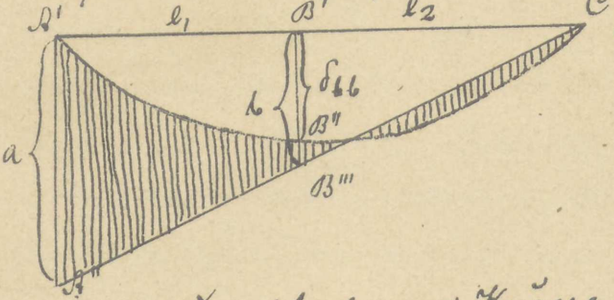
Hvis Kraften 1 befinder sig tilhöjre for Snittet, er A den eneste Kraft tilvenstre, altsaa maa i saa Fald D være proportional med A; tilhöjre for T_2

maa fölgelig D- og A-Linierne have proportionale Ordinater. Man har endvidere $D = D_0 \div D_b \cdot X_b$. $A'T_1'T_2'C'$ være den D_0-Linien, hvis $A'A'' = D'$ (Spændingen i D svarende til $A = 1$ (i Bjælken AC)). $A'T_1'$ og $C'T_2'$ skære hinanden lodret under Skæringspunktet T for de af Snittet trufne Stænger i Hoved og Fod, og Nulpunktet N' bestemmes paa sædvanlig Maade. Hvis man nu tegner en med D_0-Linien ligedannet Polygon, idet man som i Fig. gör $A'A'' = a$ i Stedet for $A'A'' = D'$, faar man den Betingelse opfyldt, at D- og A-Linierne tilhöjre for T_2 skulle have proportionale Ordinater, og da D-Linien skal faas ved fra D_0-Linien at trække X_b-Linien, multipliceret med en Konstant, ses, at den skraverede Flade bliver Influensliniien for D, naar Multiplikator er $\frac{D'}{a}$.

<u>Mellemunderstötningen kan dannes af Jernsöjler</u>, og disses Sammentrykning faar Indflydelse paa Reaktionens Störrelse. Kaldes Söjlens Höjde h_1, dens Tværsnit F_1 og Elasticitetskoefficient E_1 (den kan godt være af et andet Materiale, f. Ex. Stöbejern, end Drageren), skal i den almindelige Ligning $\delta_b = \Sigma P_m \cdot \delta_{mb} \div X_b \cdot \delta_{bb}$ sættes $\delta_b = \Delta h_1 = \frac{X_b \cdot h_1}{E_1 F_1}$, hvorved Ordinaten i Influensliniien for X_b bliver $\frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb} + \frac{h_1}{E_1 F_1}} = \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb} + K}$. Influensliniien bestemmes ganske som ovenfor: man beregner Nedböjningerne δ_{mb} som Momenter for Kræfterne v paa Bjælken AC

og finder derved ogsaa δ_{66}. Nedböjningslinien kan ligesom tidligere bruges som Influenslinie, blot at Multiplikator nu er $\frac{1}{\delta_{66}+k} = \frac{1}{b}$.

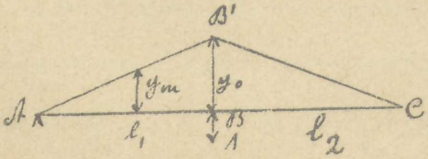
Influenslinien for A.



Man har $A = A_0 \div A_6 X_6$
$= \frac{A_6}{b}\left(\frac{b}{A_6} \cdot A_0 \div b X_6\right)$
I Fig. er A'B''C' Nedböjningslinien svarende til Belastningen $X_6 = \div 1$, denne Kurve er altsaa Influenslinie for X_6 med Multiplikator $\frac{1}{b}$ eller den er Influenslinie for $b \cdot X_6$. b er afsat lig B''B''', og Linien C'B''' er trukket; da er den skraverede Flade Influensflade for A med Multiplikator $\frac{1}{a}$. Idet nemlig A_6 (Reaktionen A for Belastningen $X_6 = \div 1$ paa Bjælken AC) er lig $1 \cdot \frac{l_2}{l_1+l_2}$, haves $A_6 = \frac{l_2}{l_1+l_2} = \frac{b}{a}$, altsaa $\frac{b}{A_6} = a$, hvorfor Linien C'B'''A'' er Influenslinie for $\frac{b}{A_6} \cdot A_0$ (den vilde være A_0-Linie, hvis A'A'' = 1).

Influenslinierne for M, B, D findes nu ganske som ovenfor, blot at man nu ligesom ved A-Linien gaar ud fra Linien C'B''' i Stedet for C'B''.

Ved Afsætning af B''B''' maa man naturligvis huske at multiplicere med de samme Faktorer, som man har indført i δ_{mb} og δ_{66}. — Hvis man saaledes har beregnet δ_{mb} og δ_{6b} som Momenter i Bjælken AC paa=



virkel af Kræfterne $v_m = \frac{y_m s_m}{r_m^2} \cdot \frac{F_c}{F_m}$ (eller den analoge for massive Bjælker), hvor y_m er Ordinat i Trekanten $AB'C$ med den vilkaarlige Höjde y_0, medens Höjden egentlig skulde være $\frac{l_1 l_2}{l_1+l_2}$, har man derved multipliceret δ_{mb} og δ_{bb} med $\left(y_0 : \frac{l_1 l_2}{l_1+l_2}\right)$; endvidere har man indfört Faktoren EF_c ($E\, y_0$); man maa altsaa sætte $B''B''' = \frac{h_1}{E_1 F_1} \cdot EF_c \cdot \frac{y_0(l_1+l_2)}{l_1 l_2}$. Har man multipliceret med flere Faktorer f. Ex $\frac{h^2}{\lambda}$ eller $\frac{h^2}{2\lambda}$ ved Paralleldragere), maa disse naturligvis ogsaa indföres her.

Talexempel. Mellemunderstötningen for den ovenfor behandlede Gitterdrager dannes af en 10^m höj Smedejernssöjle med $F_1 = 100$ qcm, $E_1 = E$. For Drageren antages: $F_c = 150$ qcm; $h = 2^m$, $\lambda = 2,5^m$, $l_1 = l_2 = 20^m$.

Man har $B''B''' = \frac{h_1}{E_1 F_1} \cdot EF_c \cdot \frac{y_0(l_1+l_2)}{l_1 l_2} \cdot \frac{h^2}{2\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda}$. Den sidste Faktor $\frac{1}{\lambda}$ er tilföjet, fordi vi ovenfor have sat $\delta_{ma} = \frac{M}{\lambda}$ (ikke $\delta_{ma} = M$). Idet alle Længder indföres i cm., faas:

$$B''B''' = \frac{1000 \cdot E \cdot 150 \cdot 8 \cdot 4000 \cdot 200^2}{E \cdot 100 \cdot 2000 \cdot 2000 \cdot 2 \cdot 250 \cdot 250} = 15,4.$$

Influenslinien for X_6 har nu Ordinaterne: $\frac{\delta_{ma}}{172+15,4}$

En Temperaturvariation, hvorved alle Dragerens Punkter faa samme Temperaturtilvæxt, har ingen Indflydelse paa Spændingerne, hvis Understötningerne ligge i samme Höjde; Drageren antages nemlig en med den oprindelige lige=

dannet Form, og dette kan ske uden Tvang. –

Hvis derimod Dragerens Overdel ved direkte Solbestraaling faar en Δt^0 højere Temperatur end de andre Stænger, faas ikke übetydelige Ekstraspændinger. Den herfra hidrörende Værdi af X_6 findes af (for en Gitterdrager):

$X_{6,t} \cdot \delta_{66} = \Sigma S_6 \cdot \varepsilon \cdot \Delta t \cdot s$, hvor Summationen kun udstrækkes over Hoveddets Stænger. Da vi ovenfor have multipliceret Kræfterne v (og altsaa ogsaa δ_{66}) med $\mathcal{E} \cdot F_c$, maa denne Faktor ogsaa tilföjes paa höjre Side; idet $S_6 = \div \frac{y_m}{r_m}$, faas:

$$X_{6,t} = \div \frac{\mathcal{E} \cdot F_c \cdot \varepsilon \cdot \Delta t \cdot \Sigma \frac{y_m \cdot s_m}{r_m}}{\delta_{66}}$$

For en Paralleldrager, hvor man har sat Kræfterne $v_m = y_m$ og altsaa (for Dragere uden Verticaler) multipliceret δ_{66} med $\frac{h^2}{\lambda}$ (h konstant), og idet $s_m = \lambda$, $r_m = h$, faas: $X_{6,t} = \div \frac{\mathcal{E} \cdot F_c \cdot \varepsilon \cdot \Delta t \cdot \frac{h^2}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{h} \cdot \Sigma y_m}{\delta_{66}} = \div \frac{\varepsilon \cdot \mathcal{E} \cdot F_c \cdot \Delta t \cdot h \Sigma y_m}{\delta_{66}}$. Σy_m betyder Summen af Ordinaterne y lodret under Knudepunkterne i Fodcen. For Dragere med Verticaler kommer der en Faktor 2 mer i Nævneren.

For en <u>massiv</u> Bjælke, hvor Kræfterne v_m ere satte $= y_m$ og altsaa maa være multiplicerede med $\frac{\mathcal{E} \cdot J_0}{\lambda}$, faas af Ligningen:

$X_{6,t} \cdot \delta_{66} = \div \int M_6 \cdot \varepsilon \cdot \frac{\Delta t}{h} \cdot dx$, $X_{6,t} = \div \frac{\varepsilon \cdot \mathcal{E} \cdot J_0 \frac{\Delta t}{h} \cdot \Sigma y}{\delta_{66}}$, hvor Σy betyder Summen af Ordinaterne y under alle Knudepunkterne". ($\int y dx = \lambda \Sigma y$).

De af $X_{6,t}$ fölgende Spændinger findes lettest ved et Diagram (for Bjælken AC paavirket af $X_{6,t}$).

Talexempel. For den ovenfor behandlede Gitterdrager skal Virkningen undersöges af en 15^o stærkere Opvarmning af Hovedet end af Foden.

Man har $X_{6,t} = \div \frac{\varepsilon . E . F_c . \Delta t . h . \Sigma y_m}{2 . \delta_{6.6} . \lambda}$, idet Faktoren λ i Nævneren er tilföjet, fordi man har sat $\delta_{ma} = \frac{M}{\lambda}$, ikke $\delta_{ma} = M$. $\varepsilon E = 24 \, kg/qcm$, $F_c = 150 \, qcm$, $h = 2^m$, $\Sigma y = 64$, $\delta_{66} = 172$, $\lambda = 2.5^m$.

$$X_{6,t} = \div \frac{24 . 150 . 15 . 200 . 64}{2 . 172 . 250} = \div 8000 \, kg.$$

Ovenfor er det forudsat, at de 3 Understötninger ligge i samme Höjde (eller at Drageren i spændingslös Tilstand berörer dem alle) og er urokkelige; hvis Mellemunderstötningen sænker sig et Stykke Δb i Forhold til de to andre, haves til Bestemmelse af X_6 den almindelige Ligning:

$\delta_6 = \Sigma S_m . \delta_{m6} \div X_6 . \delta_{66} + \delta_{6t}$, hvor δ_6 betyder Forskydningen af B i Retningen $X_6 = \div 1$ i det statisk ubestemte System, altsaa her $\delta_6 = \Delta b$; er denne Sænkning den eneste Virkning (de ydre Kræfter og Temperaturvariationen lig Nul), haves:

$$X_6 = \div \frac{E . F_c . y_o (l_1 + l_2)}{l_1 l_2} . \frac{\Delta b}{\delta_{66}} \text{ eller } \div \frac{E . F_o . y_o (l_1 + l_2)}{\lambda \, l_1 l_2} . \frac{\Delta b}{\delta_{66}}.$$

Virkningen af en Sænkning paa 1^{cm} af Mellem=

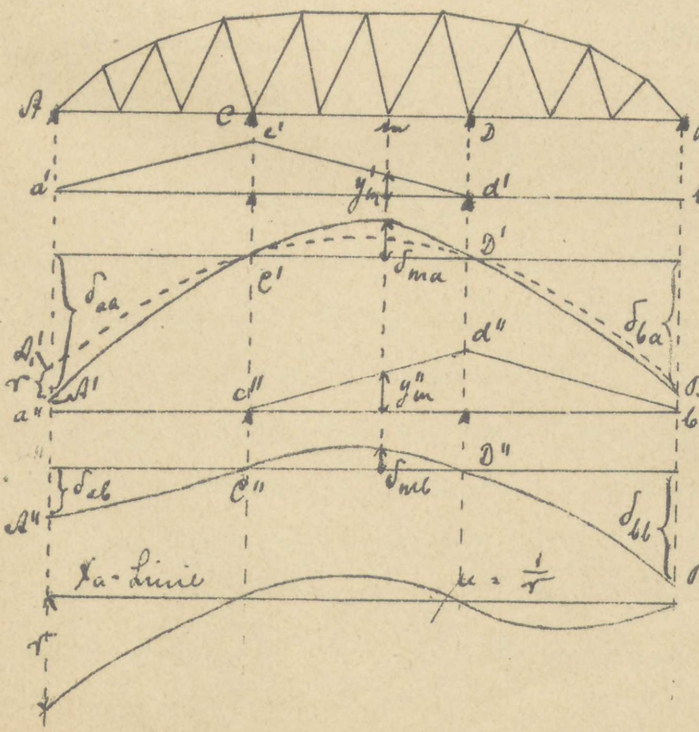
pillen skal undersøges for den i Exemplerne ovenfor behandlede Gitterdrager.

Man har $X_c = \div \frac{E.F_0.y.(l_1+l_2)}{l_1 l_2} \cdot \frac{h^2}{2\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta b}{\delta_{bb}}$, og med Talværdierne ovenfor findes:

$$X_b = \div \frac{2000000 . 150 . 8 . 4000 . 200^2}{2000 . 2000 . 2 . 250^2} \cdot \frac{1}{172} = 4470 \text{ kg.}$$

Naar Mellemunderstøtningen dannes af Jernsøjler, vil en ensformig Temperaturvariation bevirke en Længdeforandring af Søjlen ($\varepsilon . t . h_1$); de herved fremkaldte Extraspændinger bestemmes ved i Formlen ovenfor for en Sænkning af Mellemunderstøtningen at sætte: $\div \Delta b = \varepsilon . t . h_1$. —

§ 20. Kontinuerlige Dragere med 3 Aabninger.



Som statisk ubestemmelige Størrelser indføre vi Reaktionerne X_a og X_b fra Endeunderstøtningerne, og det gælder da foreløbig om at bestemme Influenslinierne for dem.

Under Forudsætning af u =

rokkelige Understøtninger haves hertil:

$X_a \cdot \delta_{aa} + X_b \cdot \delta_{ba} = \sum P_m \delta_{ma}$, $X_a \cdot \delta_{ab} + X_b \cdot \delta_{bb} = \sum P_m \delta_{mb}$; virker der kun en enkelt Kraft af Størrelse 1, fås Ordinaterne η_a og η_b i Influensliniene lodret under Kraftstillingen af:

$$\left.\begin{array}{l}\eta_a \cdot \delta_{aa} + \eta_b \cdot \delta_{ba} = \delta_{ma} \\ \eta_a \cdot \delta_{bb} + \eta_b \cdot \delta_{bb} = \delta_{mb}\end{array}\right\} \text{som giver} \left\{\begin{array}{l}\eta_a = \dfrac{\delta_{ma} \div \dfrac{\delta_{ba}}{\delta_{bb}} \cdot \delta_{mb}}{\delta_{aa} \div \dfrac{\delta_{ba}}{\delta_{bb}} \cdot \delta_{ab}} \\ \eta_b = \dfrac{\delta_{mb} \div \dfrac{\delta_{ab}}{\delta_{aa}} \cdot \delta_{ma}}{\delta_{bb} \div \dfrac{\delta_{ab}}{\delta_{aa}} \cdot \delta_{ba}}\end{array}\right.$$

δ_{ma} og δ_{mb} ere Ordinaterne i Bøjningsliniene for den simpelt understøttede Bjælke CD, der er forlænget ud over sine Understøtninger og belastet med $X_a = \div 1$ eller $X_b = \div 1$. Disse Belastninger give Momenterne y'_m og y''_m (Ordinater i Trekanterne $a'c'd'$ og $c''d''b''$) og de Kræfter v' og v'', hvis Momenter giver Nedbøjningerne δ_{ma} og δ_{mb}, ere da for <u>Gitterbjælker</u>

$$v'_m = \frac{y'_m \cdot s_m}{r_m^2} \cdot \frac{F_c}{F_m} \text{ og } v''_m = \frac{y''_m \cdot s_m}{r_m^2} \cdot \frac{F_c}{F_m}$$ idet vi se bort fra Gitterstængernes Indflydelse. Ved den første Beregning sættes $F_m = F_c$ = konst; og for en Paralleldrager med konstant Fagvidde λ og Højde h sættes $v'_m = y'_m$, $v''_m = y''_m$, idet $\frac{\lambda}{h^2}$ eller $\frac{\lambda}{2h^2}$ bortdivideres. For massive Bjælker haves:

$$v'_m = \frac{\lambda_m}{6} \cdot \frac{J_c}{J_m}(y'_{m-1} + 2y'_m) + \frac{\lambda_{m+1}}{6} \cdot \frac{J_c}{J_{m+1}}(2y'_m + y'_{m+1}),$$
analogt for v''_m; med konstant Inertimoment og Fagvidde sættes også her $v'_m = y'_m$, $v''_m = y''_m$ (λ bortdivideres.)

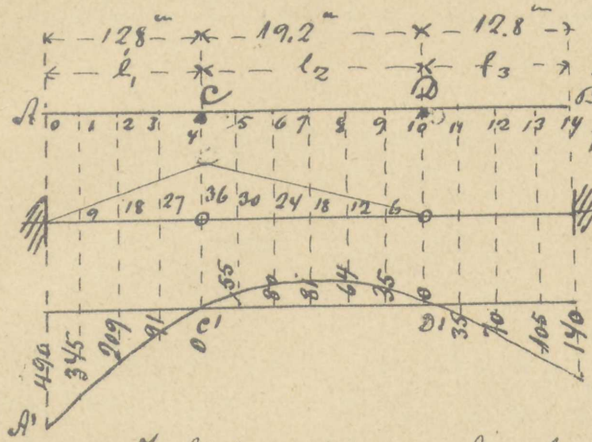
Tovpolygonen for Kræfterne v' er $A'C'D'B'$; Slutlinien er $C'D'$; den giver det variable δ_{ma} og de to konstante Störrelser δ_{aa} og δ_{ba} (lodret under A og B); ligeledes giver Tovpolygonen $A''C''D''B''$ Störrelserne δ_{mb}, δ_{ab} og δ_{bb}; naturligvis skal det passe, at $\delta_{ab} = \delta_{ba}$. $D'B'$ og $A''C''$ er rette Linier. Hvis man nu multiplicerer Ordinaterne i $A''C''D''B''$ med $\frac{\delta_{ba}}{\delta_{bb}}$ og afsætter dem ud fra Axen $C'D'$, faas den punkterede Kurve $A_1'C'D'B'$, og Ordinaterne mellem den og $A'C'D'B'$ give da Tælleren i η_a, eller de ere Ordinater i Influenslinien for X_a med Multiplikator $1 : (\delta_{aa} \div \frac{\delta_{ba}}{\delta_{bb}} \cdot \delta_{ab}) = \frac{1}{r}$.

Hvis man vil bestemme Influenslinien ved Tegning, gaar man frem paa fölgende Maade. Man vælger en vilkaarlig Höjde i Momenttrekanten $a'c'd'$ og tegner til de derved bestemte Kræfter v' en Tovpolygon $A'C'D'B'$ med vilkaarlig Poldistance; dernæst vælges ligeledes en vilkaarlig Höjde i Momenttrekanten $c''d''b''$ og tegnes til de derved bestemte Kræfter v'' den punkterede Tovpolygon $A_1'C'D'B'$, saaledes at den gaar gennem de 3 Punkter C', D' og B'; Ordinaterne mellem de to Tovpolygoner ere da Influensordinaterne for X_a med Multiplikator $\frac{1}{r}$, hvor r er det Stykke $A_1'A'$, der afskæres mellem Tovpolygonerne lodret under A; thi paa den angivne Maade faa vi i alt Fald Ordinaterne i de to

Tovpolygoner proportionale med de rigtige Værdier, og ved specielt at sörge for, at begge Tovpolygoner gaa gennem C', D' og B', faa vi Ordinatdifferenserne proportionale med de rigtige Værdier; naar saa endelig disse Differenser multipliceres med en saadan Konstant, at Ordinaten lodret under A bliver 1, faa vi selve de rigtige Værdier. Paa analog Maade bestemmes Influensliniien for X_6.

I det fölgende skulle vi nu se, at Influenslinierne for alle de andre Störrelser, udledes af disse to, og det er derfor af Vigtighed, at de ere nöjagtige; det maa derfor i Alm. anbefales at bestemme dem ved Beregning i Stedet for ved Tegning. Man kan da vælge Höjderne i Momenttrekanterne saaledes, at saavidt muligt alle y'erne lodret under Knudepunkterne blive hele Tal, og ved konstant Afstand h mellem Knudepunkterne kan man ved Beregningen af Kræfternes Momenter sætte $h = 1$, da dette kun er Division med en Konstant. Man maa blot her lægge Mærke til, hvorledes den Bjælke er understöttet, hvorpaa Kræfterne v skulle virke. Af den Maade, hvorpaa Slutlinierne for Tovpolygonerne indlægges, ser man let, at Bjælken skal være indspændt ved A og B og have Charnierer ved C og D.

Det hele vil bedst forstaaes af et Exempel.



Vi tage en Pladejerns-drager, for hvilken vi sætte v = y. Knudepunkterne vælges i konstant Afstand ($\lambda = 3.2^m$). Drageren er symmetrisk, saa vi kun behöve at beregne Influenslinien for X_a.

Vi vælge Höjden i Momenttrekanten a'c'd' lig 36 og faa derved de i Fig. skrevne Værdier af y under Knudepunkterne. Man kunde nöjes med Höjden 12, hvis det kun gjaldt om, at Ordinaterne y bleve hele Tal; men ved at vælge 36 opnaar man ogsaa hele Tal for Reaktionerne, der fremkaldes af Kræfterne y, idet disse virke paa en ved A og B indspændt Bjælke med Charnierer ved C og D. Dernæst finde vi Störrelsen af Reaktionerne i den simpelt understöttede Bjælke CD paavirket af Kræfterne y (C = 55, D = 35) og ved successiv Beregning Transversalkræfter og Momenter i Bjælken CD. Dernæst behandles de indspændte Bjælker AC og DB, der ere paavirkede af Trykkene 55 og 35 i de frie Ender, AC desuden af Kræfterne y. Störrelserne af Momenterne (egentlig $\frac{M}{\lambda}$) ere skre=

ne paa Ordinaterne til Kurven.

Paa Grund af Symmetrien have vi $\delta_{aa} = \delta_{bb} = 490$ og $\delta_{ab} = \delta_{ba} = 140$. Ordinaterne i Influenslinien for X_a ere nu:

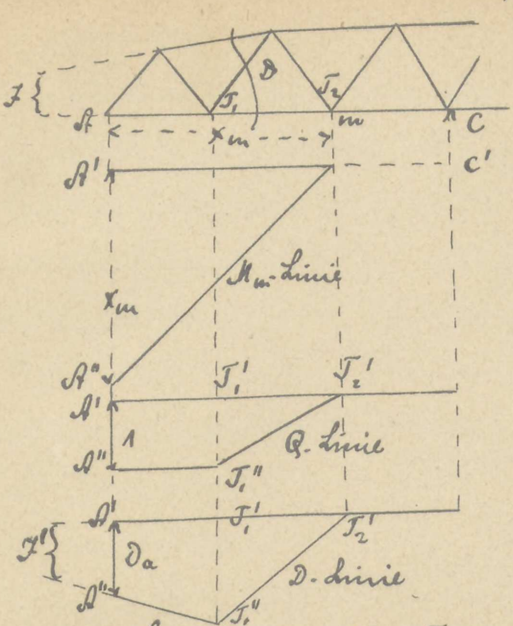
$$\eta_a = \frac{\delta_{bb} \cdot \delta_{ma} \div \delta_{ba} \cdot \delta_{mb}}{\delta_{aa} \cdot \delta_{bb} - \delta_{ab}^2} = \frac{490\,\delta_{ma} \div 140\,\delta_{mb}}{490^2 - 140^2}$$

$$= \frac{7\delta_{ma} \div 2\delta_{mb}}{70(7^2 \div 2^2)} = \frac{7\delta_{ma} \div 2 \cdot \delta_{mb}}{3150}.$$

Punkt No	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
δ_{ma} =	+490	+345	+209	+91	0	÷55	÷80	÷81	÷64	÷35	0	+35	+70	+105	+140
δ_{mb} =	+140	+105	+70	+35	0	÷35	÷64	÷81	÷80	÷55	0	+91	+209	+345	+490
$7\delta_{ma}$ =	+3430	+2415	+1463	+637	0	÷385	÷560	÷567	÷448	÷245	0	+245	+490	+735	+980
$2\delta_{mb}$ =	+280	+210	+140	+70	0	÷70	÷128	÷162	÷160	÷110	0	+182	+418	+690	+980
$7\delta_{ma} \div 2\delta_{mb}$ =	+3150	+2205	+1323	+567	0	-315	÷432	÷405	÷288	÷135	0	+63	+72	+45	0
η_a =	+1.000	+0.700	+0.420	+0.180	0	÷0.100	÷0.137	÷0.129	÷0.096	÷0.043	0	+0.020	+0.023	+0.014	0
η_b =	0	+0.014	+0.023	+0.020	0	÷0.043	÷0.096	÷0.129	÷0.137	÷0.10	0	+0.180	+0.420	+0.700	+1.000

Vi skulle nu udlede de andre Influenslinier af X_a og X_b-Linierne og begynde med en Sideaabning.

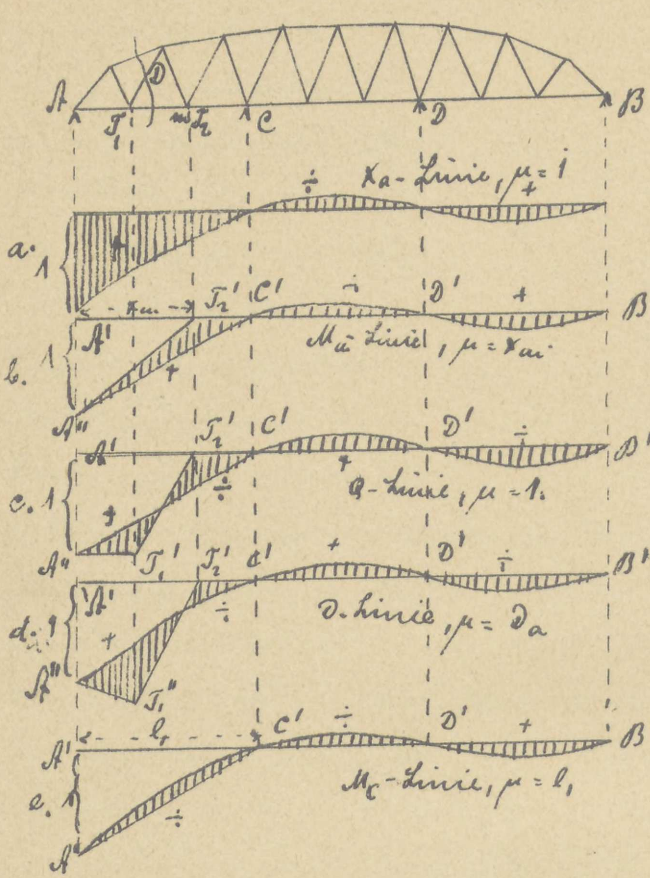
Vi kunne skrive: $M_m = M_{0,m} \div M_a X_a$, $D = D_0 \div D_a X_a$ o.s.v., idet M_b, D_b --- er Nul. Vi maa altsaa kende M_0-Linien, Q_0-Linien, D_0-Linien, d.v.s. Influenslinierne for disse Størrelser i det overhængende Bjælkestykke AC (frit ved A, understøttet i C og D). Disse Influenslinier have vi tidligere



truffet paa ved Gerberdragere; de ere fremstillede i hosst. Fig. Influensliinien for M_m faas ved at afsætte $A'A''=x_m$; til höjre for m ere alle Ordinaterne Nul. Influensliinien for Q er Liinien $A''T_1''$, parallel med Axen i Afstanden 1, hvortil i selve Faget föjes $T_1''T_2'$; for Punktet T_1 af en massiv Bjælke vilde Q-Liinien være $A''T_1''T_1'$. Influensliinien for D er Liinien $A''T_1''$ hvortil i Faget T_1T_2 kommer Liinien $T_1''T_2'$; $A''T_1''$ er bestemt ved Ordinaten $A'A''=D_a$ = Spændingen i D fra en lodret Kraft 1 i A_1 (findes ved et Diagram); endvidere ved at $A''T_1''$ skal skære Axen i F' lodret under Skæringspunktet F for de af Snittet truffne Stænger i Hoved og Fod; en Kraft i F giver nemlig Spændingen D=0, da F er Momentcentret for D. Endelig faas Ordinaten $T_1'T_1''$ ved Opløsning af Kraften 1 i T_1 efter D og T_1T_2.

Ved Hjælp heraf finde vi nu let Influensliinierne for de tilsvarende Størrelser i den kontinuerlige Bjælke.

X_a-Liinien er vist i omstaaende Fig. a. Heraf



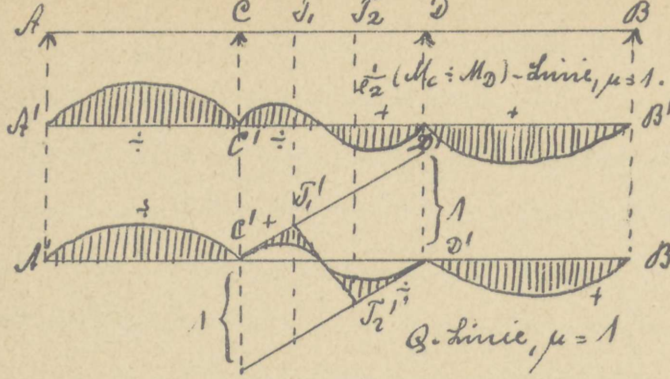
udledes strax M_m-Linien ved at indlægge Linien $A''T_2'$ (Fig. b); man har nemlig $M_m = M_{0,m} \div M_a X_a = M_a\left(\frac{M_{0,m}}{M_a} \div X_a\right)$, hvor M_a er Værdien af M_m for Belastningen $X_a = \div 1$, altsaa en Kraft 1 nedad i A, $M_a = \div 1 \cdot x_m$. Linien $A''T_2'$ er, idet $A'A'' = 1$, Influenslinie for $\frac{M_{0,m}}{M_a}$. Speciell er i Fig. e fremstillet M_c-Linien; Multiplikator er her $\mu = l_1$. I Fig. c er fremstillet Q-Linien for Faget T_1T_2. Man har $Q = Q_0 \div Q_a X_a$ og $Q_a = +1$, altsaa Multiplikator $\mu = 1$. I Fig. d er endelig vist D-Linien; $D = D_0 \div D_a X_a = D_a\left(\frac{D_0}{D_a} \div X_a\right)$. $A''T_1''T_2'$ er ifølge ovenstaaende Influenslinie for $\frac{D_0}{D_a}$, idet $A'A'' = 1$; $T_1'T_1''$ er lig $\frac{D_{T_1}}{D_a}$, hvor D_{T_1} betegner Værdien af Spændingen D for Kraften 1 i T_1, virkende paa den i C og D understøttede, i A frie Bjælke. Influenslinierne for Sideaabningen DB udledes paa samme Maade af X_C-Linien.

Midteraabningen. Vi ville her nøjes med at betragte en Paralleldrager og kunne i saa Fald indskrænke os til at vise Konstruktionen af Influenslinierne for Momenter og Transversalkræfter, hvoraf Spændingerne i Over- og Underdel og Gitterstænger let udledes.

Det er nemlig overhovedet sjældent, at kontinuerlige Dragere ikke ere Paralleldragere; Undtagelser herfra indtræde hyppigst ved Drejebroer, hvis Dragere undertiden maa betragtes som kontinuerlige Dragere paa fire Understøtninger (2 paa en Rullekrans paa Svingpillen); men selv om Dragerformen her ofte spidser til mod Enderne, er det som oftest en Paralleldrager i Midterfaget (nærmere herom i Brobygningen).

Af de ovenfor fundne Influenslinier for M_C og M_D udleder man Influenslinien for $\frac{1}{l_2}(M_C \div M_D)$, hvor l_2 er Længden af Midterfaget; denne Linie findes let grafisk ved Subtraktion af Ordinaterne i Influenslinierne for $\frac{M_C}{l_2}$ og $\frac{M_D}{l_2}$, og disse udledes af $\frac{M_C}{l_1}$-Linien og $\frac{M_D}{l_3}$-Linien ved Multiplikation (grafisk ved en Reduktionsvinkel) med $\frac{l_1}{l_2}$ og $\frac{l_3}{l_2}$. (I Fig. e ovenfor haves M_C-Linien med Multiplikator l_1 eller altsaa $\frac{M_C}{l_1}$-Linien med Multiplikator 1).

Som bekendt har man nu: $Q = Q_0 + \frac{M_C \div M_D}{l_2}$, hvor



Q_0 betyder Transversalkraften i en simpelt understøttet Bjælke CD. Influenslinien for $\frac{1}{\ell_2}(M_C \div M_D)$ er vist i hosst. Fig., og ved blot til dens Ordinater at addere Q_0-Linien $C'T_1'T_2'D'$ faas altsaa Q-Linien; man ser, at de forskellige Q-Linier faas ved blot at flytte Linien $T_1'T_2'$. – Naar man saaledes har skaffet sig Q-Linierne i alle Fag, kunne M-Linierne udledes af dem ved Relationen

$$\frac{M_m}{h} = \frac{M_{m-1}}{h} \div Q_{(m-1)-m};$$

Influenslinien for $\frac{M_m}{h}$ faas altsaa ved at subtrahere Ordinaterne i $Q_{(m-1)-m}$ Linien fra $\frac{M_{m-1}}{h}$-Linien. Idet man nu kender Influenslinien for M_C, og altsaa ogsaa for $\frac{M_C}{h}$, finder man først Influenslinien for $\frac{M}{h}$ i det ved A nærmeste Knudepunkt i Midterfaget, derefter i det næste Knudepunkt o.s.fr. –

Hvis Mellemunderstøtningen dannes af Jernsøjler, haves til Bestemmelse af X_a og X_b:

$$\Sigma C_a \Delta c = \Sigma P_m \cdot \delta_{ma} \div X_a \delta_{aa} \div X_b \cdot \delta_{ba},$$

$$\Sigma C_b \Delta c = \Sigma P_m \cdot \delta_{mb} \div X_a \delta_{ab} \div X_b \cdot \delta_{bb},$$

hvor Summerne paa venstre Side skulle udstrækkes over alle Reaktionerne. Idet vi nu dog antage Understøtningerne A og B urokkelige, indgaar der i Summerne kun Reaktionerne C og D. Kaldes Höjden af Söjlen i C for h_1, Söjlens Tversnit og Elasticitetskoefficient F_1 og E_1, medens Reaktionens Störrelse er C, haves Söjlens Sammentrykning $\Delta c_C = \frac{C \cdot h_1}{E_1 F_1} = C k_C$, idet $k_C = \frac{h_1}{E_1 F_1}$, og her er $C = C_0 \div X_a C_a \div X_b \cdot C_b$; analogt for Understötningen D. Ved Indförelse heraf i Ligningerne ovenfor faas:

$$C_a k_c (C_0 \div C_a X_a \div C_b X_b) + D_a \cdot k_d (D_0 \div D_a X_a \div D_b \cdot X_b) = \Sigma P_m \cdot \delta_{ma} \div X_a \delta_{aa} \div X_b \cdot \delta_{ba}$$

$$C_b \cdot k_c (C_0 \div C_a X_a \div C_b \cdot X_b) + D_b \cdot k_d (D_0 \div D_a X_a \div D_b \cdot X_b) = \Sigma P_m \cdot \delta_{mb} \div X_a \delta_{ab} \div X_b \cdot \delta_{bb},$$

Ved Ordning af Ligningerne faar man:

$$X_a(\delta_{aa} + C_a^2 k_c \div D_a^2 k_d) + X_b(\delta_{ba} \div C_a C_b k_c \div D_a D_b k_d) = \Sigma P_m \cdot \delta_{ma} \div C_a k_c C_0 \div D_a k_d D_0$$

og den analoge.

$C_a, C_b, D_a, D_b, k_c, k_d$ ere Konstanter ligesom $\delta_{aa}, \delta_{bb} \dots$; C_0 og D_0 derimod variere med de ydre Kræfter P.

Kaldes Ordinaterne i Influenslinierne for X_a og X_b: η_a og η_b, for C_0 og D_0: c_0 og d_0, haves til Bestemmelse af η_a og η_b:

$$\alpha \cdot \eta_a + \beta \cdot \eta_b = \delta_{ma} \div C_a \cdot k_c \cdot c_0 \div D_a \cdot k_d \cdot d_0 = m,$$

$$\beta \cdot \eta_a + \gamma \eta_b = \delta_{mb} \div C_b \cdot k_c \cdot c_0 \div D_b \cdot k_d \cdot d_0 = n,$$

idet man har sat: $\delta_{aa} \div C_a^2 k_c \div D_a^2 k_d = \alpha$,

$$\delta_{ba} \div C_a C_b \cdot k_c \div D_a \cdot D_b \cdot k_d = \beta,$$

$$\delta_{bb} \div C_b^2 \cdot k_c \div D_b^2 \cdot k_d = \gamma.$$

Störrelserne $\delta_{ma}, \delta_{mb}, \delta_{aa}, \delta_{ab} \dots$ beregnes ganske som ovenfor. C_a er Værdien af Reaktionen C for den i

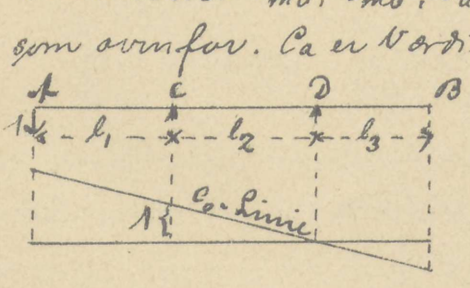


Fig. viste Belastning, altsaa:

$C_a = \frac{l_1 + l_2}{l_2}$, $C_b = \div \frac{l_3}{l_2}$,

$D_a = \div \frac{l_1}{l_2}$, $D_b = \frac{l_2 + l_3}{l_2}$.

Influenslinien for C_0 (med Ordinater c_0) er vist i Fig.

Angaaende de Værdier af k_c og k_d, der skulle indføres i Beregningen maa det erindres, at man skal multiplicere k_c og k_d med de samme Faktorer, som man har indført i δ_{ma}, δ_{aa}, δ_{ab}, δ_{mb} ..... . Hvis man saaledes har anvendt Höjden y_a i Momenttrekanten a'c'd' i Stedet for den virkelige Höjde l_1 (Mom. i C er lig $1 \cdot l_1$), har man derved multipliceret δ_{ma}, δ_{aa}, δ_{ab} med $y_a : l_1$. — (Naar man beregner Störrelserne δ_{ma} ...., kan man kun vælge Höjden i den ene Momenttrekant, f. Ex. a'c'd', vilkaarligt, men maa vælge den anden saaledes, at $\delta_{ab} = \delta_{ba}$; man kan naturligvis godt begynde med at vælge den begge vilkaarligt, men da maa man multiplicere de fundne δ_{mb}, δ_{ab}, δ_{bb} med en saadan Konstant, at $\delta_{ab} = \delta_{ba}$; alm. har man Symmetri, og da ligger dette Spörgsmaal ikke for) – Endvidere har man multipliceret med $E F_c$ ($E J_0$) og for Paralleldrager ogsaa med $\frac{h^2}{\lambda}$ (ved Parallel-Gitterdragere med Verticaler med $\frac{2h^2}{\lambda}$, ved massive Bjælker med $\frac{1}{\lambda}$). F. Ex. for en Parallelgitterbjælke uden Verticaler maa man sætte:

$$k_a = \frac{h_a}{\varepsilon_a F_a} \cdot \frac{y_a \cdot E \cdot F_c}{l_1} \cdot \frac{h^2}{\lambda}, \quad k_b = \frac{h_b}{\varepsilon_b F_b} \cdot \frac{y_a \cdot E \cdot F_c}{l_1} \cdot \frac{h^2}{\lambda}$$

<u>Talexempel</u>. Den ovenfor behandlede Stadejerndrager antages at understöttes af to ganske ens Smedejernssöjler i C og D.

$h_1 = h_2 = 10^m$, $F_1 = F_2 = 110\ cm^2$, $J_0 = 120000\ cm^4$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = E$.

$\lambda = 3{,}2^m$, $l = 14\lambda$, $l_1 = l_3 = 4\lambda$, $l_2 = 6\lambda$.

Vi begynde med at beregne k_c og k_d ($k_c = k_d$).

Formlen er:

$$k_c = \frac{h_1}{\varepsilon_1 F_1} \cdot \frac{\varepsilon . J_0}{\lambda} \cdot \frac{y_a}{l_1} \cdot \frac{1}{\lambda} \quad = \frac{h_1 . J_0}{F_1 \lambda^2} \cdot \frac{y_a}{l_1}.$$

Den sidste Faktor $\frac{1}{\lambda}$ er tilføjet, fordi vi i Beregningen ovenfor foruden den sædvanlige Multiplikation af Kræfterne v med $\frac{\varepsilon J_0}{\lambda}$ have divideret (undladt at multiplicere) δ_{ma}, δ_{aa} - - - med λ. δ_{ma}, δ_{mb} - - ere fundne som Momenter, men vi blive staaende ved Udtrykkene $\frac{M}{\lambda}$, fandt ikke M. Man ser ogsaa, at naar vi regne Kræfterne $v(y)$ for rene Tal, er $\frac{M}{\lambda}$ og altsaa de anvendte Værdier af δ_{ma} . . . ligeledes rene Tal; derfor maa ogsaa k_c og k_d være rene Tal, hvilket Formlen ovenfor ogsaa giver.

Idet vi nu indføre alle Længder i cm., faaes:

$$k_c = \frac{1000 . 1200000 . 36.}{110 . 320^2 . 1280} = 3.0 = k_d.$$

Endvidere haves: $C_a = D_b = \frac{10}{6}$, $D_a = C_b = \div \frac{4}{6}$,

$C_a^2 = D_b^2 = 2{,}78$, $D_a^2 = C_b^2 = 0{,}445$, $C_a C_b = D_a . D_b = \div 1.11$,

$C_a^2 k_c = D_b^2 . k_d = 8{,}34$, $D_a^2 k_d = C_b^2 k_c = 1{,}34$,

$C_a . C_b . k_c = D_a . D_b . k_d = \div 3{,}33$,

$\delta_{aa} = 490 = \delta_{bb}$, $\delta_{ab} = \delta_{ba} = 140$,

$\alpha = \gamma = 490 \div 8{,}34 \div 1{,}34 = 480{,}32$,

$\beta = 140 + 2 \times 3{,}33 = 146{,}66$.

$C_a k_c = D_b . k_d = + 5{,}0$, $D_a k_d = C_b . k_c = \div 2{,}0$.

δ_{ma} og δ_{mb} ere beregnede ovenfor. Beregningerne opstilles bedst

Punkt No	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\delta_{m\bar{a}} =$	+490	+345	+209	+91	0	÷55	÷80	÷81	÷64	÷35	0	+35	+70	+105	+140
$\div C_a \frac{k}{c} c_0 =$	÷8,3	÷7,5	÷6,7	÷5,8	÷5,0	÷4,2	÷3,3	÷2,5	÷1,7	÷0,8	0	+0,8	+1.7	-2,5	+3,3
$\div D_a k_d d_0 =$	÷1,3	÷1.0	÷0.7	÷0,3	0	+0.3	+0.7	+1.0	+1.3	+1.7	+2.0	+2.3	+27	-3.0	+3.3
$m =$	+480,4	+336,5	+201,6	+84.9	÷5,0	÷58.9	÷82,6	÷82,5	÷64,4	÷34,1	+2,0	+38,1	+74.4	+110.5	+146.6
$n =$	+146,6	+110.5	+74.4	+38.1	+2.0	÷34.1	÷64.4	÷82,5	÷82,6	÷58.9	÷5.0	+84.9	+201.6	+336,5	+480.4
$480,4 \cdot m =$	+230784				÷2402						+961				+70427
$146,6 \cdot n =$	+21492				+293						÷733				+70427
$\left.\begin{matrix}480,4 \cdot m \div \\ 146,6\, n\end{matrix}\right\} =$	+209292				÷2695						+1694				0
$\eta_a =$	+1.0				÷0,012						+0,008				0

i Tabeform.–

En Temperatur-variation har kun Indflydelse paa Spændingerne, hvis der opstaar forskellige Temperaturer i Dragerens forskellige Dele. Hvis saaledes Hoveddel i en Gitterdrager faar en Δt_0 højere Temperatur end de andre Stænger, haves til Bestemmelse af $X_{a,t}$ og $X_{b,t}$:

$X_{at} \cdot \delta_{aa} + X_{bt} \cdot \delta_{ba} = \Sigma S_a \cdot \varepsilon \cdot \Delta t \cdot s$ og

$X_{at} \cdot \delta_{ab} + X_{bt} \cdot \delta_{bb} = \Sigma S_b \cdot \varepsilon \cdot \Delta t \cdot s$,

hvor Summationen kun udstrækkes over Hoveddelens Stænger.

Da vi ovenfor have multipliceret δ_{aa}, δ_{ab} .... med $\varepsilon . F_c$, maa denne Faktor her tilföjes paa Ligningernes höjre Side. Idet $\delta_a = +\frac{y'm}{r_m}$, $\delta_b = +\frac{y''m}{r_m}$, faas:

$$X_{at} \cdot \delta_{aa} + X_{bt} \cdot \delta_{ba} = \varepsilon . F_c . \varepsilon . \Delta t . \sum \frac{y'm . sm}{r_m},$$

$$X_{at} \cdot \delta_{ab} + X_{bt} \cdot \delta_{bb} = \varepsilon . F_c . \varepsilon . \Delta t . \sum \frac{y''m . sm}{r_m},$$

idet y' og y'' forudsættes valgte saaledes i Forhold til hinanden, at de give $\delta_{ab} = \delta_{ba}$. For Paralleldragere, hvor man har sat Kræfterne v, der benyttes til Beregning af Störrelserne δ_{aa}, δ_{ab} ...., lig y_m, maa yderligere paa höjre Side tilföjes Faktoren $\frac{h^2}{\lambda}\left(\frac{2h^2}{\lambda}\right)$, og da man her har $\frac{s_m}{r_m} = \frac{\lambda}{h}$, faas paa höjre Side:

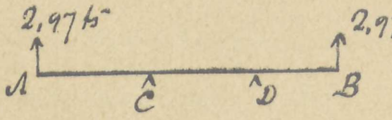
$\varepsilon . F_c . \varepsilon . \Delta t . h . \Sigma y'm$ og den analoge.

For massive Bjælker findes X_{at} og X_{bt} paa ganske lignende Maade, naar man blot paa höjre Side i Ligningen sætter $+ \varepsilon . J_o \; \varepsilon . \frac{\Delta t}{h} \Sigma y$ (Udledelsen er ganske den samme som ved kontinuerlige Bjælker over to Aabninger, kun give $X_a = \div 1$ og $X_b = \div 1$ Træk i Hovedet, hvorfor der sættes + foran $\int M_x \varepsilon . \frac{\Delta t}{h} . dx$.)

<u>Talexempel</u>. Det skal undersöges, hvilken Virkning en 15° stærkere Opvarmning af Hovedet end af Foden har paa den i Exemplerne ovenfor behandlede Pladejernsdrager. Drageren forudsættes her at hvile paa faste Understötninger. Dragerhöjden h er givet = 1.3^m. $\Sigma y' = \Sigma y'' = 180$, $\varepsilon . E = 24 \; ^{kg}/_{qcm}$. Höjre Side i begge Ligninger er: $+ \varepsilon . E . J_o \frac{\Delta t}{h} . \Sigma y . \frac{1}{\lambda}$; Faktoren $\frac{1}{\lambda}$ maa tilföjes, da δ_{ma}, δ_{aa} ... ikke er multipli=

ceret med l (man har brugt $\delta_{ma} = \frac{M}{l}$, ikke $\delta_{ma} = M$).
Idet alle Længder indføres i cm., faas højre Side i Ligningerne $= 24 . 1200000 . \frac{15}{130} . 180 . \frac{1}{320} = 1870000$.
Idet $\delta_{aa} = \delta_{bb} = 490$, $\delta_{ab} = \delta_{ba} = 140$, faas:

$$X_{a,t} = X_{b,t} = \frac{(490 \div 140) . 1870000}{490^2 \div 140^2} = \frac{1870000}{630} = 2970 \text{ kg.}$$



Paavirkningen af Bjælken findes nu ved at lade $X_{a,t}, X_{b,t}$ virke paa det statisk bestemte Hovedsystem, som antydet i Fig.

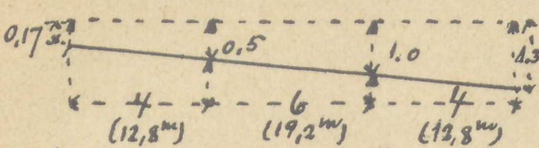
Indflydelsen af Sænkningen Δa og Δb af Endepillerne bestemmes ved

$$X_a . \delta_{aa} + X_b . \delta_{ba} = \div \frac{E . F_c . y_a}{l_1} . \Delta a,$$

$$X_a . \delta_{ab} + X_b . \delta_{bb} = \div \frac{E . F_c . y_a}{l_1} \Delta b,$$

Faktoren $\frac{E . F_c . y_a}{l_1}$ maa tilføjes, da δ_{aa}, δ_{ab} .... ere multiplicerede hermed; ere Kræfterne X multiplicerede med flere Faktorer (f. Ex. $\frac{h^2}{l}$ for Paralleldrager), maa disse naturligvis yderligere tilføjes.
Indflydelsen af en Sænkning af Mellempillerne udledes let heraf, da det kun er Pillernes relative Højde, det kommer an paa.
Talexempel. Det skal undersøges, hvilken Virkning det har paa den i Exemplerne ovenfor behandlede Pladejernsdrager, naar Understøtningen C sænker sig 0,5 cm.

Understøtningen D 1,0 cm.



Først beregner man, at de angivne Sænkninger af Mellempillerne have samme Betydning, som at Endepillerne have sig 0,17 cm og 1,33 cm; altsaa er $\Delta a = \div 0,17$ cm, $\Delta b = \div 1.33$ cm. Højre Side i Ligningerne er: $K . \Delta a$ og $K . \Delta b$, hvor

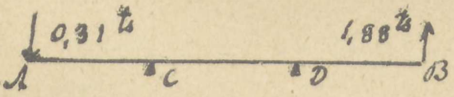
$$K = \frac{E . J_0}{l^2} . \frac{J_a}{L_1} = \frac{2000000 . 1200000 . 36}{320^2 . 1280} = 659000.$$

Af Ligningerne findes:

$$X_a = \div K \frac{\Delta a . \delta_{bb} \div \Delta b . \delta_{ba}}{\delta_{aa} . \delta_{bb} \div \delta_{ab}^2} = \div K . \frac{7 \Delta a \div 2 \Delta b}{3150},$$

$$X_b = \div K \frac{\Delta b . \delta_{aa} \div \Delta a \, \delta_{ab}}{\delta_{aa} . \delta_{bb} \div \delta_{ab}^2} = \div K . \frac{7 \Delta b \div 2 \Delta a}{3150},$$

$X_a = \div 310$ kg, $X_b = \div 1880$ kg.



Paavirkningen i Bjælken findes ved at lade X_a og X_b virke paa Bjælken CD som antydet i Fig.

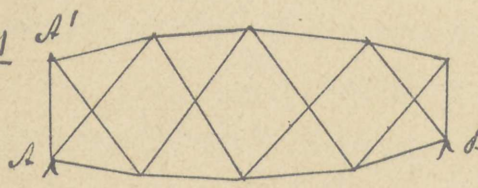
Naar Mellemunderstøtningerne dannes af Jernsøjler, vil en ensformig Temperaturvariation bevirke en Længdevariation af Søjlerne ($\varepsilon . t . h_a$ og $\varepsilon . t . h_b$); de herved fremkaldte Extraspændinger bestemmes ved at undersøge Indflydelsen af, at Mellempillerne sænke sig Stykkerne $\div \varepsilon . t . h_a$ og $\div \varepsilon . t . h_b$. —

Kap. 6

§ 21. Gitterbjælker med sammensat Gitter.

I. II, § 13 er omtalt de forskellige Former af sammensat Gitter, som almindelig anvendes, og den tilnærmede Beregning af Spændingerne ved Opløsning i de usammensatte Grundformer, som hver beregnes for $\frac{1}{n}$ af Belastningen
Som det ligeledes omtales paa det anførte Sted, ere disse sammensatte Gitre i Virkeligheden statisk ubestemte, saa en nøjagtigere Beregning maa foretages i Overensstem. melse med de alm. Principper for statisk ubestemte Systemers Beregning. –
Vi ville betragte de almindeligste Former noget nærmere, og vi forudsætte da, at en foreløbig Beregning er gennemført efter II, § 13, saaledes at man deraf kender alle Stangernes Tværsnit.

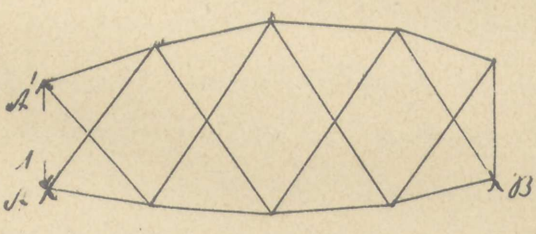
I den i hosst. Fig. fremstillede Dragerform er der som bekendt en overtallig Stang. Vi kunne f. Ex. vælge Spændingen i Endeverticalen tilvenstre som den statisk ubestemmelige Størrelse X_a. Til Bestemmelse af Influenslinien for X_a haves som sædvanligt:

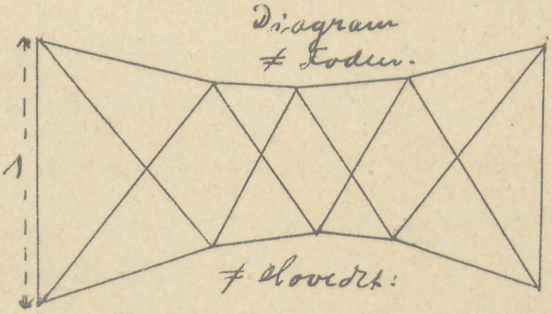
1 

$\delta_a + X_a \cdot \delta_{aa} = \Sigma P_m \cdot \delta_{ma}$, hvor δ_{ma} betyder Nedbøjningen i lodret Retning af Knudepunktet m, naar Belastningen er $X_a = \div 1$, medens δ_{aa} be=

tyder den af samme Belastning fölgende gensidige Forskydning i lodret Retning af Punkterne A og A' i det statisk bestemte Hovedsystem; Sa betyder den gensidige Forskydning af A og A' i det statisk ubestemte System, altsaa $\delta_a = \frac{X_a \cdot h_a}{E F_a}$, hvor $h_a = AA'$, F_a er Tversnittet af Stangen AA'. Man kunde ogsaa skrive $X_a \cdot \Sigma \frac{S_a^2 \cdot s}{E \cdot F} = \Sigma P_m \cdot \delta_{ma}$, hvor Summen paa venstre Side da skulde udstrækkes over alle Stænger, ogsaa den overtallige.

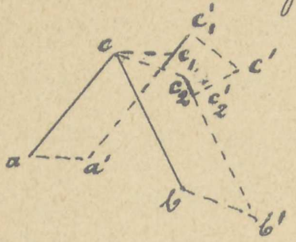
I hosst. Fig. er vist Belastningen $X_a = \div 1$ virkende paa Drageren; man begynder nu med at bestemme de heraf fölgende Spændinger S_a i alle Stængerne ved et Diagram (dette bliver meget simpelt, se Fig.)





Dernæst skal man have fat paa Nedböjningslinien for Drageren for denne Belastning; men hertil kunne vi ikke anvende den i §8 udviklede Metode, der kun gælder for Gittersystemer, der kunne dannes ved at lægge Trekanter ved Siden af hinanden (simple Trekantsystemer).

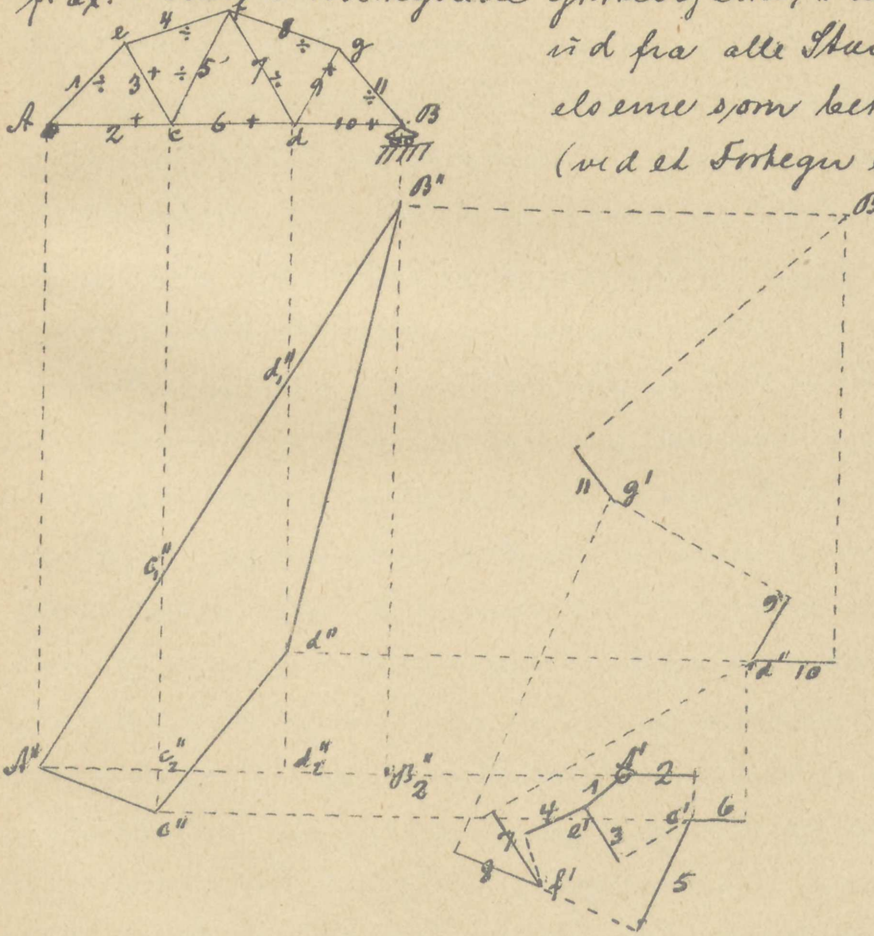
Vi ville udvikle en anden, rent grafisk Metode, nemlig <u>Williot's Forskydningsplan</u>, men dog kun medtage, hvad vi netop have Brug for her. Methoden er overordentlig simpel.



Stangsystemet abc undergaar en Flytning og en Formforandring; der er givet, at a bevæger sig til a', b til b', og at ac og bc faa bekendte Længdetilvæxter; man skal konstruere c's nye Beliggenhed.

Man kan da tænke sig Stangenes Forbindelse i c ophævet, ac parallelforskudt til $a'c_1$, bc til $b'c_2$; dernæst afsættes c_1c_1' lig den givne Forlængelse af ac, c_2c_2' lig Forlængelsen (i Fig. en Forkortelse) af bc; c's nye Beliggenhed c' bestemmes nu som Skæringspunkt mellem to Cirkler, nemlig med Centrum i a', Radius $a'c_1'$ og med Centrum i b', Radius $b'c_2'$. Da vi nu imidlertid gaa ud fra, at Formforandringerne ere forsvindende smaa Størrelser, kunne disse Cirkler erstattes af de vinkelrette $c_1'c'$ og $c_2'c'$. Alle de nu beskrevne Konstruktioner udføres bedst i en særlig Figur, saaledes som nederste Fig. ovenfor viser: fra et vilkaarligt Punkt O (Polen) afsættes de givne Forskydninger af a og b i Størrelse og Retning som Oa' og Ob'; fra a' og b' afsættes de givne Forlængelser af ac og bc i Størrelse og Retning som $a'c_1'$ og $b'c_2'$, og de vinkelrette $c_1'c'$ og $c_2'c'$ give da c'; Oc' angiver Retning og Størrelse af c's Forskydning. Hvis nu et Punkt d var forbundet med b og c ved Stængerne bd og cd, som fik bekendte Forlængelser, kunde man ved at gaa videre paa samme Maade bestemme d's Forskydning. Man maa ved Konstruktionen blot passe paa at afsætte Stængernes Forlængelser (Forkortelser) i den rigtige Retning.—

Vi ville vise, hvorledes man ved Hjælp af ovenstaaende kan konstruere Nedbøjningslinien for f. Ex. Fodenz i hostegnede Gitterbjelke, i det vi gaa ud fra alle Stangforlængelserne som bekendte (ved et Fortegn er i Fig. antydet, om en Stang forlænges eller forkortes). Vi tegne da en Forskydningsplan, idet vi gaa ud fra, at A ligger fast, og at Ret=

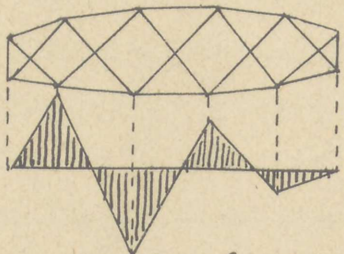


ningen af Stangen 1 bliver uforandret. Punktet A' falder sammen med Polen O; der afsættes Oe' lig Forkortelsen af Stangen 1 (i Retningen e–A), hvorved findes Punktet e's Forskydning i Forhold til A; Punktet c' findes ved at afsætte Forlængelserne af 2 og 3 ud fra A og e' og oprejse vinkelrette i Endepunkterne. Dernæst Punktet f' ved at afsætte Forlængelserne af Stængerne 4 og 5 ud fra e' og c' og oprejse vinkelrette i Endepunkterne. Paa denne Maade gaar man videre, indtil man har konstrueret B', hvorved man altsaa har fundet Forskydningerne af alle Knudepunkterne i Forhold til A (d's Forskydning i Forhold til A er givet ved Ad' o.s.v.), under Forudsætning af at Stangen 1 beholder sin Retning. Denne Forudsætning er imidlertid ikke rigtig, thi B skal kun kunne forskyde sig i vandret Retning. For at faa Drageren, efter at Formforandringen har fundet Sted, til at ligge rigtigt i Forhold til Omgivelserne, maa vi derfor endnu dreje hele Systemet om A, indtil B kommer ned i den vandrette Linie AB. Idet vi kun bryde os om at faa de lodrette Nedbøjninger af de forskellige Punkter, skulle vi til de lodrette Komposanter af Forskydningerne i Forskydningsplanen addere de lodrette Komposanter af Drejningen. I Fig. er konstrueret Nedbøjningslinien for Fodens Knudepunkter; man har projiceret A, c', d' og B' ind paa Vertikalerne gennem A, c, d og B, hvorved de lodrette Komposanter af Forskydningerne aflæses som $c_2''c''$, $d_2''d''$, $B_2''B''$. Ved Drejningen skal B have en Bevægelse, hvis lodrette Komposant er $B_2''B''$, og de lodrette Komposanter af de andre Punkters Bevægelse maa være proportionale hermed (i Forhold til Punkternes vandrette Afstande fra A); ved Drejningen faar altsaa c den lodrette Bevægelse $c_1''c_2''$, d ligeledes $d_1''d_2''$; c's og d's resulterende lodrette Bevægelser blive altsaa $c''c_1''$ og $d''d_1''$. Men af det nu viste ses, at man ganske simpelt finder Nedböjningen ved at maale fra Linien A''B'' ned til c'' og d'', der faas ved Projection fra Forskydningsplanen. Paa samme Maade kunde man finde Nedböjningslinien for Hovedets Knudepunkter ved at projicere e', f' og g' ind paa Verticalerne gennem e, f og g.

Idet vi nu vende tilbage til vor egentlige Opgave, kunne vi altsaa finde Nedböjningerne δ_{ma} saaledes: ved Diagrammet findes Spændingerne S_a fra Belastningen $X_a = \div 1$, og man beregner de deraf fölgende Stangforlængelser $\frac{S_a \cdot s}{E \cdot F}$ eller bedre $\frac{S_a \cdot s \cdot F_c}{F}$, idet vi multiplicere med $E F_c$. Man tegner dernæst Forskydningsplanen for Drageren, idet man f. Ex. antager B fastliggende og Retningen af Verticalen i B uforandret, og ved at projicere Punkterne herfra ind paa Verticalerne gennem de tilsvarende Knudepunkter be=

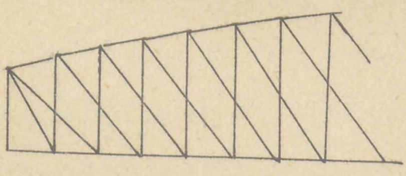
stemmes Nedböjningslinien; (hvis Belastningen virker paa Dragerfoden, er det Nedböjningslinien for den, man skal have); samtidig findes δ_{aa}, nemlig som den lodrette Afstand mellem de til A og A' svarende Punkter i Forskydningsplanen (da A og A' have samme vandrette Afstand fra det faste Punkt B, faa de nemlig lige stor lodrette Bevægelser ved Drejningen om B). Den fundne Nedböjningslinie er Influenslinie for X_a med Multiplikator $1:(\delta_{aa}+k)$, hvor $k = h_a \cdot \frac{F_c}{F_a}$. Influenslinierne for alle de andre Spændinger kunne findes ved som sædvanlig at skrive: $S = S_o \div S_a X_a$; imidlertid have vi tidligere kun vist Konstruktionen af Influenslinierne for S_o for simple Trekantsystemer, og for ikke at komme ind paa Vidtlöftigheder, skulle vi da her nöjes med at angive fölgende lidt omstændeligere Metode: man anbringer Kraften 1 efterhaanden i alle Knudepunkter, hvor der findes Tværbjælker, og tegner for hver Stilling et Diagram (Kraftpolygonerne for alle Knudepunkterne). De ydre Kræfter ere: Kraften 1, Reaktionerne A og B, der bestemmes som sædvanlig for en simpelt understöttet Bjælke, og de to ligestore, modsat rettede Kræfter X_a, der fremkaldes som Spændingen i den overtallige Stang ved Kraften 1, og som bestemmes ved Influenslinien for X_a. Disse Diagram=

mer indeholde alle Influensliniernes Ordinater i alle Knudepunkter. Ved Paralleldrageren, som er det almindeligste, ere Diagrammerne meget simple og hurtige at tegne.

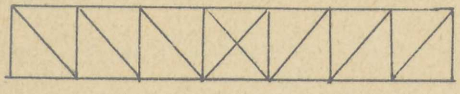


Influenslinien for X_a faar med Belastningen paa Foden et Udseende som hosstaaende Figur.

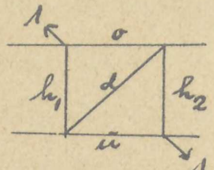
Det er navnlig for Gitterstangerne, at Fejlen ved Tilnærmelsesmetoden kan blive betydelig (Müller-Breslau finder endog ved et specielt Ex. en Fejl paa 41% ved Anvendelse af Tilnærmelsesmetoden, og det endda paa den usikre Side); for Hoved og Fod vil Tilnærmelsesmetoden oftest være nöjagtig nok. –



Ved en Drageform som i hosst. Fig. kompliceres Sagen alm. yderligere ved Kontradiagonaler, men hvis man ser bort fra dem er der her ligeledes kun en overtallig Stang. Som overtallig kan man f. Ex. vælge Spændingen i den förste Diagonal, og Beregningen kan da udföres ganske som ovenfor (blot maa man helst i Stedet for $(\delta_{aa} + k)$ sætte $\sum \frac{S_a^2 s}{EF}$). Forövrigt er Fejlen ved Benyttelsen af Tilnærmelsesmetoden næppe saa stor her som ovenfor. –



I en Drager som i hosst. Figur, hvor der i et Fag findes krydsende Diagonaler (begge stive), er den ene af disse overtallig. Spændingerne i alle Stænger udenfor dette Fag ere ganske upaavirkede af den statiske Ubestemthed og beregnes altsaa som tidligere vist; de kunne nemlig alle overskæres med et Snit, som kun træffer tre Stænger ialt. Vil man anstille en exact Beregning for Stængerne i Faget med krydsende Diagonaler, (hvilket man dog i Alm. ikke gör), kan man indføre en af Diagonalspændingerne som X_a og finde Influenslinien for den ved $X_a = \frac{\Sigma P_m \cdot \delta_{ma}}{\Sigma \frac{S_a^2 s}{EF}}$.



Spændingerne S_a findes ved et Diagram for Belastningen $X_a = \div 1$ (se Fig.): S_a er Nul undtagen for Stængerne i selve Faget (de i Fig. med Bogstaver markede). Nedböjningerne δ_{ma} findes som Momenter for Kræfterne v (§8), af hvilke der her kun haves en i hver af Verticalerne h_1 og h_2; i $\Sigma \frac{S_a^2 s}{EF}$ udstrækkes Summationen kun over Fagets Stænger.

Naar Influenslinien for X_a er bestemt, findes Influenslinierne for o, u, h_1, h_2 og d ved

$S = S_0 \div X_a S_a$ som sædvanligt.—

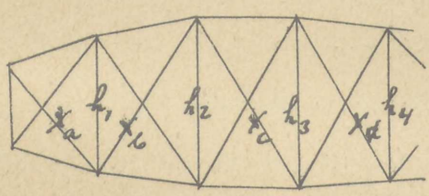
Hvis vi endelig have krydsede Diagonaler i alle Fag, indføre vi en Diagonal fra hvert Fag som overtallig. Til Bestemmelse af $X_a, X_b, X_c \dots$ have vi da: $\left(\frac{s}{EF} = \rho\right)$

$$X_a \cdot \Sigma S_a^2 \cdot \rho + X_b \Sigma S_a S_b \cdot \rho + X_c \Sigma S_a S_c \rho + \dots = \Sigma P_m \cdot \delta_{ma},$$

$$X_a \Sigma S_a S_b \rho + X_b \Sigma S_b^2 \cdot \rho + X_c \Sigma S_b S_c \cdot \rho + \dots = \Sigma P_m \cdot \delta_{mb},$$

= — — — — — — — — — — — — —

Hver af Ligningerne indeholde dog kun 3 af Størrelserne X, og Koefficienter til dem ($\Sigma S_a^2 \cdot \rho$, $\Sigma S_a S_b \cdot \rho, \dots$) ere lette at beregne. Størrelserne $\Sigma S_a^2 \rho$, $S_b^2 \rho \dots$ indeholde kun 6 Led hidrørende fra de 6 Stænger i Faget med Diagonalerne $X_a, X_b \dots$ (for Diagonalen X_a er $S_a = \div 1 \dots$);



Størrelserne $\Sigma S_a S_b \rho$, $\Sigma S_b S_c \rho, \dots$ indeholde kun et Led, nemlig det, som hidrører fra Verticalen mellem Fagene med Diagonalerne X_a og X_b, X_b og $X_c \dots$; $\Sigma S_a S_c \cdot \rho$ er Nul, ligesaa $\Sigma S_a S_d \rho$; $\Sigma S_b S_d \rho \dots$

Ligningerne blive altsaa:

$$X_a \Sigma S_a^2 \rho + X_b \Sigma S_a S_b \rho = \Sigma P_m \cdot \delta_{ma},$$

$$X_a \Sigma S_a S_b \rho + X_b \Sigma S_b^2 \rho + X_c \Sigma S_b \cdot S_c \cdot \rho = \Sigma P_m \cdot \delta_{mb},$$

$$X_b \Sigma S_b S_c \rho + X_c \Sigma S_c^2 \rho + X_d \cdot \Sigma S_c S_d \rho = \Sigma P_m \delta_{mc},$$

— — — — — — — — — — — —

Hvis det gælder om at finde de til en bestemt Stilling af Belastningen svarende Spændinger, kan denne Opgave forholdsvis let løses. Man erstatter da Leddene paa højre Side af Lighedstegnene med $\Sigma S_0 S_a \rho$;

$\Sigma S_0 S_b \rho, \ldots$, hvor S_0 er Spændingerne i det statisk bestemte System for den givne Belastning; disse Summer indeholde kun 6 Led (S_a er Nul uden for Faget med Diagonalen X_a o. s. v.). Man kan saa omgaa den besværlige Løsning af Ligningerne paa følgende Maade: de ved en tilnærmende Beregning (Deling i Enkeltsystemer) fundne Spændinger i Diagonalerne $X_a, X_b, \ldots$ benævnes A, B, ... og Ligningerne skrives:

$$X_a \Sigma S_a^2 \rho + B \Sigma S_a S_b \rho = \Sigma S_0 S_a \rho,$$

$$A \Sigma S_a S_b \rho + X_b \Sigma S_b^2 \rho + C \Sigma S_b S_c \rho = \Sigma S_0 S_b \rho,$$

— — — — — — — — —

idet Størrelserne $\Sigma S_a S_b \rho$, $\Sigma S_b S_c \rho \ldots$ er smaa i Sammenligning med $\Sigma S_a^2 \rho$, $\Sigma S_b^2 \cdot \rho \ldots$, de saaledes fundne Værdier af $X_a, X_b \ldots$ kunne naturligvis forbedres ved at gentage Beregningerne med disse Værdier af $X_a, X_b, \ldots$ for A, B, ... Hvis det derimod gælder om at bestemme Influensliniierne, maa Ligningerne løses, hvorved:

$$X_a = \alpha \Sigma P_m \cdot \delta_{ma} + \beta \Sigma P_m \delta_{mb} + \ldots$$

$$X_b = \alpha' \Sigma P_m \delta_{ma} + \beta' \Sigma P_m \delta_{mb} + \ldots$$

— — — — — — — —

Nedbøjningsliniierne $\delta_{ma}, \delta_{mb} \ldots$ findes let nok (som ovenfor beskrevet ved Omtalen af Drageren med krydsende Diagonaler i kun et Fag), men Beregningen af $\alpha, \beta, \ldots$ er temmelig vidtløftig, og endelig er ogsaa Summationen af Ordinaterne i $\delta_{ma}, \delta_{mb}, \ldots$ -Kurverne, hver multipliceret med sit $\alpha, \beta, \ldots$

et ret omfattende Arbejde. –

Vil man anstille en noget nöjagtigere Beregning end den tilnærmende, der gaar ud paa Oplösning i Enkeltsystemer, kan man i Alm. dog indskrænke sig til at gennemföre den for en enkelt bestemt Belastning og derved danne sig et Begreb om Fejlens Störrelse. –

Kap. 7. Gitterkonstruktioner i Rummet.

§22. Kuppelkonstruktioner o. l.

Kuppelkonstruktioner kunne være massive eller dannede af et Gitter, altsaa Kuppelhvælvinger eller Kuppeltagkonstruktioner. – Det vilde dog her före os for vidt at medtage Beregningen af en Kuppelhvælving (den skulde naturligvis egentlig gennemföres med Elasticitetsteorien som Udgangspunkt, hvilket dog endnu ikke er lykkedes (se Foeppl: Theorie der Gewölbe, 1881); i Mangel heraf har man bragt forskellige Tilnærmelser, af hvilke navnlig Schwedlers har fundet Indgang, skönt den just ikke er uangribelig; en sikkert bedre Metode er fremsat af Autenrieth („Die statische Berechnung der Kuppelgewölbe, Berlin 1894.").

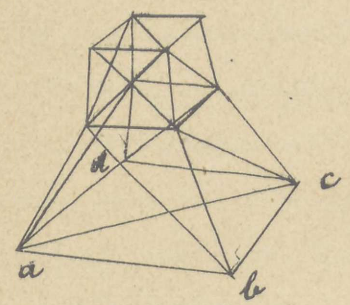
Vi ville altsaa her kun beskæftige os med Gitterkonstruktionerne, men saa ville vi til Gengæld medtage ikke blot egentlige Kupler, men ogsaa nærstaaende rumlige Gitterkonstruktioner (tårnformede Bropiller af Jærn o. l.). Vi begynde med nogle almindelige Bemærkninger om rumlige Gittersystemer. —

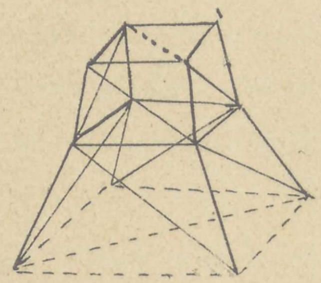
Betingelsen for at et rumligt Gittersystem er indvendig statisk bestemt, er, når Knudepunkternes Antal er k, Stængernes s, at $s = 3k \div 6$. For at indse dette lægge vi et Koordinatsystem med Begyndelsespunkt i et af Knudepunkterne; x-Axen gennem et andet og xy-Planen gennem et tredje; ved dette Valg af Koordinatsystem ere 6 af de 3k Koordinater for Knudepunkterne givne. De tilbageværende $3k \div 6$ kunne, idet alle Stængernes Længder ere bekendte, bestemmes ved Ligninger af Formen $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 \div y_2)^2 + (z_1 \div z_2)^2 = s_{1,2}^2$; der maa altsaa være $3k \div 6$ Ligninger af denne Form, altsaa $3k \div 6$ Stænger. Ligesom ved plane Systemer fordres det endvidere, at Ligningernes Determinant ikke er Nul, men herpaa skulle vi forøvrigt ikke indlade os videre.

Hvis man nu har et saadant rumligt System, hvor $s = 3k \div 6$, kan man tænke sig ethvert Knudepunkt skaaret løst fra sin Forbindelse med Systemet, og da de overskaarne Stængers Spændinger skulle være i Ligevægt med de i Knudepunktet angribende ydre Kræfter, faar man for hvert Knudepunkt 3 Ligevægtsbetingelser, altsaa ialt 3k.

Da man kun har 3 k = 6 Spændinger at bestemme, har man altsaa 6 Ligninger til Bestemmelse af Reaktionerne, og Betingelsen for, at Systemet ogsaa skal være udvendig statisk bestemt, bliver altsaa, at der kun er 6 ubekendte Reaktioner (bestemmende Størrelser for Reaktionerne). I Analogi med hvad der tidligere er udviklet for plane Systemer, kan man nu nærmere definere de forskellige mulige Understøtningsmaader: en fast simpel Understøtning giver en Reaktion, af hvis Retningslinie, man kun kender et Punkt, saa at den altsaa har 3 ubekendte Komposanter; en „enkelt bevægelig" simpel Understøtning tillader Bevægelse langs en ret Linie og kan altsaa kun give en Reaktion vinkelret paa denne, saa der kun bliver to ubekendte Komposanter; en „dobbelt bevægelig" simpel Understøtning endelig tillader Bevægelse langs en Flade, og giver altsaa kun Reaktioner normalt paa Fladen, saa der bliver en ubekendt o.s.v (den sidste Understøtning er kun undtagelsesvis udført).

De rumlige Systemer, man faar med at gøre i Virkeligheden, er imidlertid sjældent understøttede saaledes, at man kun har 6 ubekendte herfra. Af den Grund behøver dog Systemet ikke at være statisk ubestemt; det vil nemlig altid være muligt af det oprindelig indvendig statisk bestemte System at borttage nogle Stænger, saaledes at man faar Ligninger nok til at bestemme Reaktionerne. Idet vi, altsaa nu ikke mere skelne mellem indre og ydre statisk Bestemthed, kan den almindelige Betingelse for, at Systemet skal være statisk bestemt (under ét) siges at være: $s = 3k \div a$, hvor a betyder Antallet af Ubekendte fra Understøttningerne. Naturligvis maa man sørge for, at Systemet ikke bliver bevægeligt ved Borttagelsen af disse Stænger.





Ex. Det i Fig. fremstillede System er indvendig statisk bestemt, idet der findes 12 Knudepunkter og 30 Stænger og $30 = 3 \times 12 \div 6$. Hvis det skulde vedblive at være statisk bestemt (indvendig), maatte det f. Ex. understøttes i a med en fast, i b og c med en enkelt og en dobbelt bevægelig simpel Understøttning, eller paa anden Maade, saa der kun blev 6 Ubekendte. Hvor et saadant Taarn i Virkeligheden anvendes, vil det imidlertid saa godt som altid faa fire faste simple Understøttninger i a, b, c og d, og hvis det skal vedblive at være statisk bestemt, maa de 6 inederste Fig. punkterede Stænger bortttages; de 5 af dem kunne kun vælges som Forbindelsesstangerne mellem a, b, c og d, men den 6te kan vælges paa forskellig Maade. –

I et System, for hvilket $s = 3k \div a$, kunne altsaa alle Spændingerne bestemmes som Funktioner af Belastningen. Systemet kan være dannet paa forskellig Maade. Ligesom man faar de simpleste plane Gitterbjælker ved at föje Trekant til Trekant, saaledes at hver har ~~en~~ Side fælles med den foregaaende og den efterfölgende, faar man de simpleste rumlige

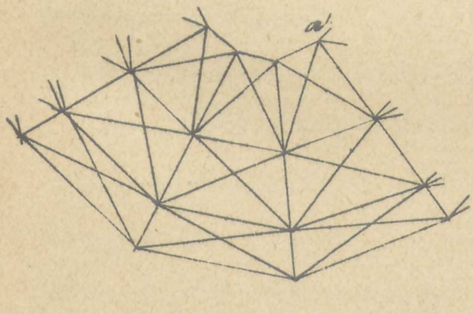
Gittersystemer ved at föje Tetraeder til Tetraeder, og man kan paa denne Maade faa Systemer, hvor hver Stang overskæres med et Snit, der ialt kun træffer 6 Stænger, og da der skal være Ligevægt paa den ene Side af Snittet, naar de overskaarne Stængers Spændinger betragtes som ydre Kræfter, kunne disse 6 Spændinger bestemmes ved at opskrive de 6 Ligevægtsbetingelser for alle ydre Kræfter paa den ene Side af Snittet. De Systemer, man i Virkeligheden anvender, ere dog sjældent saa simpelt formede; i Alm. lykkes det ikke at lægge Snit, der kun overskærer 6 Stænger og der er da ingen anden Udvej til Bestemmelse af Spændingerne end at begynde ved et Knudepunkt, hvor kun tre Stænger stöde sammen, og oplöse den herangribende ydre Kraft efter disse tre; derefter gaar man til et nyt Knudepunkt, hvor der nu kun findes 3

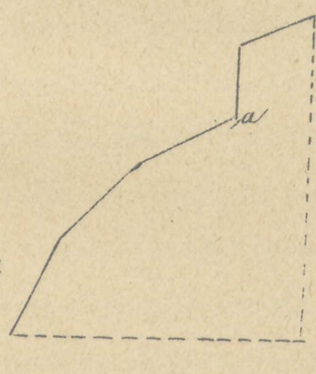
Stanger med ubekendte Spændinger o.s.v. (analogt med Cremonas Metode for plane Systemer). En Kraft opløses efter 3 Linier A, B og C gennem samme Punkt (hvorigennem ogsaa Kraften P) ved först at opløse efter A og Skæringslinien mellem Planerne AP og BC. Ofte er det imidlertid ikke muligt at gennemföre Beregningerne paa denne Maade, selv om Systemet er statisk bestemt; man stöder nemlig ofte paa Knudepunkter, hvorfra der udgaar mere end 3 Stanger med ubekendte Spændinger. Hvis alle disse Spændinger paa en nær ligge i samme Plan, kan först denne enes Spænding bestemmes, og man kan da maaske gaa videre til et nyt Knudepunkt og först senere komme tilbage til de andre. Men ofte er ogsaa denne Udvej lukket; der er da ikke andet for end at opskrive Ligevægtsbetingelserne for alle Knudepunkterne og löse Ligningerne, hvilket selvfölgeligt kan blive höjst vidtlöftigt; naturligvis slaar man dog först ind paa den Vej efter at have bestemt saa mange af Spændingerne som muligt ad anden Vej.

Naar man kommer til et Knudepunkt med mere end tre ubekendte Spændinger, vil det undertiden være simplere at skönne sig til Störrelsen af Spændingerne paa tre nær; ved at regne videre med disse ikke rigtige Værdier kommer man tilsidst til Modsigelser, og man kan da maaske rette paa de valgte Spændingen og gentage Beregningen.

Da Spændingsbestemmelsen er saa besværlig, kan man heller ikke angive nogen alm. Metode til at finde den farligste Belastningsmaade for en Stang; ofte følger denne dog, saa at sige af sig selv.

Vi ville nu gaa over til at vise Beregningen af en Tagkuppelkonstruktion og skulle indskrænke os til at vise, hvorledes Beregningen alm. gjennemføres, uden at komme ind paa Angivelse af den farligste Belastningsmaade, hvilket Spørgsmaal endnu ikke er tilstrækkeligt opklaret (se herom nærmere i Föppl: Fachwerk im Raume).



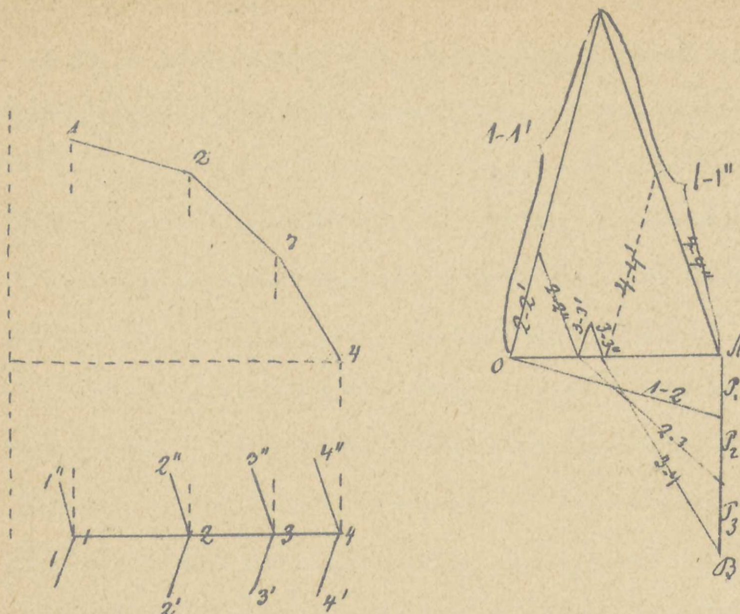


Et Kuppeltag (Schwedlersk Kuppel) er alm. formet som en Omdrejningsflade; Stængerne anbringes efter Meridianerne (Sparene) og Parallelcirklerne (Ringene); i de af disse Stænger dannede Firkanter indsættes Diagonaler, alm. slappe Diagonaler i begge Retninger. Kuplen lukkes sjældent foroven (d. v. s. Sparene løbe ikke helt sammen i et Punkt), men afsluttes her med en Ring a (se Fig.); paa denne stilles da en Laterne, saa den midterste Del af Taget

hæves op; Laternen indföres ved Beregningen af Kuplen som en Belastning paa den øverste Ring. Forneden hvor Kuplen hviler paa Muren, afsluttes den ligeledes med en Ring, og i hvert af Knudepunkterne langs denne faar Kuplen en fast simpel Understötning (til Bestemmelsen af Reaktionen kræves altsaa 3 Betingelser). Systemet er i saa Fald i Virkeligheden statisk ubestemt; f. Ex. haves for en 8-sidet Kuppel med det ovenfor tegnede Meridiansnit (og uden Laterne) 24 Stænger i Sparrne, 32 i Ringene, 24 Diagonaler (en fra hvert Fag) i alt $s = 80$; Knudepunkternes Antal er 32, $a = 3 \times 8 = 24$, altsaa $s > 3k \div a$. Denne Vanskelighed kommer man ud over ved at tænke sig den nederste Ring hörende med til Muren ikke til Systemet; man tænker sig den altsaa blot tjenende til at optage Horizontaltrykkene paa Understötningerne, som Muren maaske ikke selv vilde kunne modtaa (man kan forestille sig, at den forbinder Vederlagspladerne, ikke Knudepunkterne). Naar Muringen ikke regnes med, faaes $s = 72$, og $s = 72 = 3k - a = 96 \div 24$. Hvis Sparrene löb sammen i Toppunktet, vilde Systemet ikke være statisk bestemt, selv naar man ser bort fra Muringen.
Belastningen bestaar af Egenvægt, Snetryk og Vindtryk; den förste regnes ensformig fordelt over Kuplens Overflade, Snebelastningen over Horizontalprojektionen; ved flade Kuppeltage kun-

ne disse to slaas sammen (hvis man da ikke vil reg-
ne med delvis Snebelastning, hvorom nedenfor),
ellers maa der anstilles en særlig Beregning for al-
le tre Arter af Belastning.
Ved lodret Belastning over det hele (konstant
langs en Parallelcirkel) ville Diagonalerne være
spændingsløse; det indses nemlig umiddelbart
ved Symmetrien, at der i dette Tilfælde ikke vil
være nogen Tilbøjelighed til Skævtrækning af de
enkelte Fag; forøvrigt viser det sig nedenfor, at
man faar alle Stangers Spændinger bestemte
under denne Forudsætning uden at støde paa
Modsigelser, og da Systemet er statisk bestemt,
hvilket vil sige, at Spændingerne ere <u>entydige</u>
Funktioner af Belastningen, maa de paa denne
Maade fundne Spændinger være de virkelige.

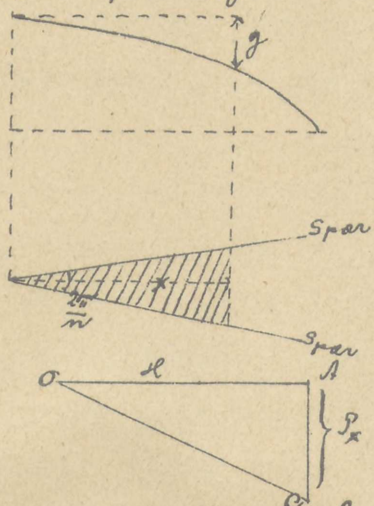
Beregningen af Spændingerne for en total
lodret Belastning er nu overmaade simpel. Man
begynder med at beregne Størrelsen af den i hvert
Knudepunkt virkende ydre Kraft. Paa Grund af
Symmetrien om Omdrejningsaxen behøver man
kun at behandle et Spær og de tilstødende Ring-
stænger. Kræfterne P_1, P_2 og P_3 anbringes i en Kraft-
polygon efter hinanden. I 1 virker P_1, og den skal
opløses efter 1-2 og efter Ringstængerne 1-1' og 1-1'';
man opløser først P_1 efter 1-2 og en vandret Linie
(Radius) og den sidste Komposant dernæst efter



Ringstængerne; alle 3 Stænger i Punktet 1 trykkes (Omløbsretningen for Kraftfirkanten P_1, (1-2), (1-1'), (1-1'') er givet ved P_1). I Punktet 2 virker nu det bekendte Tryk 1-2 og P_2; dens Resultant opløses efter 2-3 og Radius, og Komposanten efter den sidste atter efter Ringstængerne 2-2' og 2-2''; Ringstængerne strækkes, Sparret trykkes. Ved at gaa videre saaledes, findes alle Spændingerne, tilsidst i Murringen (ved Opløsning af Horizontalkomposanten af Spændingen i 3-4 efter 4-4' og 4-4'').

Vi ville søge Betingelsen for, at Ringspændingerne blive Nul (undtagen i øverste Ring og Murringen) ved total Belastning og ved saa flade Kupler, at man kan regne Belastningen ensformig fordelt over Horizontalprojectionen. I Kraftpolygonen ovenfor skulle da alle Parallellerne med Sparene gaa igennem O. Vi antage, at Ringene følge efter hinanden med uendelig smaa

Mellemrum, saa Spærene maa formes efter en kontinuerlig Kurve (Meridiankurve). Linien OC i høist Del af Kraftpolygonen er parallel med Spærstykket



i Afstanden x fra Centrum, altsaa med Tangenten til Meridiankurven her, altsaa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_x}{H}$$

P_x betyder her Belastningen paa det Udsnit, der bæres af et Spær, ud til Punktet x og $P_x = p.x^2.tg.\frac{\pi}{n}$, idet Belastningen er p pr. Arealenhed. Nu haves $\frac{dy}{dx} = \frac{p.tg\frac{\pi}{n}}{H}.x^2$, altsaa Meridiankurvens Ligning: $y = \frac{1}{3}.\frac{p.tg\frac{\pi}{n}}{H}.x^3$. For $x = r$ haves $y = h$, hvorved $y = h.\frac{x^3}{r^3}$, en <u>kubisk Parabel</u>.

Spændingerne i de enkelte Spærstykker have samme Horizontalprojection, og da det hele jo kun gælder for flade Kupler ($h = \frac{1}{6} - \frac{1}{8}$ af Diameteren), ere Spændingerne omtrent lige store.

Det fundne Resultat kan tilnærmelsesvis anvendes paa en foroven lukket Kuppelhvælving; Kraften H, som jo ovenfor betød den vandrette Projection af Spærets Spænding, gaar i saa Fald over til at betegne den vandrette Projection af Trykket efter Meridiankurven paa Længden $2.x.tg\frac{\pi}{n}$ af Parallelcirklen; da man har: $H = \frac{1}{3}.\frac{p.tg\frac{\pi}{n}.r^3}{h} = C$ faas pr. Længdeenhed af Parallelcirklen $H' = \frac{C'}{x}$, som for $x = 0$ (i Toppunkt=

et) bliver ∞. Man kan derfor ikke forme en i Toppen lukket Kuppelhvælving efter en kubisk Parabel helt op til Toppen; hvis man ikke kan beholde en Aabning i Toppen, former man da alm. det øverste Stykke efter en 2' Grads Parabel (for denne haves $H = \frac{Cx^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{Cx^2}{c_1 x}$ og $H' = \frac{H}{K.x} = C'$).

Ved Gitterkupler, som vi jo her særlig beskæftige os med, er det Reglen, at Kuplen ikke er lukket foroven, og man kan i saa Fald godt bruge den kubiske Parabel hele Vejen; ofte har man dog ogsaa her formet det øverste Stykke efter en 2' Grads Parabel, $y = h_1 \frac{x^2}{r_1^2}$, der tangerer den kubiske paa Radius $r_1 = 0,6r$.

Bestemmelsen af Spændingerne fra Vindtrykket er besværligere. Man begynder med at bestemme Kræften i hvert Knudepunkt, idet det Areal, hvis Tryk overføres til Knudepunktet, regnes at danne en Vinkel med Vindretningen, der er Komplement til Vinklen mellem Kuppelfladens Normal i Knudepunktet og Vindretningen. Idet man nu kender de normalt paa Tagfladen virkende Kræfter i hvert Punkt, kan man gennemføre Spændingsbestemmelsen ved at gaa fra Knudepunkt til Knudepunkt, idet man begynder et Sted, hvor kun tre Stænger støde sammen og stadig gaar videre til Punkter, hvorfra kun 3 Stænger med ubekendte Spændinger udgaa. Planen gennem Kuppelaxen og Vind-

retningen er naturligvis en Symmetriplan, saa
man kun behöver at betragte den ene Kuppelhalv-
del. Naar man som næsten altid bruger dobbelte
slappe Diagonaler, skal kun den regnes med, som
bliver strakt, og da det sjældent umiddelbart kan
indses paa Forhaand, hvilken det er, maa man
prøve sig frem, altsaa regne med en af dem, og hvis
det viser sig, at den bliver trykket, göre denne Del af
Beregningen om. Da man her har med Kræfter og
Spændinger i forskellige Planer at göre, maa man
naturligvis udföre Konstruktionerne i to Projektio-
ner, og det hele kan praktisk ordnes saaledes, at
man behandler Knudepunkterne paa *en* Ring i
en Figur, paa den næste i en anden, idet man
naturligvis saa maa overföre nogle af de i den
förste Fig. fundne Spændinger til den anden Fig.
Man begynder fra oven, tager dernæst den næstöver-
ste Ring o.s.v.

Vi antage at have fundet Spændingerne i den
överste Ring, og i alle fra dens Knudepunkter ud-
gaaende Stænger og skulle nu vise Konstruktionen
af Kraftpolygonerne for Knudepunkterne paa den
mellemste Ring. Med den i Fig. angivne Vind-
retning virker der kun ydre Kræfter i 5 og 6 efter
Normalerne til Tagfladerne. Man indser umiddel-
bart ved Symmetrien, at begge Diagonaler i de
Fag, der halveres af Symmetriplanen (gennem Vind-

retningen) maa vor Spændingslöse. Det gælder nu om at faa afgjort, i hvilket Knudepunkt man skal begynde, og dette afhænger atter af, hvilke Diagonaler, der strækkes i nederste Zone; vi antage, at det er de i Fig. tegnede (hvis dette senere viser sig at være urigtigt, maa man göre Konstruktionen eller en Del af den om). Det ses da, at man kan begynde i 6 eller 8; vi vælge f. Ex. 6. Her virker den ydre Kraft 6, som i Fig 1 er afsat lig oa, og Spændingerne 1-6, 2-6 og 3-6 ere bekendte fra Behandlingen af den överste Ring; disse tre Spændingers Re-

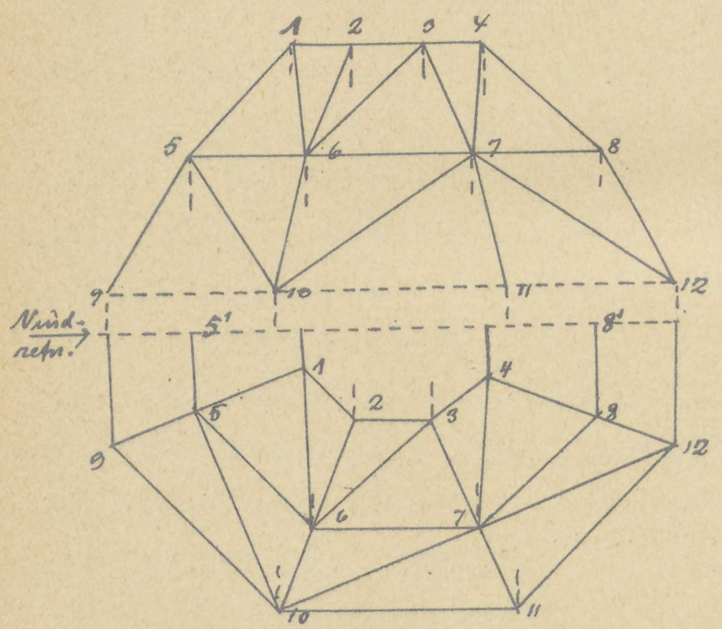
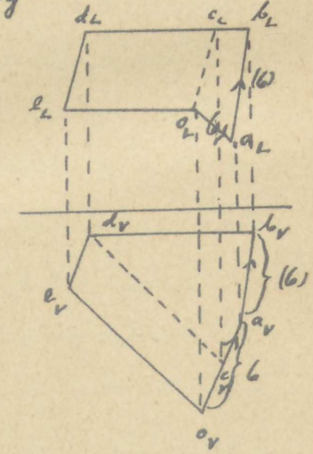
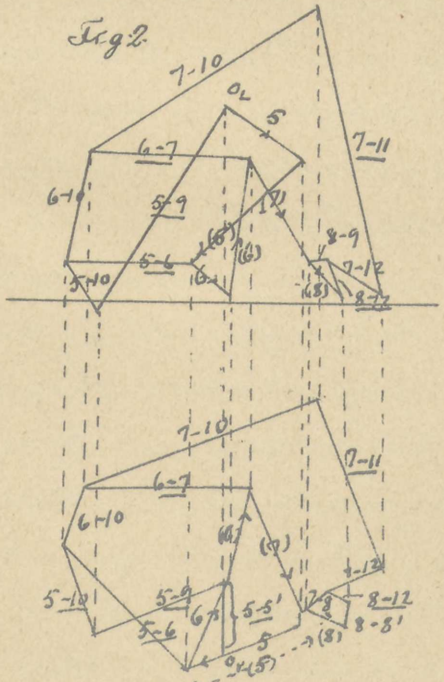


Fig. 1



sultant (6) er i Kraftpolygonen föjet til Kraften 6 (i den samme Omlöbsretning.)

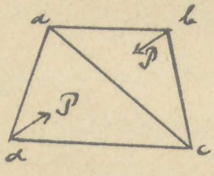
Resultanten af 6 og (6) oplöses efter en vandret og efter 6-10 ved den vandrette $c_4 b_4$ og ved $a_4 c_{35} \neq$ 6-10's lodrette Billede; Punktet c føres ned i vandret Billede paa en Linie gennem o_v ≠ 6-10's vandrette Billede; den vandrette Komposant har altsaa Størrelsen $c_v b_v$, og den opløses ved Linierne $b_o d_v$ og $c_o d_o$ efter 5-7 og 5-6, hvorved de to ubekendte Spændinger ere fundne. Inden man gaar til det næste Knudepunkt anbringer man de fundne Spændinger saaledes, at man faar de ydre Kræfter 6 og (6) samt Spændingerne i Punktet 6 til at ligge i en Kraftpolygon med uafbrudt Omløbsretning (o-a-b-d-e); man ser, at 6-10 strækkes, medens Ringstængerne trykkes.



I Fig. 2 ere Kraftpolygonerne for alle Knudepunkter paa den mellemste Ring tegnede (5, 6, 7, 8). Først ere alle de ydre Kræfter afsatte efter hinanden i lodret og vandret Billede, i det til de ydre Kræfter opaa regnes Spændingerne i de Stænger, der løbe op til den øverste Ring, og som antages bestemte i Forvejen. Kraftpolygonens Begyndelsespunkt er o; derudfra er afsat

Kraften 5 (Vindtrykket paa Knudepunktet 5) og Kraften (5) (den tidligere fundne Spænding i 5-1); dernæst Kraften 6 (Vindtryk paa Knudepunkt 6) og (6) (Resultanten og Spændingerne 1-2, 2-6 og 3-6); i 7 angriber intet ydre Vindtryk, der haves altsaa kun Kraften (7) (Resultant af 3-7 og 4-7); ligeledes haves kun Kraften (8) i Knudepunkt 8 (Spændingen i 4-8). Der er nu tegnet Kraftpolygonen for Knudepunkt 6, saaledes som i Fig 1 forklaret. (Hjælpelinierne findes ikke i Fig. 2); efter at Spændingen 5-6 saaledes er bleven bestemt, findes der kun 3 Stænger med ubekendte Spændinger i Knudepunkt 5, hvorfor Kraftpolygonen her kan tegnes; da 5-5' er vinkelret paa den lodrette Billedplan, kan Kraftpolygonen strax tegnes i lodret Billede (ved gennem Endepunkterne af Kraftpolygonstykket 5, (5), 5-6 at trække Paralleler med 5-9 og 5-10. Man gaar derefter til Knudepunkt 8. der behandles ganske som Knudepunkt 6 (den ydre Kraft (8) opløses efter 8-12 og en vandret og den sidste Komposant atter efter Ringstængerne; Hjælpelinierne ere udeladte). Nu findes kun de ubekendte Spændinger 7-10, 7-11 og 7-12 i Knudepunkt 7, og efter disse Linier skal da Resultanten af 6-7, (7) og 7-8 opløses (f. Ex. ved at opløse efter 7-12 og efter Skæringslinien mellem Plan 7-10-12 og Planen gennem 7-8 og den omtalte bekendte Resultant; Hjælpelinierne findes ikke i Fig.).

I Fig. 2 danne Kræfter og Spændinger i et Knudepunkt en lukket Polygon, hvis Omløbsretninger givet ved Retningen af den ydre Kraft; de trykkede Stænger ere betegnede ved en Streg under Nummeret. Havde det vist sig, at f. Ex. Diagonalen 7-12 blev trykket, hvilket jo vil sige, at den træder ud af Virksomhed, og at 8-11 strækkes; saa skulde man egentlig tegne Kraftpolygonen for 7 og 8 om under denne nye Forudsætning. Dette er dog ikke nødvendigt, som følgende Betragtning viser. Hvis man i et Fag med Kontradiagonaler tager den ene bort og lader et Par ligestore og modsat rettede Kræfter virke i dens Retning, medens der forøvrigt ingen ydre Kræfter virke paa hele Kuplen,



saa vil der derved kun fremkaldes Spændinger i de Stænger, der høre til selve Faget; man kan nemlig i alt Fald bestemme Spændingerne i Kuplen saaledes, at de alle ere Nul undtagen i Fagets Stænger, uden derved at støde paa Modsigelser, og da Spændingerne ere entydige Funktioner af Belastningen, maa de saaledes fundne Spændinger være de virkelige. Naar Faget er symmetrisk som alm. ved Kuppelkonstruktioner, vil den af Kraften P fremkaldte Spændingi ac op paa vare P.

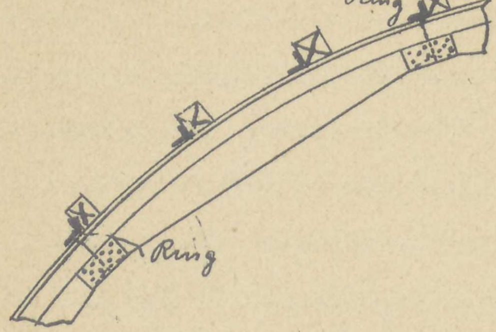
Naar man nu har fundet, at der skulde optræde et Tryk P i f. Ex. ac, saa kan man i bd tilföje en Trækspænding P, oplöse Kræfterne P i bd efter Fagets Stænger og addere de derved fundne Spændinger til de tidligere bestemte; derved bliver Spændingen i ac Nul, hvad der jo netop skulde naas ved Regningen. Det er selvfölgelig lettest, naar man i Forvejen har truffet det rette m. H. t. Valget af de virksomme (strakte) Diagonaler, men som man ser, er den nödvendige Korrektion temmelig let udfört.

Efter hvad der nu er vist, er der ikke stort mere at tilföje angaaende Beregningen. Man bör alm. gennemföre en Beregning under Forudsætning af Snebelastning paa kun den ene Kuppelhalvdel; ved flade Kupler kan man nöjes med fölgende to Belastningstilfælde: Egenvægt og Snetryk over det hele, begge ensformig fordelte over Horizontalprojektionen, og Sne- og Vindtryk paa den halve Kuppel, idet man nöjagtig nok kan tage Hensyn til Vindtrykket ved at göre et Tillæg til Snebelastningen (virkende i lodret Retning begge). Ved höje Kupler maa man behandle Egenvægt, Snetryk over det hele, Snetryk over Halvdelen og Vindtryk hver for sig; de sidste to kunne naturligvis slaas sammen ved at sammensætte de i hvert Knudepunkt angribende Sne- og Vindtryk.

Den angivne Beregningsmaade gælder ikke blot egentlige Kuppelkonstruktioner, men ogsaa pyramideformede Tage (Lokomotivremiser, Taarne o. l.), der er konstruerede analogt med Kuplerne, altsaa med Sper efter Meridianerne og Ringe efter Parallelcirklerne. Konstruktionerne blive her blot lidt simplere, fordi Sperene ere retliniede. For flade Kuppel- og Pyramidetage kan Egenvægten regnes til 70 kg. pr. qm af Horizontalprojektionen (Tagdækningen er da f. Ex. Tagpap paa Forskalling eller et andet Materiale, som giver ca 40 kg. pr. qm, medens Jernkonstruktionen vejer 30 kg. pr. qm.); den bevægelige Belastning, Sne og Vindtryk, kan regnes til 100 kg. pr. qm. – Ved höje Kupler kan man benytte de alm. Angivelser for Tagkonstruktioners Belastning.

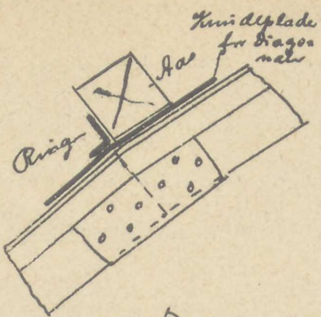
Endnu skal blot tilföjes et Par Bemærkninger om Konstruktionen af Kuppeltage

Tagdækningen anbringes gerne paa en Forskalling. Brædderne heri kunne lægges med Længderetningen efter Ringene eller efter Sperene; i förste Tilfælde understöttes de af Taaforinger, der ere boltede fast ovenpaa Sperene, i sidste paa Aase (alm. af Træ). Det sidste er det hyppigste, da man paa den förste Maade, især forneden faar for stort fritliggende for Brædderne. I begge Tilfælde paavirkes Sperene til Böjning og man derfor have T I eller lignende Tversnit.



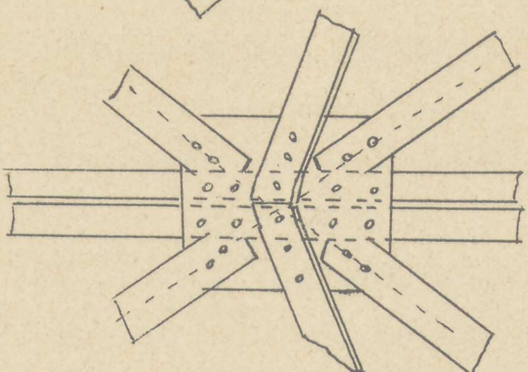
Man former ofte Overkanten af Sparet efter den krumme Meridiankurve, og i saa Fald modvirker det i Sparet herskende Tryk Böjningen; hvis Kuplens Meridian er en kritisk Parabel og Sparets Overkant er formet herefter, vil Sparet slet ikke blive paavirket til Böjning af en total ensformig Belastning, der overföres dertil kontinuerligt (hvis f.Ex. Forskallingen direkte bæres af Sparene); kun hvis det betragtede Spar er belastet med p. pr qm, medens den övrige Kuppelflade er belastet med q, opstaar der en Böjning fra Belastningen $q-p$, opad naar $q > p$, nedad, naar $p > q$. Treaasene befastes som sædvanligt ved Bolte og et Stykke Vinkeljærn til Stötte mod Nedglidning; de hjælpe med til at hindre Udböjning til Siden af Sparet

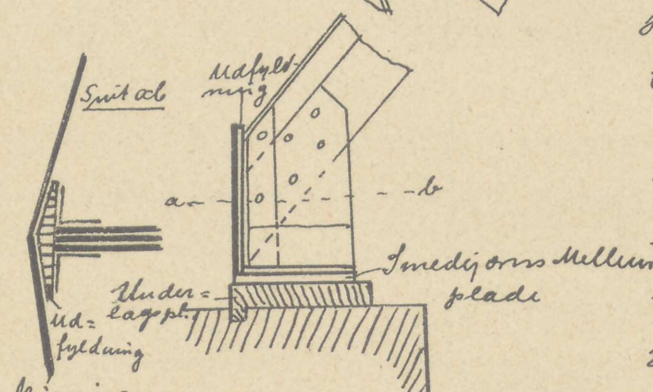
<u>Ringenes</u> Tversnit kan være I, T,], ⌶, L, JL o.s.v.; ved flade paraboliske Kupler, hvor Mellemringene kun blive svagt paavirkede, kan man nöjes med et Vinkeljærn selv op til Spændvidder paa 60m; Stivhed skaffes til Veje ved at forbinde Vinkeljærnet med Treaasen. Omst. Fig. viser Samlingen ved et Knudepunkt; ovenpaa Sparet lægges



en Plade, og herovenpaa nittes Diagonalerne (fladt Jærn) og Ringen.

Murringen paavirkes kun til Træk og dannes derfor almindeligt af fladt Jærn paa Højkant; nedenst. Fig. viser Forbindelsen. tillige ses her Lejet, der som sædvanligt bestaar af en Støbejærns Underlagsplade, fastgjort til Muren ved et Par Ankerbolte, og hvorpaa Spæret hviler med en tyk Smedejærnsplade som Mellemled.

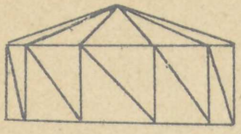




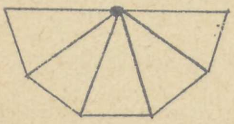
Den øverste Ring, som bærer Laternen, er almindelig stærkt paavirket til Tryk; dens Tværsnit kan være ⌉, ⌉,] o.l. Kombinationer. Spærets Staaplade forbindes med Ringens Staaplade ved Vinkellasker.

Laternen. Skelettet dannes som Fig. viser af Verticaler, der ere befæstede til den øverste Kuppelring;

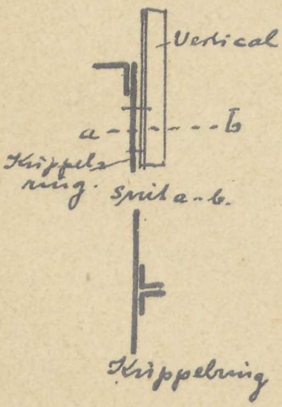
de bære foroven en Ring og herfra löbe Sper ind til Centrum; imellem Verticalerne indskydes endelig dobbelte Diagonaler. Beregningen af Spændingerne kan gjennemföres her ganske som ovenfor vist for Kupler.

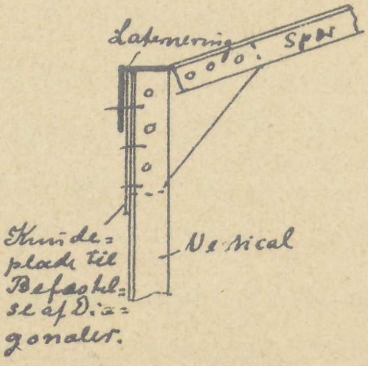


överste Kuppelring.



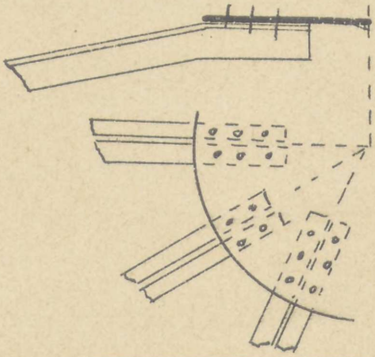
I Alm. anbringer man kun halvt saa mange Verticaler og Sper i Laternen, som der er Sper i Kuplen, og skjönt man naturligvis egentlig burde stille Verticalerne i de Punkter, hvor Kuppelsperne stöde til den övre Ring, stiller man dem alm. midt mellem saadanne to Punkter, da Forbindelsen herved bliver simplere; den herved fremkaldte Böjning af den övre Ring maa selvfölgelig tagis i Betragtning ved Bestemmelsen af dennes Dimensioner.





Verticalerne kunne f. Ex. dannes af to Vinkeljern, der nittes til Staapladen i den övre Kuppelring; Forbindelsen foroven med den af et enkelt

Vinkeljærn dannede Ring og med Sporene ses af Fig.; ligeledes ses her en Knudeplade, hvortil Diagonalerne (fladt Jærn) nittes. — Laternens Sper dannes af ⊤ eller ved större Dimensioner af ⊤⊤; i Toppen befæstes de alle til en fælles Samleplade, som Fig. viser.



I Stedet for, som hidtil nærmest er antaget, af fladt Jærn, kunne Diagonalerne dannes af Rundjærn, hvilket har den Fordel, at man let kan anbringe Indretninger til Efterspænding; men Forbindelserne ved Knudepunkterne blive lidt mer komplicerede.

Antallet af Sporene bliver ofte temmelig stort ved stor Spændvidder, naar man vil slutte sig nogenlunde tæt til den krumme Kuppelflade; ved Bestemmelsen af Antallet maa naturligvis tages Hensyn til Aasenes Bæreevne. F. Ex. har man ved Spændvidderne 15^m, 30^m, 60^m anvendt 12, 24, 36 Sper. Jo flere man anvender, des mindre nöjagtig bliver Beregningen paa Grund af de fremkommende spidse Skæringer; dette maa dog ikke opfattes som en Mangel ved den grafiske Metode, saa man kunde mene at maatte erstatte den med en Beregning; det viser tvertimod hen paa en Mangel ved Systemet. Ved Spændingsbestemmelsen gaar man jo ud fra, at Formforandringerne ere forsvindende; men naar Sideantallet er stort, vil en lille Formforandring bevirke en betydelig Ændring af Vinklen mellem f. Ex to sammenstödende Ringstykker, og derved fremkaldes atter en betydelig Ændring af Spændingen. Som Fölge heraf bör man saavidt muligt indskrænke Sidernes Antal og heller ofre mere Materiale paa Aasene.