

Denne fil er downloadet fra
Danmarks Tekniske Kulturarv
www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på
www.tekniskkulturarv.dk/about

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

KBH DTH Diss. 7/4 1920

DET POLYTEKNISKE LABORATORIUM
TEKNOLOGISKE
LABORATORIUM

BESTEMMELSE

AF

SPÆNDINGER I PLADER

VED ANVENDELSE AF

DIFFERENSLIGNINGER

AF

N. J. NIELSEN

INGENIØR, CAND. POLYT.

M. ING. F.

KØBENHAVN

I KOMMISSION HOS G. E. C. GAD

TRYKT HOS J. JØRGENSEN & CO. (IVAR JANTZEN)

1920

TEKNIKTILBUD
TEKNIKTILBUD
TEKNIKTILBUD



155680



DTU Tekinfo *300218255*
Danmarks Tekniske Informationscenter

061.6 (043)

DET POLYTEKNISKE LÆREANSTALTS
TEKNOLOGISKE
LABORATORIUM

SPÆNDINGER I PLADER

TEKNIKEREKSAMEN
23. APRIL 1920
KØBENHAVN

Denne Afhandling er af Den polytekniske Lærestalts Lærerraad efter Indstilling af Censorerne P. M. Frandsen og E. Suenson antagen til at forsvares for den tekniske Doktorgrad.

Forsvaret finder Sted den 7. April Kl. 2 i Den polytekniske Lærestalts Festsal.

Den polytekniske Lærestalt

København, d. 23de Febr. 1920.

H. I. HANNOVER,

Direktør.

M. C. Harding,
Inspektør.

Afhandlingen blev indsendt den 1. Juli 1918.

BESTEMMELSE

AF

SPÆNDINGER I PLADER

VED ANVENDELSE AF

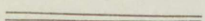
DIFFERENSLIGNINGER

AF

N. J. NIELSEN

INGENIØR, CAND. POLYT.

M. ING. F.



KØBENHAVN

I KOMMISSION HOS G. E. C. GAD

TRYKT HOS J. JØRGENSEN & CO. (IVAR JANTZEN)

1920

COPYRIGHT, 1920, BY N. J. NIELSEN

INDHOLDSFORTEGNELSE.

Indledning	Side 11
----------------------	------------

1. Afsnit.

Plader med konstant Inertimoment.

§	1. Opstilling af Differensligningen	21
§	2. Exempel. Plade understøttet i enkelte Punkter. Kvadratiske Felter	27
§	3. Hovedmomenter; vridende Momenter i Systempunkterne; Transversalkræfter.	31
§	4. Exempel. Vridende Momenter, Hovedmomenter og Transversalkræfter i den i § 2 behandlede Plade	33
§	5. Forskellige Relationer mellem Momenterne og Nedbøjningerne	37
§	6. Kantbetingelserne ved Plader, som er simpelt understøttede eller fri langs Kanten	39
§	7. Exempel. Kvadratisk Plade, simpelt understøttet langs alle fire Sider	47
§	8. Relationer mellem Reaktionen, Transversalkræfter og vridende Momenter langs Kanten. Hjørnereaktionen	49
§	9. Indflydelsen af et Kraftsystem, i hvilket Kræfterne holder hverandre i Ligevægt.	51
§	10. Usymmetrisk Belastning. Exempel	53
§	11. Kantbetingelserne ved Plader, hvis Kanter ligger uden for Understøtningerne.	59
§	12. Hjørnernes Opbøjning	63
§	13. Sammenligning med Forsøg af Bach og Graf. Kvadratisk Plade	64
§	14. Sammenligning med Forsøg af Bach og Graf. Rektangulær Plade med Mellemunderstøtning	70

2. Afsnit.

Plader med variabelt Inertimoment.

§	15. Opstilling af Differensligningen	76
§	16. Kantbetingelserne	82
§	17. Spring i Inertimomentet	95
§	18. Jernbetonplader. Armering i forskellige Retninger	106
§	19. Sammenligning med Forsøg af Talbot og Slater	114

3. Afsnit.

Forskellige Anvendelser.

§	20. Kvadratisk Plade, simpelt understøttet langs alle fire Sider, ensformig fordelt Belastning	130
§	21. Kvadratisk Plade, indspændt langs alle fire Sider, ensformig fordelt Belastning.	134

	Side
§ 22. Kvadratiske og rektangulære Plader, simpelt understøttede langs to modstaaende Sider, ensformig fordelt Belastning	142
§ 23. Plade, simpelt understøttet i den ene Retning og kontinuerlig i den anden	152
§ 24. Trekantet Plade, simpelt understøttet langs Siderne, ensformig fordelt Belastning	167

4. Afsnit.

Plade, understøttet af Søjler med Kapitæler (flat slab).

§ 25. Bemærkninger vedrørende Spændingsbestemmelsen	171
§ 26. Kvadratiske Felter; Plade kontinuerlig over uendelig mange Fag i begge Retninger; Belastning ensformig fordelt over alle Fag	172
1. Plade med konstant Inertimoment	172
2. Plade med Søjlekapitæler af almindelig Størrelse	178
3. Plade med stort Søjlekapitæl	182
4. Plade med forøget Tykkelse i Nærheden af Kapitælerne (dropped panel)	185
5. Plade, hvori der ikke kan optræde negative bøjende Momenter i Søjlerækkerne	189
§ 27. Kvadratiske og rektangulære Felter; Plade kontinuerlig over uendelig mange Fag i begge Retninger; konstant Inertimoment	191
1. Kvadratisk Plade	192
a. Ensformig fordelt Belastning over alle Fag	192
b. Ensformig fordelt Belastning i hvert andet Fag (Stribebelastning)	192
c. Enkeltkraft P midt i hvert Felt	194
d. Ensformig fordelt Belastning i Skakbrætform	196
e. Søjlernes Indflydelse paa Momenter og Nedbøjninger	197
2. Rektangulær Plade	205
a. Ensformig fordelt Belastning over alle Fag	205
b. Ensformig fordelt Belastning i hvert andet Fag (Stribebelastning)	207
c. Enkeltkraft P midt i hvert Felt	208
§ 28. Yderfag. Kvadratiske Felter; simpel Understøtning langs Kanterne; konstant Inertimoment	209
1. Plade kontinuerlig over uendelig mange Fag i den ene Retning og over to Fag i den anden Retning	212
a. Ensformig fordelt Belastning over alle Felter	212
b. Ensformig fordelt Belastning over alle Felterne paa den ene Side af Søjlerækken	215
2. Hjørnefelt; Plade kontinuerlig over to Fag i begge Retninger	217
a. Ensformig fordelt Belastning over alle fire Felter	217
b. Ensformig fordelt Belastning over to sammenstødende Felter	220
§ 29. Bemærkninger vedrørende amerikanske Normer for »flat slabs«	222

ANVENDTE BETEGNELSER.

- E = Elasticitetskoefficient,
 E_i = Jernets Elasticitetskoefficient,
 E_b = Betonens Trykelasticitetskoefficient,
 F_i = Tværsnitsareal pr. Længdeenhed af Jernindlæg,
 I = Inertimoment pr. Længdeenhed,
 $I_{(d,n)}$ = Inertimoment pr. Længdeenhed i Punkt (d, n) ,
 $I_{x(d,n)}$ = Inertimoment pr. Længdeenhed i Punkt (d, n) i et Snit vinkelret paa x -Aksen,
 $I_{y(d,n)}$ = Inertimoment pr. Længdeenhed i Punkt (d, n) i et Snit vinkelret paa y -Aksen,
 I_c = et vilkaarligt konstant Inertimoment,
 M = bøjende Moment pr. Længdeenhed,
 M_x = bøjende Moment pr. Længdeenhed i Snit vinkelrette paa x -Aksen,
 M_y = bøjende Moment pr. Længdeenhed i Snit vinkelrette paa y -Aksen,
 $M_{xf}, M_{x(f,n)}$ = M_x i Punkterne f og (f, n) ,
 $M_{x1}, M_{x,2}$ = bøjende Moment i Snit, som følger Linie 1 og Linie 2 paa en Strækning, hvis Længde er angivet,
 $M_{x\beta}$ = Momentet M_x , hvor Pladens Inertimoment er $I = \beta I_c$,
 M_x = bøjende Moment i Snit, hvis Normal halverer Vinklen mellem x -Aksens og y -Aksens positive Retning,
 M_y = bøjende Moment i Snit, som staar vinkelret paa ovennævnte,
 M_v = vridende Moment pr. Længdeenhed,
 $M_{va}, M_v(c, d, n-1, n)$ = M_v i Punkterne a og $(c, d, n-1, n)$,
 M_1 = største Hovedmoment pr. Længdeenhed,
 M_2 = mindste Hovedmoment pr. Længdeenhed,
 P = en Kraft,
 Q = lodret forskydende Kraft (kaldet Transversalkraft) pr. Længdeenhed,
 Q_{ab} = Transversalkraft pr. Længdeenhed paa Strækningen $a - b$,
 Q_x = Transversalkraft pr. Længdeenhed i Snit vinkelrette paa x -Aksen,
 Q_y = Transversalkraft pr. Længdeenhed i Snit vinkelrette paa y -Aksen,
 $Q_x(e, 1, 2)$ = Q_x i Punkt $(e, 1, 2)$,
 $Q_y(2, d, e)$ = Q_y i Punkt $(2, d, e)$,
 R = Reaktionen beregnet som Enkeltkraft,
 $R_a, R_{(c,n)}$ = Reaktionen i Punkterne a og (c, n) .

$a, b, c \dots$ = Betegnelse for Punkter ved Udledelsen af Differensligningen,
 b = Bredden af et rektangulært Pladefelt, maalt i y -Aksens Retning,
 c = Søjlekapitælets Diameter,
 $c, d, e \dots$ = Systemlinier parallelle med x -Aksen, beliggende med indbyrdes Afstand Δy ,
 e = Afstanden fra Jernindlægget til Nullinien i en Jernbetonplade,
 k, k_1, k_2 = Konstanter,
 l = Længden af et rektangulært Pladefelt, maalt i x -Aksens Retning,
 p = Belastning pr. Arealenhed,
 q = hvilende + bevægelig Belastning pr. Arealenhed,
 x og y = Koordinater i et retvinklet Koordinatsystem med x -Aksen og y -Aksen beliggende i Pladens Plan,
 z = Pladens Nedbøjning, regnet positiv i samme Retning som Belastningen.

$1, 2, 3, \dots$ = Systemlinier parallelle med y -Aksen, beliggende med indbyrdes Afstand Δx ,
 $(c, 1), (c, 2), (d, 1) \dots$ = Systempunkter, bestemt som Skæringspunkter mellem de to tilsvarende Systemlinier,
 $(e, 1, 2)$ = et Punkt beliggende i Linie e midt imellem Linierne 1 og 2,
 $(2, d, e)$ = et Punkt beliggende i Linie 2 midt imellem Linierne d og e ,
 $(e, f, n-1, n)$ = Midtpunktet i det rektangulære Element, som begrænses af Linierne $e, f, n-1$ og n ,
 $c_1, c_2, d_1 \dots$ = Nedbøjningerne i Punkterne $(c, 1), (c, 2), (d, 1) \dots$.

α og β = Afstandene mellem Pladens Kanter og Understøtningerne, hvor Kanterne ligger uden for Understøtningerne,

β = Forholdet $\frac{I}{I_c}$ i et vilkaarligt Punkt af Pladen,

$\beta_{(f,n)}$ = Forholdet $\frac{I_{(f,n)}}{I_c}$,

ε = Længdeændring pr. Længdeenhed,

η = Afstanden mellem Pladens Træk- og Trykcentrum,

$\lambda = \Delta x = \Delta y$ ved kvadratiske Elementer,

μ = Poisson's Forhold,

σ_x og σ_y = Normalspændinger i Snit vinkelrette paa henholdsvis x -Aksen og y -Aksen,

τ = Forskydningsspænding,

σ_1 og σ_2 = Hovedspændinger.

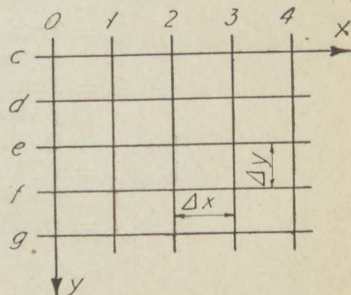
Δx og Δy = Sidelinierne i et Pladeelement eller Afstanden mellem Systemlinierne.

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} \text{ i Punkt } (e, 1, 2) = \frac{-e_1 + e_2}{\Delta x},$$

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} \text{ " " } (e, 2) = \frac{e_1 - 2e_2 + e_3}{\Delta x^2},$$

$$\frac{\Delta^3 z}{\Delta x^3} \text{ " " } (e, 1, 2) = \frac{-e_0 + 3e_1 - 3e_2 + e_3}{\Delta x^3},$$

$$\frac{\Delta^4 z}{\Delta x^4} \text{ " " } (e, 2) = \frac{e_0 - 4e_1 + 6e_2 - 4e_3 + e_4}{\Delta x^4},$$



$$\frac{\Delta z}{\Delta y} \text{ i Punkt } (2, d, e) = \frac{-d_2 + e_2}{\Delta y},$$

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} \text{ » » } (e, 2) = \frac{d_2 - 2e_2 + f_2}{\Delta y^2},$$

$$\frac{\Delta^3 z}{\Delta y^3} \text{ » » } (2, d, e) = \frac{-c_2 + 3d_2 - 3e_2 + f_2}{\Delta y^3},$$

$$\frac{\Delta^4 z}{\Delta y^4} \text{ » » } (e, 2) = \frac{c_2 - 4d_2 + 6e_2 - 4f_2 + g_2}{\Delta y^4},$$

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y} \text{ i Punkt } (e, f, 1, 2) = \frac{\begin{Bmatrix} + e_1 - e_2 \\ - f_1 + f_2 \end{Bmatrix}}{\Delta x \Delta y},$$

$$\frac{\Delta^4 z}{\Delta x^2 \Delta y^2} \text{ i Punkt } (e, 2) = \frac{\begin{Bmatrix} + d_1 - 2d_2 + d_3 \\ - 2e_1 + 4e_2 - 2e_3 \\ + f_1 - 2f_2 + f_3 \end{Bmatrix}}{\Delta x^2 \Delta y^2},$$

$$E_2 = \left\{ e_1 - \frac{+d_2}{+f_2} e_3 \right\} = \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} \lambda^2 + \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} \lambda^2 \text{ for Punkt } (e, 2) \text{ ved kvadratiske Ele-}$$

menter med $\Delta x = \Delta y = \lambda$.

INDLEDNING.

Medens Bestemmelse af Spændinger i Bjælker allerede i den første Halvdel af det 17de Aarhundrede havde været Genstand for Behandling, var det først i Slutningen af det 18de Aarhundrede, at man begyndte at beskæftige sig med Undersøgelse af Spændinger og Formforandringer i Plader.

I 1787 offentliggjorde Chladni¹⁾ en Række Forsøg over Svingninger af elastiske Plader. En Del af disse Forsøg blev udført med smalle Pladestriber og kunde anvendes til at verificere de af Euler²⁾ og Daniel Bernoulli³⁾ tidligere opstillede Udtryk for Formforandringen af elastiske Bjælker. En anden Del af Forsøgene blev udført med kvadratiske Plader, som endnu ikke havde været beregnet. Det er navnlig disse Forsøg, der gav Foranledning til, at der opstod et Ønske om at faa opstillet et teoretisk Grundlag til Beregning af Spændinger og Formforandringer i elastiske Plader.

Efterhaanden som det blev almindeligt at anvende Plader til Maskin- og Bygningskonstruktioner, er Interessen for Bestemmelse af Spændinger i Plader vokset, og det er lykkedes i enkelte Tilfælde, navnlig i de senere Aar, at bestemme Spændingerne med en ret stor Nøjagtighed.

Ved Bestemmelse af Spændinger i en Plade, som paavirkes af Kræfter vinkelret paa Pladens Plan, har man anvendt følgende forskellige Fremgangsmaader:

1. Pladen beregnes som bestaaende af forskellige Bjælkesystemer.
2. Løsning af Differentialligningen.
3. Spændingsbestemmelse ved Ritz's Metode.
4. Sammenligning med Forsøg.

Hvor langt man hidtil er naaet ad disse forskellige Veje fremgaar af det følgende:

¹⁾ En samlet Fortegnelse over Forsøgene findes i E. F. F. Chladni, *Die Akustik*, Leipzig, 1802.

²⁾ *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, Lausanne, 1744.

³⁾ De vibrationibus laminarum elasticarum, offentliggjort i *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 1751.

1. Bestemmelse af Spændinger og Formforandringer i Plader efter den førstnævnte Fremgangsmaade er udført af Jacob Bernoulli⁴⁾ (den yngre), som forsøgte at finde et teoretisk Grundlag til Forklaring af Chladnis Forsøg. Jacob Bernoulli beregner Pladerne som bestaaende af to paa hinanden vinkelrette Bjælkesystemer, i hvilke Bjælkerne dannes af Pladestriber, som er beliggende tæt ved Siden af hinanden. Bestemmelsen af Formforandringen for de enkelte Bjælker udførtes som angivet af Euler og Daniel Bernoulli. Der fandtes ikke videre god Overensstemmelse med Chladnis Forsøg.

Videre Undersøgelser til Forklaring af Chladnis Forsøg førte senere til Opstilling af Pladens Differentialligning (se nedenfor), som derefter er blevet anvendt til Løsning af Opgaver, hvor det gælder om at opnaa den størst mulige Nøjagtighed, medens samtidig den ældre Metode paa Grund af sin større Simpelhed er blevet anvendt til Løsning af Opgaver i saadanne Tilfælde, hvor den maa antages at give en tilstrækkelig god Tilnærmelse, som desuden kan verificeres ved Forsøg.

Ved Bach's⁵⁾ Tilnærmelsesberegning findes Middelværdier af de bøjende Momenter i cirkulære, elliptiske og rektangulære Plader, for en ensformig fordelt Belastning og for en Enkeltkraft i Midten.

Danusso⁶⁾ har behandlet den rektangulære Plade i Lighed med den af Jakob Bernoulli angivne Fremgangsmaade, men i en udvidet Form, idet han regner, at Pladen bestaar dels af Bjælker parallelle med Siderne, dels af Bjælker, som i Nærheden af Hjørnerne hviler paa de to sammenstødende Sideunderstøtninger, idet disse Bjælkers Retning danner Vinkler paa 45° med Siderne. De bøjende Momenter er herved fundet med en meget god Tilnærmelse.

I de fleste Normer for Jernbetonkonstruktioner findes Formler til Beregning af rektangulære Plader, som er simpelt understøttede eller helt eller delvis indspændte langs Siderne. Pladen tænkes ved Beregningen opløst i to Plader, som hver for sig er understøttet langs to modstaaende Sider. Dernæst tænkes hver af disse Plader bestaaende af Bjælker, som ligger tæt ved Siden af hinanden, saaledes at man i Lighed med de tidligste Undersøgelser tænker sig Pladen bestaaende af to paa hinanden vinkelrette Bjælkesystemer. Belastningen paa hver af disse to Bjælkesystemer bestemmes i Overensstemmelse med de i Normerne angivne Formler, hvorefter Momenter og Reaktioner beregnes som for Bjælker.

Forudsættes Pladen, hvis Sidelængder kaldes l og b ($l \geq b$), belastet med en ensformig fordelt Belastning p pr. Arealenhed, regnes saaledes efter danske Normer⁷⁾, at

⁴⁾ Essai théorique sur les vibrations des plaques élastiques, *Nov. Acta Petropolitanae*, 1789.

⁵⁾ Bach, *Elastizität und Festigkeit*, Berlin, 1917. Metoden er angivet i 1890.

⁶⁾ Tidsskriftet *Il cemento*, 1911. Bearbejdet af Hugo von Bronneck i *Beitrag zur Berechnung der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten und deren Aufnahmeträger*, Berlin 1913.

⁷⁾ Normer for Jernbetonkonstruktioner, udgivet af Dansk Ingeniørforening, 1913.

Pladen med Spændvidde b bærer Belastningen $p_b = \frac{l^4}{l^4 + b^4} \cdot p$,

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad l \quad \text{---} \quad \text{---} \quad p_l = \frac{b^4}{l^4 + b^4} \cdot p.$$

Ved denne Fordeling af Belastningen opnaar man, at Nedbøjningerne paa Midten i de to Bjælkesystemer bliver lige store.

Efter tyske Normer⁸⁾ skal Beregningen, medmindre en nøjagtigere Fremgangsmaade anvendes, udføres paa lignende Maade som efter de danske Normer.

I Svejts⁹⁾ regnes, at

Pladen med Spændvidde b bærer Belastningen $p_b = \frac{l^2}{l^2 + b^2} \cdot p$,

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad l \quad \text{---} \quad \text{---} \quad p_l = \frac{b^2}{l^2 + b^2} \cdot p.$$

Regelen finder kun Anvendelse for $l < 1,5 b$.

Ifølge amerikanske Normer¹⁰⁾ regnes, at

Pladen med Spændvidde b bærer Belastningen $p_b = \left(\frac{l}{b} - 0,5 \right) \cdot p$,

medens Resten af Belastningen bæres af Pladen med Spændvidde l .

Regelen skal kun bruges for $l < 1,5 b$.

2. Den almindelige Differentialligning til Bestemmelse af en Plades Nedbøjning

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = kp,$$

hvor k er en Faktor, som afhænger af Pladetykkelsen og Materialets elastiske Konstanter, og p er Belastningen eller for svingende Plader Inertikræfterne pr. Arealenhed, er opstillet af Lagrange, der som Medlem af Kommissionen til Bedømmelse af en i 1811 udskreven Prisopgave angaaende elastiske Pladers Svingninger behandlede en af Sophie Germain indsendt Besvarelse af Opgaven. Navier¹¹⁾ har i et Arbejde, som i 1820 blev forelagt Akademiet i Paris, med Tilnærmelse løst Differentialligningen for den rektangulære simpelt understøttede Plade, belastet med en ensformig fordelt Belastning og med en Enkeltkraft. Tilnærmelsen

⁸⁾ Bestimmungen für Ausführung von Bauwerken aus Eisenbeton, aufgestellt vom Deutschen Ausschuss für Eisenbeton, 1915.

⁹⁾ Vorschriften über Bauten in armiertem Beton, aufgestellt von der Schweizerischen Kommission des armierten Beton, 1909.

¹⁰⁾ Final Report of the Joint Committee on Concrete and Reinforced Concrete, udkommen December 1916 i Proceedings of the American Society of Civil Engineers.

¹¹⁾ Gengivet i Théorie de l'élasticité des corps solides de Clebsch traduite par Barré de St. Venant et Flamant; Paris, 1883.

er bedst for den kvadratiske Plade, for hvilken Spændingerne ved en ensformig fordelt Belastning findes ca. 12 % for store.

Da Navier¹²⁾ i 1821 opstillede de elastiske Grundligninger, fik man nye Midler til Behandlingen af den elastiske Plade. Cauchy, som var Medlem af Kommissionen til Bedømmelse af den i 1820 af Navier indsendte Afhandling om rektangulære Plader, fandt, at man i isotrope Legemer maa regne med to Elasticitetskonstanter¹³⁾, medens Navier kun havde angivet een elastisk Konstant. Baade Cauchy¹⁴⁾ og Poisson¹⁵⁾ opstillede ved Hjælp af de elastiske Grundligninger Relationer mellem Spændingerne og Formforandringerne i en Plade og udledede heraf Differentialligningen til Bestemmelse af Nedbøjningen, og Poisson udførte bl. a. Løsningen for en fuldstændig symmetrisk belastet cirkulær Plade.

Poisson opstillede Kantbetingelserne for en Plade paavirket af Kræfter vinkelret paa Pladens Plan og angav for et vilkaarligt Element af Pladens begrænsende Cylinderflade tre Betingelser, idet nemlig det bøjende og det vridende Moment samt den lodret forskydende Kraft (Transversalkraften) i vedkommende Element antager bestemte Værdier, som svarer til Formforandringen i Pladen, og disse Momenter og Kræfter maatte holdes i Ligevægt af tilsvarende ydre Momenter og Kræfter. Kirchhoff¹⁶⁾ har paavist, at disse Betingelser ikke i Almindelighed kan ventes opfyldt, saaledes at Opgaven kun kan løses i særlig simple Tilfælde, som f. Ex. ved den fuldstændig symmetrisk belastede cirkulære Plade, hvor det vridende Moment langs Kanten forsvinder. Kirchhoff har dog herved indført forskellige tilnærmende Forudsætninger. Han forudsætter, 1) at rette Linier vinkelrette paa Pladens Midterplan ogsaa efter Formforandringen vedbliver at være rette Linier, som er Normaler til Pladens Midterflade, og 2) at et Element af Midterplanen ikke vil strækkes ved Formforandringen. Med disse Forudsætninger finder Kirchhoff ved Anvendelse af det virtuelle Arbejdes Princip den samme Differentialligning som Poisson, men kun to Kantbetingelser. Forklaringen paa den tilsyneladende Uoverensstemmelse mellem de af Poisson og de af Kirchhoff fundne Resultater er angivet af Kelvin og Tait¹⁷⁾, som viser, at de to af Poissons Kantbetingelser for tynde Plader kan sammenfattes til en af Kirchhoffs, idet bestemte Spændinger og Formforandringer i Pladen svarer til uendelig mange sammenhørende Værdier af Transversalkraft og vridende

¹²⁾ *Paris. Mém. Acad. Sciences*, 1827. Afhandlingen blev forelagt Akademiet i 1821.

¹³⁾ Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois de mouvement intérieur d'un corps solide, *Exercices de mathématique*, 1827 og 1828.

Som Konstanter er nu almindeligst anvendt Elasticitetskoefficienterne E og G samt Poissons Forhold μ (sædvanlig Betegnelse $\frac{1}{m}$), af hvilke den ene som bekendt kan udtrykkes ved de to andre.

¹⁴⁾ Sur l'équilibre et le mouvement d'une plaque solide, *Exercices de mathématique*, 1828.

¹⁵⁾ Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques, *Mém. Paris Acad.*, 1829.

¹⁶⁾ *Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd. 40, 1850.

¹⁷⁾ Thomson and Tait, *Natural Philosophy*, 1. Udgave, Oxford, 1867; 2. Udgave, Cambridge, 1879—83.

Moment langs Kanten, saaledes at man ved tynde Plader kan udtrykke de sammenhørende Værdier af det vridende Moment og af Transversalkraften for et Kantelement ved een Kanthetingelse.

Senere Undersøgelser¹⁸⁾ har yderligere godtgjort, at Kirchhoffs Teori i alle praktiske Tilfælde giver tilstrækkelig nøjagtige Resultater. Michell og Love har opstillet Relationer mellem Spændingerne og Formforandringerne uden at gøre Brug af Kirchhoffs Forudsætninger. Árpád Náday¹⁹⁾ viser en Sammenligning mellem disse Relationer og de Relationer, som udledes ved Anvendelse af Kirchhoffs Forudsætninger. Det fremgaar heraf, at Kirchhoffs Teori giver meget nøjagtige Resultater, naar Kvadratet paa Pladetykkelsen kan regnes forsvindende i Sammenligning med Kvadratet paa Spændvidden.

Bestemmelse af den rektangulære Plades Nedbøjninger og Spændinger ved Anvendelse af Differentialligningen er udført bl. a. af Levy²⁰⁾, Estanave²¹⁾, Simič²²⁾ og Leitz²³⁾, der alle anvender en lignende Fremgangsmaade som Navier, hvorved Kanthetingelserne opfyldes, medens derimod Differentialligningen kun tilfredsstilles med Tilnærmelse, idet Belastningsfladen fremstilles ved Rækkeudvikling. I Modsætning hertil løser Hencky²⁴⁾ og Árpád Náday Opgaven for den rektangulære Plade saaledes, at Differentialligningen tilfredsstilles nøjagtigt, medens derimod Kanthetingelserne kun tilnærmelsesvis opfyldes. Imidlertid er Overensstemmelsen mellem de af Leitz, Hencky og Árpád Náday paa forskellig Maade fundne Værdier af Nedbøjninger og Spændinger saa god, at de angivne Resultater maa antages at være tilstrækkelig nøjagtige til enhver praktisk Anvendelse. Foruden den langs alle fire Sider simpelt understøttede rektangulære Plade har Hencky beregnet den langs alle fire Sider indspændte rektangulære Plade baade for en ensformig fordelt Belastning og for en Enkeltkraft paa Midten af Pladen. Árpád Náday har angivet Løsningen for specielle Tilfælde af Plader med forskellig Belastning og Understøtning, og har bl. a. fundet Nedbøjninger og Spændinger i en Pladestribe med ensformig fordelt Belastning, simpelt understøttet langs de to lange Sider og kontinuerlig over Tværunderstøtninger, som

¹⁸⁾ Se f. Ex. Boussinesq, *Journal de Math. (Liouville)*, 1871 og 1879; Grashof, *Elastizität und Festigkeit*, 1878; Michell, *London Math. Soc. Proc.* 1900; Love, *The Mathematical Theory of Elasticity*, 2. Udg., 1907, hvori findes en historisk Oversigt og en udførlig Literaturangivelse.

¹⁹⁾ Árpád Náday, Die Formänderungen und die Spannungen von rechteckigen elastischen Platten, *Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, Heft. 170 und 171, Berlin 1915.

²⁰⁾ *Comptes rendus à l'Académie*, 1899.

²¹⁾ Contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire mince. Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris, 1900.

²²⁾ Beitrag zur Berechnung der rechteckigen Platten, *Zeitschrift des österreichischen Architekten- und Ingenieurvereins*, Nr. 44, 1908.

²³⁾ Heinrich Leitz, Die Berechnung der frei aufliegenden, rechteckigen Platten, Berlin 1914, samt Berechnung der eingespannten rechteckigen Platte, *Zeitschrift f. Math. u. Physik*, Bd. 64, 1917.

²⁴⁾ H. Hencky, *Der Spannungszustand in rechteckigen Platten*, München und Berlin, 1913.

deler Pladen i lige store rektangulære Felter, idet han i dette Tilfælde i Lighed med Navier fremstiller Belastningsfladen ved Rækkeudvikling.

3. Ritz's Metode²⁵⁾ til Tilnærmelsesløsning af elastiske Problemer kan anvendes til Bestemmelse af Nedbøjninger og Spændinger i Plader. Den nedbøjede Plades Form bestemmes herved ligesom ved Naviers Beregning saaledes, at Kantbetingelserne opfyldes nøjagtigt, medens Pladens Differentialalligning derimod kun tilfredsstilles med Tilnærmelse. For at kunne løse Differentialalligningen med rimelig Tilnærmelse udvikles ved Naviers Fremgangsmaade Belastningsfladen i Rækker, medens man ved Ritz's Metode antager, at Pladen bøjer sig efter en Form, som udtrykkes ved Koordinaterne og en Række Koefficienter, der tilfredsstiller Kantbetingelserne og bestemmes saaledes, at Arbejdet ($2A_u + A_i$), hvor A_u er de ydre Kræfters og A_i de indre Kræfters Arbejde, bliver Minimum. Herved opnaas for det første, at Pladen er i Ligevægt, og for det andet, at Deformationsarbejdet bliver Minimum ved den fundne Ligevægstilstand, hvilket betyder, at Pladens Differentialalligning tilfredsstilles med den bedst mulige Tilnærmelse, som kan opnaas under Hensyn til den ved Koefficienterne bestemte Form.²⁶⁾

Ritz²⁵⁾ har opstillet tilnærmende Udtryk for den elastiske Flades Form ved rektangulære Plader, indspændte langs alle fire Sider, og beregnet Nedbøjningerne i den kvadratiske Plade. Árpád Nádaí¹⁹⁾ har benyttet de af Ritz angivne Udtryk for de rektangulære indspændte Plader og beregnet Nedbøjninger og Spændinger for forskelligt Forhold mellem Sidelinierne.

Hager²⁷⁾ har beregnet rektangulære Plader, simpelt understøttede langs alle fire Sider, ved en lignende Fremgangsmaade som Ritz, idet han udtrykker den elastiske Flades Form ved trigonometriske Rækker, hvis enkelte Led, som tilfredsstiller Kantbetingelserne, hvert multipliceres med en Koefficient, der bestemmes saaledes, at Summen af de ydre og de indre Kræfters Arbejde bliver Nul, og at Deformationsarbejdet samtidig bliver Minimum.

Fremgangsmaaden er ogsaa forsøgt anvendt til Beregning af Plader, understøttede i enkelte Punkter, som ligger i to paa hinanden vinkel-

²⁵⁾ Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 135, 1908.

²⁶⁾ Beviset herfor er angivet af Ostenfeld i *Teknisk Elasticitetslære*, 3. Udg. S. 119, København 1916, og Fremgangsmaaden er her belyst ved flere Exempler. Bl. a. beregnes tilnærmende Værdier af Nedbøjninger og Spændinger i en uendelig lang Plade, indspændt langs den ene af de uendelig lange Sider og fri langs den anden (en vandret Flig af et Vinkeljern) og i et Punkt af den frie Side belastet med en Enkeltkraft.

²⁷⁾ *Berechnung ebener, rechteckiger Platten mittels trigonometrischer Reihen*, München und Berlin, 1911, hvori behandles forskellige Belastningstilfælde. Ved Opstillingen af det indre Deformationsarbejde er der ikke regnet med de vandrette Forskydningsspændinger eller de fra disse Forskydningsspændinger hidrørende vridende Momenter, hvorfor de fundne Værdier af Spændingerne afviger betydeligt fra de virkelige Værdier. I en Artikel i *Deutsche Bauzeitung*, Betonbeilage Nr. 1, 1912, og i *Theorie des Eisenbetons*, München und Berlin, 1916, medregner Hager ogsaa de vandrette Forskydningsspændingers Deformationsarbejde, men Undersøgelsen indskrænkes her til Behandling af Plader med ensformig fordelt Totalbelastning.

rette Rækker (flat slabs)²⁸⁾. Der medtages her kun det første Led af Rækken, og der indgaar kun een Koefficient, som bestemmes saaledes, at Summen af de ydre Kræfters Arbejde er lig med det indre Deformationsarbejde. Da der imidlertid kun er anvendt det første Led af Rækken, er man ikke herved i Stand til at bedømme, om Resultaterne er fundet med tilstrækkelig Nøjagtighed til at kunne anvendes i Praksis.

4. Hver af de ovennævnte tre Fremgangsmaader er blevet anvendt i Forbindelse med Forsøg. Selv i saadanne Tilfælde, hvor det er muligt at løse Differentialligningen og herved finde Spændingerne i Pladen, bør de fundne Resultater verificeres ved Forsøg, idet Forudsætningerne for Beregningen kun kan være Tilnærmelsesudtryk for de virkelige Forhold. Man forudsætter, at Pladen bestaar af et isotropt Materiale, og at Hokes Lov gælder; man regner sædvanlig med de af Kirchhoff indførte Tilnærmelser, som kun gælder for tynde Plader, og man antager, at Pladens Nedbøjninger er smaa i Forhold til dens Dimensioner. Foruden de specielle Tilnærmelser svarende til hver af de ovennævnte tre Beregningsmetoder, Bjælketeorien, Differentialligningen og Ritz's Metode, indfører man altsaa alle disse Forudsætninger, som kun gælder med en vis Tilnærmelse, og hertil kommer for Jernbetonplader den Omstændighed, at Betonens Trækbrudgrænse forholdsvis hurtigt overskrides, hvorved Pladens elastiske Egenskaber ændres, og denne Ændring vil tilmed være forskellig i de forskellige Dele af Pladen.

Paa Grund af den herved fremkomne Usikkerhed vil det være nødvendigt ved Forsøg at faa konstateret, at Fejlen ligger indenfor rimelige Grænser, og der har i den Anledning været udført en Mængde Forsøg, baade paa Prøveanstalter, hvor der findes de nødvendige Instrumenter til nøjagtige Maalinger, og paa Byggepladser, hvor man ofte belaster Plader i udførte Jernbetonkonstruktioner og maaler Nedbøjningen eller Forlængelsen af Jernet i Træksiden og Forkorselsen af Betonen i Tryksiden.

Belastningsforsøg med Plader kan foruden at anvendes til at verificere de ved Beregningen fundne Resultater, tillige anvendes til direkte Bestemmelse af Momentkoefficienter. Saadanne Forsøg til Bestemmelse af de bøjende Momenter i Jernbetonplader har været udført af Bach og Graf²⁹⁾ og af Talbot og Slater³⁰⁾. Ved de af Bach og Graf udførte Forsøg med kvadratiske og rektangulære Plader blev der samtidig til Sammenligning udført Belastningsforsøg med Bjælker eller Pladestriber, der havde samme Højde og Jernprocent som Pladerne. Da de bøjende Momenter pr. Længdeenhed i Pladerne og i Bjælkerne kan regnes lige store, naar den første Revne viser sig, og ligeledes naar Brud indtræder, og da man for Bjælkerne kan beregne den nøjagtige Værdi af Momenterne,

²⁸⁾ *Theorie des Eisenbetons*, München und Berlin, 1916.

²⁹⁾ Versuche mit alseitig aufliegenden, quadratischen und rechteckigen Eisenbetonplatten. *Deutscher Ausschuss für Eisenbeton*, Heft 30, 1915.

³⁰⁾ Tests of Reinforced Concrete Flat Slab Structures, *University of Illinois Engineering Experiment Station*, Bulletin Nr. 84, Jan. 1916.

faar man herved Midler til Bestemmelse af Momentkoefficienter for Pladerne. Undersøgelser af denne Art paa Grundlag af Bach's og Graf's Forsøg er udført af Mörsch³¹⁾ og af Suenson³²⁾.

Da Pladernes Hjørner ved de af Bach og Graf udførte Forsøg ikke var hindret i at bøje sig op, bliver Spændingsfordelingen i disse Forsøgsplader ikke den samme som i de almindeligst anvendte Plader, hvor Hjørnernes Ophøjning er hindret ved Indstøbning i Mur eller delvis Indspænding i Bjælker.

Ved de af Talbot og Slater udførte Forsøg maalte man Forlængelsen af Jernet i Træksiden og i nogle Tilfælde tillige Forkortelsen af Betonen i Tryksiden og beregnede ved Hjælp af Jernets og Betonens Elasticitetskoefficienter tilnærmende Værdier af de optrædende Momenter. Da man ikke kender Størrelsen og Udstrækningen af de optrædende Trækspændinger i Betonen, bliver denne Fremgangsmaade til Bestemmelse af de bøjende Momenter imidlertid ret unøjagtig.

Waddell³³⁾ angiver for rektangulære Jernbetonplader Formler til Bestemmelse til den Del af Pladen, hvorover det bøjende Moment, hidrørende fra Enkeltkræfter og Belastninger, som virker paa et lille Areal, kan regnes ensformig fordelt. Formlerne er bygget paa Forsøg, som er udført dels af Illinois Universitet³⁴⁾, dels af Ohio Highway Department³⁵⁾.

Ved den i det følgende anvendte Fremgangsmaade til Bestemmelse af Nedbøjninger og Spændinger i elastiske Plader løses Opgaven ved at regne med endelige Differenser. I Lighed med Udledelsen af den almindelige Differentialligning udledes her ved Hjælp af Ligevægtsbetingelserne for et rektangulært Pladeelement, udskaaret ved Snit vinkelret paa Pladens Plan, en Differensligning, der har samme Form som Pladens almindelige Differentialligning og falder sammen med denne, naar Elementets Sidelinier er uendelig smaa. Hele Pladen tænkes delt i saadanne Elementer med endelig Udstrækning. For Elementerne langs Pladens Kanter udledes der særlige Betingelser, saaledes at man for hvert Element kan opskrive en Ligning til Bestemmelse af Nedbøjningen af en Række Punkter, beliggende paa hver sit Element. Paa denne Maade faas altsaa ligesaa mange Ligninger, som der er ubekendte Nedbøjninger. Ved Løsning af Ligningerne findes Pladens Nedbøjninger, og ved Anvendelse af Relationerne mellem de indre Kræfter og Formforandringerne findes herefter de bøjende og de vridende Momenter, Transversalkræfterne og Reaktionen.

Ligesom man ved Anvendelse af Differentialligningen kun i specielle Tilfælde kan løse Opgaven nøjagtigt, og i Almindelighed som tidligere nævnt enten maa tilfredsstille Differentialligningen eller Kantbe-

³¹⁾ Deutsche Bauzeitung, Betonbeilage Nr. 3, 1916.

³²⁾ Ingeniøren Nr. 76, 77, 78 og 95, 1916.

³³⁾ Waddell, *Bridge Engineering*, New York and London, 1916, Side 852.

³⁴⁾ Disse Forsøg er offentliggjort af W. A. Slater i en Diskussion, indledet af A. T. Goldbeck i *Proceedings of the American Society for Testing Materials*, 1913.

³⁵⁾ Bulletin Nr. 28 of the *Highway Department of the State of Ohio*, September 1915.

tingelserne med Tilnærmelse, opnaar man ved at regne med Elementer af endelig Udstrækning ogsaa kun en Tilnærmelse; men da Pladens Nedbøjninger findes ved Løsning af Ligningerne, vil disse Nedbøjninger tilfredsstille Differensligningen for et vilkaarligt Element og saaledes ogsaa tilfredsstille Kantbetingelserne.

Differensligninger har været anvendt til Løsning af beslægtede Opgaver, saasom Kupler og Beholdervægge, formede som Omdrejningsflader og belastede paa en bestemt Maade, saaledes at der i Ligningerne kun kommer til at indgaa een uafhængig variabel³⁶⁾. Den almindelige Differensligning for plane Plader indeholder to uafhængige variable, og man kan derfor heller ikke ordne Ligningerne i Lighed med Clapeyron'ske Ligninger, saaledes som det er muligt, naar der kun er een uafhængig variabel. Da man imidlertid har een Ligning for hver af de ubekendte Nedbøjninger, vil man altid for en vilkaarlig Belastning vinkelret paa Pladens Plan ved en passende Inddeling i Elementer kunne løse Opgaven med en rimelig Tilnærmelse.

Fremgangsmaaden er belyst ved en Række Exempler. Der vises en Sammenligning mellem de beregnede Nedbøjninger og de af Bach og Graf²⁹⁾ angivne maalte Nedbøjninger for en kvadratisk Plade og for en rektangulær Plade med Mellemunderstøtning. Ved Beregningen af disse Pladers Nedbøjning findes ogsaa Hjørnernes Opbøjning. Ligeledes vises en Sammenligning mellem de beregnede og de af Talbot og Slater³⁰⁾ ved Forsøg fundne bøjende Momenter i en Plade, understøttet af Søjler med Kapitæler (flat slab). For kvadratiske, simpelt understøttede eller indspændte Plader beregnes Nedbøjninger, bøjende Momenter og Reaktionen, og Resultaterne sammenlignes med de Værdier, som tidligere er fundet ad anden Vej. Fremgangsmaaden kan anvendes ved en vilkaarlig usymmetrisk Belastning, hvilket er vist ved et Exempel, hvor en rektangulær Plade, simpelt understøttet langs alle fire Sider, paavirkes af en Enkeltkraft i et Punkt, som ikke er beliggende i en Symmetrilinie. For en Plade, som er simpelt understøttet langs to modstaaende Sider, vises, hvorledes baade Nedbøjningerne og de bøjende Momenter for en ensformig fordelt Belastning bliver større ved Midten af de frie Kanter end midt i Pladen, og for en Plade, som er simpelt understøttet i den ene Retning og kontinuerlig i den anden, findes Nedbøjninger, bøjende Momenter og Reaktionen paa Grund af en ensformig fordelt Belastning dels over hvert Fag og dels over hvert andet Fag. De bøjende Momenter beregnes for trekantede Plader, simpelt understøttede langs Siderne og paavirkede af en ensformig fordelt Belastning. For Jernbetonplader undersøges, hvilken Betydning Armeringsretningen har med Hensyn til Nedbøjningens Størrelse og de bøjende Momenters Fordeling.

I et særligt Afsnit er »flat slabs« behandlet. Det undersøges, hvilken Indflydelse Kapitælernes Størrelse og Stivhed har, og hvorledes de bøjende Momenter fordeler sig, dersom der ikke kan optages negative

³⁶⁾ Se f. Ex. P. M. Frandsens Behandling af Kupler og Beholdervægge i *Teknisk For- enings Tidsskrift*, Afdeling for Jernbeton, 1915 og 1916.

Momenter i en Del af Pladen i Søjlerækkerne. Der undersøges forskellige Belastningstilfælde, ensformig fordelt Totalbelastning, Stribebelastning bestaaende af en ensformig fordelt Belastning i hvertandet Fag, Belastning i Skakbrætform og Belastning med en Enkeltkraft. Søjlernes Indflydelse paa de bøjende Momenter i Pladen beregnes, og det undersøges, hvor meget de bøjende Momenter forøges i Yderfag og Hjørnerfelter. Til Slut er anført nogle Bemærkninger vedrørende amerikanske Normer for »flat slabs«.

Hvorledes Spændingerne i Pladen bestemmes, naar de bøjende Momenter først er fundet, forudsættes bekendt og vil derfor ikke blive videre omtalt. Ved de fleste af de viste Exempler er de bøjende Momenter beregnet i to paa hinanden vinkelrette Snit. De største og de mindste bøjende Momenter, Hovedmomenterne, og Snittene, hvori disse Momenter optræder, er i enkelte af Exemplerne tillige beregnet og er iøvrigt bestemt ved de i Exemplerne beregnede Nedbøjninger.

FØRSTE AFSNIT.

PLADER MED KONSTANT INERTIMOMENT.

§ 1. Opstilling af Differensligningen.

Nedbøjningen af en elastisk Plade, som paavirkes af Kræfter vinkelret paa Pladens Plan, kan bestemmes ved Hjælp af den almindelige lineære, partielle Differentialligning

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = (1 - \mu^2) \frac{p}{EI} \quad (1)$$

hvor x og y = Pladens Koordinater i et retvinklet Koordinatsystem,

z = Pladens Nedbøjning,

E = Elasticitetskoefficienten,

μ = Poisson's Forhold,

I = Pladens Inertimoment pr. Længdeenhed,

p = Belastningen pr. Arealenhed.

Dersom man i Lign. (1) erstatter Differentialerne med endelige Differenser, faas den lineære, partielle Differensligning

$$\frac{\Delta^4 z}{\Delta x^4} + 2 \frac{\Delta^4 z}{\Delta x^2 \Delta y^2} + \frac{\Delta^4 z}{\Delta y^4} = (1 - \mu^2) \frac{p}{EI} \quad (2)$$

Ser man foreløbig bort fra den Del af Pladen, som ligger i Nærheden af Kanterne, kan man tænke sig den øvrige Del inddelt i rektangulære Elementer med Sidelinierne Δx og Δy og lade z betegne Nedbøjningen af hvert enkelt Elements Midtpunkt. For hvert af disse normale Elementer vil man da kunne opskrive Lign. (2). Ved Hjælp af særlige Betingelser, som dernæst kan udledes for den Del af Pladen, som ligger i Nærheden af Kanterne, kan man faa det nødvendige Antal Ligninger til Beregning af Pladens Nedbøjning i bestemte Punkter.

I Stedet for at danne Differensligningen (2) af Differentialligningen (1) kan man udlede Lign. (2) af Ligevægtsbetingelserne for et vilkaarligt Element, naar Formforandringen udtrykkes ved de indre Kræfter paa en bestemt Maade. Dette skal gøres i det følgende, dels fordi det heraf vil

*) Se f. Ex. Ostenfeld: *Teknisk Elasticitetslære*, 1916, Side 501.

fremgaa, hvilke Tilnærmelser man indfører ved Opstillingen af Differensligningen, dels fordi man af Hensyn til Spændingsbestemmelsen alligevel maa kende de Betingelser, som anvendes ved Opstillingen af Differensligningen, idet Spændingerne i Pladen udtrykkes ved Hjælp af disse Betingelser.

Ved Udledelsen tænkes Pladen inddelt i rektangulære Elementer, hvis Sidelinier er Δx og Δy .

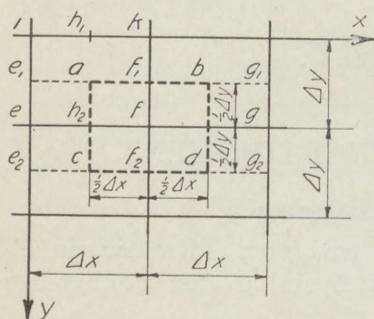


Fig. 1.

I Fig. 1 er vist et saadant Element $abdc$, hvis Midtpunkt er f . Gennem f er tegnet en Linie parallel med x -Aksen og en Linie parallel med y -Aksen. Disse to Linier indgaar i et System af Linier i to paa hinanden vinkelrette Retninger x og y . Afstanden mellem de paa x -Aksen vinkelrette Systemlinier er overalt Δx og Afstanden mellem de paa y -Aksen vinkelrette Systemlinier overalt Δy ; Systemliniernes Skæringspunkter, Systempunkterne, falder i de normale Elementers Midtpunkter. Belastningen tænkes at virke

som Enkeltkræfter i disse Systempunkter.

En Ligevægtsbetingelse for Elementet $abdc$ (Fig. 1) faas ved Projektion paa en Linie vinkelret paa Pladen,

$$(Q_{bd} - Q_{ac}) \Delta y + (Q_{cd} - Q_{ab}) \Delta x = P, \quad (3)$$

hvor P er en Enkeltkraft i Punkt f , og Størrelserne Q betegner Middelværdien af de lodret forskydende Kræfter pr. Længdeenhed i de fire Sider af Elementet. Disse lodret forskydende Kræfter kaldes i det følgende Transversalkræfter. Transversalkræfterne Q_{ac} og Q_{ab} regnes positive, naar de paavirker Elementet i samme Retning som en positiv Belastning.

Dernæst betragtes to andre Elementer, nemlig $e_1 f_1 f_2 e_2$ og $f_1 g_1 g_2 f_2$. Middelværdien af de bøjende Momenter pr. Længdeenhed i Snittene $e_1 - e_2$, $f_1 - f_2$ og $g_1 - g_2$ kaldes henholdsvis M_{xe} , M_{xf} og M_{xg} . De bøjende Momenter i et Snit regnes positive, naar de i en vandret Plade med Belastningens positive Retning nedad fremkalder Trykspændinger foroven og Trækspændinger forneden i Snittet. Middelværdien af de vridende Momenter pr. Længdeenhed i Snittene $e_1 - f_1$ og $e_2 - f_2$ kaldes henholdsvis M_{ve} og M_{ve} . Naar Elementerne vælges tilstrækkelig smaa, kan Resultanten af Transversalkraften i en Sidelinie regnes at angribe i Sideliniens Midtpunkt. De vridende Momenter kan derfor regnes at hidrøre udelukkende fra de vandrette Forskydningsspændinger i Snittene. De vridende Momenter langs Siderne af Elementet $e_1 f_1 f_2 e_2$, der tænkes udskaaret af en vandret Plade med Belastningens positive Retning nedad, regnes positive, naar Forskydningsspændingerne forneden paavirker Elementet i Retningerne $e_2 - e_1$ og $f_1 - e_1$, medens Forskydningsspændingerne foroven virker i de modsatte Retninger.

En Ligevægtsbetindelse for Elementet $e_1 f_1 f_2 e_2$ faas ved at tage Momentet om Linien $a - c$, som gaar gennem Elementets Midtpunkt. De bøjende og de vridende Momenters Bidrag er

$$(M_{xf} - M_{xe}) \Delta y + (M_{vc} - M_{va}) \Delta x.$$

Transversalkraften i Snittet $f_1 - f_2$, som tænkes lagt umiddelbart til venstre for Kraften P i Punkt f , giver Momentet

$$Q_{f_1 f_2} \cdot \Delta y \cdot \frac{1}{2} \Delta x.$$

Transversalkraften i Snittet $e_1 - e_2$, som tænkes lagt umiddelbart til højre for en eventuel Kraft i Punkt e , giver Momentet

$$Q_{e_1 e_2} \cdot \Delta y \cdot \frac{1}{2} \Delta x.$$

Momentligningen er altsaa

$$(M_{xf} - M_{xe}) \Delta y + (M_{vc} - M_{va}) \Delta x + \frac{1}{2} (Q_{f_1 f_2} + Q_{e_1 e_2}) \Delta x \Delta y = 0.$$

Da Elementet $e_1 f_1 f_2 e_2$ ikke paavirkes af ydre Kræfter, og da Transversalkræfterne i Sidelinierne $e_1 - f_1$ og $e_2 - f_2$ kan regnes ensformig fordelte, bliver Transversalkraften i Snit $a - c$ lig med Middelværdien af Transversalkræfterne i Snittene $e_1 - e_2$ og $f_1 - f_2$. Man har altsaa

$$\frac{1}{2} (Q_{f_1 f_2} + Q_{e_1 e_2}) = Q_{ac},$$

hvorved Momentligningen bliver

$$(M_{xf} - M_{xe}) \Delta y + (M_{vc} - M_{va}) \Delta x = -Q_{ac} \Delta x \Delta y. \quad (4)$$

For Elementet $f_1 g_1 g_2 f_2$ faas paa lignende Maade

$$(M_{xg} - M_{xf}) \Delta y + (M_{vd} - M_{vb}) \Delta x = -Q_{bd} \Delta x \Delta y. \quad (5)$$

Af Lign. (4) og (5) faas

$$\frac{Q_{bd} - Q_{ac}}{\Delta x} = - \left(\frac{M_{xe} - 2M_{xf} + M_{xg}}{\Delta x^2} + \frac{M_{va} - M_{vb} - M_{vc} + M_{vd}}{\Delta x \Delta y} \right).$$

Indføres heri

$$\frac{M_{xe} - 2M_{xf} + M_{xg}}{\Delta x^2} = \frac{\frac{M_{xg} - M_{xf}}{\Delta x} - \frac{M_{xf} - M_{xe}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\Delta^2 M_{xf}}{\Delta x^2},$$

og

$$\frac{M_{va} - M_{vb} - M_{vc} + M_{vd}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\frac{M_{vd} - M_{vc}}{\Delta x} - \frac{M_{vb} - M_{va}}{\Delta x}}{\Delta y} = \frac{\Delta^2 M_{vf}}{\Delta x \Delta y},$$

faas

$$\frac{Q_{bd} - Q_{ac}}{\Delta x} = - \left(\frac{\Delta^2 M_{xf}}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 M_{vf}}{\Delta x \Delta y} \right). \quad (6)$$

Da de vridende Momenter, som hidrører fra de vandrette Forskydningsspændinger, er lige store i to paa hinanden vinkelrette Snit, vil Middelværdien af det vridende Moment i Snit $h_1 - h_2$ tilnærmelsesvis være lig med Middelværdien af det vridende Moment i Snit $e_1 - f_1$. Sættes disse to Momenter lige store, faas analogt med Lign. (6)

$$\frac{Q_{cd} - Q_{ab}}{\Delta y} = - \left(\frac{\Delta^2 M_{yf}}{\Delta y^2} + \frac{\Delta^2 M_{vf}}{\Delta x \Delta y} \right). \quad (7)$$

Af Lign. (3), (6) og (7) faas

$$- \left(\frac{\Delta^2 M_x}{\Delta x^2} + 2 \frac{\Delta^2 M_v}{\Delta x \Delta y} + \frac{\Delta^2 M_y}{\Delta y^2} \right) = \frac{P}{\Delta x \Delta y}. \quad (8)$$

Lign. (8) er en lineær partiel Differensligning af 2den Orden. Der- som de bøjende og de vridende Momenter for hvert enkelt Element kan bestemmes saaledes, at Lign. (8) tilfredsstilles, vil der være Ligevægt mellem Belastningen og Snitkræfterne for en vilkaarlig Del af Pladen, som tænkes udskaaret.

Ved Opstilling af Relationerne mellem Momenterne M_x , M_y , M_v og Nedbøjningerne z , der regnes positive i samme Retning som Belastningen, forudsættes, at Pladens Formforandring udelukkende skyldes de bøjende og de vridende Momenter.

Kaldes Pladens Nedbøjning i Punkterne e , f og g henholdsvis z_e , z_f og z_g , og antages M_x og M_y at variere retliniet paa Strækningen $e - f - g$, har man

$$\left. \begin{aligned} \frac{z_e - 2z_f + z_g}{\Delta x^2} &= \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} = - \frac{1}{EI} (M_x - \mu M_y), \\ \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} &= - \frac{1}{EI} (M_y - \mu M_x). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

og analogt hermed

I disse Ligninger indføres M_x og M_y med de i Punkt f gældende Værdier.

Formforandringen af et Element *ikfe* paa Grund af det vridende Moment M_v kan regnes at hidrøre fra et over hele Elementet ensformig fordelt vridende Moment M_{va} , hvor M_{va} er det vridende Moment i Elementets Midtpunkt.

For et bestemt Punkt af en vandret Plade kan de bøjende og de vridende Momenter i to vilkaarlige lodrette, paa hinanden vinkelrette Snit udtrykkes ved de bøjende Momenter M_x og M_y og det vridende Moment M_v paa lignende Maade, som Spændingerne i to paa hinanden vinkelrette Snit ved en plan Spændingstilstand kan udtrykkes ved Normalspændingerne σ_x og σ_y og Forskydningsspændingen τ *). Ligningerne kan i begge Tilfælde udledes paa samme Maade og bliver derfor nøjagtig de samme.

*) Udledelsen af disse Ligninger findes i Ostenfeld: *Teknisk Elasticitetslære*, 1916, Side 66. Udledelsen af de tilsvarende Relationer mellem de bøjende og de vridende Momenter findes f. Ex. i Árpád Nádaí, *Die Formänderungen und die Spannungen von rechteckigen elastischen Platten*, Berlin, 1915, Side 6.

Naar man ved en plan Spændingstilstand har ren Forskydning med Forskydningsspændingerne τ i Snit parallelle med Koordinataksene, saa vil der i de Snit, som danner Vinkler paa 45° med Koordinataksene, optræde Normalspændinger, hvis Størrelse er $\sigma_1 = \tau$ og $\sigma_2 = -\tau$. I Stedet for at udtrykke Formforandringen ved Forskydningsspændingen kan man da udtrykke den ved Normalspændingerne σ_1 og σ_2 . Paa samme Maade kan den Formforandring i Pladen, som hidrører fra det vridende Moment M_v , udtrykkes ved to bøjende Momenter, nemlig et bøjende Moment $M_{x'} = M_v$ i et Snit, hvis Normal halverer Vinklen mellem x -Aksens og y -Aksens positive Retninger, og et bøjende Moment $M_{y'} = -M_v$ i det herpaa vinkelrette Snit.

Indenfor Grænserne af Elementet *ikfe* (Fig. 2) tænkes udskaaret et lille kvadratisk Element *lmon*, hvis Sidelinie er s . Idet Nedbøjningen z_p i dette Elements Midtpunkt er $z_p = z_1 + z_2$, hvor z_2 er den Del af Nedbøjningen, som skyldes M_x og M_y indenfor Grænserne af Elementet *lmon*, medens z_1 er hele den øvrige Del af Nedbøjningen, kan de bøjende Momenter $M_{x'}$ og $M_{y'}$ udtrykkes ved Nedbøjningen af dette Elements Hjørner og Midte ved følgende Ligninger

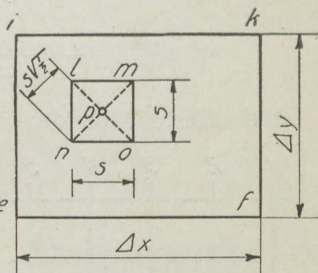


Fig. 2.

$$\frac{z_l - 2z_1 + z_o}{(s\sqrt{1/2})^2} = -\frac{M_{x'}}{EI} + \mu \frac{M_{y'}}{EI} = -(1 + \mu) \frac{M_v}{EI},$$

$$\frac{z_m - 2z_1 + z_n}{(s\sqrt{1/2})^2} = -\frac{M_{y'}}{EI} + \mu \frac{M_{x'}}{EI} = + (1 + \mu) \frac{M_v}{EI},$$

hvoraf

$$\frac{z_l - z_m - z_n + z_o}{s^2} = -(1 + \mu) \frac{M_v}{EI}.$$

Da

$$\frac{z_l - z_m - z_n + z_o}{s^2} = \frac{z_l - z_k - z_e + z_f}{\Delta x \Delta y} = \frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y},$$

faas altsaa

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y} = -(1 + \mu) \frac{M_v}{EI}. \quad (10)$$

Af Ligningerne (9) og (10) faas

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -EI \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}}{1 - \mu^2}, \\ M_y &= -EI \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}}{1 - \mu^2}, \\ M_v &= -EI \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y}}{1 + \mu}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

og ved Differentiation

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta^2 M_x}{\Delta x^2} &= -EI \frac{\frac{\Delta^4 z}{\Delta x^4} + \mu \frac{\Delta^4 z}{\Delta x^2 \Delta y^2}}{1 - \mu^2}, \\ \frac{\Delta^2 M_y}{\Delta y^2} &= -EI \frac{\frac{\Delta^4 z}{\Delta y^4} + \mu \frac{\Delta^4 z}{\Delta x^2 \Delta y^2}}{1 - \mu^2}, \\ \frac{\Delta^2 M_v}{\Delta x \Delta y} &= -EI \frac{\frac{\Delta^4 z}{\Delta x^2 \Delta y^2}}{1 + \mu}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

som ved Indsættelse i Lign. (8) giver

$$\frac{\Delta^4 z}{\Delta x^4} + 2 \frac{\Delta^4 z}{\Delta x^2 \Delta y^2} + \frac{\Delta^4 z}{\Delta y^4} = \frac{1 - \mu^2}{EI} \cdot \frac{P}{\Delta x \Delta y}. \quad (13)$$

I de fleste Tilfælde kan Beregningen udføres ved Anvendelse af kvadratiske Elementer med Sidelinie $\Delta_x = \Delta_y = \lambda$. Idet Nedbøjningen i Systempunkterne $(c, 1), (c, 2) \dots$ kaldes $c_1, c_2 \dots$ (Fig. 3), faas for det punkterede Element, hvis Midtpunkt er $(e, 3)$:

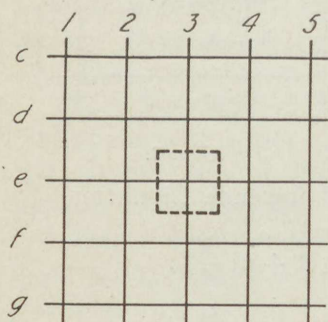


Fig. 3.

$$\frac{\Delta^4 z}{\Delta x^4} \lambda^4 = e_1 - 4e_2 + 6e_3 - 4e_4 + e_5,$$

$$2 \frac{\Delta^4 z}{\Delta x^2 \Delta y^2} \lambda^4 = \begin{Bmatrix} +2d_2 - 4d_3 + 2d_4 \\ -4e_2 + 8e_3 - 4e_4 \\ +2f_2 - 4f_3 + 2f_4 \end{Bmatrix}, \quad \frac{\Delta^4 z}{\Delta y^4} \lambda^4 = \begin{Bmatrix} +c_3 \\ -4d_3 \\ +6e_3 \\ -4f_3 \\ +g_3 \end{Bmatrix}.$$

Af Lign. (13) faas altsaa for Elementet ved Punkt $(e, 3)$

$$\left. \begin{aligned} &+ c_3 \\ &+ 2d_2 - 8d_3 + 2d_4 \\ &+ e_1 - 8e_2 + 20e_3 - 8e_4 + e_5 \\ &+ 2f_2 - 8f_3 + 2f_4 \\ &+ g_3 \end{aligned} \right\} = (1 - \mu^2) P \frac{\lambda^2}{EI},$$

der kan skrives paa følgende Maade:

	1	2	3	4	5
c			+1		
d		+2	-8	+2	
e	+1	-8	+20	-8	+1
f		+2	-8	+2	
g			+1		

$$= (1 - \mu^2) P \frac{\lambda^2}{EI}. \quad (14)$$

Differensligningen (13) eller (14) er altsaa en Ligevægtsbetingelse for det Element, hvis Midtpunkt er $(e, 3)$. For Kortheds Skyld kaldes den Ligningen for Punkt $(e, 3)$.

I mange Tilfælde kan man opnaa en Lettelse i Beregningen ved at indføre

$$\left. \begin{array}{l} + c_3 \\ + d_2 - 4d_3 + d_4 \\ + e_3 \end{array} \right\} = D_3, \quad \left. \begin{array}{l} + d_2 \\ + e_1 - 4e_3 + e_3 \\ + f_2 \end{array} \right\} = E_2 \text{ o. s. v.} \quad (15)$$

Herved bliver Ligningen for Punkt (e, 3)

$$\left. \begin{array}{l} + D_3 \\ + E_2 - 4E_3 + E_4 \\ + F_3 \end{array} \right\} = (1 - \mu^2) P \frac{\lambda^2}{EI} \quad (16)$$

§ 2. Exempel. Plade understøttet i enkelte Punkter. Kvadratiske Felter.

Som Exempel beregnes Nedbøjningerne og de bøjende Momenter i en Plade, som er kontinuerlig over uendelig mange Fag i begge Retninger og understøttet i enkelte Punkter, beliggende i Rækker, hvis Retning er parallel med Koordinataksene, og hvis Afstand overalt er l . Fig 4 viser et enkelt Felt af en saadan Plade. Paa Pladen tænkes virkende en ensformig fordelt Belastning p pr. Arealenhet over alle Fag.

Systemlinierne $c, d, e, \dots$ samt $0, 1, 2, \dots$ indlægges med Afstanden $\lambda = \frac{1}{6} l$. Belastningen regnes i hvert Systempunkt at være $P = p \lambda^2$. Reaktionen i Punkt (c, 0) er $36 P$, men da Belastningen P ogsaa virker i dette Punkt, bliver den Kraft, som paavirker Pladen i Punkt (c, 0) lig $-35 P$.

Ved Beregningen af Nedbøjningerne anvendes Lign. (16), som opskrives for følgende 10 Systempunkter. De øvrige Punkters Nedbøjning bestemmes ved Symmetrien.

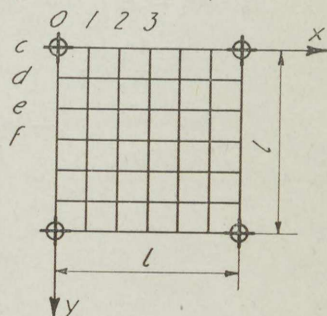


Fig. 4.

Punkt (c, 0)	$-4C_0 + 4C_1$	$= -35(1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}$
(c, 1)	$C_0 - 4C_1 + C_2 + 2D_1$	$= 1 \quad \text{»} \quad \text{»}$
(c, 2)	$C_1 - 4C_2 + C_3 + 2D_2$	$= 1 \quad \text{»} \quad \text{»}$
(c, 3)	$2C_2 - 4C_3 + 2D_3$	$= 1 \quad \text{»} \quad \text{»}$
(d, 1)	$2C_1 - 4D_1 + 2D_2$	$= 1 \quad \text{»} \quad \text{»}$
(d, 2)	$C_2 + D_1 - 4D_2 + D_3 + E_2$	$= 1 \quad \text{»} \quad \text{»}$
(d, 3)	$C_3 + 2D_2 - 4D_3 + E_3$	$= 1 \quad \text{»} \quad \text{»}$
(e, 2)	$2D_2 - 4E_2 + 2E_3$	$= 1 \quad \text{»} \quad \text{»}$
(e, 3)	$D_3 + 2E_2 - 4E_3 + F_3$	$= 1 \quad \text{»} \quad \text{»}$
(f, 3)	$D_3 + 4E_3 - 4F_3$	$= 1 \quad \text{»} \quad \text{»}$

Den ene af disse Ligninger kan udledes af de 9 andre. Man kan derfor ikke finde de 10 ubekendte af disse Ligninger, men finder for

hver af de 9 et Udtryk, hvori den 10ende indgaar. Da Koefficienterne til de ubekendte er smaa og hele Tal, udføres Løsningen simplest ved efterhaanden at eliminere $F_3, E_3, E_2 \dots$, hvorefter man finder

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 - 1225 \cdot \frac{1 - \mu^2}{140} \cdot \frac{p\lambda^4}{EI}, \\ C_2 &= C_0 - 1684 \quad \gg \quad \gg, \\ C_3 &= C_0 - 1809 \quad \gg \quad \gg, \\ D_1 &= C_0 - 1538 \quad \gg \quad \gg, \\ D_2 &= C_0 - 1781 \quad \gg \quad \gg, \\ D_3 &= C_0 - 1864 \quad \gg \quad \gg, \\ E_2 &= C_0 - 1898 \quad \gg \quad \gg, \\ E_3 &= C_0 - 1945 \quad \gg \quad \gg, \\ F_3 &= C_0 - 1980 \quad \gg \quad \gg. \end{aligned}$$

Indføres disse Værdier i Ligningerne (15), faas

Punkt (c, 0)	—4c ₀ + 4c ₁	= C ₀
(c, 1)	c ₀ — 4c ₁ + c ₂ + 2d ₁	= C ₁ = C ₀ — 1225 · $\frac{1 - \mu^2}{140} \cdot \frac{p\lambda^4}{EI}$,
(c, 2)	c ₁ — 4c ₂ + c ₃ + 2d ₂	= C ₂ = C ₀ — 1684 · $\gg \gg$,
(c, 3)	2c ₂ — 4c ₃ + 2d ₃	= C ₃ = C ₀ — 1809 · $\gg \gg$,
(d, 1)	2c ₁ — 4d ₁ + 2d ₂	= D ₁ = C ₀ — 1538 · $\gg \gg$,
(d, 2)	c ₂ + d ₁ — 4d ₂ + d ₃ + e ₂	= D ₂ = C ₀ — 1781 · $\gg \gg$,
(d, 3)	c ₃ + 2d ₂ — 4d ₃ + e ₃	= D ₃ = C ₀ — 1864 · $\gg \gg$,
(e, 2)	2d ₂ — 4e ₂ + 2e ₃	= E ₂ = C ₀ — 1898 · $\gg \gg$,
(e, 3)	d ₃ + 2e ₂ — 4e ₃ + f ₃	= E ₃ = C ₀ — 1945 · $\gg \gg$,
(f, 3)	d ₃ + 4e ₃ — 4f ₃	= F ₃ = C ₀ — 1980 · $\gg \gg$.

Sættes $c_0 = 0$, idet Understøtningerne forudsættes at være faste, kan man af disse 10 Ligninger finde C_0 og Nedbøjningerne $c_1, c_2 \dots$ i de 9 Systempunkter.

Da Koefficienterne til $c_0, c_1, c_2 \dots$ i disse Ligninger er de samme som de tilsvarende Koefficienter til $C_0, C_1, C_2 \dots$ i de forrige Ligninger, og da Eliminationen saaledes allerede er udført for Ligningernes venstre Side, bliver Løsningen forholdsvis let at udføre. Man finder

og

$$\begin{aligned} C_0 &= 1679,5 \cdot \frac{1 - \mu^2}{140} \cdot \frac{p\lambda^4}{EI}, \\ c_0 &= 0, \\ c_1 &= 117565 \cdot \frac{1 - \mu^2}{39200} \cdot \frac{p\lambda^4}{EI}, \\ c_2 &= 232504 \quad \gg \quad \gg, \\ c_3 &= 276669 \quad \gg \quad \gg, \\ d_1 &= 182508 \quad \gg \quad \gg, \\ d_2 &= 267261 \quad \gg \quad \gg, \\ d_3 &= 302704 \quad \gg \quad \gg, \\ e_2 &= 322908 \quad \gg \quad \gg, \\ e_3 &= 347965 \quad \gg \quad \gg, \\ f_2 &= 369000 \quad \gg \quad \gg. \end{aligned}$$

Dernæst findes de bøjende Momenter M_x ved Hjælp af Ligningerne (11).

Beregningen af $\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}$ er opstillet i nedenstaaende Tabel.

	(c,0)	(c,1)	(c,2)	(c,3)	
$z =$	0	117565	232504	276669	$\frac{1-\mu^2}{39200} \cdot \frac{p\lambda^4}{EI}$
$\frac{\Delta z}{\Delta x} =$		117565	114939	44165	» $\frac{p\lambda^3}{EI}$
$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} =$	235130	-2626	-70774	-88330	» $\frac{p\lambda^2}{EI}$
	(d,0)	(d,1)	(d,2)	(d,3)	
$z =$	117565	182508	267261	302704	$\frac{1-\mu^2}{39200} \cdot \frac{p\lambda^4}{EI}$
$\frac{\Delta z}{\Delta x} =$		64943	84753	35443	» $\frac{p\lambda^3}{EI}$
$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} =$	129886	19810	-49310	-70886	» $\frac{p\lambda^2}{EI}$
	(e,0)	(e,1)	(e,2)	(e,3)	
$z =$	232504	267261	322908	347965	$\frac{1-\mu^2}{39200} \cdot \frac{p\lambda^4}{EI}$
$\frac{\Delta z}{\Delta x} =$		34757	55647	25057	» $\frac{p\lambda^3}{EI}$
$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} =$	69514	20890	-30590	-50114	» $\frac{p\lambda^2}{EI}$
	(f,0)	(f,1)	(f,2)	(f,3)	
$z =$	276669	302704	347965	369000	$\frac{1-\mu^2}{39200} \cdot \frac{p\lambda^4}{EI}$
$\frac{\Delta z}{\Delta x} =$		26035	45261	21035	» $\frac{p\lambda^3}{EI}$
$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} =$	52070	19226	-24226	-42070	» $\frac{p\lambda^2}{EI}$

$\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}$ er ikke beregnet, men findes af $\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}$ ved Symmetrien om en Diagonal.

I de følgende Tabeller er opstillet de fundne Værdier af Nedbøjningerne og de bøjende Momenter M_x , idet der er indført $\lambda = \frac{1}{6} l$.

Nedbøjninger.

	0	1	2	3	
c	0	0,00231	0,00458	0,00545	$(1-\mu^2) \frac{p l^4}{EI}$
d	0,00231	0,00359	0,00526	0,00596	» »
e	0,00458	0,00526	0,00636	0,00685	» »
f	0,00545	0,00596	0,00695	0,00726	» »

Momenter M_x .

	0	1	2	3	
c	$-0,1666 - \mu \cdot 0,1666$	$+0,0019 - \mu \cdot 0,0920$	$+0,0501 - \mu \cdot 0,0493$	$+0,0626 - \mu \cdot 0,0369$	pl^2
d	$-0,0920 + \mu \cdot 0,0019$	$-0,0140 - \mu \cdot 0,0140$	$+0,0349 - \mu \cdot 0,0148$	$+0,0502 - \mu \cdot 0,0136$	$\gg$
e	$-0,0493 + \mu \cdot 0,0501$	$-0,0148 + \mu \cdot 0,0349$	$+0,0217 + \mu \cdot 0,0217$	$+0,0355 + \mu \cdot 0,0172$	$\gg$
f	$-0,0369 + \mu \cdot 0,0626$	$-0,0136 + \mu \cdot 0,0502$	$+0,0172 + \mu \cdot 0,0355$	$+0,0298 + \mu \cdot 0,0298$	$\gg$

Summen af Momenterne M_x i Systemlinierne 0, 1, 2 og 3 gennem et helt Felt kaldes henholdsvis $M_{x,0}$, $M_{x,1}$, $M_{x,2}$ og $M_{x,3}$. Disse Størrelser er uafhængige af μ , idet Summen af de Led, hvori μ indgaar, er Nul.

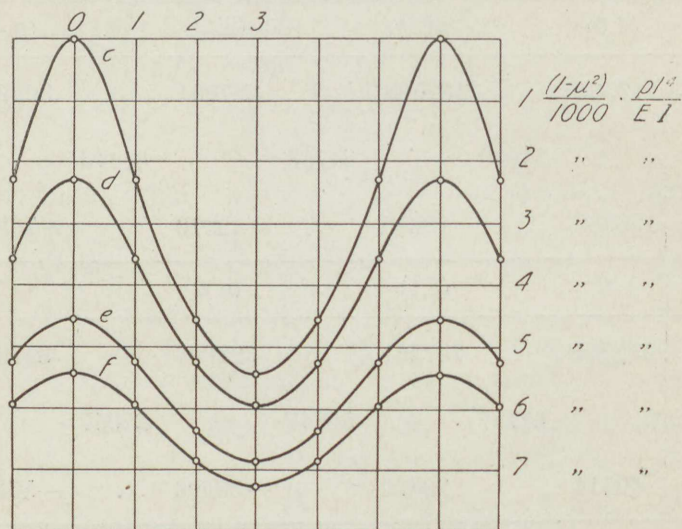


Fig. 5a.

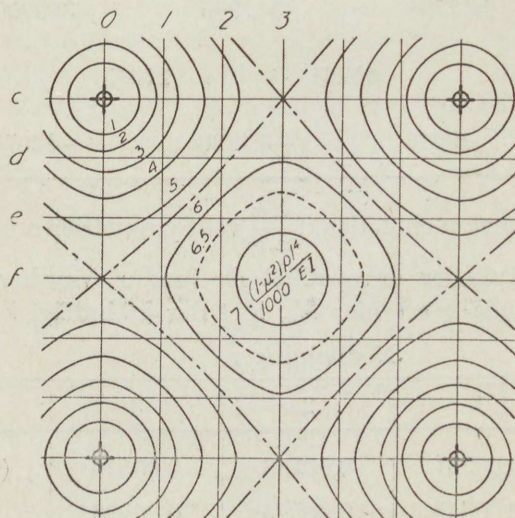


Fig. 5b.

Man finder

$$M_{x,0} = -(235130 + 2 \cdot 129886 + 2 \cdot 69514 + 52070) \cdot \frac{l}{6} \cdot \frac{pl^2}{36 \cdot 39200} = -\frac{35}{432} pl^3,$$

$$M_{x,1} = -(-2626 + 2 \cdot 19810 + 2 \cdot 20890 + 19226) \cdot \frac{l}{6} \cdot \frac{pl^2}{36 \cdot 39200} = -\frac{5}{432} pl^3,$$

$$M_{x,2} = (70774 + 2 \cdot 49310 + 2 \cdot 30590 + 24226) \cdot \frac{l}{6} \cdot \frac{pl^2}{36 \cdot 39200} = \frac{13}{432} pl^3,$$

$$M_{x,3} = (88330 + 2 \cdot 70886 + 2 \cdot 50114 + 42070) \cdot \frac{l}{6} \cdot \frac{pl^2}{36 \cdot 39200} = \frac{19}{432} pl^3.$$

Disse Værdier af $M_{x,0}$, $M_{x,1}$, $M_{x,2}$ og $M_{x,3}$ vilde man ogsaa finde i Pladen, dersom denne var understøttet af stive Bjælker, hvis indbyrdes Afstand er l , og af hvilke den ene er beliggende i Systemlinie 0, idet Belastningen tænkes at virke i Systemlinierne 0, 1, 2 og 3 med $\frac{1}{6} pl$ pr. Længdeenhed i hver.

De bøjende Momenter M_y findes af M_x ved Symmetrien om en Diagonal.

De beregnede Nedbøjninger er afsat i Fig. 5 a. Ved Hjælp af de herved fundne Nedbøjningskurver i Systemlinierne c , d , e og f er Niveaukurverne indtegnet i Fig. 5 b. Man ser, at den nedbøjede Plade i Nærheden af Understøtningerne har Paraplyform, i Nærheden af Feltets Midte Skaalform, medens den i Understøtningsrækkerne i Nærheden af Midtpunkterne mellem Understøtningerne har Sadelform.

§ 3. Hovedmomenter; vridende Momenter i Systempunkterne; Transversalkræfter.

Som nævnt i § 1 kan de bøjende og de vridende Momenter i Snit gennem samme Punkt af Pladen udtrykkes ved lignende Relationer som Normalspændingerne og Forskydningsspændingerne i Snit gennem samme Punkt af et Legeme, som er i en plan Spændingstilstand. Ved en plan Spændingstilstand findes Hovedspændingernes Størrelse og Hovedsnit- nens Retning samt største Forskydningsspænding af de bekendte Ligninger:

$$\text{Største Hovedspænding } \sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_x) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau^2}.$$

$$\text{Mindste } \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_x) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau^2}.$$

Retningen bestemmes ved $\tan 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}$, hvor α er Vinklen mellem x -Aksen og Normalen til det Hovedsnit, hvori σ_1 optræder, og hvor man til Bestemmelse af den rigtige Værdi af α har, at α ligger i 1ste Kvadrant, naar τ er positiv, og i 2den Kvadrant, naar τ er negativ.

Største Forskydningsspænding

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau^2}.$$

Paa samme Maade har man:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Største Hovedmoment } M_1 = \frac{1}{2}(M_y + M_x) + \frac{1}{2}\sqrt{(M_y - M_x)^2 + 4M_v^2} \\ \text{Mindste } M_2 = \frac{1}{2}(M_y + M_x) - \frac{1}{2}\sqrt{(M_y - M_x)^2 + 4M_v^2} \end{array} \right\} \quad (17)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2M_v}{M_x - M_y}, \quad (18)$$

hvor α er Vinklen mellem x -Aksen og Normalen til det Hovedsnit, hvori M_1 optræder, og hvor man til Bestemmelse af den rigtige Værdi af α har, at α ligger i 1ste Kvadrant, naar M_v er positiv, og i 2den Kvadrant, naar M_v er negativ.

Har man først fundet α , kan M_1 og M_2 ogsaa findes af Ligningerne

$$\left. \begin{array}{l} M_1 = M_x + M_v \operatorname{tg} \alpha, \\ M_2 = M_y - M_v \operatorname{tg} \alpha. \end{array} \right\} \quad (19)$$

Største vridende Moment

$$M_{v \max} = \frac{1}{2}(M_1 - M_2) = \frac{1}{2}\sqrt{(M_y - M_x)^2 + 4M_v^2}, \quad (20)$$

der optræder i de Snit, som danner Vinkler paa 45° med Hovedsnittene.

For at kunne beregne Hovedmomenternes Størrelse og Hovedsnittenes Retning i et bestemt Punkt af Pladen, maa man altsaa kende M_x , M_y og M_v i dette Punkt. Ved den i § 1 angivne Fremgangsmaade finder man M_x og M_y i Systempunkterne, medens M_v findes som en Middelværdi af det vridende Moment i de Elementer $\Delta x \Delta y$, hvis Hjørner falder i Systempunkterne. For det i Fig. 1 viste punkterede Element $abcd$ finder man saaledes M_x og M_y i Punkt f , medens Middelværdien af det vridende Moment i Elementet $ikfe$ kan regnes at optræde i Punkt a . Som en tilnærmende Værdi af det vridende Moment i Punkt f kan man indføre Middelværdien af de vridende Momenter i Punkterne a , b , c og d . Naar man for Punkt $(e, 3)$ i Fig. 3 beregner det vridende Moment paa denne Maade, faas

$$M_v = -EI \frac{d_2 - d_4 - f_2 + f_4}{4\lambda^2(1 + \mu)} = -\frac{EI}{1 + \mu} \cdot \frac{\Delta^2 z}{\Delta(2x) \Delta(2y)}. \quad (21)$$

En bedre Tilnærmelse opnaar man ved Konstruktion af M_v -Fladen, som bestemmes ved Værdierne af M_v i Midtpunkterne af de Elementer, hvis Hjørner ligger i Systempunkterne. I Fig. 6 er vist en saadan Konstruktion af M_v -Fladen for den i Exemplet i § 4 behandlede Plade.

Ifølge Lign. (4) er Middelværdien af Transversalkraften pr. Længdeenhed i Sidelinien $a-c$ af Elementet $abcd$ (Fig. 1) bestemt ved

$$Q_{ac} = -\frac{M_{xf} - M_{xe}}{\Delta x} - \frac{M_{yc} - M_{ya}}{\Delta y} = -\frac{\Delta M_x}{\Delta x} - \frac{\Delta M_v}{\Delta y}.$$

$$\text{Af Lign. (11) faas} \quad \frac{\Delta M_x}{\Delta x} = -EI \frac{\frac{\Delta^3 z}{\Delta x^3} + \mu \frac{\Delta^3 z}{\Delta x \Delta y^2}}{1 - \mu^2},$$

$$\frac{\Delta M_v}{\Delta y} = -EI \frac{\frac{\Delta^3 z}{\Delta x \Delta y^2}}{1 + \mu}.$$

Idet Q_x betegner Transversalkraften pr. Længdeenhed i Snit vinkelret paa x -Aksen, har man altsaa

$$Q_x = -\frac{\Delta M_x}{\Delta x} - \frac{\Delta M_y}{\Delta y} = EI \left(\frac{\frac{\Delta^3 z}{\Delta x^3} + \mu \frac{\Delta^3 z}{\Delta x \Delta y^2}}{1 - \mu^2} + \frac{\frac{\Delta^3 z}{\Delta x \Delta y^2}}{1 + \mu} \right) = EI \frac{\frac{\Delta^3 z}{\Delta x^3} + \frac{\Delta^3 z}{\Delta x \Delta y^2}}{1 - \mu^2}. \quad (22)$$

I Fig. 3 skæres Linie e af en af det punkterede Elements Sidelinier midt imellem Linierne 2 og 3. Kaldes Transversalkraften pr. Længdeenhed i denne Sidelinie $Q_{x(e, 2, 3)}$, faas altsaa

$$Q_{x(e, 2, 3)} = EI \frac{\frac{\Delta^3 z}{\Delta x^3} + \frac{\Delta^3 z}{\Delta x \Delta y^2}}{1 - \mu^2},$$

hvor

$$\frac{\Delta^3 z}{\Delta x^3} \lambda^3 = -e_1 + 3e_2 - 3e_3 + e_4,$$

og

$$\frac{\Delta^3 z}{\Delta x \Delta y^2} \lambda^3 = \begin{Bmatrix} -d_2 + d_3 \\ +2e_2 - 2e_3 \\ -f_2 + f_3 \end{Bmatrix},$$

hvoraf

$$Q_{x(e, 2, 3)} = \begin{Bmatrix} -d_2 + d_3 \\ -e_1 + 5e_2 - 5e_3 + e_4 \\ -f_2 + f_3 \end{Bmatrix} \cdot \frac{EI}{\lambda^3 (1 - \mu^2)}. \quad (23)$$

Indføres heri fra Lign. (15)

$$\left. \begin{matrix} d_2 \\ e_1 - 4e_2 + e_3 \\ f_2 \end{matrix} \right\} = E_2 \quad \text{og} \quad \left. \begin{matrix} d_3 \\ e_2 - 4e_3 + e_4 \\ f_3 \end{matrix} \right\} = E_3,$$

faas

$$Q_{x(e, 2, 3)} = EI \frac{E_3 - E_2}{\lambda^3 (1 - \mu^2)}. \quad (24)$$

For de tre andre Sidelinier i Elementet faas de analoge Udtryk

$$Q_{x(e, 3, 4)} = EI \frac{E_4 - E_3}{\lambda^3 (1 - \mu^2)},$$

$$Q_{y(3, d, e)} = EI \frac{E_3 - D_3}{\lambda^3 (1 - \mu^2)},$$

$$Q_{y(3, e, f)} = EI \frac{F_3 - E_3}{\lambda^3 (1 - \mu^2)}.$$

§ 4. Exempel. Vridende Momenter, Hovedmomenter og Transversalkræfter i den i § 2 behandlede Plade.

Ved Anvendelse af den sidste af Ligningerne (11) findes Middelværdien af de vridende Momenter i de kvadratiske Elementer, hvis Hjørner falder i Systempunkterne. For det Element, som begrænses af Linierne d , e , 2 og 3 (Fig. 4), faas saaledes

$$M_v = -EI \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y}}{1 + \mu} = -EI \frac{d_2 - d_3 - e_2 + e_3}{\lambda^2 (1 + \mu)}.$$

Med de i § 2 fundne Nedbøjninger

$$d_2 = 267261 \cdot \frac{1 - \mu^2}{39200} \cdot \frac{p\lambda^4}{EI},$$

$$d_3 = 302704 \quad \gg \quad \gg \quad ,$$

$$e_2 = 322908 \quad \gg \quad \gg \quad ,$$

$$e_3 = 347965 \quad \gg \quad \gg \quad ,$$

faas altsaa

$$\begin{aligned} M_v &= - (267261 - 302704 - 322908 + 347965) \cdot \frac{1 - \mu}{39200} \cdot p\lambda^2 \\ &= + 10386 \cdot \frac{1 - \mu}{39200} \cdot p\lambda^2. \end{aligned}$$

Indføres heri $\lambda = \frac{1}{8} l$, faas

$$M_v = + 0,0074 (1 - \mu) pl^2.$$

Denne Værdi af det vridende Moment regnes at optræde i Midtpunktet af det Element, som begrænses af Linierne d , e , 2 og 3.

Da man allerede i § 2 har beregnet $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, udføres Beregningen af

$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y} = \frac{\Delta \frac{\Delta z}{\Delta x}}{\Delta y}$ lettest ved at danne Differenserne af $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ med Hensyn til y . For det betragtede Element faas da

$$\frac{\Delta \frac{\Delta z}{\Delta x}}{\Delta y} = (25057 - 35443) \cdot \frac{1 - \mu^2}{39200} \cdot \frac{p\lambda^2}{EI},$$

som indsættes i

$$M_v = - \frac{EI}{1 + \mu} \cdot \frac{\Delta \frac{\Delta z}{\Delta x}}{\Delta y},$$

hvorved man finder den ovenfor angivne Værdi af M_v .

Paa lignende Maade findes de øvrige af de i hosstaaende Tabel angivne Værdier af M_v .

Vridende Momenter M_v .

	0	1	2	3
c				
d	+ 0,0373	+ 0,0214	+ 0,0062	$(1 - \mu) pl^2$
e	+ 0,0214	+ 0,0206	+ 0,0074	» »
f	+ 0,0062	+ 0,0074	+ 0,0029	» »

Ved Anvendelse af disse Værdier af M_v er M_v -Fladen konstrueret (Fig. 6), og man finder herved Værdierne af M_v i Systempunkterne.

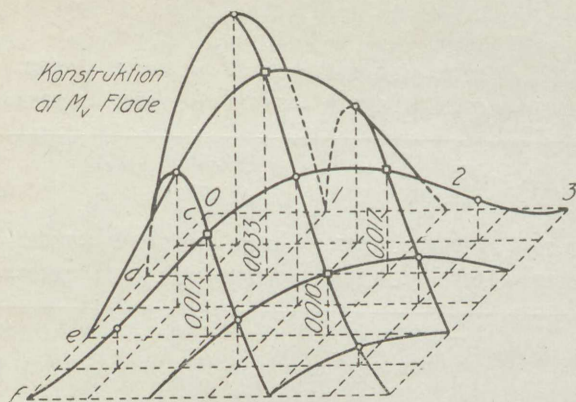


Fig. 6.

Ved Ligningerne (18) og (19) findes dernæst Hovedsnittenes Retning og Hovedmomenternes Størrelse.

For Punkt (d, 2) faas saaledes af Konstruktionen i Fig. 6

$$M_v = + 0,017 (1 - \mu) pl^2.$$

Vinklen mellem x -Aksen og Normalen til det Hovedsnit, hvori det største Hovedmoment M_1 optræder, bestemmes ved

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 M_v}{M_x - M_y} = \frac{2 \cdot 0,017 (1 - \mu) pl^2}{(0,0349 + 0,0148) (1 - \mu) pl^2} = 0,68.$$

M_x og M_y er heri indført med de i § 2 fundne Værdier.

Man finder herved

$$\alpha = \begin{cases} 17^\circ \\ 107^\circ \end{cases}$$

Da M_v er positiv, maa α ligge i 1ste Kvadrant, hvorfor $\alpha = 17^\circ$.

Største Hovedmoment $M_1 = M_x + M_v \operatorname{tg} \alpha$

$$\begin{aligned} &= [0,0349 - \mu \cdot 0,0148 + 0,017 (1 - \mu) \operatorname{tg} 17^\circ] pl^2 \\ &= (0,0401 - \mu \cdot 0,0200) pl^2. \end{aligned}$$

Mindste Hovedmoment $M_2 = M_y - M_v \operatorname{tg} \alpha$

$$\begin{aligned} &= [-0,0148 + \mu \cdot 0,0349 - 0,017 (1 - \mu) \operatorname{tg} 17^\circ] pl^2 \\ &= (-0,0200 + \mu \cdot 0,0401) pl^2. \end{aligned}$$

Paa samme Maade udføres Beregningen for de øvrige Systempunkter. Resultaterne er opstillet i omstaaende Tabel.

	0	1	2	3	
M_v	0	0	0	0	
α	ubestemt	0	0	0	
c					
M_1	$-0,1666 - \mu \cdot 0,1666$	$+0,0019 - \mu \cdot 0,0920$	$+0,0501 - \mu \cdot 0,0493$	$+0,0626 - \mu \cdot 0,0369$	pl^2
M_2	$-0,1666 - \mu \cdot 0,1666$	$-0,0920 + \mu \cdot 0,0019$	$-0,0493 + \mu \cdot 0,0501$	$-0,0369 + \mu \cdot 0,0626$	$\gg$
d					
M_v	0	$+0,0330$	$+0,0170$	0	$(1-\mu)pl^2$
α	90°	45°	17°	0	
M_1	$+0,0019 - \mu \cdot 0,0020$	$+0,0190 - \mu \cdot 0,0470$	$+0,0401 - \mu \cdot 0,0200$	$+0,0502 - \mu \cdot 0,0136$	pl^2
M_2	$-0,0920 + \mu \cdot 0,0019$	$-0,0470 + \mu \cdot 0,0190$	$-0,0200 + \mu \cdot 0,0401$	$-0,0136 + \mu \cdot 0,0502$	$\gg$
e					
M_v	0	$+0,0170$	$+0,0100$	0	$(1-\mu)pl^2$
α	90°	73°	45°	0	
M_1	$+0,0501 - \mu \cdot 0,0493$	$+0,0401 - \mu \cdot 0,0200$	$+0,0317 + \mu \cdot 0,0117$	$+0,0355 + \mu \cdot 0,0172$	pl^2
M_2	$-0,0493 + \mu \cdot 0,0501$	$-0,0200 + \mu \cdot 0,0401$	$+0,0117 + \mu \cdot 0,0317$	$+0,0172 + \mu \cdot 0,0355$	$\gg$
f					
M_v	0	0	0	0	
α	90°	90°	90°	ubestemt	
M_1	$+0,0626 - \mu \cdot 0,0369$	$+0,0502 - \mu \cdot 0,0136$	$+0,0355 + \mu \cdot 0,0172$	$+0,0298 + \mu \cdot 0,0298$	pl^2
M_2	$-0,0369 + \mu \cdot 0,0626$	$-0,0136 + \mu \cdot 0,0502$	$+0,0172 + \mu \cdot 0,0355$	$+0,0298 + \mu \cdot 0,0298$	$\gg$

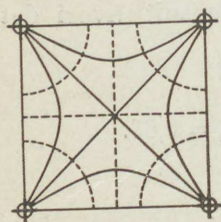


Fig. 7.

I Fig. 7 fremstiller de fuldt optrukne Kurver Retningen af Normalen til de Hovedsnit, hvori de største Hovedmomenter M_1 optræder, medens de punkterede Kurver angiver Retningen af Normalen til de Hovedsnit, hvori de mindste Hovedmomenter M_2 optræder.

Langs en Diagonal optræder Hovedmomentet M_1 i Snit vinkelret paa Diagonalen og Hovedmomentet M_2 i et Snit, som indeholder Diagonalen. M_1 og M_2 er for $\mu = 0,2$ i Fig. 8 fremstillet langs en Diagonal.

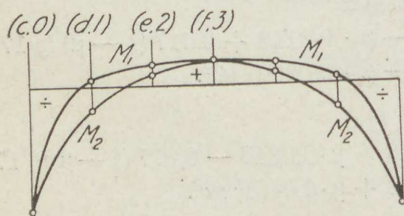


Fig. 8.

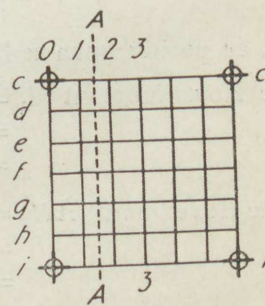


Fig. 9.

Kaldes Diagonalens Længde d , ses det, at M_1 skifter Fortegn i Afstanden ca. $\frac{1}{8}d$ fra Understøtningerne, medens M_2 skifter Fortegn i Afstanden ca. $\frac{1}{4}d$ fra Understøtningerne.

Transversalkræfterne i den i Fig. 4 viste Plade kan beregnes ved Anvendelse af Ligning (24). Man finder f. Ex. Transversalkraften i et Snit A—A (Fig. 9) parallelt med y -Aksen og beliggende midt imellem Linierne 1 og 2 ved at indføre de i § 2 fundne C_1, C_2, D_1, D_2 o. s. v., hvor man paa Grund af Symmetrien om Diagonalen har $E_1 = D_2, F_1 = D_3$ og $F_2 = E_3$,

$$Q_{x(c, 1, 2)} = EI \frac{C_2 - C_1}{\lambda^3 (1 - \mu^2)} = (-1684 + 1225) \frac{p\lambda}{140} = -459 \frac{p\lambda}{140},$$

$$Q_{x(d, 1, 2)} = EI \frac{D_2 - D_1}{\lambda^3 (1 - \mu^2)} = (-1781 + 1538) \frac{p\lambda}{140} = -243 \frac{p\lambda}{140},$$

$$Q_{x(e, 1, 2)} = EI \frac{E_2 - E_1}{\lambda^3 (1 - \mu^2)} = (-1898 + 1781) \frac{p\lambda}{140} = -117 \frac{p\lambda}{140},$$

$$Q_{x(f, 1, 2)} = EI \frac{F_2 - F_1}{\lambda^3 (1 - \mu^2)} = (-1945 + 1864) \frac{p\lambda}{140} = -81 \frac{p\lambda}{140}.$$

Summen af Transversalkræfterne i det betragtede Snit gennem hele Feltet er

$$\begin{aligned} & (Q_{x(c, 1, 2)} + 2Q_{x(d, 1, 2)} + 2Q_{x(e, 1, 2)} + Q_{x(f, 1, 2)})\lambda \\ &= -(459 + 2 \cdot 243 + 2 \cdot 117 + 81) \frac{p\lambda^2}{140} = -9p\lambda^2, \end{aligned}$$

der netop er lig med den Del af Belastningen, som er beliggende mellem Snittene A—A og 3—3. Da Transversalkraften er Nul i Snittene c—c, i—i og 3—3, ses umiddelbart, at dette maa være Tilfældet.

§ 5. Forskellige Relationer mellem Momenterne og Nedbøjningerne.

Ved den i § 1 angivne Opstilling af Differensligningen (13) udtrykkes Nedbøjningen ved de bøjende og de vridende Momenter ved Hjælp af Ligningerne (9) og (10). Man opnaar herved den angivne simple Form for Differensligningen, og i de fleste Tilfælde vil denne Ligning give tilstrækkelig nøjagtige Resultater.

For det vilkaarlige Systempunkt $(e, 2)$ (Fig. 10) er Lign. (9)

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} = -\frac{1}{EI} (M_{x(e, 2)} - \mu M_{y(e, 2)}),$$

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} = -\frac{1}{EI} (M_{y(e, 2)} - \mu M_{x(e, 2)}).$$

Ved Opstillingen af den første af disse Ligninger er det forudsat, at Momenterne M_x og M_y varierer retliniet paa Strækningen $(e, 1) - (e, 2) - (e, 3)$. En større Nøjagtighed vil man opnaa ved at forudsætte, at M_x og M_y varierer retliniet paa hver af Strækningerne $(e, 1) - (e, 2)$ og $(e, 2) - (e, 3)$, medens der godt kan

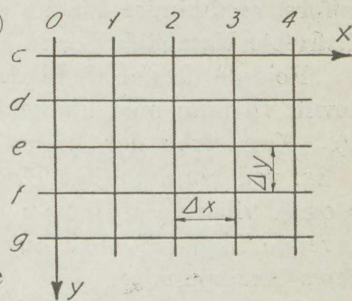


Fig. 10.

være Knæpunkter i Momentkurverne i Punkt $(e, 2)$. Man finder herved

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} &= -\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{6}(M_{x(e,1)} - \mu M_{y(e,1)}) + \frac{2}{3}(M_{x(e,2)} - \mu M_{y(e,2)}) + \frac{1}{6}(M_{x(e,3)} - \mu M_{y(e,3)}) \right], \\ \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} &= -\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{6}(M_{y(d,2)} - \mu M_{x(d,2)}) + \frac{2}{3}(M_{y(e,2)} - \mu M_{x(e,2)}) + \frac{1}{6}(M_{y(f,2)} - \mu M_{x(f,2)}) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Ligningerne (25) udtrykker sammen med Lign. (10) Sammenhængen mellem Nedbøjningerne og de bøjende og de vridende Momenter. Man finder ikke herved nogen simpel Relation mellem Nedbøjningerne og Belastningen, saaledes som ved Lign. (13). For hvert af Elementerne $\Delta x \cdot \Delta y$, hvis Midtpunkter falder i Systempunkterne, maatte man da opskrive Lign. (8), Lign. (10) og de to Ligninger (25). For hvert Element faar man altsaa 4 Ligninger, og da der til hvert Element svarer 4 ubekendte, nemlig M_x , M_y , M_v og Nedbøjningen z , vil man herved faa det tilstrækkelige Antal Ligninger til Bestemmelse af de ubekendte. Da der i hver af Ligningerne (25) indgaar 3 ubekendte Nedbøjninger og 6 ubekendte Momenter, bliver disse Ligninger imidlertid ret besværlige at behandle.

I den første af Ligningerne (25) indgaar M_y med Faktoren μ , som altid er mindre end $\frac{1}{2}$. Man vil derfor ikke begaa nogen stor Fejl ved i den første Lign. (25) at regne $M_{y(e,1)} + M_{y(e,3)} = 2 M_{y(e,2)}$ og i den anden Ligning paa lignende Maade at regne $M_{x(d,2)} + M_{x(f,2)} = 2 M_{x(e,2)}$. Herved faas

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} &= -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6} M_{x(e,1)} + \frac{2}{3} M_{x(e,2)} + \frac{1}{6} M_{x(e,3)} - \mu M_{y(e,2)} \right), \\ \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} &= -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6} M_{y(d,2)} + \frac{2}{3} M_{y(e,2)} + \frac{1}{6} M_{y(f,2)} - \mu M_{x(e,2)} \right), \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Lign. (26) er noget simplere end Lign. (25), men man faar ogsaa her 4 ubekendte for hvert Element, og Beregningen bliver derfor vanskelig at udføre, medmindre Pladen deles i meget store Elementer, hvorved den tilstræbte Nøjagtighed igen vil gaa tabt.

For de fleste af Pladens Systempunkter, hvor M_x og M_y varierer jævnt, vil man med tilstrækkelig Nøjagtighed kunne anvende Ligningerne (9). Kun hvor der findes skarpe Knæk i M_x - og M_y -Kurverne, som f. Ex. ved kontinuerlige Plader, understøttede af Bjælker i Retningerne x og y , vil man af Hensyn til den større Nøjagtighed med Fordel kunne anvende Lign. (25) eller Lign. (26) for de Elementer, hvor Kurverne har deres Knæpunkter.

Enten man nu udtrykker Sammenhængen mellem Nedbøjningen og de bøjende Momenter ved Ligningerne (9), (25) eller (26), opnaar man ved Lign. (8), som i alle Tilfælde maa være tilfredsstillende, at en vilkaarlig Del af Pladen, som tænkes udskaaret, vil være i Ligevægt. Ved en passende Inddeling i Elementer sikrer man sig herved, at Fejlen ved

den angivne Fremgangsmaade altid ligger indenfor saadanne rimelige Grænser, som ved den praktiske Anvendelse til Spændingsbestemmelse ikke bør overskrides.

De Værdier af de bøjende og vridende Momenter, som findes ved Beregningen, og de Spændinger, som herved bestemmes, angiver Middel-værdien af Momenterne og Spændingerne paa Strækningerne Δx og Δy . I Nærheden af Enkeltkræfters Angrebspunkter optræder lokale Spændinger, som kan blive større end de beregnede. Dette Forhold vil imidlertid sjældent have større Betydning, da Kræfterne sædvanlig angriber Pladen paa et Areal af en saa stor Udstrækning, at de lokale Spændinger ikke vil blive farlige.

§ 6. Kantbetingelserne ved Plader, som er simpelt understøttede eller fri langs Kanten.

Ved de i § 1 opstillede Ligninger har den Del af Pladen, som ligger i Nærheden af Kanterne, ikke været behandlet, og ved de gennemregnede Exempler forudsattes Pladen at strække sig uendelig langt i begge Retninger. Den Del af Pladen, som ligger i Nærheden af Kanterne, inddeles ogsaa i Elementer, og for disse Elementer opstilles særlige Betingelser. Pladens Kanter forudsættes at staa vinkelret paa hinanden, og Systemlinierne tænkes fortsat helt ud til Kanterne af Pladen, saaledes at de yderste Systempunkter $(c, 0)$, $(c, 1)$, $(c, 2) \dots (c, n-1)$, (c, n) , $(c, n+1) \dots$ og $(c, 0)$, $(d, 0)$, $(e, 0) \dots$ (Fig. 11) ligger i Kanterne.

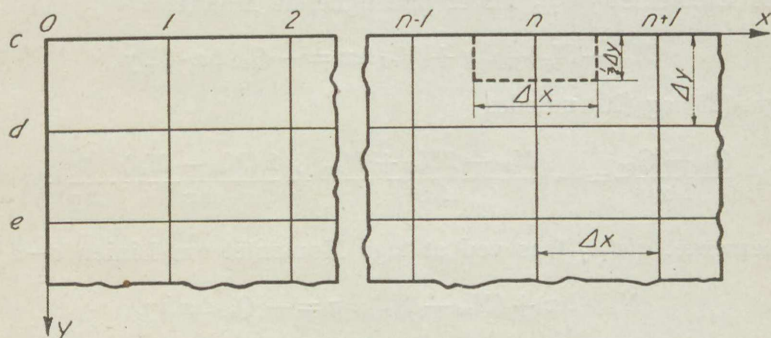


Fig. 11.

Langs med Kanterne tænkes Pladen begrænset af Flader, som staar vinkelret paa Pladens Plan. Det forudsættes, at der ikke virker vandrette Forskydningsspændinger i disse Flader, og at man altsaa langs Pladens Kanter har $M_v = 0$. Endvidere forudsættes $M_x = 0$ i den Kant, som er parallel med y -Aksen og $M_y = 0$ i den Kant, som er parallel med x -Aksen. Med Hensyn til Understøtningerne forudsættes blot, at de tillader Pladen frit at dreje sig, men at de forøvrigt efter Omstændighederne kan være faste eller mere eller mindre eftergivelige. De eneste ydre Kræfter, som paavirker Pladen langs Kanten, vil da være Belastningen og Reaktionen, der begge

er vinkelrette paa Pladens Plan og regnes at optræde som Enkeltkræfter, der angriber Pladen i Systempunkterne langs Kanten. Dersom Pladen er fri langs Kanten, bliver Reaktionen Nul, og Pladen paavirkes i de yderste Systempunkter kun af Belastningen.

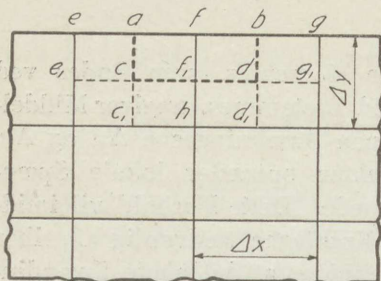


Fig. 12.

I Fig. 12 ligger Punkterne e, a, f, b og g i Kanten af Pladen. Ved det vilkaarlige Kant-Systempunkt f ligger det punkterede Kantelement $abdc$, hvis Side-linier er Δx og $\frac{1}{2} \Delta y$.

For dette Element faas ved Projek-tion paa en Linie vinkelret paa Pladens Plan følgende Ligevægtsbetingelse

$$(Q_{bd} - Q_{ac}) \cdot \frac{1}{2} \Delta y + Q_{cd} \cdot \Delta x = P - R, \quad (27)$$

hvor Størrelserne Q har samme Betydning som i Lign. 3. P er Belastningen i Punkt f , og R er Reaktionen, der regnes at virke som en Enkeltkraft i samme Punkt. Reaktionen R regnes positiv i Belastningens negative Retning.

Dernæst betragtes tre andre Elementer, nemlig eff_1e_1 , fgg_1f_1 og abd_1c_1 . For Elementet eff_1e_1 faas ved at tage Momentet om Linien $a-c$

$$(M_{xf} - M_{xe}) \cdot \frac{1}{2} \Delta y + M_{vc} \Delta x = -Q_{ac} \Delta x \cdot \frac{1}{2} \Delta y, \quad (28)$$

hvor Størrelserne M har samme Betydning som i Lign. (4).

For Elementet fgg_1f_1 bliver paa lignende Maade

$$(M_{xg} - M_{xf}) \cdot \frac{1}{2} \Delta y + M_{vd} \Delta x = -Q_{bd} \Delta x \cdot \frac{1}{2} \Delta y. \quad (29)$$

Af Lign. (28) og (29) udledes

$$\frac{Q_{bd} - Q_{ac}}{\Delta x} = - \left(\frac{M_{xe} - 2M_{xf} + M_{xg}}{\Delta x^2} + \frac{2(M_{vd} - M_{vc})}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\Delta y} \right). \quad (30)$$

For Elementet abd_1c_1 faas ved at tage Momentet om Linien $c-d$

$$M_{gh} \cdot \Delta x + (M_{vd} - M_{vc}) \Delta y = -Q_{cd} \Delta x \Delta y,$$

eller

$$Q_{cd} \cdot \frac{1}{\Delta y} = - \left(M_{gh} \cdot \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{M_{vd} - M_{vc}}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\Delta y} \right). \quad (31)$$

Af Lign. (27), (30) og (31) faas dernæst

$$- \left(\frac{1}{2} \frac{M_{xe} - 2M_{xf} + M_{xg}}{\Delta x^2} + 2 \frac{M_{vd} - M_{vc}}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\Delta y} + M_{gh} \cdot \frac{1}{\Delta y^2} \right) = \frac{P - R}{\Delta x \Delta y}. \quad (32)$$

Da M_y er Nul langs Kanten, har man ifølge Lign. (9)

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} = - \frac{M_x}{EI}. \quad (33)$$

Af Ligning (33) faas ved Differentiation $-\frac{M_{xe}-2M_{xf}+M_{xg}}{\Delta x^2}=EI\frac{\Delta^4 z}{\Delta x^4}$ for Punkt f ,

af den 2den af Ligningerne (11) faas $-M_{yh}\cdot\frac{1}{\Delta y^2}=EI\frac{\left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}+\mu\cdot\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}\right)\cdot\frac{1}{\Delta y^2}}{1-\mu^2}$ » » h ,

» » 3die. » » » $-\frac{M_{vd}-M_{vc}}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\Delta y}=\frac{\frac{\Delta^3 z}{\Delta x^2\Delta y}\cdot\frac{1}{\Delta y}}{1+\mu}$ » » f_1 ,

Indføres disse Udtryk i Lign. (32), faas

$$EI\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta^4 z}{\Delta x^4}+\frac{2\frac{\Delta^3 z}{\Delta x^2\Delta y}\cdot\frac{1}{\Delta y}}{1+\mu}+\frac{\left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}+\mu\cdot\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}\right)\cdot\frac{1}{\Delta y^2}}{1-\mu^2}\right)=\frac{P-R}{\Delta x\Delta y},$$

eller

$$\frac{1}{2}(1-\mu^2)\frac{\Delta^4 z}{\Delta x^4}+2(1-\mu)\cdot\frac{\Delta^3 z}{\Delta x^2\Delta y}\cdot\frac{1}{\Delta y}+\left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}+\mu\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}\right)\frac{1}{\Delta y^2}=\frac{1-\mu^2}{EI}\cdot\frac{P-R}{\Delta x\Delta y}, \quad (34)$$

hvor man for Elementet $abcd$ i Fig. 12 har, at Differenskvotienten $\frac{\Delta^4 z}{\Delta x^4}$

hører til Punkt f , $\frac{\Delta^3 z}{\Delta x^2\Delta y}$ til Punkt f_1 og $\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}$ og $\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}$ til Punkt h .

Forudsættes $\Delta x=\Delta y=\lambda$, har man altsaa for det punkterede Kantelementet ved Punkt (c, n) i Fig. 13

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^4 z}{\Delta x^4} \lambda^4 &= c_{n-2} - 4c_{n-1} + 6c_n - 4c_{n+1} + c_{n+2}, & c \\ \frac{\Delta^3 z}{\Delta x^2\Delta y} \lambda^3 &= \begin{cases} -c_{n-1} + 2c_n - c_{n+1} \\ + d_{n-1} - 2d_n + d_{n+1}, \end{cases} & d \\ \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} \lambda^2 &= \begin{cases} +c_n \\ -2d_n \\ +e_n, \end{cases} & e \\ \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} \lambda^2 &= d_{n-1} - 2d_n + d_{n+1}. \end{aligned}$$

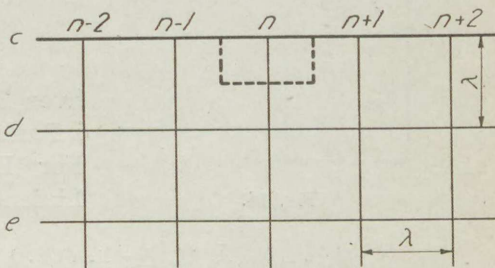


Fig. 13.

Indføres disse Udtryk for Nedbøjningerne i Lign. (34), faas for det vilkaarlige Kantelement (ved Punkt (c, n))

	$n-2$	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$
c	$+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu^2\right)$	$-(4-2\mu-2\mu^2)$	$+(8-4\mu-3\mu^2)$	$-(4-2\mu-2\mu^2)$	$+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu^2\right)$
d		$+(2-\mu)$	$-(6-2\mu)$	$+(2-\mu)$	
e			$+1$		

$$= (1-\mu^2)(P-R)\frac{\lambda^2}{EI} \quad (35)$$

For det næstyderste Kantelement (ved Punkt $(c, 1)$, Fig. 11) gælder Lign. (34).

I Punkt $(c, 0)$ er $M_x = M_y = 0$. Af Lign. (9) følger da, at

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} = \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} = 0 \text{ for Punkt } (c, 0).$$

For Punkt $(c, 1)$ bliver herefter

$$\frac{\Delta^4 z}{\Delta x^4} \Delta x^4 = \frac{\Delta^2 \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}}{\Delta x^2} \Delta x^4 = \left\{ \begin{array}{l} -2c_0 + 4c_1 - 2c_2 \\ + c_1 - 2c_2 + c_3 \end{array} \right\} = -2c_0 + 5c_1 - 4c_2 + c_3.$$

De i Lign. (34) indgaaende $\frac{\Delta^3 z}{\Delta x^2 \Delta y}$ samt $\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}$ og $\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}$ forbliver uforandrede.

Ved Indsættelse af Udtrykkene for Differenskvotienterne i Lign. (34) faas for $\Delta x = \Delta y = \lambda$

	0	1	2	3
c	$-(3-2\mu-\mu^2) + (\frac{1}{2}-4\mu-\frac{5}{2}\mu^2)$	$-(4-2\mu-2\mu^2) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu^2)$		
d	$+(2-\mu)$	$-(6-2\mu)$	$+(2-\mu)$	
e		$+1$		

$$= (1-\mu^2)(P-R) \frac{\lambda^2}{EI}. \quad (36)$$

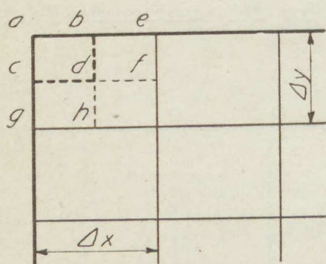


Fig. 14.

For Hjørneelementet $abdc$ (Fig. 14), hvis Sidelinier er $\frac{1}{2} \Delta x$ og $\frac{1}{2} \Delta y$, bliver Projektionsligningen

$$Q_{bd} \cdot \frac{1}{2} \Delta y + Q_{cd} \cdot \frac{1}{2} \Delta x = P - R, \quad (37)$$

hvor Belastningen P og Reaktionen R virker i Punkt a .

For Elementet $aefc$ tages Momentet om Linien $b-d$, hvorved faas

$$M_{xe} \cdot \frac{1}{2} \Delta y + M_{vd} \Delta x + Q_{ef} \cdot \frac{1}{2} \Delta y \cdot \frac{1}{2} \Delta x + (P - R) \cdot \frac{1}{2} \Delta x = 0.$$

Snittet $e-f$ tænkes herved lagt umiddelbart tilvenstre for en eventuel Kraft i Punkt e , medens Kraften $P-R$ paavirker Elementet i Punkt a . Transversalkraften regnes ensformig fordelt paa Strækningen $c-f$, hvoraf følger

$$Q_{bd} \cdot \frac{1}{2} \Delta y = \frac{1}{2} [(P - R) + Q_{ef} \cdot \frac{1}{2} \Delta y],$$

der indføres i Momentligningen, som herved bliver

$$M_{xe} \cdot \frac{1}{2} \Delta y + M_{vd} \Delta x = -Q_{bd} \Delta x \cdot \frac{1}{2} \Delta y. \quad (38)$$

For Elementet $abhg$ tages Momentet om Linien $c-d$, hvorved faas

$$M_{yg} \cdot \frac{1}{2} \Delta x + M_{vd} \Delta y = -Q_{cd} \cdot \frac{1}{2} \Delta x \Delta y. \quad (39)$$

Af Ligningerne (37), (38) og (39) faas

$$-\left(\frac{1}{2} M_{xe} \cdot \frac{1}{\Delta x^2} + 2M_{vd} \cdot \frac{1}{\Delta x \Delta y} + \frac{1}{2} M_{yg} \cdot \frac{1}{\Delta y^2}\right) = \frac{P-R}{\Delta x \Delta y}. \quad (40)$$

Ved Lign. (33) har man $-M_{xe} \cdot \frac{1}{\Delta x^2} = EI \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} \cdot \frac{1}{\Delta x^2}$ for Punkt e ,

og analogt hermed $-M_{yg} \cdot \frac{1}{\Delta y^2} = EI \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} \cdot \frac{1}{\Delta y^2}$ for Punkt g ,

den 3die Lign. (11) giver $-M_{vd} \cdot \frac{1}{\Delta x \Delta y} = EI \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y} \cdot \frac{1}{\Delta x \Delta y}}{1 + \mu}$ for Punkt d .

Disse Udtryk indføres i Lign. (40), hvorved man finder

$$EI \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} \cdot \frac{1}{\Delta x^2} + 2 \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y} \cdot \frac{1}{\Delta x \Delta y}}{1 + \mu} + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} \cdot \frac{1}{\Delta y^2} \right) = \frac{P-R}{\Delta x \Delta y},$$

eller

$$\frac{1}{2} (1 - \mu^2) \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} \cdot \frac{1}{\Delta x^2} + 2(1 - \mu) \frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y} \cdot \frac{1}{\Delta x \Delta y} + \frac{1}{2} (1 - \mu^2) \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} \cdot \frac{1}{\Delta y^2} = \frac{1 - \mu^2}{EI} \cdot \frac{P-R}{\Delta x \Delta y}, \quad (41)$$

hvor Differenskvotienten $\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}$ hører til Punkt e , $\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y}$ til Punkt d og $\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}$ til Punkt g .

Med $\Delta x = \Delta y = \lambda$ bliver altsaa for Hjørneelementet (ved Punkt $(c, 0)$, Fig. 11)

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} \lambda^2 = c_0 - 2c_1 + c_2,$$

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y} \lambda^2 = \begin{cases} +c_0 - c_1 \\ -d_0 + d_1, \end{cases}$$

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} \lambda^2 = \begin{cases} +c_0 \\ -2d_0 \\ +e_0, \end{cases}$$

som ved Indsættelse i Lign. (41) giver

	0	1	2
c	$+(3 - 2\mu - \mu^2)$	$-(3 - 2\mu - \mu^2)$	$+(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu^2)$
d	$-(3 - 2\mu - \mu^2)$	$+(2 - 2\mu)$	
e	$+(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu^2)$		

$$= (1 - \mu^2)(P-R) \frac{\lambda^2}{EI}. \quad (42)$$

For et vilkaarligt Element i næstyderste Række (ved Punkt (d, n) , Fig. 11) gælder Lign. (8). $\frac{\Delta^2 M_x}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^2 M_v}{\Delta x \Delta y}$ og $\frac{\Delta^2 M_y}{\Delta y^2}$ udtrykkes ved Nedbøjningerne ved Hjælp af Ligningerne (12) og indføres i Lign. (8), hvorved man finder, at Lign. (13) ogsaa gælder. I Punkt (d, n) kan $\frac{\Delta^4 z}{\Delta y^4}$

imidlertid ikke udtrykkes paa den sædvanlige Maade ved Nedbøjningerne i 5 paa hinanden følgende Systempunkter.

Man faar en Bestemmelse af $\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}$ i Punkt (c, n) ved Hjælp af den 2den Lign. (11). Da M_y i Punkt (c, n) er Nul, har man for dette Punkt

$$M_{y(c, n)} = -EI \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}}{1 - \mu^2} = 0,$$

hvoraf

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} = -\mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}.$$

For Punkt (d, n) bliver altsaa

$$\frac{\Delta^4 z}{\Delta y^4} \Delta y^4 = \frac{\Delta^2 \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}}{\Delta y^2} \Delta y^4 = \begin{cases} + \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} \Delta y^2 \text{ i Punkt } (c, n) \\ - 2 \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} \Delta y^2 \text{ i } \quad \quad \quad (d, n) \\ + \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} \Delta y^2 \text{ i } \quad \quad \quad (e, n). \end{cases}$$

I Punkt (c, n) er

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} \Delta y^2 = -\mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} \Delta y^2 = -\mu \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 c_{n-1} + 2\mu \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 c_n - \mu \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 c_{n+1},$$

$$\text{I Punkt } (d, n) \text{ er} \quad -2 \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} \Delta y^2 = \dots \begin{cases} -2c_n \\ +4d_n \\ -2e_n. \end{cases}$$

$$\text{I Punkt } (e, n) \text{ er} \quad \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} \Delta y^2 = \dots \begin{cases} +d_n \\ -2e_n \\ +f_n. \end{cases}$$

Altsaa er

$$\frac{\Delta^4 z}{\Delta y^4} \cdot \Delta y^4 = \begin{cases} -\mu \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 c_{n-1} - \left(2 - 2\mu \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \right) c_n - \mu \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 c_{n+1} \\ + 5d_n \\ - 4e_n \\ + f_n. \end{cases}$$

Forudsættes kvadratiske Elementer med Sidelinie $\Delta x = \Delta y = \lambda$, har man altsaa

$$\frac{\Delta^4 z}{\Delta y^4} \lambda^4 = \begin{cases} -\mu c_{n-1} - (2 - 2\mu) c_n - \mu c_{n+1} \\ + 5d_n \\ - 4e_n \\ + f_n, \end{cases}$$

og ligesom ved Opstillingen af Lign. (14)

$$\frac{\Delta^4 z}{\Delta x^4} \lambda^4 = d_{n-2} - 4d_{n-1} + 6d_n - 4d_{n+1} + d_{n+2}$$

og

$$2 \frac{\Delta^4 z}{\Delta x^2 \Delta y^2} \lambda^4 = \begin{cases} +2c_{n-1} - 4c_n + 2c_{n+1} \\ -4d_{n-1} + 8d_n - 4d_{n+1} \\ +2e_{n-1} - 4e_n + 2e_{n+1}. \end{cases}$$

Ved Indsættelse i Lign. (13) finder man herved

	$n-2$	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$
c		$+(2-\mu)$	$-(6-2\mu)$	$+(2-\mu)$	
d	$+1$	-8	$+19$	-8	$+1$
e		$+2$	-8	$+2$	
f			$+1$		

$$= (1-\mu)^2 P \frac{\lambda^2}{EI}. \quad (43)$$

For det næstyderste Diagonalelement (ved Punkt $(d, 1)$, Fig. 11) har man under Forudsætning af kvadratiske Elementer

$$\frac{\Delta^4 z}{\Delta x^4} \lambda^4 = \begin{cases} -\mu c_0 \\ -(2-2\mu)d_0 + 5d_1 - 4d_2 + d_3 \\ -\mu e_0. \end{cases}$$

$$2 \frac{\Delta^4 z}{\Delta x^2 \Delta y^2} \lambda^4 = \begin{cases} +2c_0 - 4c_1 + 2c_2 \\ -4d_0 + 8d_1 - 4d_2 \\ +2e_0 - 4e_1 + 2e_2 \end{cases}, \quad \frac{\Delta^4 z}{\Delta y^4} \lambda^4 = \begin{cases} -\mu c_0 - (2-2\mu)c_1 - \mu c_2 \\ +5d_1 \\ -4e_1 \\ +f_1. \end{cases}$$

Ved Indsættelse i Lign. (13) faas

	0	1	2	3
c	$+(2-2\mu)$	$-(6-2\mu)$	$+(2-\mu)$	
d	$-(6-2\mu)$	$+18$	-8	$+1$
e	$+(2-\mu)$	-8	$+2$	
f		$+1$		

$$= (1-\mu^2) P \frac{\lambda^2}{EI}. \quad (44)$$

Dersom Pladens Nedbøjning langs Kanten er Nul, har man for Punkt (c, n)

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} = 0, \text{ og } \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} = -\mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} = 0.$$

Man kan da ved kvadratiske Elementer anvende Ligningerne (15) og (16), naar man for Punkt (c, n) indfører $c_n=0$ og $C_n = \left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} \right) \lambda^2 = 0$.
For Elementet ved Punkt (d, n) bliver Lign. (16) herved

$$\left. \begin{array}{l} D_{n-1} - 4D_n + D_{n+1} \\ + E_n \end{array} \right\} = (1 - \mu^2) P \frac{\lambda^2}{EI},$$

og Lign. (15)

$$\left. \begin{array}{l} d_{n-1} - 4d_n + d_{n+1} \\ + e_n \end{array} \right\} = D_n.$$

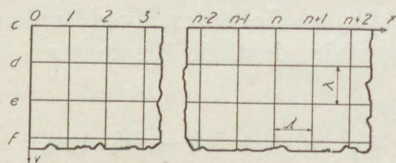
For Elementet ved Punkt (d, 1) bliver Lign. (16)

$$\left. \begin{array}{l} -4D_1 + D_2 \\ + E_1 \end{array} \right\} = (1 - \mu^2) P \frac{\lambda^2}{EI},$$

og Lign. (15)

$$\left. \begin{array}{l} -4d_1 + d_2 \\ + e_1 \end{array} \right\} = D_1.$$

Følgende Tabel (Side 46—47) giver en samlet Oversigt over de for $\Delta x = \Delta y = \lambda$ udledede Ligninger.



Plade
med konstant Inerti-
moment. Simpelt under-
støttet eller fri langs
Kanten.

$$\Delta x = \Delta y = \lambda.$$

		0	1	2	
	c	$+(3-2\mu-\mu^2)$	$-(3-2\mu-\mu^2)$	$+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu^2)$	
Punkt (c, 0)	d	$-(3-2\mu-\mu^2)$	$+(2-2\mu)$		$= (1 - \mu^2) (P - R) \frac{\lambda^2}{EI}$
	e	$+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu^2)$			

		0	1	2	3	
	c	$-(3-2\mu-\mu^2)$	$+(\frac{1}{2}-4\mu-\frac{5}{2}\mu^2)$	$-(4-2\mu-2\mu^2)$	$+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu^2)$	
Punkt (c, 1)	d	$+(2-\mu)$	$-(6-2\mu)$	$+(2-\mu)$		$= (1 - \mu^2) (P - R) \frac{\lambda^2}{EI}$
	e		$+1$			

		0	1	2	3	
	c	$+(2-2\mu)$	$-(6-2\mu)$	$+(2-\mu)$		
Punkt (d, 1)	d	$-(6-2\mu)$	$+18$	-8	$+1$	$= (1 - \mu^2) P \frac{\lambda^2}{EI}$
	e	$+(2-\mu)$	-8	$+2$		
	f		$+1$			

eller, naar Nedbøjningen $\left\{ \begin{array}{l} -4D_1 + D_2 \\ + E_1 \end{array} \right\} = (1 - \mu^2) P \frac{\lambda^2}{EI}$ og $\left\{ \begin{array}{l} -4d_1 + d_2 \\ + e_1 \end{array} \right\} = D_1$.

	$n-2$	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	
Punkt (c, n)	$+(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mu^2)$	$-(4-2\mu-2\mu^2)$	$+(8-4\mu-3\mu^2)$	$-(4-2\mu-2\mu^2)$	$+(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mu^2)$	$= (1-\mu^2)(P-R) \frac{\lambda^2}{EI}$
d		$+(2-\mu)$	$-(6-2\mu)$	$+(2-\mu)$		
e			$+1$			

	$n-2$	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	
Punkt (d, n)		$+(2-\mu)$	$-(6-2\mu)$	$+(2-\mu)$		$= (1-\mu^2)P \frac{\lambda^2}{EI}$
d	$+1$	-8	$+19$	-8	$+1$	
e		$+2$	-8	$+2$		
f			$+1$			

eller, naar Nedbøjningen $\left\{ \begin{matrix} D_{n-1} - 4D_n + D_{n+1} \\ + E_n \end{matrix} \right\} = (1-\mu^2)P \frac{\lambda^2}{EI}$ og $\left\{ \begin{matrix} d_{n-1} - 4d_n + d_{n+1} \\ + e_n \end{matrix} \right\} = D_n$ langs Kanten er Nul,

	$n-2$	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	
Punkt (e, n)			$+1$			$= (1-\mu^2)P \frac{\lambda^2}{EI}$, eller $\left\{ \begin{matrix} D_n \\ E_{n-1} - 4E_n + E_{n+1} \\ F_n \end{matrix} \right\} = (1-\mu^2)P \frac{\lambda^2}{EI}$, $\left\{ \begin{matrix} d_n \\ e_{n-1} - 4e_n + e_{n+1} \\ f_n \end{matrix} \right\} = E_n$.
d		$+2$	-8	$+2$		
e	$+1$	-8	$+20$	-8	$+1$	
f		$+2$	-8	$+2$		
g			$+1$			

§ 7. Exempel. Kvadratisk Plade, simpelt understøttet langs alle fire Sider. (Fig. 15).

Pladen forudsættes belastet med en ensformig fordelt Belastning p pr. Arealenhed. For hvert Systempunkt regnes den Del af Belastningen, som virker paa Pladen indenfor det til Systempunktet svarende Element, at angribe i Systempunktet. I Hjørnet (Punkt $(c, 0)$) er saaledes $P = \frac{1}{4} p\lambda^2$, og i hvert af Punkterne $(c, 1)$, $(c, 2)$ og $(c, 3)$ er $P = \frac{1}{2} p\lambda^2$, medens man for hvert Systempunkt indenfor Kanten har $P = p\lambda^2$. Understøtningerne er af en saadan Beskaffenhed, at de tillader Pladen frit at dreje sig, men hindrer den i at bøje sig op eller ned langs Kanten.

Da Nedbøjningerne af Systempunkterne langs Kanten er Nul, skal man ikke ved Bestemmelsen af Nedbøjningerne opskrive Ligningen for disse Punkter. Disse Ligninger benyttes til Bestemmelse af Reaktionen, naar først Nedbøjningerne er fundet.

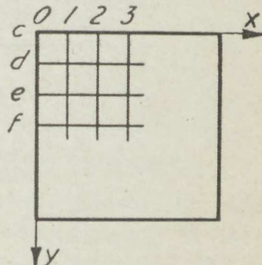


Fig. 15.

Nedbøjningerne bestemmes ved de to Sæt Ligninger (Tabellen paa Side 46—47, Punkt (d, 1), (d, n) og (e, n)).

$$\begin{array}{llllll} \text{Punkt (d, 1)} & -4D_1 + 2D_2 & & = 1 \cdot (1 - \mu^2) \frac{EI}{p\lambda^4}, \\ \text{» (d, 2)} & D_1 - 4D_2 + D_3 + E_3 & = 1 & \text{» »}, \\ \text{» (d, 3)} & 2D_2 - 4D_3 + E_3 & = 1 & \text{» »}, \\ \text{» (e, 2)} & 2D_2 - 4E_2 + 2E_3 & = 1 & \text{» »}, \\ \text{» (e, 3)} & D_3 + 2E_2 - 4E_3 + F_3 & = 1 & \text{» »}, \\ \text{» (f, 3)} & 4E_3 - 4F_3 & = 1 & \text{» »}, \end{array}$$

og

$$\begin{array}{llllll} \text{Punkt (d, 1)} & -4d_1 + 2d_2 & & = D_1, \\ \text{» (d, 2)} & d_1 - 4d_2 + d_3 + e_3 & = D_2, \\ \text{» (d, 3)} & 2d_2 - 4d_3 + e_3 & = D_3, \\ \text{» (e, 2)} & 2d_2 - 4e_2 + 2e_3 & = E_2, \\ \text{» (e, 3)} & d_3 + 2e_2 - 4e_3 + f_3 & = E_3, \\ \text{» (f, 3)} & 4e_3 - 4f_3 & = F_3. \end{array}$$

Af det første Sæt Ligninger findes $D_1 = -99 \cdot \frac{1 - \mu^2}{104} \frac{p\lambda^4}{EI}$,

$$\begin{array}{llll} D_2 = -146 & \text{»} & \text{»} & , \\ D_3 = -160 & \text{»} & \text{»} & , \\ E_2 = -221 & \text{»} & \text{»} & , \\ E_3 = -244 & \text{»} & \text{»} & , \\ F_3 = -270 & \text{»} & \text{»} & , \end{array}$$

som indsat i det andet Sæt Ligninger giver

$$\begin{array}{llll} d_1 = 7783 \cdot \frac{1 - \mu^2}{52 \cdot 104} \frac{p\lambda^4}{EI}, \\ d_2 = 12992 & \text{»} & \text{»} & , \\ d_3 = 14792 & \text{»} & \text{»} & , \\ e_2 = 21801 & \text{»} & \text{»} & , \\ e_3 = 24864 & \text{»} & \text{»} & , \\ f_3 = 28374 & \text{»} & \text{»} & . \end{array}$$

Momenterne M_x beregnes paa lignende Maade som i § 2.

Indføres $\lambda = \frac{l}{6}$, faas herved følgende Nedbøjninger og Momenter M_x :

Nedbøjninger.

	0	1	2	3	
c	0	0	0	0	
d	0	0,00111	0,00185	0,00211	$(1 - \mu^2) \frac{pl^4}{EI}$
e	0	0,00185	0,00311	0,00355	» »
f	0	0,00211	0,00355	0,00405	» »

Momenter M_x .

	0	1	2	3	
c	0	0	0	0	
d	0	+0,0132 + $\mu \cdot 0,0132$	+0,0175 + $\mu \cdot 0,0215$	+0,0185 + $\mu \cdot 0,0242$	pl^2
e	0	+0,0215 + $\mu \cdot 0,0175$	+0,0295 + $\mu \cdot 0,0295$	+0,0315 + $\mu \cdot 0,0337$	»
f	0	+0,0242 + $\mu \cdot 0,0185$	+0,0337 + $\mu \cdot 0,0315$	+0,0360 + $\mu \cdot 0,0360$	»

Momenterne M_y findes af M_x ved Symmetrien om en Diagonal.

De vridende Momenter Størrelse, Hovedsnittenes Retning samt Hovedmomenternes Størrelse kan dernæst bestemmes paa lignende Maade som i § 4.

Reaktionerne bestemmes ved Hjælp af de i Tabellen paa Side 46—47 angivne Ligninger for Kantsystempunkterne. I Ligningerne indføres $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Man faar herved

$$\text{for Punkt } (c, 0): \quad (2 - 2\mu) d_1 = (1 - \mu^2) (P - R) \frac{\lambda^2}{EI},$$

$$\text{hvor} \quad d_1 = 7783 \cdot \frac{1 - \mu^2}{52 \cdot 104} \cdot \frac{p\lambda^4}{EI},$$

$$P = \frac{1}{4} p\lambda^2,$$

$$\lambda = \frac{1}{8} l;$$

herved bliver

$$R = -(0,0731 - \mu \cdot 0,0800) pl^2;$$

$$\text{for Punkt } (c, 1): \quad -(6 - 2\mu) d_1 + (3 - \mu) d_2 = (1 - \mu^2) (P - R) \frac{\lambda^2}{EI},$$

$$\text{hvoraf} \quad R = (0,0536 - \mu \cdot 0,0132) pl^2;$$

$$\text{for Punkt } (c, 2): \quad (2 - \mu) d_1 - (6 - 2\mu) d_2 + (2 - \mu) d_3 + e_2 = (1 - \mu^2) (P - R) \frac{\lambda^2}{EI},$$

$$\text{hvoraf} \quad R = (0,0704 - \mu \cdot 0,0175) pl^2;$$

$$\text{for Punkt } (c, 3): \quad (4 - 2\mu) d_2 - (6 - 2\mu) d_3 + e_3 = (1 - \mu^2) (P - R) \frac{\lambda^2}{EI},$$

$$\text{hvoraf} \quad R = (0,0752 - \mu \cdot 0,0185) pl^2.$$

I Hjørnet fandtes Reaktionen negativ, hvilket vil sige, at der her maa findes en lodret nedadrettet Kraft, som hindrer Hjørnet i at bøje sig op.

I hosstaaende Tabel er Reaktionerne for Punkterne $(c, 1)$, $(c, 2)$, og $(c, 3)$ angivet pr. Længdeenhed af Understøtningen, idet de fundne Værdier af R i disse Punkter er divideret med $\frac{1}{8}l$. For Punkt $(c, 0)$ er bibeholdt den fundne Enkeltkraft.

Punkt		(c, 0)	(c, 1)	(c, 2)	(c, 3)	
Reaktioner	pr. Længdeenhed	0	$0,322 - \mu \cdot 0,079$	$0,422 - \mu \cdot 0,105$	$0,451 - \mu \cdot 0,111$	pl
	Enkeltkraft	$-(0,073 - \mu \cdot 0,080)$				pl^2

§ 8. Relationer mellem Reaktioner, Transversalkræfter og vridende Momenter langs Kanten. Hjørnereaktionen.

I Paragraf 6 er Betingelserne for de rektangulære Elementer langs Kanten opstillet, og det blev herved forudsat, at det vridende Moment var Nul i Elementernes yderste Sideflade. For Elementet $abdc$ (Fig. 12) forudsattes saaledes, at det vridende Moment langs Siden $a - b$ var Nul, medens de vridende Momenter i de andre tre Sider bestemtes ved Nedbøjningerne i Pladens Systempunkter.

Ifølge Lign. (27) har man

$$(Q_{bd} - Q_{ac}) \cdot \frac{1}{2} \Delta y + Q_{cd} \Delta x = P - R.$$

Indsættes heri fra Lign. (30)

$$(Q_{bd} - Q_{ac}) = - \left(\frac{M_{xe} - 2M_{xf} + M_{xg}}{\Delta x} + 2 \frac{M_{vd} - M_{vc}}{\Delta y} \right),$$

faas

$$P - R = Q_{cd} \cdot \Delta x - \frac{1}{2} (M_{xe} - 2M_{xf} + M_{xg}) \frac{\Delta y}{\Delta x} - (M_{vd} - M_{vc}).$$

Hvis man heri lader Δy være uendelig lille, forsvinder Leddet

$$\frac{1}{2} (M_{xe} - 2M_{xf} + M_{xg}) \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Punkt c falder sammen med Punkt a , og Punkt d falder sammen med Punkt b . Man finder herved

$$P - R = Q_{ab} \cdot \Delta x - (M_{vb} - M_{va}),$$

hvor M_{vb} og M_{va} betegner de vridende Momenter og Q_{ab} Transversalkraften pr. Længdeenhed i et Snit parallelt med Kanten i Nærheden af denne.

Saaframt der ikke virker nogen Belastning P i Punkt f , bliver altsaa

$$\frac{R}{\Delta x} = -Q_{ab} + \frac{M_{vb} - M_{va}}{\Delta x},$$

eller almindeligt

$$\frac{R}{\Delta x} = -Q_y + \frac{\Delta M_v}{\Delta x}. \quad (45)$$

Lign. (45) angiver saaledes en Relation mellem Reaktionen og de Transversalkræfter og vridende Momenter, som optræder i Pladen i Nærheden af Kanten.

Af Lign. (30) faas

$$-2 \frac{M_{vd} - M_{vc}}{\Delta x} = \frac{Q_{bd} - Q_{ac}}{\Delta x} \Delta y + \frac{M_{xe} - 2M_{xf} + M_{xg}}{\Delta x^2} \Delta y,$$

eller

$$-2 \frac{\Delta M_v}{\Delta x} = \left(\frac{\Delta Q_x}{\Delta x} + \frac{\Delta^2 M_x}{\Delta x^2} \right) \Delta y.$$

Heri har $\frac{\Delta^2 M_x}{\Delta x^2}$ en bestemt Værdi, som svarer til Pladens Nedbøjning langs Kanten. Lader man nu Δy være uendelig lille, saa maa enten $\frac{\Delta Q_x}{\Delta x}$ være uendelig stor eller $\frac{\Delta M_v}{\Delta x}$ uendelig lille. Da $\frac{\Delta Q_x}{\Delta x}$ ikke kan være uendelig stor, og da M_v kun i specielle Tilfælde kan have en konstant Størrelse paa hele Strækningen langs Kanten, saa følger heraf, at det vridende Moment ikke i Almindelighed kan optræde med sin fulde Størrelse i et Snit parallelt med Kanten umiddelbart indenfor denne, men at

der langs Kanten maa findes en Stribe, i hvilken Størrelsen af de vridende Momenter aftager ud imod Kanten, hvor $M_v = 0$.

Ved Opstillingen af Lign. (32) forudsattes de vridende Momenter i Elementets Sider $a-c$ og $b-d$ (Fig. 12) at være ensformig fordelt helt ud til Pladens Kant. Dersom denne Forudsætning var rigtig, maatte de samme vridende Momenter optræde i et Snit parallelt med Kanten umiddelbart indenfor denne. Da dette ikke er muligt, kan den angivne Forudsætning ikke være helt rigtig, men maa betragtes som en rimelig Tilnærmelse.

For Hjørneelementet (Fig. 14) har man ifølge Lign. (40)

$$P - R = - \left(\frac{1}{2} M_{xe} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} + 2M_{vd} + \frac{1}{2} M_{yg} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} \right).$$

Da M_x er Nul langs Kanten c , og M_y er Nul langs Kanten 1 , bliver $M_{xe} = 0$ og $M_{yg} = 0$, naar Δx og Δy forudsættes uendelig smaa. I Hjørnet eller i Nærheden af dette maa der da virke en Kraft

$$P - R = - 2 M_{va},$$

hvor M_{va} er det vridende Moment pr. Længdeenhed ved Hjørnet. Saa fremt der ikke virker nogen Belastning P i Hjørnet, bliver Hjørnereaktionen

$$R_a = 2 M_{va}. \quad (46)$$

Ifølge Ligning (37) er

$$Q_{bd} \cdot \frac{1}{2} \Delta y + Q_{cd} \cdot \frac{1}{2} \Delta x = P - R.$$

Lader man heri Δx og Δy være uendelig smaa, saa maa $P - R$ ligeledes være uendelig lille, for at Q_{bd} og Q_{cd} kan beholde endelige Værdier. Heraf følger, at Hjørnereaktionen ikke kan angribe som en Enkeltkraft i selve Hjørnet, men maa være fordelt over den nærmeste Del af Pladen. Fejlen, man begaar ved at regne Hjørnereaktionen som en Enkeltkraft, er af samme Art og lignende Betydning som den Fejl, man begaar ved at regne Belastningen paa Pladen virkende i Systempunkterne.

§ 9. Indflydelsen af et Kraftsystem, i hvilket Kræfterne holder hverandre i Ligevægt. Exempel.

Ved de foregaaende Exempler, hvor Belastningen p var ensformig fordelt, udførtes Beregningen med Enkeltkræfter, som erstattede den ensformig fordelte Belastning. Belastningen $p\lambda^2$, som virker paa Pladen inden for det ved Systemlinierne $r, r+1, m, m+1$ (Fig. 16) begrænsede Kvadrat, regnedes at angribe i Systempunkterne (r, m) , $(r, m+1)$, $(r+1, m)$ og $(r+1, m+1)$ med $\frac{1}{4} p\lambda^2$ i hvert. Man har altsaa paa Pladen, som i Forvejen er belastet med den ensformig fordelte Belastning p , tilføjet et Kraftsystem, som bestaar af Belastningen $-p$ pr. Arealenhet paa Kvadratet inden for de fire

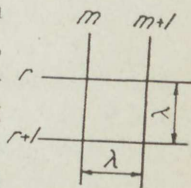


Fig. 16.

Systemlinier og af Enkeltkræfterne $\frac{1}{4}p\lambda^2$ i de fire Systempunkter. I dette Kraftsystem holder de enkelte Kræfter hverandre i Ligevægt. Et saadant Kraftsystems Indflydelse paa Formforandringer og Spændinger i Pladen vil være lille i en Afstand fra Kraftsystemet, som er stor i Forhold til Systemets Udstrækning (Saint Venants Princip).

I det følgende Exempel beregnes Nedbøjninger, Momenter og Reaktionen for den i Fig. 17 viste kvadratiske Plade, som er simpelt understøttet langs alle fire Sider og paavirket af det viste Kraftsystem, hvis enkelte Kræfter holder hverandre i Ligevægt, nemlig en Kraft $4P$ i Punkt $(f, 3)$ og en Kraft $-P$ i hvert af de fire Punkter $(e, 2)$, $(e, 4)$, $(g, 2)$ og $(g, 4)$.

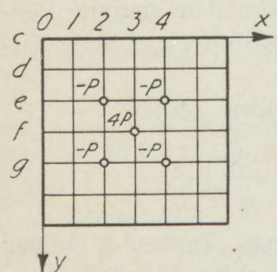


Fig. 17.

Ligesom ved Exemplet i § 7 bestemmes Nedbøjningerne ved de to Sæt Ligninger, af hvilke det sidste Sæt er nøjagtig som i § 7. Det første Sæt Ligninger bliver

$$\begin{array}{llll}
 \text{Punkt } (d, 1) & -4D_1 + 2D_2 & = & 0, \\
 \text{» } (d, 2) & D_1 - 4D_2 + D_3 + E_2 & = & 0, \\
 \text{» } (d, 3) & 2D_2 - 4D_3 + E_3 & = & 0, \\
 \text{» } (e, 2) & 2D_2 - 4E_2 + 2E_3 & = & -1 \cdot (1 - \mu^2) P \frac{\lambda^2}{EI}, \\
 \text{» } (e, 3) & D_3 + 2E_2 - 4E_3 + F_3 & = & 0, \\
 \text{» } (f, 3) & 4E_3 - 4F_3 & = & 4 \cdot (1 - \mu^2) P \frac{\lambda^2}{EI}.
 \end{array}$$

Den venstre Side af disse Ligninger er den samme som i § 7.

$$\text{Af det første Sæt Ligninger findes } D_1 = + 1 \cdot \frac{1 - \mu^2}{104} \cdot P \frac{\lambda^2}{EI},$$

$$\begin{array}{llll}
 \text{» } \text{» } \text{» } \text{» } \text{» } \text{» } & D_2 = + 2 & \text{» } & \text{» } , \\
 \text{» } \text{» } \text{» } \text{» } \text{» } \text{» } & D_3 = - 6 & \text{» } & \text{» } , \\
 \text{» } \text{» } \text{» } \text{» } \text{» } \text{» } & E_2 = + 13 & \text{» } & \text{» } , \\
 \text{» } \text{» } \text{» } \text{» } \text{» } \text{» } & E_3 = - 28 & \text{» } & \text{» } , \\
 \text{» } \text{» } \text{» } \text{» } \text{» } \text{» } & F_3 = - 132 & \text{» } & \text{» } ,
 \end{array}$$

som indsat i det andet Sæt Ligninger giver

$$\begin{array}{ll}
 d_1 = 267 \cdot \frac{1 - \mu^2}{52 \cdot 104} \cdot P \frac{\lambda^2}{EI}, \\
 d_2 = 560 & \text{» } , \\
 d_3 = 894 & \text{» } , \\
 e_2 = 1183 & \text{» } , \\
 e_3 = 2144 & \text{» } , \\
 f_3 = 3860 & \text{» } .
 \end{array}$$

Momenterne M_x beregnes som i § 2 og Reaktionen som i § 7. Man finder herved

Nedbøjninger.

	0	1	2	3	
c	0	0	0	0	
d	0	0,0014	0,0029	0,0046	$(1-\mu^2)P \frac{l^2}{EI}$
e	0	0,0029	0,0061	0,0110	» »
f	0	0,0046	0,0110	0,0198	» »

Momenter M_x .

	0	1	2	3	
c	0	0	0	0	
d	0	$-0,005 - \mu \cdot 0,005$	$-0,008 - \mu \cdot 0,012$	$+0,124 - \mu \cdot 0,066$	P
e	0	$-0,012 - \mu \cdot 0,008$	$-0,063 - \mu \cdot 0,063$	$+0,355 - \mu \cdot 0,086$	»
f	0	$-0,066 + \mu \cdot 0,124$	$-0,086 + \mu \cdot 0,355$	$+0,635 + \mu \cdot 0,635$	»

Reaktioner.

Punkt	(c, 0)	(c, 1)	(c, 2)	(c, 3)	
Reaktion	$-0,099 + \mu \cdot 0,099$	$-0,014 + \mu \cdot 0,005$	$-0,027 + \mu \cdot 0,008$	$+0,181 - \mu \cdot 0,125$	P

Endskønt Pladens Udstrækning ikke er særlig stor i Forhold til Kraftsystemets Udstrækning, bliver Momenterne i Pladen forholdsvis smaa, saasnart man fjerner sig lidt fra Kraftsystemet.

§ 10. Usymmetrisk Belastning. Exempel.

Den angivne Fremgangsmaade kan ligesaa godt anvendes ved usymmetrisk som ved symmetrisk Belastning. Ved Anvendelsen er der blot den Forskel, at medens man ved symmetrisk Belastning finder Pladens Nedbøjninger og Spændinger i nogle Systempunkter ved Hjælp af Symmetrien og derfor ikke behøver at anvende Differensligningen for disse Punkter, saa maa man ved en vilkaarlig usymmetrisk Belastning, saafremt denne ikke kan omdannes til en Sum af symmetrisk beliggende Belastninger, opstille Ligningen for alle de Systempunkter, hvis Nedbøjninger ikke i Forvejen kendes.

Paavirket Pladen af Enkeltkræfter, vil man saavidt muligt indlægge Systemlinierne saaledes, at Kræfterne angriber Pladen i Systempunkterne. I Regelen vil man herved kunne anvende kvadratiske Elementer, hvorved Ligningerne bliver betydelig simplere at behandle end ved rektangulære Elementer.

Undertiden er det ikke muligt ved en passende Inddeling med Anvendelse af kvadratiske Elementer at faa Enkeltkræfterne til at angribe i Systempunkterne. Dersom Afstanden imellem Kræfternes Angrebspunkter og de nærmeste Systempunkter er lille, kan det da være tilstrækkelig nøjagtigt at tænke sig Enkeltkræfterne flyttede hen til de nærmeste Systempunkter og beregne Pladen for denne Belastning.

Ønsker man større Nøjagtighed, kan Beregningen udføres paa følgende Maade:

I Fig. 18 virker en Enkeltkraft P i Punkt s , som ligger paa det ved Systemlinierne $r, r+1, m, m+1$ begrænsede Kvadrat i Afstanden a fra Linie m og Afstanden b fra Linie r . Man kan da beregne Pladen med Kraften virkende efterhaanden i hvert af de fire nærmeste Systempunkter 1, 2, 3 og 4. Kaldes Værdierne af Nedbøjningerne og Spændingerne i et vilkaarligt Punkt af Pladen for disse fire Belastningstilfælde henholdsvis S_1, S_2, S_3 og S_4 , medens de tilsvarende Værdier med Kraften virkende i Punkt s kaldes S , kan man med en god Tilnærmelse for alle Systempunkterne bestemme S ved retliniet Interpolation.

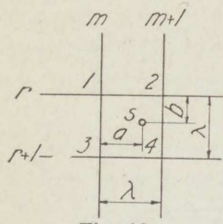


Fig. 18.

Herved findes

$$S = \left(S_1 \cdot \frac{\lambda - a}{\lambda} + S_2 \cdot \frac{a}{\lambda} \right) \cdot \frac{\lambda - b}{\lambda} + \left(S_3 \cdot \frac{\lambda - a}{\lambda} + S_4 \cdot \frac{a}{\lambda} \right) \cdot \frac{b}{\lambda}$$

$$= \frac{(\lambda - a)(\lambda - b)}{\lambda^2} S_1 + \frac{a(\lambda - b)}{\lambda^2} S_2 + \frac{(\lambda - a)b}{\lambda^2} S_3 + \frac{ab}{\lambda^2} S_4.$$

Samme Resultat faas ved at opløse Kraften P i de fire Kræfter $\frac{\lambda - a}{\lambda^2}(\lambda - b)P$, $\frac{a(\lambda - b)}{\lambda^2}P$, $\frac{(\lambda - a)b}{\lambda^2}P$ og $\frac{ab}{\lambda^2}P$, virkende i Punkterne 1, 2, 3 og 4. Man tilføjer altsaa et System af Kræfter, som holder hverandre i Ligevægt, nemlig Kraften $-P$ i Punkt s og de fire Kræfter $\frac{(\lambda - a)(\lambda - b)}{\lambda^2}P$, $\frac{a(\lambda - b)}{\lambda^2}P$, $\frac{(\lambda - a)b}{\lambda^2}P$ og $\frac{ab}{\lambda^2}P$ i Punkterne 1, 2, 3 og 4.

Dette Kraftsystems Indflydelse paa Nedbøjningerne og Spændingerne vil være størst for den Del af Pladen, som ligger inden for Systemet, altsaa inden for det Kvadrat, hvis Hjørner er angivet ved Punkterne 1, 2, 3 og 4. Uden for dette Kvadrat vil Kraftsystemet kun have en forholdsvis ringe Indflydelse. Lader man S_{11}, S_{22}, S_{33} og S_{44} betegne de Nedbøjninger og Spændinger, som faas i Punkterne 1, 2, 3 og 4 for Kraften P virkende henholdsvis i hvert af disse Punkter, medens S_s betegner Nedbøjningen og Spændingerne i Punkt s for Kraften P virkende i dette Punkt, saa kan S_s bestemmes ved Interpolation mellem S_{11}, S_{22}, S_{33} og S_{44} . Man finder herved

$$S_s = \left(S_{11} \cdot \frac{\lambda - a}{\lambda} + S_{22} \cdot \frac{a}{\lambda} \right) \cdot \frac{\lambda - b}{\lambda} + \left(S_{33} \cdot \frac{\lambda - a}{\lambda} + S_{44} \cdot \frac{a}{\lambda} \right) \cdot \frac{b}{\lambda}$$

$$= \frac{(\lambda - a)(\lambda - b)}{\lambda^2} S_{11} + \frac{a(\lambda - b)}{\lambda^2} S_{22} + \frac{(\lambda - a)b}{\lambda^2} S_{33} + \frac{ab}{\lambda^2} S_{44}.$$

Paa denne Maade er det saaledes muligt med tilstrækkelig Nøjagtighed at finde Nedbøjninger og Spændinger i Pladen, saavel ved Kraftens Angrebepunkt som ved et vilkaarligt af Pladens Systempunkter, naar man blot er i Stand til at beregne de Nedbøjninger og Spændin-

ger, som hidrører fra Belastningen P virkende i et vilkaarligt System-punkt.

I det følgende Exempel udføres Beregnin-gen for den i Fig. 19 viste rektangulære Plade med Sidelinierne l og $b = \frac{2}{3} l$, simpelt under-støttet langs alle fire Sider og paavirket i Punkt $(d, 2)$ af en Enkeltkraft P . For Poisson's Forhold regnes $\mu = 0,2$.

Nedbøjningerne i Punkterne $(d, 1)$, $(d, 2)$, $(d, 3) \dots$ bestemmes ved de to Sæt Ligninger (Tabellen paa Side 46—47, Punkt $(d, 1)$, (d, n) og (e, n)). Det første Sæt Ligninger er

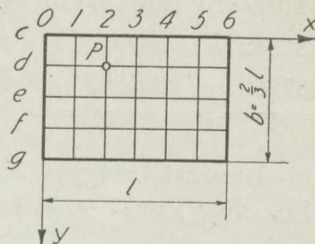


Fig. 19.

$$\begin{array}{llllll}
 (d, 1) & -4D_1 + D_2 & & + E_1 & & = 0, \\
 (d, 2) & D_1 - 4D_2 + D_3 & & + E_2 & & = (1 - \mu^2) \cdot P \frac{\lambda^2}{EI}, \\
 (d, 3) & D_2 - 4D_3 + D_4 & & + E_3 & & = 0, \\
 (d, 4) & D_3 - 4D_4 + D_5 & & + E_4 & & = 0, \\
 (d, 5) & D_4 - 4D_5 & & + E_5 & & = 0, \\
 (e, 1) & D_1 & & -4E_1 + E_2 & & + F_1 = 0, \\
 (e, 2) & D_2 & & + E_1 - 4E_2 + E_3 & & + F_2 = 0, \\
 (e, 3) & D_3 & & + E_2 - 4E_3 + E_4 & & + F_3 = 0, \\
 (e, 4) & D_4 & & + E_3 - 4E_4 + E_5 & & + F_4 = 0, \\
 (e, 5) & D_5 & & + E_4 - 4E_5 & & + F_5 = 0, \\
 (f, 1) & & E_1 & & -4F_1 + F_2 & = 0, \\
 (f, 2) & & E_2 & & + F_1 - 4F_2 + F_3 & = 0, \\
 (f, 3) & & E_3 & & + F_2 - 4F_3 + F_4 & = 0, \\
 (f, 4) & & E_4 & & + F_3 - 4F_4 + F_5 & = 0, \\
 (f, 5) & & E_5 & & + F_4 - 4F_5 & = 0.
 \end{array}$$

Heraf findes de i hosstaaende Tabel angivne Værdier

	1	2	3	4	5	
D	614878	2057032	705180	261368	90302	$\frac{1 - \mu^2}{6090630} \cdot P \frac{\lambda^2}{EI}$
E	402480	817440	502320	249990	99840	»
F	177602	307928	236670	136432	59068	»

I det andet Sæt Ligninger dannes venstre Side ved i det første Sæt Ligninger at ombytte $D_1, D_2, D_3 \dots$ med $d_1, d_2, d_3 \dots$. Ligningernes højre Side er D_1, D_2, D_3 o. s. v. For disse Størrelser indføres de ovenfor fundne Værdier. Man finder herved de i omstaaende Tabel angivne Værdier af Nedbøjningerne i Systempunkterne. De sidste Cifre er ikke med-regnet, da de ikke faar nogen Betydning for det endelige Resultat.

	1	2	3	4	5	
d	$341027 \cdot 10^7$	$654267 \cdot 10^7$	$455249 \cdot 10^7$	$258602 \cdot 10^7$	$114222 \cdot 10^7$	$\frac{1-\mu^2}{6090630^3} \cdot P \frac{\lambda^2}{EI}$
e	$335342 \quad \gg$	$567928 \quad \gg$	$478629 \quad \gg$	$305748 \quad \gg$	$143287 \quad \gg$	$\gg \quad \gg$
f	$187280 \quad \gg$	$305599 \quad \gg$	$279648 \quad \gg$	$190214 \quad \gg$	$92370 \quad \gg$	$\gg \quad \gg$

Dernæst beregnes M_x og M_y i Systempunkterne ved Hjælp af Lign. (11). For Punkt (e , 4) har man

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} \lambda^2 = e_3 - 2e_4 + e_5 = + 1042 \cdot 10^8 \cdot \frac{1-\mu^2}{6090630^3} \cdot P \frac{\lambda^2}{EI},$$

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} \lambda^2 = d_4 - 2e_4 + f_4 = -16268 \quad \gg \quad \gg \quad \gg,$$

$$M_x = -EI \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}}{1-\mu^2} = -(+ 1042 - 0,2 \cdot 16268) \cdot \frac{10^8 P}{6090630^3} = +0,0060 P,$$

$$M_y = -EI \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}}{1-\mu^2} = -(-16268 + 0,2 \cdot 1042) \cdot \frac{10^8 P}{6090630^3} = +0,0433 P.$$

I de øvrige Systempunkter beregnes M_x og M_y paa lignende Maade.

Reaktionerne beregnes ved Hjælp af de i Tabellen paa Side 46—47 angivne Ligninger for Kantsystempunkterne. Man finder herved

$$\text{for Punkt } (c, 0): \quad (2 - 2\mu) d_1 = (1 - \mu^2) (-R) \frac{\lambda^2}{EI},$$

hvoraf

$$R = -\frac{2 - 2\mu}{1 - \mu^2} \cdot \frac{EI}{\lambda^2} d_1 = -(2 - 2 \cdot 0,2) \cdot \frac{34103 \cdot 10^8 P}{6090630^3} = -0,147 P;$$

$$\text{for Punkt } (c, 1): \quad -(6 - 2\mu) d_1 + (2 - \mu) d_2 + e_1 = (1 - \mu^2) (-R) \frac{\lambda^2}{EI},$$

hvoraf

$$R = [(6 - 2 \cdot 0,2) d_1 - (2 - 0,2) d_2 - e_1] \cdot \frac{EI}{\lambda^2 (1 - \mu^2)} = \frac{39674 \cdot 10^8 P}{6090630^3} = +0,107 P;$$

$$\text{for Punkt } (c, 2): \quad (2 - \mu) d_1 - (6 - 2\mu) d_2 + (2 - \mu) d_3 + e_2 = (1 - \mu^2) (-R) \frac{\lambda^2}{EI},$$

hvoraf

$$R = [-(2 - 0,2) d_1 + (6 - 2 \cdot 0,2) d_2 - (2 - 0,2) d_3 - e_2] \cdot \frac{EI}{\lambda^2 (1 - \mu^2)} = \frac{166268 \cdot 10^8 P}{6090630^3} = 0,448 P.$$

Paa lignende Maade beregnes Reaktionerne i de øvrige Kantsystempunkter.

I et vilkaarligt Kantsystempunkt (c, n) kan M_v tilnærmelsesvis reglig med Middelværdien af $M_v(c, d, n-1, n)$ og $M_v(c, d, n, n+1)$, hvor $M_v(c, d, n-1, n)$ betegner den ved Lign. (11) bestemte Værdi af M_v i Midtpunktet af

det kvadratiske Element, hvis Sidelinier er Systemlinierne $c, d, n-1$ og n . For Hjørnet $(c, 0)$ regnes tilnærmelsesvis $M_v = M_{v(c, d, 0, 1)}$. For de Systempunkter, som ikke ligger i Kanten, bestemmes M_v ved Lign. (21). Man finder herved

$$\text{for Punkt } (c, 0) \quad M_v = -EI \frac{\Delta^2 z}{1 + \mu} = -EI \frac{\Delta x \Delta y}{\lambda^2(1 + \mu)} = -34103(1 - \mu) \cdot \frac{10^8 P}{6090630^2} = -0,0736 P;$$

$$\text{for Punkt } (c, 1) \quad M_v = -EI \frac{d_2}{2\lambda^2(1 + \mu)} = -\frac{1}{2} \cdot 65427(1 - 0,2) \cdot \frac{10^8 P}{6090630^2} = -0,0706 P;$$

$$\text{for Punkt } (c, 2) \quad M_v = -EI \frac{d_3 - d_1}{2\lambda^2(1 + \mu)} = -\frac{1}{2} \cdot 11422(1 - 0,2) \cdot \frac{10^8 P}{6090630^2} = -0,0123 P;$$

$$\text{for Punkt } (e, 4) \quad M_v = -EI \frac{d_3 - d_5 - f_3 + f_5}{4\lambda^2(1 + \mu)} = -\frac{1}{4} \cdot 15375(1 - 0,2) \cdot \frac{10^8 P}{6090630^2} = -0,0083 P.$$

Paa lignende Maade beregnes M_v i de øvrige Systempunkter.

Ved Hjælp af Lign. (18) findes Vinklen α mellem x -Aksen og Normalen til det Hovedsnit, i hvilket det største Hovedmoment M_1 optræder, og ved Hjælp af Lign. (19) findes Hovedmomenternes Størrelse.

$$\text{Punkt } (c, 0) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2M_v}{M_x - M_y} = \infty;$$

da M_v er negativ, maa α ligge i 2den Kvadrant, hvorved man finder

$$\alpha = 135^\circ,$$

$$M_1 = M_x + M_v \operatorname{tg} \alpha = +0,0736 P,$$

$$M_2 = M_y - M_v \operatorname{tg} \alpha = -0,0736 P.$$

$$\begin{aligned} \text{Punkt } (c, 1) \quad \alpha &= 135^\circ, \\ M_1 &= +0,0706 P, \\ M_2 &= -0,0706 P. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Punkt } (e, 4) \quad \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2M_v}{M_x - M_y} = \frac{-2 \cdot 0,0083}{0,0060 - 0,0433} = +0,445, \\ \alpha &= 102^\circ, \end{aligned}$$

$$M_1 = M_x + M_v \operatorname{tg} \alpha = (0,0060 - 0,0083 \operatorname{tg} 102^\circ) P = +0,0451 P,$$

$$M_2 = M_y - M_v \operatorname{tg} \alpha = (0,0433 + 0,0083 \operatorname{tg} 102^\circ) P = +0,0042 P.$$

Paa lignende Maade beregnes Hovedsnittenes Retning og Hovedmomenternes Størrelse i de øvrige Systempunkter.

De fundne Resultater er opstillet i Tabellen Side 58, hvor der er anvendt følgende Betegnelser:

z = Nedbøjningen.

M_x = det bøjende Moment pr. Længdeenhed i Snit $\perp x$ -Aksen.

M_y = » — — — — — i » $\perp y$ -Aksen.

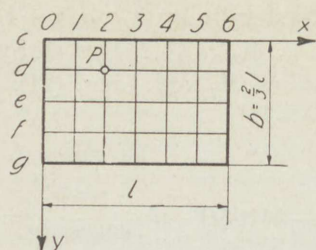
M_v = det vridende Moment pr. Længdeenhed.

M_1 = det største Hovedmoment pr. Længdeenhed.

M_2 = » mindste — — — — —

α = Vinklen mellem x -Aksen og Normalen til det Snit, hvor M_1 optræder.

R = Reaktionen beregnet som Enkeltkraft i Kantsystempunkterne.



Plade, simpelt understøttet langs alle fire Sider, belastet med en Enkeltkraft P i Punkt $(d, 2)$.

Poisson's Forhold $\mu = 0,2$.

		0	1	2	3	4	5	6	
c	z	0	0	0	0	0	0	0	
	M_x	0	0	0	0	0	0	0	
	M_y	0	0	0	0	0	0	0	
	M_v	-0,0736	-0,0706	-0,0123	+0,0427	+0,0368	+0,0279	+0,0246	P
	M_1	+0,0736	+0,0706	+0,0123	+0,0427	+0,0368	+0,0279	+0,0246	»
	M_2	-0,0736	-0,0706	-0,0123	-0,0427	-0,0368	-0,0279	-0,0246	»
	α	135°	135°	135°	45°	45°	45°	45°	
	R	-0,147	+0,107	+0,448	+0,115	+0,032	+0,008	-0,049	P
d	z	0	0,00245	0,00470	0,00327	0,00186	0,00082	0	$P \frac{l^2}{EI}$
	M_x	0	+0,0262	+0,1780	+0,0226	-0,0027	-0,0035	0	P
	M_y	0	+0,0950	+0,2273	+0,1163	+0,0542	+0,0213	0	»
	M_v	-0,0362	-0,0307	-0,0077	+0,0142	+0,0181	+0,0165	+0,0154	»
	M_1	+0,0362	+0,1067	+0,2285	+0,1184	+0,0595	+0,0295	+0,0154	»
	M_2	-0,0362	+0,0145	+0,1768	+0,0205	-0,0080	-0,0117	-0,0154	»
	α	135°	111°	99°	82°	74°	63°	45°	
	R	+0,176						+0,033	P
e	z	0	0,00241	0,00408	0,00344	0,00220	0,00103	0	$P \frac{l^2}{EI}$
	M_x	0	+0,0354	+0,0963	+0,0345	+0,0060	-0,0009	0	P
	M_y	0	+0,0439	+0,0648	+0,0644	+0,0433	+0,0205	0	»
	M_v	+0,0166	+0,0188	+0,0012	-0,0151	-0,0083	-0,0037	-0,0024	»
	M_1	+0,0166	+0,0590	+0,0963	+0,0707	+0,0451	+0,0211	+0,0024	»
	M_2	-0,0166	+0,0203	+0,0648	+0,0282	+0,0042	-0,0015	-0,0024	»
	α	45°	51°	2°	113°	102°	100°	135°	
	R	+0,097						+0,034	P
f	z	0	0,00134	0,00220	0,00201	0,00137	0,00066	0	$P \frac{l^2}{EI}$
	M_x	0	+0,0207	+0,0412	+0,0215	+0,0063	+0,0008	0	P
	M_y	0	+0,0143	+0,0194	+0,0252	+0,0206	+0,0109	0	»
	M_v	+0,0362	+0,0307	+0,0077	-0,0142	-0,0181	-0,0165	-0,0154	»
	M_1	+0,0362	+0,0484	+0,0436	+0,0377	+0,0329	+0,0231	+0,0154	»
	M_2	-0,0362	-0,0134	+0,0170	+0,0090	-0,0060	-0,0114	-0,0154	»
	α	45°	42°	18°	131°	124°	126°	135°	
	R	+0,038						+0,019	P
g	z	0	0	0	0	0	0	0	
	M_x	0	0	0	0	0	0	0	
	M_y	0	0	0	0	0	0	0	
	M_v	+0,0404	+0,0330	+0,0099	-0,0125	-0,0202	-0,0205	-0,0199	P
	M_1	+0,0404	+0,0330	+0,0099	+0,0125	+0,0202	+0,0205	+0,0199	»
	M_2	-0,0404	-0,0330	-0,0099	-0,0125	-0,0202	-0,0205	-0,0199	»
	α	45°	45°	45°	135°	135°	135°	135°	
	R	-0,081	+0,044	+0,082	+0,053	+0,024	+0,009	-0,040	P

§ 11. Kantbetingelserne ved Plader, hvis Kanter ligger uden for Understøtningerne.

Det har hidtil været forudsat, at Pladen var simpelt understøttet paa faste eller eftergivelige Understøtninger langs Kanterne. Selv om denne Forudsætning sjældent vil være helt i Overensstemmelse med Virkeligheden, vil den i de fleste Tilfælde give tilstrækkelig nøjagtige Resultater.

Der kan imidlertid forekomme Tilfælde, hvor man ønsker at opnaa en større Nøjagtighed, og man maa da tage Hensyn til de særlige Forhold, som fremkommer, naar Pladens Kanter ligger uden for Understøtningerne. Dette bør man saaledes gøre, hvor man ønsker at verificere Beregningen ved Forsøg, og disse Forsøg udføres saaledes, at Kanterne af Pladen ligger uden for Understøtningerne.

Fig. 20 fremstiller en Plade, som er simpelt understøttet paa faste

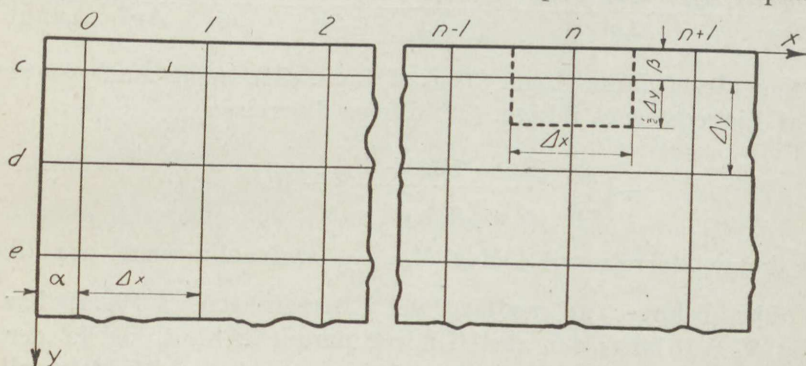


Fig. 20.

eller eftergivelige Understøtninger i Systemlinierne c og 0. Pladens Kanter ligger uden for Understøtningerne i Afstanden α fra Linie 0 og i Afstanden β fra Linie c.

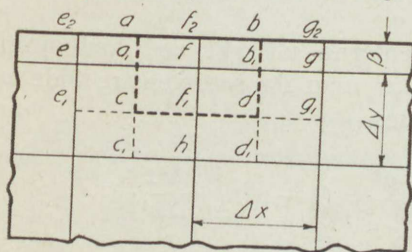


Fig. 21.

Kantbetingelserne udledes paa lignende Maade som i § 6. I Fig. 21 ligger Punkterne e_2 , a , f_2 , b og g_2 i Kantene af Pladen. For det punkterede Kantelement virker baade Belastningen og Reaktionen i Punkt f .

Ved Projektion paa en Linie vinkelret paa Pladens Plan faas

$$(Q_{bd} - Q_{ac})(\frac{1}{2}\Delta y + \beta) + Q_{cd}\Delta x = P - R. \quad (27a)$$

For Elementet $e_2f_2f_1e_1$ faas ved at tage Momentet om Linie $a-c$

$$(M_{xf} - M_{xc})(\frac{1}{2}\Delta y + \beta) + M_{vc}\Delta x = -Q_{ac}\Delta x(\frac{1}{2}\Delta y + \beta), \quad (28a)$$

hvor M_{xf} er Middelværdien af M_x paa Strækningen f_1-f_2 .

For Elementet $f_2g_2g_1f_1$ faas

$$(M_{xg} - M_{xf})(\frac{1}{2}\Delta y + \beta) + M_{vd}\Delta x = -Q_{bd}\Delta x(\frac{1}{2}\Delta y + \beta). \quad (29a)$$

Af Lign. (28 a) og (29 a) udledes

$$\frac{Q_{bd} - Q_{ac}}{\Delta x} = - \left(\frac{M_{xe} - 2M_{xf} + M_{xg}}{\Delta x^2} + \frac{M_{vd} - M_{vc}}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}\Delta y + \beta} \right). \quad (30a)$$

For Elementet $a_1b_1d_1c_1$ faas ved at tage Momentet om Linie $c-d$

$$(M_{yh} - M_{yf})\Delta x + (M_{vd} - M_{vc})\Delta y = -Q_{cd}\Delta x\Delta y,$$

eller

$$Q_{cd} \cdot \frac{1}{\Delta y} = - \left(\frac{M_{yh} - M_{yf}}{\Delta y} \cdot \frac{1}{\Delta y} + \frac{M_{vd} - M_{vc}}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\Delta y} \right). \quad (31a)$$

Af Lign. (27 a), (30 a) og (31 a) findes

$$- \left(\frac{\frac{1}{2}\Delta y + \beta}{\Delta y} \cdot \frac{M_{xe} - 2M_{xf} + M_{xg}}{\Delta x^2} + \frac{2(M_{vd} - M_{vc})}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\Delta y} + \frac{M_{yh} - M_{yf}}{\Delta y} \cdot \frac{1}{\Delta y} \right) = \frac{P-R}{\Delta x\Delta y}. \quad (32a)$$

Man kan altsaa danne Lign. (32 a) af Lign. (32), naar man paa venstre Side af Lighedstegnet i Lign. (32) tilføjer Størrelsen

$$- \left(\frac{\beta}{\Delta y} \cdot \frac{M_{xe} - 2M_{xf} + M_{xg}}{\Delta x^2} - M_{yf} \cdot \frac{1}{\Delta y^2} \right).$$

I denne Størrelse vil Ledet $M_{yf} \cdot \frac{1}{\Delta y^2}$ sædvanlig være saa lille, at man ikke behøver at medtage det i Beregningen. I Fig. 20 har man nemlig $M_y = 0$ langs den med Linie c parallelle Kant, og da der ikke virker nogen ydre Kræfter uden for Linie c , saa vil Middelværdien af M_y i denne Linie være Nul. Den Fejl, man begaar ved i Fig. 21 at regne $M_{yf} = 0$ i det vilkaarlige Kantelement, vil derfor kun have ringe Betydning.

Ligesom i Lign. (34) indføres Momenterne udtrykt ved Nedbøjningerne. For Elementet $abdc$ i Fig. 21 skal man da paa venstre Side af Lighedstegnet i Lign. (34) tilføje Størrelsen

$$- \frac{\beta}{\Delta y} \cdot \frac{M_{xe} - 2M_{xf} + M_{xg}}{\Delta x^2} \cdot \frac{1 - \mu^2}{EI} = (1 - \mu^2) \frac{\beta}{\Delta y} \frac{\Delta^4 z}{\Delta x^4}.$$

Man finder herved

$$\left. \begin{aligned} (1 - \mu^2) \left(\frac{1}{2} + \frac{\beta}{\Delta y} \right) \frac{\Delta^4 z}{\Delta x^4} + 2(1 - \mu) \cdot \frac{\Delta^3 z}{\Delta x^2 \Delta y} \cdot \frac{1}{\Delta y} \\ + \left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} \right) \frac{1}{\Delta y^2} = \frac{1 - \mu^2}{EI} \cdot \frac{P-R}{\Delta x \Delta y} \end{aligned} \right\} \quad (34a)$$

hvor Differenskvotienten $\frac{\Delta^4 z}{\Delta x^4}$ hører til Punkt f , $\frac{\Delta^3 z}{\Delta x^2 \Delta y}$ til Punkt f_1 og $\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}$ og $\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}$ til Punkt h .

Forudsættes $\Delta x = \Delta y = \lambda$, faas for det vilkaarlige Kantelement (ved Punkt (c, n) , Fig. 20)

	$n-2$	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$
c	$+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu^2\right)$	$-(4-2\mu-2\mu^2)$	$+(8-4\mu-3\mu^2)$	$-(4-2\mu-2\mu^2)$	$+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu^2\right)$
	$+\frac{\beta}{\lambda}(1-\mu^2)$	$-\frac{\beta}{\lambda}(4-4\mu^2)$	$+\frac{\beta}{\lambda}(6-6\mu^2)$	$-\frac{\beta}{\lambda}(4-4\mu^2)$	$+\frac{\beta}{\lambda}(1-\mu^2)$
d		$+(2-\mu)$	$-(6-2\mu)$	$+(2-\mu)$	
e			$+1$		

$$=(1-\mu^2)(P-R)\frac{\lambda^2}{EI} \quad (35a)$$

For det næstyderste Kantelement (ved Punkt $(c, 1)$, Fig. 20) skal der ligesom for det vilkaarlige Element paa venstre Side af Ligheds-tegnet i Lign. (34) tilføjes Størrelsen

$$(1-\mu^2)\frac{\beta}{\Delta y}\frac{\Delta^4 z}{\Delta x^4},$$

hvor man for Punkt $(c, 1)$ har

$$\frac{\Delta^4 z}{\Delta x^4} \Delta x^4 = -2c_0 + 5c_1 - 4c_2 + c_3.$$

Forudsættes $\Delta x = \Delta y = \lambda$, bliver Ligningen herved

	0	1	2	3
c	$-(3-2\mu-\mu^2)$	$+(1\frac{5}{2}-4\mu-\frac{5}{2}\mu^2)$	$-(4-2\mu-2\mu^2)$	$+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu^2)$
	$-\frac{\beta}{\lambda}(2-2\mu^2)$	$+\frac{\beta}{\lambda}(5-5\mu^2)$	$-\frac{\beta}{\lambda}(4-4\mu^2)$	$+\frac{\beta}{\lambda}(1-\mu^2)$
d	$+(2-\mu)$	$-(6-2\mu)$	$+(2-\mu)$	
e		$+1$		

$$=(1-\mu^2)(P-R)\frac{\lambda^2}{EI} \quad (36a)$$

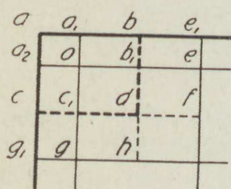


Fig. 22.

For Hjørneelementet $a b d c$ (Fig. 22) bliver Projektionsligningen

$$Q_{ba}(\frac{1}{2}\Delta y + \beta) + Q_{cd}(\frac{1}{2}\Delta x + \alpha) = P - R, \quad (37a)$$

hvor P og R antages at virke i Punkt o . For Elementet $a_1 e_1 f c_1$ faas ved at tage Momentet om Linie $b-d$

$$(M_{xe} - M_{xo})(\frac{1}{2}\Delta y + \beta) + M_{vd}\Delta x = -Q_{ba}\Delta x(\frac{1}{2}\Delta y + \beta) \quad (38a)$$

For Elementet $a_2 b_1 h g_1$ faas ved at tage Momentet om Linie $c-d$

$$(M_{yg} - M_{yo})(\frac{1}{2}\Delta x + \alpha) + M_{vd}\Delta y = -Q_{cd}\Delta y(\frac{1}{2}\Delta x + \alpha) \quad (39a)$$

Af Lign. (37 a), (38 a) og (39 a) faas

$$-\left[\frac{\frac{1}{2}\Delta y + \beta}{\Delta y} \cdot \frac{M_{xe} - M_{xo}}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\Delta x} + 2M_{vd} \cdot \frac{1}{\Delta x \Delta y} + \frac{\frac{1}{2}\Delta x + \alpha}{\Delta x} \cdot \frac{M_{yg} - M_{yo}}{\Delta y} \cdot \frac{1}{\Delta y}\right] = \frac{P-R}{\Delta x \Delta y}. \quad (40a)$$

Ligesom man i Lign. (32 a) satte $M_{yf} = 0$, vil man her med tilstrækkelig Tilnærmelse kunne sætte $M_{yo} = 0$ og $M_{xo} = 0$. Lign. (40 a) faas altsaa, naar man paa venstre Side af Lighedstegnet i Lign. (40) tilføjer Størrelsen

$$-\left(\frac{\beta}{\Delta y} \cdot M_{xe} \cdot \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{\alpha}{\Delta x} \cdot M_{yg} \cdot \frac{1}{\Delta y^2}\right).$$

Udtrykkes Momenterne ved Nedbøjningerne, skal man for Elementet $abcd$ i Fig. 22 paa venstre Side af Lighedstegnet i Lign. (41) tilføje Størrelsen

$$-\left(\frac{\beta}{\Delta y} \cdot M_{xe} \cdot \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{\alpha}{\Delta x} \cdot M_{yg} \cdot \frac{1}{\Delta y^2}\right) \frac{1-\mu^2}{EI} = (1-\mu^2) \left(\frac{\beta}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} \cdot \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{\alpha}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} \cdot \frac{1}{\Delta y^2}\right).$$

Man finder herved

$$\left. \begin{aligned} (1-\mu^2) \left(\frac{1}{2} + \frac{\beta}{\Delta y} \right) \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} \cdot \frac{1}{\Delta x^2} + 2(1-\mu) \frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y} \cdot \frac{1}{\Delta x \Delta y} \\ + (1-\mu^2) \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\Delta x} \right) \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} \cdot \frac{1}{\Delta y^2} = \frac{1-\mu^2}{EI} \cdot \frac{P-R}{\Delta x \Delta y}, \end{aligned} \right\} \quad (41a)$$

hvor Differenskvotienten $\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}$ hører til Punkt e , $\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y}$ til Punkt d og $\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}$ til Punkt g .

Forudsættes $\Delta x = \Delta y = \lambda$, faas herved for Hjørneelementet (ved Punkt $(c, 0)$, Fig. 20)

	0	1	2	
c	$+(3-2\mu-\mu^2)$	$-(3-2\mu-\mu^2)$	$+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu^2)$	$= (1-\mu^2)(P-R) \frac{\lambda^2}{EI}. \quad (42a)$
	$+\frac{\alpha+\beta}{\lambda}(1-\mu^2)$	$-\frac{\beta}{\lambda}(2-2\mu^2)$	$+\frac{\beta}{\lambda}(1-\mu^2)$	
d	$-(3-2\mu-\mu^2)$	$+(2-2\mu)$		
	$-\frac{\alpha}{\lambda}(2-2\mu^2)$			
e	$+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu^2)$			
	$+\frac{\alpha}{\lambda}(1-\mu^2)$			

For et vilkaarligt Element i næsttyderste Række (ved Punkt (d, n) , Fig. 20) gælder Lign. (13). For Punkt (d, n) er den Værdi af $\frac{\Delta^4 z}{\Delta y^4}$, der indgaar i Lign. (13), ligesom i § 6 udtrykt ved

$$\frac{\Delta^4 z}{\Delta y^4} = \begin{cases} -\mu \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 c_{n-1} - \left(2 - 2\mu \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right) c_n - \mu \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 c_{n+1} \\ \quad + 5d_n \\ \quad - 4e_n \\ \quad + f_n. \end{cases}$$

Naar $\Delta x = \Delta y = \lambda$, gælder Ligningen (43).

For det næstyderste Diagonalelement (ved Punkt $(d, 1)$, Fig. 20) gælder Lign. (44) under Forudsætning af kvadratiske Elementer.

§ 12. Hjørnernes Opbøjning.

I Exemplet i § 7 fandtes for den kvadratiske Plade, som var simpelt understøttet langs alle fire Sider og belastet med en ensformig fordelte Belastning, at der i Hjørnerne maatte virke negative Reaktionen, som hindrede Pladen i at bøje sig op i Nærheden af Hjørnerne. I § 8 fandtes Hjørnereaktionen udtrykt ved Lign. (46). I de fleste i Praxis forekommende Tilfælde vil Hjørnerne af kvadratiske, eller rektangulære Plader, som understøttes langs de fire Sider, være hindret i at bøje sig op, saaledes som det ogsaa har været antaget i Exemplerne i §§ 7, 9 og 10, hvor alle Kantsystempunkternes Nedbøjninger forudsattes at være Nul.

Fig. 23 viser Hjørnepartiet af en Plade, som hviler paa Understøtningerne i Systemlinierne c og 0 . Pladen er ikke fastholdt til Understøtningerne og kan derfor frit bøje sig op.

Ved Beregningen af Formforandringerne antages Pladen langs Systemlinien c at være understøttet i Systempunkterne (c, n) , $(c, n+1)$ o. s. v. Da man ikke paa Forhaand ved, hvor Pladen bøjer sig op

fra Understøtningen, maa man sikre sig, at det yderste Understøtningspunkt, som man indfører i Beregningen, bliver det rigtige. Forudsættes det yderste Understøtningspunkt at være (c, n) , maa for det første Reaktionen ved Beregningen vise sig at være positiv i dette Punkt, da Pladen i modsat Fald vilde løfte sig op fra Punktet, dersom den var fri. For det andet maa man ved Beregningen finde, at Pladen bøjer sig op fra Understøtningen i Punkt $(c, n-1)$, da man ellers vilde faa en positiv Reaktion i dette Punkt og derfor maatte medregne dette til Understøtningen.

De to Grænsetilfælde, inden for hvilke Punkt (c, n) skal indføres i Beregningen som det yderste Understøtningspunkt, er altsaa

1. Reaktionen i Punkt (c, n) findes $R_{(c, n)} = 0$.
2. — — — — — $(c, n-1)$ — $R_{(c, n-1)} = 0$.

I det første Grænsetilfælde ($R_{(c, n)} = 0$) vil man finde samme Formforandringer, enten man i Beregningen indfører (c, n) eller $(c, n+1)$ som

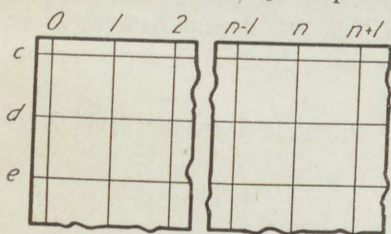


Fig. 23.

det yderste Understøtningspunkt, og i det andet Grænsetilfælde ($R_{(c,n-1)} = 0$), vil man finde samme Formforandring, enten man betragter $(c, n-1)$ eller (c, n) som det yderste Understøtningspunkt.

§ 13. Sammenligning med Forsøg af Bach og Graf. Kvadratisk Plade.

I det følgende Exempel behandles en kvadratisk Plade, hvis Kanter ligger uden for Understøtningerne. Afstanden mellem Understøtningerne er i begge Retninger l , og Kanterne ligger overalt i Afstanden $\frac{1}{40} l$ uden

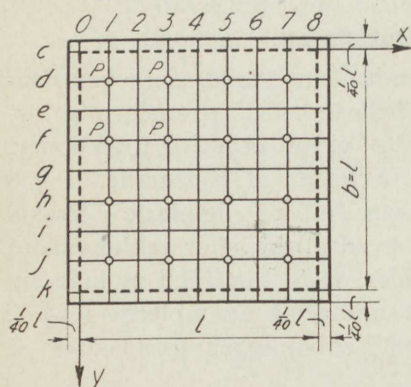


Fig. 24.

for Understøtningerne. Pladen er ikke fastholdt til Understøtningerne og kan derfor frit bøje sig op i Nærheden af Hjørnerne. Fig. 24 viser en saadan Plade, i hvilken Systemlinierne er indlagt med Afstanden $\lambda = \frac{1}{8} l$. Afstanden mellem Understøtningerne og Kanten er altsaa $\alpha = \beta = \frac{1}{40} l = \frac{1}{8} \lambda$. Pladen belastes med de i Fig. 24 viste 16 lige store Enkeltkræfter P .

Pladen antages at bøje sig op i Nærheden af Hjørnerne, saaledes at Punkterne $(c, 0)$ og $(c, 1)$ ikke har Berøring med Understøtningen. Betingelsen for, at denne Antagelse er rigtig, er angivet i § 12, og det skal senere, naar Nedbøjningerne er beregnet, undersøges, om den er opfyldt.

Differensligningen skal da opstilles for følgende Punkter, hvis Nedbøjninger er ubekendte:

$$\begin{aligned} &(c, 0), (c, 1), \\ &(d, 1), (d, 2), (d, 3), (d, 4), \\ &(e, 2), (e, 3), (e, 4), \\ &(f, 3), (f, 4), \\ &(g, 4). \end{aligned}$$

For Punkt $(c, 0)$ opskrives Lign. (42 a) og for Punkt $(c, 1)$ Lign. (36 a). For de øvrige Punkter gælder de sædvanlige Ligninger, som er angivet i Tabellen paa Side 46—47. Herved faas de paa Side 65 opstillede 12 Ligninger (47).

Bach og Graf*) har udført Belastningsforsøg med kvadratiske Jernbetonplader, understøttede og belastede som i Fig. 24. Pladernes Spændvidde er $l = 2,00$ m i begge Retninger, og Kanten ligger overalt $\frac{1}{40} l = 0,05$ m uden for Understøtningerne. Nedbøjningen maalt i Punkterne

$$\begin{aligned} &(c, 0) (c, 2) (c, 4) \\ &(e, 0) (e, 2) (e, 4) \\ &(g, 0) (g, 2) (g, 4) \end{aligned}$$

*) Versuche mit allseitig aufliegenden, quadratischen und rechteckigen Eisenbetonplatten, Deutscher Ausschuss für Eisenbeton, Heft 30, 1915.

$$\begin{array}{lcl}
 (c, 0) & (3, 4-2\mu-1, 4\mu^2) c_0 - (6, 8-4\mu-2, 8\mu^2) c_1 + (1, 4-1, 4\mu^2) c_2 & + (2-2\mu) d_1 \\
 (c, 1) & - (3, 4-2\mu-1, 4\mu^2) c_0 + \left(\frac{10, 5}{2} - 5\mu-3, 5\mu^2\right) c_1 - (4, 8-2\mu-2, 8\mu^2) c_2 + (0, 7-0, 7\mu^2) c_3 & - (6-2\mu) d_1 + (3-\mu) d_2 \\
 (d, 1) & (2-2\mu) c_0 & - (12-4\mu) c_1 + (4-2\mu) c_2 \\
 (d, 2) & & (3-\mu) c_1 - (6-2\mu) c_2 + (2-\mu) c_3 \\
 (d, 3) & & (2-\mu) c_2 - (6-2\mu) c_3 + (2-\mu) c_4 \\
 (d, 4) & & (4-2\mu) c_3 - (6-2\mu) c_4 \\
 (e, 2) & & 2c_2 \\
 (e, 3) & & c_3 \\
 (e, 4) & & c_4 \\
 (f, 3) & & \\
 (f, 4) & & \\
 (g, 4) & &
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{lcl}
 & + 18d_1 & - 16d_2 + 2d_3 + 2e_2 \\
 & - 8d_1 & + 21d_2 - 8d_3 + d_4 - 8e_2 + 3e_3 \\
 & + d_1 & - 8d_2 + 20d_3 - 8d_4 + 2e_2 - 8e_3 + 2e_4 + f_3 \\
 & & + 2d_2 - 16d_3 + 19d_4 + 4e_3 - 8e_4 + f_4 \\
 & + 2d_1 & - 16d_2 + 4d_3 + 20e_2 - 16e_3 + 2e_4 + 2f_3 \\
 & & + 3d_2 - 8d_3 + 2d_4 - 8e_2 + 23e_3 - 8e_4 - 3f_3 + 3f_4 \\
 & & + 4d_3 - 8d_4 + 2e_2 - 16e_3 + 20e_4 + 4f_3 - 8f_4 + g_4 \\
 & & 2d_3 + 2e_2 - 16e_3 + 4e_4 + 22f_3 - 16f_4 + 2g_4 \\
 & & d_4 + 6e_3 - 8e_4 - 16f_3 + 25f_4 - 8g_4 \\
 & & 4e_4 + 8f_3 - 32f_4 + 20g_4
 \end{array}
 \right\}
 \begin{array}{l}
 = 0 \\
 = 0 \\
 = (1-\mu^2) P \frac{\lambda^2}{EI} \\
 = 0 \\
 = (1-\mu^2) P \frac{\lambda^2}{EI} \\
 = 0 \\
 = 0 \\
 = 0 \\
 = 0 \\
 = (1-\mu^2) P \frac{\lambda^2}{EI} \\
 = 0 \\
 = 0
 \end{array}
 \quad (47)$$

65

$$\begin{array}{lcl}
 (4-4\mu) c_0 & + (1-\mu) c_2 & - (6-2\mu) c_3 - (7-3\mu) c_4 \\
 (4-4\mu) c_0 & + (14-4\mu) c_2 & - (5-3\mu) c_3 - (2-\mu) c_4 + 10d_1 - 48d_2 + 12d_3 + 18e_2 + e_4 \\
 & + (7-3\mu) c_2 & - (18-6\mu) c_3 - (5-\mu) c_4 + 4d_1 - 32d_2 + 36d_3 + 4e_2 \\
 & (24-8\mu) c_1 & - (1-\mu) c_2 - (18-6\mu) c_3 - (5-\mu) c_4 - 32d_1 + 32d_3 \\
 - (34-20\mu-14\mu^2) c_0 + (105-50\mu-35\mu^2) c_1 - (48-20\mu-28\mu^2) c_2 + (7-7\mu^2) c_3 - (60-20\mu) d_1 + (30-10\mu) d_2 & & \\
 (17+7\mu) c_0 & - (34+14\mu) c_1 & + (7+7\mu) c_2 + 10 d_1 \\
 - (254922+188982\mu) c_0 + (458524+315724\mu) c_1 - (177092+124012\mu) c_2 - (19460+1620\mu) c_3 - (7050-1110\mu) c_4 & & \\
 - (4644+14736\mu+6732\mu^2) c_0 - (2742-28772\mu-19514\mu^2) c_1 + (15996-16216\mu-17492\mu^2) c_2 - (7710-1706\mu-4770\mu^2) c_3 - (900-480\mu+60\mu^2) c_4 & &
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{lcl}
 & - 16e_2 & + 32e_4 - 8g_4 = 30 (1-\mu^2) P \frac{\lambda^2}{EI} \\
 & + 18e_2 & + e_4 = 10 \\
 & + 4e_2 & = 32 \\
 & + 32d_3 & = 30 \\
 & & = 0 \\
 & & = 0 \\
 & & = 146210 (1-\mu^2) P \frac{\lambda^2}{EI} \\
 & & = (7620-2540\mu) (1-\mu^2) P \frac{\lambda^2}{EI}
 \end{array}
 \right\}
 \quad (48)$$

66

og i de hermed symmetriske Punkter med Hensyn til Midtlinierne g og 4 .

Ved Hjælp af Ligningerne (47) kan man nu beregne Nedbøjningerne i disse Punkter. Punkterne $(c, 2)$, $(c, 4)$, $(e, 0)$ og $(g, 0)$ er beliggende paa Understøtningerne, og Nedbøjningen $g_2 = e_4$ paa Grund af Symmetrien om Diagonalen. For at kunne sammenligne Beregningsresultaterne med Forsøgsresultaterne gælder det derfor kun om at beregne Nedbøjningerne c_0 , e_2 , e_4 og g_4 . Dersom $(c, 2)$ er det yderste Systempunkt, i hvilket Pladen har Berøring med Understøtningen, maa man imidlertid ved Beregningen finde, baade at Reaktionen i Punkt $(c, 2)$ er positiv, og at Pladen bøjer sig op fra Understøtningen i Punkt $(c, 1)$. Man faar derfor ogsaa Brug for Nedbøjningerne c_1 , d_1 , d_2 og d_3 .

Ved at eliminere d_4 , e_3 , f_1 og f_4 af Ligningerne (47) faas de 8 Ligninger (48).

Da man ved Beregningen kun ønsker at finde de forskellige Punktets indbyrdes Højdeforskel, kan Nedbøjningerne maales fra en vilkaarlig vandret Plan. Man kan da indføre $c_4 = 0$, hvorved Nedbøjningen tænkes maalt fra en vandret Plan gennem Midtpunkterne af Understøtningerne.

I Ligningerne (48) fremstiller c_2 , c_3 og c_4 Pladens Nedbøjning langs Understøtningerne eller dissens lodrette Forskydning.

Ved Sammenligning med et bestemt Forsøg kan man i Beregningen indføre de ved Forsøget fundne Nedbøjninger c_2 , c_3 og c_4 . For symmetrisk beliggende Punkter tages Middelværdien af de ved Forsøget fundne Nedbøjninger. c_2 regnes saaledes at være lig med Middelværdien af de maalte Nedbøjninger i Punkterne $(c, 2)$, $(c, 6)$, $(e, 0)$, $(e, 8)$, $(i, 0)$, $(i, 8)$, $(k, 2)$ og $(k, 6)$. Dersom man i Beregningen indfører $c_4 = 0$, maa alle de maalte Nedbøjninger formindskes med Middelværdien af de maalte Nedbøjninger i Punkterne $(c, 4)$, $(g, 0)$, $(g, 8)$ og $(k, 4)$. Nedbøjningen c_3 er ikke fundet ved Maaling. Man kan imidlertid regne, at Nedbøjningerne c_2 , c_3 og c_4 fremstiller Ordinatorer til en Parabel med vandret Tangent i Punkt $(c, 4)$. Indføres $c_4 = 0$, bliver altsaa $c_3 = \frac{1}{4} c_2$.

Ligningerne (48) er ordnede saaledes, at man for forskellige Værdier af μ (f. Ex. ved efterhaanden at sætte $\mu = 0$, $\mu = 0,1$, $\mu = 0,2 \dots$) af de to sidste Ligninger finder c_0 og c_1 , hvorefter man af de øvrige Ligninger finder d_1 , d_2 , d_3 samt e_2 , e_4 og g_4 , svarende til den Værdi af μ , som indføres. Man vil herved være i Stand til at finde den Værdi af μ , som giver den bedste Overensstemmelse mellem de maalte og de beregnede Nedbøjninger.

For $\mu = 0$ og $c_2 = c_3 = c_4 = 0$ findes saaledes følgende Nedbøjninger:

	0	1	2	3	4	
c	— 0,02152	— 0,00698	0	0	0	$\frac{P l^2}{EI}$
d		+ 0,01284	+ 0,02574	+ 0,03273		»
e			+ 0,04500		+ 0,06042	»
f						»
g					+ 0,08231	»

Ifølge Lign. (35 a) findes Reaktionen i Punkt (c, 2) for $\mu = 0$ og med $\frac{\beta}{\lambda} = 0,2$ af

$$0,7 c_0 - 4,8 c_1 + 2 d_1 - 6 d_2 + 2 d_3 + e_2 = -R \frac{l^2}{64EI}$$

Heraf faas

$$R = -0,01 P.$$

Da Reaktionen i Punkt (c, 2) viser sig at være negativ, skulde man altsaa for $\mu = 0$ have indført (c, 3) i Stedet for (c, 2) som det yderste Understøtningspunkt. Reaktionen i (c, 2) afviger dog kun ubetydeligt fra Nul, og man vil altsaa tilnærmelsesvis finde de samme Resultater, enten man indfører (c, 2) eller (c, 3) som det yderste Understøtningspunkt. For $\mu > 0$ vil Pladens Opbøjning i Nærheden af Hjørnerne være mindre end for $\mu = 0$, og man vil da faa positive Reaktioner i Punkt (c, 2). Af de to sidste af Lign. (48) findes saaledes for $c_2 = c_3 = c_4 = 0$ de til $\mu = 0$, $\mu = 0,2$ og $\mu = 0,4$ svarende Værdier af c_0 og c_1 som angivet i hystaaende Tabel

μ	c_0	c_1	
0	-0,0215	-0,0070	$(1 - \mu^2) \frac{Pl^2}{EI}$
0,2	-0,0165	-0,0049	» »
0,4	-0,0116	-0,0026	» »

For alle Værdier af μ fra 0 til 0,5 vil Pladen bøje sig op fra Understøtningen i Punkt (c, 1). Punkt (c, 2) skal da indføres i Beregningen som det yderste Understøtningspunkt, saaledes som det har været forudsat i Lign. (48).

For den i Fig. 24 viste Plade blev Beregningen udført med $\lambda = \frac{1}{8} l$. Beregningen kan ogsaa godt udføres med $\lambda = \frac{1}{4} l$ (Fig. 25), hvilket vil være betydeligt simplere. Resultaterne bliver naturligvis ikke saa nøjagtige som med $\lambda = \frac{1}{8} l$, dels fordi Pladen er indelt i større Elementer, dels fordi Kræfterne ikke virker i Systempunkterne, hvilket først opnaas ved at opløse hver af Kræfterne P i fire Kræfter, hver paa $\frac{1}{4} P$, som angriber i de fire nærmeste Systempunkter.

Det antages, at Pladen berører Understøtningen i Punkt (c, 2). For Punkt (c, 0) skal da anvendes Lign. (42 a), medens de i Tabellen paa Side 46—47 angivne Ligninger gælder for Punkterne (e, 2), (e, 4) og (g, 4). Idet $\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{\beta}{\lambda} = 0,1$, faas herved følgende fire Ligninger:

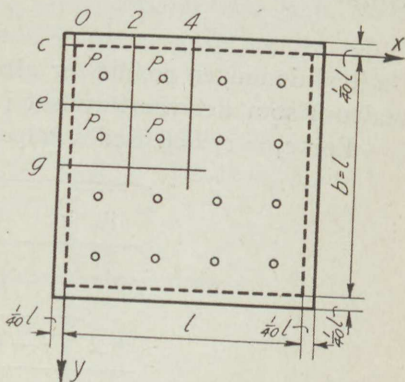


Fig. 25.

$$\begin{aligned}
 (3,2-2\mu-1,2\mu^2)c_0 - (6,4-4\mu-2,4\mu^2)c_2 + (1,2-1,2\mu^2)c_4 + (2-2\mu)e_2 &= \frac{1}{4}(1-\mu^2)P \frac{\lambda^2}{EI}, \\
 (2-2\mu)c_0 &- (12-4\mu)c_2 &+ (4-2\mu)c_4 &+ 20e_2-16e_4+2g_4=1 &>>, \\
 &(6-2\mu)c_2 &- (6-2\mu)c_4 &- 16e_2+24e_4-8g_4=1 &>>, \\
 &&&4c_4 &+ 8e_2-32e_4+20g_4=1 &>>.
 \end{aligned} \quad (49)$$

For $\mu = 0$ og $c_2 = c_4 = 0$ findes heraf følgende Nedbøjninger:

	0	2	4	
c	-0,0227	0	0	$\frac{Pl^2}{EI}$
e		0,0441	0,0582	»
g			0,0786	»

Ved Sammenligning med de Nedbøjninger, som fandtes med $\lambda = \frac{1}{8}l$, ses, at Nedbøjningen midt i Pladen findes for lille og Opbøjningen i Hjørnet for stor, naar man regner med $\lambda = \frac{1}{4}l$; men Forskellen mellem Resultaterne er baade i Midten og i Hjørnet kun ca. 5 %.

Reaktionen i Punkt (c, 2) bestemmes for $\mu = 0$ og $\frac{\beta}{\lambda} = 0,1$ ved Ligning (36 a),

$$-3,2 c_0 - 6e_2 + 3e_4 = \left(\frac{1}{2}P - R\right) \frac{l^2}{16EI},$$

hvoraf

$$R = 0,79 P.$$

Da Reaktionen er positiv, er altsaa (c, 2) det yderste Understøtningspunkt, saaledes som det var forudsat i Beregningen.

For $c_2 = c_4 = 0$ findes følgende sammenhørende Værdier af μ og c_0

μ	c_0	
0	-0,0227	$(1-\mu^2) \frac{Pl^2}{EI}$
0,2	-0,0178	» »
0,4	-0,0134	» »

Til Trods for at (c, 0) ved Beregningen med $\lambda = \frac{1}{4}l$ er det eneste Systempunkt, som bøjer sig op fra Understøtningen, og man derfor ikke kan vente at finde Opbøjningen med særlig stor Nøjagtighed, saa er der dog en god Overensstemmelse mellem de fundne Resultater for $\lambda = \frac{1}{8}l$ og $\lambda = \frac{1}{4}l$. Ligesom for $\mu = 0$ findes Opbøjningen i Hjørnet ogsaa lidt for stor for $\mu = 0,2$ og $\mu = 0,4$, naar man anvender $\lambda = \frac{1}{4}l$, og Fejlen er størst ved de største Værdier af μ .

For en enkelt af Forsøgsladerne, Plade Nr. 826*), paavirket af Belastningen $16 P = 9000$ kg, udføres Sammenligningen mellem de maalte og de beregnede Nedbøjninger. Den første Revne viste sig i Pladen ved Belastningen $16 P = 15500$ kg. Ved det Belastningstilfælde, som skal undersøges, er der altsaa endnu ikke indtraadt Revner, og Spændingerne ligger under Betonens Trækbrudstyrke. Der medtages kun de elastiske Nedbøjninger. Nedbøjningerne c_0 , c_2 , c_4 , e_2 , e_4 og g_4 bestemmes som Middeltallet af de symmetrisk beliggende Punkters Nedbøjninger. Sætter man $c_4 = 0$, idet Nedbøjningen maales fra en vandret Plan gennem Punkt (c, 4), bliver herved de maalte Nedbøjninger

	0	2	4	
c	- 0,0095	- 0,0011	0	cm
e		+ 0,0193	+ 0,0273	»
g			+ 0,0370	»

Ved Beregningen findes Nedbøjningen med Tilnærmelse ved at anvende $\lambda = \frac{1}{4} l$. For c_2 indføres den ved Forsøget fundne Værdi. Dette gøres simplest ved at udtrykke c_2 ved en af de øvrige Nedbøjninger, multipliceret med en Konstant, f. Eks. $c_2 = -\frac{0,0011}{0,0370} g_4 = -0,030 g_4$. Dette kan gøres, saafremt man ved de Værdier af E og μ , der indføres i Beregningen, og som bør give en saa god Overensstemmelse som muligt mellem de maalte og de beregnede Nedbøjninger, særlig sørger for, at den beregnede Nedbøjning g_4 bliver lig med den maalte. Indføres desuden i Beregningen $l = 200$ cm, og, uden Hensyn til Pladens Jernindlæg, $I = \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 12,2^3 = 151$ cm⁴ pr. cm, idet Pladetykkelsen er 12,2 cm, faas ved Anvendelse af Ligningerne (49) med $E = 262000$ kg/cm² og $\mu = 0,3$ følgende Værdier af Nedbøjningerne

	0	2	4	
c	- 0,0100	- 0,0011	0	cm
e		+ 0,0196	+ 0,0270	»
g			+ 0,0370	»

Der er saaledes god Overensstemmelse mellem de maalte og de beregnede Nedbøjninger.

*) Deutscher Ausschuss für Eisenbeton, Heft. 30, 1915, Zusammenstellung 16.

§ 14. Sammenligning med Forsøg af Bach og Graf. Rektangulær Plade med Mellemunderstøtning.

Blandt de Forsøg, som udførtes af Bach og Graf, fandtes nogle rektangulære Plader, der understøttedes og belastedes som vist i Fig. 26.

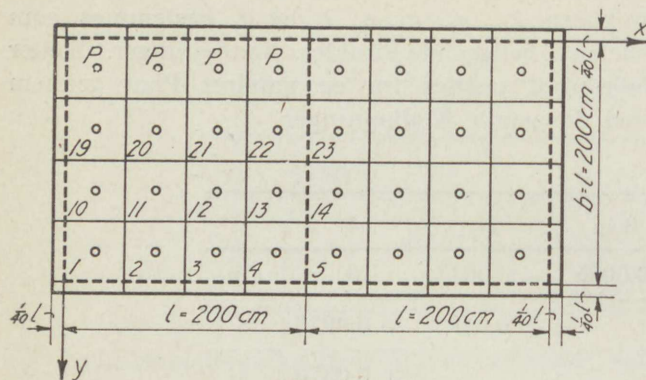


Fig. 26.

Foruden en Understøtning, som er beliggende lidt inden for Kanten langs alle fire Sider, findes en Understøtning parallel med de korte Sider under Midten af Pladen.

Afstanden mellem Understøtningerne er i begge Retninger $l = 200$ cm, og Kanten

ligger $\frac{1}{4}l = 5$ cm uden for Understøtningen. Hver af disse Plader belastedes som angivet i Fig. 26 med 32 Enkeltkræfter P .

Beregningen udføres med $\lambda = \frac{1}{4}l$. Hver af Kræfterne P erstattes i Beregningen af Kræfterne $\frac{1}{4}P$ i hvert af de fire nærmeste Systempunkter. Den ved Forsøgene anvendte Betegnelse 1, 2, 3 ... for Systempunkterne bibeholdes, og Nedbøjningen i disse Punkter kaldes henholdsvis $z_1, z_2, z_3 \dots$. Det antages, at Pladen bøjer sig op fra Understøtningen i Punkterne 1 og 5. Differensligningen skal da opstilles for Punkterne 1, 5, 11, 12, 13, 20, 21 og 22. Nedbøjningen af de øvrige Systempunkter, som ikke er beliggende paa Understøtningerne, findes ved Hjælp af Symmetrien. For Punkt 1 opskrives Lign. (42 a) og for Punkt 5 Lign. (35 a). For Punkterne 11, 12, 13, 20, 21 og 22 gælder de i Tabellen paa Side 46—47 angivne Ligninger. Herved faas de paa Side 71 angivne 8 Ligninger (50).

Beregningen udføres med $\mu = 0,2$, som indsættes i Lign. (50), hvorved man faar de paa Side 71 angivne Ligninger (51).

Ved Løsningen af Ligningerne (51) findes Nedbøjningerne i Systempunkterne, hvorefter de bøjende Momenter beregnes ved Hjælp af Lign. (11) og Rektionerne ved Lign. (35 a) og (36 a).

Belastningen kan erstattes af en ensformig fordelt Belastning p , bestemt ved $16P = pl^2$. Reaktionen udtrykkes pr. Længdeenhed af Understøtningen ved at dividere de Reaktionen, som findes i Systempunkterne, med $\frac{1}{4}l$.

Forudsættes Understøtningerne faste, kan man i Lign. (51) sætte $z_2 = z_3 = z_4 = z_{10} = z_{14} = z_{19} = z_{23} = 0$. Herved findes følgende Værdier af Nedbøjninger, bøjende Momenter og Reaktionen (Side 72):

Punkt.....	19	20	21	22	23	
Nedbøjning.....	0	+ 0,00259	+ 0,00324	+ 0,00196	0	$\frac{pl^4}{EI}$
Moment M_x (Snit $\perp x$)...	0	+ 0,0368	+ 0,0378	+ 0,0144	— 0,0652	pl^2
» M_y (Snit $\perp y$)...	0	+ 0,0281	+ 0,0346	+ 0,0183	— 0,0130	»
Reaktion.....	0,471				1,178	pl
Punkt.....	10	11	12	13	14	
Nedbøjning.....	0	+ 0,00195	+ 0,00240	+ 0,00147	0	$\frac{pl^4}{EI}$
Moment M_x (Snit $\perp x$)...	0	+ 0,0293	+ 0,0281	+ 0,0125	— 0,0476	pl^2
» M_y (Snit $\perp y$)...	+ 0,0127	+ 0,0267	+ 0,0305	+ 0,0184	— 0,0024	»
Reaktion.....	0,235				0,814	pl
Punkt..	1	2	3	4	5	
Nedbøjning.....	— 0,00079	0	0	0	— 0,00045	$\frac{pl^4}{EI}$
Moment M_x (Snit $\perp x$)...	0	+ 0,0127	0	+ 0,0072	— 0,0143	pl^2
» M_y (Snit $\perp y$)...	0	0	0	0	0	»
Reaktion.....		0,246	0,441	0,140		pl

Pladen bøjer sig altsaa op fra Understøtningen i Punkterne 1 og 5 som forudsat. Da Reaktionen i Punkterne 2, 4, 10 og 14 findes positiv, er Punkterne 1 og 5 altsaa de eneste Systempunkter, hvor Pladen bøjer sig op fra Understøtningen.

For Plade Nr. 940*) sammenlignes de maalte og de beregnede Nedbøjninger. For Belastningen 32 $P = 24000$ kg, ved hvilken Belastning der endnu ikke var fremkommen Revner i Pladen, er de maalte elastiske Nedbøjninger, der tages som Middelværdien af symmetrisk beliggende Punkters elastiske Nedbøjning, angivet i hosst. Tabel.

Punkt.....	19	20	21	22	23	
Nedbøjning.....	+ 0,0070	+ 0,0425	+ 0,0560	+ 0,0455	+ 0,0320	cm
Punkt.....	10	11	12	13	14	
Nedbøjning.....	+ 0,0060	+ 0,0328	+ 0,0428	+ 0,0375	+ 0,0275	cm
Punkt.....	1	2	3	4	5	
Nedbøjning.....	— 0,0063	+ 0,0068	+ 0,0105	+ 0,0138	+ 0,0145	cm

Nedbøjningen af de Punkter, som er beliggende paa Understøtningerne, er altsaa

*) Deutscher Ausschuss für Eisenbeton, Heft. 30, 1915, Zusammenstellung 31.

$$\begin{aligned}
 z_2 &= 0,0068 \text{ cm} = 0,120 z_{21} \\
 z_3 &= 0,0105 \text{ — } = 0,188 \text{ »} \\
 z_4 &= 0,0138 \text{ — } = 0,246 \text{ »} \\
 z_{10} &= 0,0060 \text{ — } = 0,107 \text{ »} \\
 z_{14} &= 0,0275 \text{ — } = 0,491 \text{ »} \\
 z_{19} &= 0,0070 \text{ — } = 0,125 \text{ »} \\
 z_{23} &= 0,0320 \text{ — } = 0,571 \text{ »}
 \end{aligned}$$

Disse Værdier af Understøtningspunkternes Nedbøjninger indføres i Ligningerne (51).

Med $E = 289000 \text{ kg/cm}^2$,

$I = \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 12,1^3 = 148 \text{ cm}^4$ pr. cm, (Pladetykkelse 12,1 cm),

$P = \frac{1}{16} pl^2$,

$l = 200 \text{ cm}$,

findes ved Løsning af Ligningerne (51) følgende Nedbøjninger:

Punkt		20	21	22		
Nedbøjning .		+ 0,0421	+ 0,0560	+ 0,0487		cm
Punkt		11	12	13		
Nedbøjning .		+ 0,0330	+ 0,0439	+ 0,0395		cm
Punkt	1				5	
Nedbøjning .	— 0,0063				+ 0,0126	cm

Ved Hjælp af Ligningerne (11), (35a) og (36a) findes de i nedenstaaende Tabel angivne bøjende Momenter og Reaktioner.

Punkt	19	20	21	22	23	
M_x (Snit $\perp x$) .	0	+ 0,0366	+ 0,0387	+ 0,0194	— 0,0469	pl^2
M_y (Snit $\perp y$) .	+ 0,0029	+ 0,0330	+ 0,0422	+ 0,0301	+ 0,0034	»
Reaktion	6,487				1,000	pl
Punkt	10	11	12	13	14	
M_x (Snit $\perp x$) .	0	+ 0,0292	+ 0,0288	+ 0,0162	— 0,0325	pl^2
M_y (Snit $\perp y$) .	+ 0,0161	+ 0,0305	+ 0,0360	+ 0,0267	+ 0,0083	»
Reaktion	0,228				0,701	pl
Punkt	1	2	3	4	5	
M_x (Snit $\perp x$) .	0	+ 0,0132	+ 0,0008	+ 0,0063	— 0,0034	pl^2
M_y (Snit $\perp y$) .	0	0	0	0	0	»
Reaktion		0,252	0,451	0,225		pl

Som Følge af Mellemunderstøtningens Nedbøjning bliver de negative M_x mindre og de positive M_y større end i Pladen med faste Understøtninger.

I Fig. 27 a og 27 b er Pladens Nedbøjninger fremstillet. Fig. 27 a angiver forskellige lodrette Snit, som indeholder Systempunkterne. I

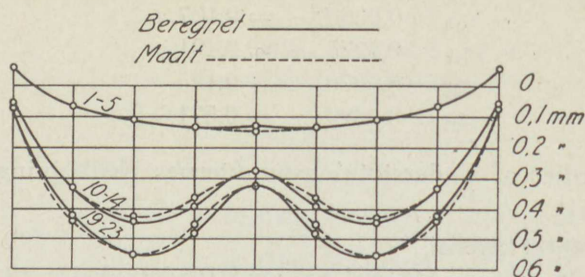


Fig. 27 a.

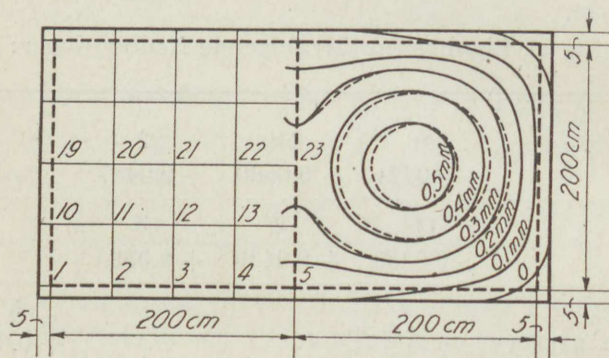


Fig. 27 b.

Fig. 27 b er for den ene Halvdel af Pladen indtegnet Kurver gennem Punkter med samme Nedbøjning. De fuldt optrukne Kurver er i begge Figurer bestemt ved de beregnede Nedbøjninger, medens de punkterede Kurver svarer til de ved Forsøget fundne elastiske Nedbøjninger.

Skønt der i Hovedsagen er god Overensstemmelse mellem Forsøgs- og Beregningsresultaterne, ses det dog, at de beregnede Nedbøjninger i Nærheden af Mellemunderstøtningen er lidt større end de maalte. Den største Afvigelse mellem de beregnede og de maalte Nedbøjninger findes i Punkt 22, hvor den beregnede Nedbøjning er 0,0032 cm større end den maalte.

At Nedbøjningerne ved Beregningen findes for store i Nærheden af Mellemunderstøtningen kan delvis skyldes den Omstændighed, at Pladen her er forsynet med et forholdsvis stærkt Jernindlæg i Træksiden, medens Beregningen er udført under Forudsætning af konstant Inertimoment. Ligeledes er der regnet med konstant Elasticitetskoefficient E , og det er muligt, at man vilde komme de virkelige Forhold nærmere ved at lade E variere med Spændingerne, saaledes at E er mindst, hvor Spændingerne er størst. Man maatte da regne med en forholdsvis lille Værdi af E ikke alene omkring Punkterne 20 og 21, hvor de største

positive Momenter optræder, men ogsaa i Nærheden af Mellemunderstøtningen, hvor man har de største negative Momenter. Man vilde derfor sandsynligvis ikke faa bedre Overensstemmelse mellem de maalte og de beregnede Nedbøjninger ved at lade E variere, da man med en lille Værdi af E over Mellemunderstøtningen vilde finde en forholdsvis stor Nedbøjning i Nærheden af denne. Beregningen blev udført under Forudsætning af, at Poissons Forhold $\mu = 0,2$. Da denne Værdi giver det rigtige Forhold mellem Opbøjningen i Punkt 1 og Nedbøjningen i Punkt 21, vil man heller ikke kunne opnaa en bedre Overensstemmelse mellem Forsøgsresultaterne og Beregningsresultaterne ved at indføre en anden Værdi af μ .

Den væsentligste Aarsag til, at Nedbøjningerne ved Beregningen findes lidt for store i Nærheden af Mellemunderstøtningen, maa imidlertid søges deri, at Pladens Formforandring i Beregningen udtrykkes ved de bøjende Momenter ved Hjælp af Lign. (9). Som omtalt i § 5 vilde man opnaa nøjagtigere Resultater, dersom man for Punkterne 14 og 23, der er beliggende paa Mellemunderstøtningen, udtrykte $\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}$ ved de bøjende Momenter ved Hjælp af Lign. (25) eller Lign. (26).

ANDET AFSNIT.

PLADER MED VARIABELT INERTIMOMENT.

§ 15. Opstilling af Differensligningen.

I § 1 blev Lign. (8) udledet uafhængig af Pladens Inertimoment. Denne Ligning gælder derfor ogsaa, naar Pladens Inertimoment varierer. Dersom Inertimomentet varierer kontinuerligt, kan Relationerne mellem Momenterne og Nedbøjningerne udtrykkes ved Ligningerne (9) og (10). Lign. (11), som udledes af Lign. (9) og Lign. (10), vil derfor ogsaa gælde. Ligningerne 12 vil derimod ikke kunne anvendes, da det i disse Ligninger er forudsat, at I har samme Værdi i alle de Punkter, for hvilke Værdierne af M_x , M_y og M_v indgaar i Ligningerne.

Man maa derfor gaa ud fra Lign. (11). For det i Fig. (28) viste punkterede Element udtrykkes den Værdi af

$$\frac{\Delta^2 M_x}{\Delta x^2}, \text{ som indgaar i Lign. (8), ved}$$

$$\frac{\Delta^2 M_{x(f,n)}}{\Delta x^2} = \frac{1}{\Delta x^2} (M_{x(f,n-1)} - 2M_{x(f,n)} + M_{x(f,n+1)}),$$

hvor

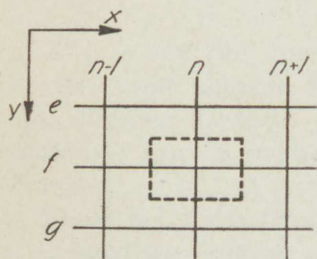


Fig. 28.

$$M_{x(f,n-1)} = -EI_{(f,n-1)} \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}}{1 - \mu^2},$$

$$M_{x(f,n)} = -EI_{(f,n)} \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}}{1 - \mu^2},$$

$$M_{x(f,n+1)} = -EI_{(f,n+1)} \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}}{1 - \mu^2}.$$

I disse Ligninger betegner Størrelserne $I_{(f,n-1)}$, $I_{(f,n)}$ og $I_{(f,n+1)}$ Pladens Inertimoment pr. Længdeenhed i de paagældende Punkter. Det forudsættes, at man for det vilkaarlige Punkt (f,n) har Inertimomentet $I_{(f,n)}$ i ethvert lodret Snit gennem Punktet.

I Stedet for at indføre $I_{(f, n-1)}$, $I_{(f, n)}$ og $I_{(f, n+1)}$ i Beregningen kan man skrive

$$I_{(f, n-1)} = I_c \cdot \frac{I_{(f, n-1)}}{I_c} = I_c \cdot \beta_{(f, n-1)},$$

$$I_{(f, n)} = I_c \cdot \frac{I_{(f, n)}}{I_c} = I_c \cdot \beta_{(f, n)},$$

$$I_{(f, n+1)} = I_c \cdot \frac{I_{(f, n+1)}}{I_c} = I_c \cdot \beta_{(f, n+1)},$$

hvor I_c er et vilkaarligt konstant Inertimoment.

For $\Delta x = \Delta y = \lambda$ har man

$$M_{x(f, n-1)} = -EI_c \beta_{(f, n-1)} \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}}{1 - \mu^2},$$

hvor

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \begin{array}{l} + \mu e_{n-1} \\ f_{n-2} - (2 + 2\mu) f_{n-1} + f_n \\ + \mu g_{n-1} \end{array} \right\},$$

altsaa

$$M_{x(f, n-1)} = -\frac{EI_c \beta_{(f, n-1)}}{\lambda^2 (1 - \mu^2)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} + \mu e_{n-1} \\ f_{n-2} - (2 + 2\mu) f_{n-1} + f_n \\ + \mu g_{n-1} \end{array} \right\}.$$

Paa samme Maade har man

$$-2M_{x(f, n)} = +2 \frac{EI_c \beta_{(f, n)}}{\lambda^2 (1 - \mu^2)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} + \mu e_n \\ f_{n-1} - (2 + 2\mu) f_n + f_{n+1} \\ + \mu g_n \end{array} \right\},$$

$$M_{x(f, n+1)} = -\frac{EI_c \beta_{(f, n+1)}}{\lambda^2 (1 - \mu^2)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} + \mu e_{n+1} \\ f_n - (2 + 2\mu) f_{n+1} + f_{n+2} \\ + \mu g_{n+1} \end{array} \right\}.$$

Ved Addition og Division med λ^2 faas $\frac{\Delta^2 M_x}{\Delta x^2}$, som indsættes i Lign. (8). EI_c vil herved indgaa som en Konstant.

Paa lignende Maade bestemmes den Værdi af $\frac{\Delta^2 M_y}{\Delta y^2}$, som for Elementet i Fig. 28 indgaar i Lign. (8).

Den Værdi af $\frac{\Delta^2 M_v}{\Delta x \Delta y}$, som skal indføres i Lign. (8), bestemmes ved

$$\frac{\Delta^2 M_{v(f, n)}}{\Delta x \Delta y} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} (M_{v(e, f, n-1, n)} - M_{v(e, f, n, n+1)} - M_{v(f, g, n-1, n)} + M_{v(f, g, n, n+1)}).$$

Heri er ifølge den tredie af Ligningerne (11)

$$M_{v(e, f, n-1, n)} = -EI_{(e, f, n-1, n)} \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y}}{1 + \mu},$$

hvor man for $\Delta x = \Delta y = \lambda$ har

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y} = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \begin{array}{l} + e_{n-1} - e_n \\ - f_{n-1} + f_n \end{array} \right\}.$$

Sættes

$$I_{(e, f, n-1, n)} = I_c \cdot \frac{I_{(e, f, n-1, n)}}{I_c} = I_c \cdot \beta_{(e, f, n-1, n)},$$

faas altsaa

$$M_{v(e, f, n-1, n)} = - \frac{EI_c \beta_{(e, f, n-1, n)}}{\lambda^2 (1 - \mu^2)} (1 - \mu) \left\{ \begin{array}{l} + e_{n-1} - e_n \\ - f_{n-1} + f_n \end{array} \right\}.$$

Analogt hermed findes

$$- M_{v(e, f, n, n+1)} = + \frac{EI_c \beta_{(e, f, n, n+1)}}{\lambda^2 (1 - \mu^2)} (1 - \mu) \left\{ \begin{array}{l} + e_n - e_{n+1} \\ - f_n + f_{n+1} \end{array} \right\}.$$

$$- M_{v(f, g, n-1, n)} = + \frac{EI_c \beta_{(f, g, n-1, n)}}{\lambda^2 (1 - \mu^2)} (1 - \mu) \left\{ \begin{array}{l} + f_{n-1} - f_n \\ - g_{n-1} + g_n \end{array} \right\}.$$

$$+ M_{v(f, g, n, n+1)} = - \frac{EI_c \beta_{(f, g, n, n+1)}}{\lambda^2 (1 - \mu^2)} (1 - \mu) \left\{ \begin{array}{l} + f_n - f_{n+1} \\ - g_n + g_{n+1} \end{array} \right\}.$$

Ved Addition og Division med λ^2 faas $\frac{\Delta^2 M_v}{\Delta x \Delta y}$, som indsættes i Lign. (8).

Idet Koefficienterne til de søgte Nedbøjninger opstilles i Tabelform paa lignende Maade som i Lign. (14), faas herved den paa Side 79 angivne Differensligning (Lign. (52)).

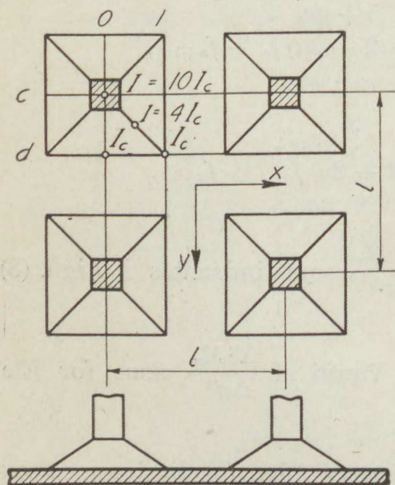


Fig. 29.

Som Exempel beregnes de bøjende Momenter i den i Fig. 29 viste Fundamentplade. Belastningen paavirker Pladen i enkelte Punkter, hvis Afstande i begge Retninger er l . Belastningen i hvert af disse Punkter er P . Pladen strækker sig over uendelig mange Fag i begge Retninger. Reaktionen paa Undersiden af Pladen regnes ensformig fordelt.

Systemlinierne indlægges som vist i

Fig. 29 med Afstanden $\lambda = \frac{1}{3} l$.

I Punkt $(c, 0)$ er $I = 10 I_c$,

I — $(c, d, 0, 1)$ er $I = 4 I_c$,

I — $(c, 1)$ og $(d, 1)$ er $I = I_c$.

Paa Grund af Symmetrien om Diagonalen er $d_0 = c_1$.

Da det kun gælder om at finde den relative Forskydning af Punkterne $(c, 0)$, $(c, 1)$ og $(d, 1)$, sættes $c_0 = 0$. Belastningens og Reaktionens Retning regnes positiv opad. Heraf følger, at c_1 og d_1 er positive opad, og at Momenterne M_x og M_y er positive, naar de giver Træk i Oversiden af Pladen.

Ligningerne for Punkterne $(c, 1)$ og $(d, 1)$ bliver da (Side 80)

	$n-2$	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$
d			$+\beta_{(e,n)}$		
e		$+2\beta_{(e,f,n-1,n)}$	$-2\beta_{(e,n)}$ $-2\beta_{(e,f,n-1,n)} - 2\beta_{(e,f,n,n+1)}$ $-2\beta_{(f,n)}$	$+2\beta_{(e,f,n,n+1)}$	
f	$+\beta_{(f,n-1)}$	$-2\beta_{(e,f,n-1,n)}$ $-2\beta_{(f,n-1)} - 2\beta_{(f,n)}$ $-2\beta_{(f,g,n-1,n)}$	$+\beta_{(e,n)}$ $+2\beta_{(e,f,n-1,n)} + 2\beta_{(e,f,n,n+1)}$ $+\beta_{(f,n-1)} + 8\beta_{(f,n)} + \beta_{(f,n+1)}$ $+2\beta_{(f,g,n-1,n)} + 2\beta_{(f,g,n,n+1)}$ $+\beta_{(g,n)}$	$-2\beta_{(e,f,n,n+1)}$ $-2\beta_{(f,n)} - 2\beta_{(f,n+1)}$ $-2\beta_{(f,g,n,n+1)}$	$+\beta_{(f,n+1)}$
g		$+2\beta_{(f,g,n-1,n)}$	$-2\beta_{(f,n)}$ $-2\beta_{(f,g,n-1,n)} - 2\beta_{(f,g,n,n+1)}$ $-2\beta_{(g,n)}$	$+2\beta_{(f,g,n,n+1)}$	
h			$+\beta_{(g,n)}$		

	$n-1$	n	$n+1$
e	$+\beta_{(e,n)}$ $-2\beta_{(e,f,n-1,n)}$ $+\beta_{(f,n-1)}$	$-2\beta_{(e,n)}$ $+2\beta_{(e,f,n-1,n)} + 2\beta_{(e,f,n,n+1)}$ $-2\beta_{(f,n)}$	$+\beta_{(e,n)}$ $-2\beta_{(e,f,n,n+1)}$ $+\beta_{(f,n+1)}$
f	$+2\beta_{(e,f,n-1,n)}$ $-2\beta_{(f,n-1)} - 2\beta_{(f,n)}$ $+2\beta_{(f,g,n-1,n)}$	$-2\beta_{(e,f,n-1,n)} - 2\beta_{(e,f,n,n+1)}$ $+8\beta_{(f,n)}$ $-2\beta_{(f,g,n-1,n)} - 2\beta_{(f,g,n,n+1)}$	$+2\beta_{(e,f,n,n+1)}$ $-2\beta_{(f,n)} - 2\beta_{(f,n+1)}$ $+2\beta_{(f,g,n,n+1)}$
g	$+\beta_{(f,n-1)}$ $-2\beta_{(f,g,n-1,n)}$ $+\beta_{(g,n)}$	$-2\beta_{(f,n)}$ $+2\beta_{(f,g,n-1,n)} + 2\beta_{(f,g,n,n+1)}$ $-2\beta_{(g,n)}$	$+\beta_{(f,n+1)}$ $-2\beta_{(f,g,n,n+1)}$ $+\beta_{(g,n)}$

$$= (1 - \mu^2) P \frac{\lambda^2}{EI_c} \quad (52)$$

	1	0	1	1	0
$\bar{d}$			+1		
d		+8	-2 -8 -2 -2	+2	
c	+10	-8 -20 -2 -8	+1 +8 +2 +8 +2 +1	-2 -2 +1	+1
d		+8	-2 -8 -2 -2	+2	
d			+1		

	0	1	1
d	+1 -8 +10	-2 +8 +2 -2	+1 -2 +1
c	+8 -20 -2 +8	-8 +8 -8 -2	+2 -2 +2
d	+10 -8 +1	-2 +8 +2 -2	+1 -2 +1

$$= (1 - \mu^2) \cdot \frac{1}{9} P \frac{\lambda^2}{EI_c}$$

	1	0	1	1	0
d			+1		
c		+8	-2 -8 -2 -2	+2	
d	+1	-8 -2 -2 -2	+1 +8 +1 +2 +2 +1	-2 -2 +1	+1
d		+2	-2 -2 -2 -2	+2	
c			+1		

	0	1	1
c	+1 -8 +1	-2 +8 +2 -2	+1 -2 +1
d	+8 -2 -2 +2	-8 +8 -2 -2	+2 -2 +2
d	+1 -2 +1	-2 +2 +2 -2	+1 -2 +1

$$= (1 - \mu^2) \cdot \frac{1}{9} P \frac{\lambda^2}{EI_c}$$

De ordnede Ligninger er

$$\begin{aligned} &-(37 + 6\mu)c_0 + (59 - 6\mu)c_1 - (22 - 12\mu)d_1 = (1 - \mu^2) \cdot \frac{1}{9} P \frac{\lambda^2}{EI_c}, \\ &+ (8 - 6\mu)c_0 - (22 - 12\mu)c_1 + (14 - 6\mu)d_1 = \quad \cdot \frac{1}{9} \quad \cdot \end{aligned}$$

For $\mu = 0$ findes heraf, idet $c_0 = 0$,

$$\begin{aligned} c_1 &= 4 \cdot \frac{P}{9 \cdot 38} \cdot \frac{\lambda^2}{EI_c}, \\ d_1 &= 9 \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

Af Lign. (11) beregnes dernæst Momenterne M_x .
I Linie 0 er

$$M_{x(c, 0)} = -EI \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}}{1 - \mu^2},$$

hvor

$$I = 10 I_c, \quad \mu = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} = \frac{1}{\lambda^2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{P}{9 \cdot 38} \cdot \frac{\lambda^2}{EI_c},$$

altsaa

$$M_{x(c, 0)} = -\frac{10 \cdot 2 \cdot 4}{9 \cdot 38} P = -0,2339 P,$$

og

$$M_{x(d, 0)} = -\frac{2(9-4)}{9 \cdot 38} P = -0,0292 P.$$

I Linie 1 er

$$M_{x(c, 1)} = +\frac{4}{9 \cdot 38} P = +0,0117 P,$$

og

$$M_{x(d, 1)} = +\frac{9-4}{9 \cdot 38} P = +0,0146 P.$$

I Linie 0 (Fig. 29) optræder paa hele Strækningen l Momentet

$$M_{x, 0} = \frac{1}{3} l [-10 \cdot 2 \cdot 4 - 2 \cdot 2(9-4)] \frac{P}{9 \cdot 38} = -\frac{100}{3 \cdot 9 \cdot 38} Pl = -0,0975 Pl.$$

I Linie 1 faas paa lignende Maade

$$M_{x, 1} = \frac{1}{3} l [+4 + 2(9-4)] \frac{P}{9 \cdot 38} = +\frac{14}{3 \cdot 9 \cdot 38} Pl = +0,0136 Pl.$$

Man har altsaa

$$M_{x, 1} - M_{x, 0} = \frac{114}{3 \cdot 9 \cdot 38} = \frac{1}{9} Pl.$$

Dette Resultat kan faas direkte ved at beregne Momenterne i en Pladestribе med Bredde l paa samme Maade, som man beregner Momenterne i en Bjælke. Resultatet kan bruges som Kontrol paa Beregningen.

For $\mu = 0,5$ bliver Ligningerne for Punkterne $(c, 1)$ og $(d, 1)$.

$$\begin{aligned} (59-3)c_1 - (22-6)d_1 &= (1-\mu^2) \cdot \frac{1}{9} P \frac{\lambda^2}{EI}, \\ -(22-6)c_1 + (14-3)d_1 &= \quad \quad \frac{1}{9} \quad \quad \end{aligned}$$

Heraf findes

$$\begin{aligned} c_1 &= 3 \cdot \frac{(1-\mu^2)}{9 \cdot 40} P \frac{\lambda^2}{EI}, \\ d_1 &= 8 \quad \quad \quad \end{aligned}$$

Momenterne M_x er

$$M_{x(c,0)} = \left(-\frac{10 \cdot 2 \cdot 3}{9 \cdot 40} - 0,5 \cdot \frac{10 \cdot 2 \cdot 3}{9 \cdot 40} \right) P = -\frac{90}{9 \cdot 40} P = -0,2500 P.$$

$$M_{x(d,0)} = \left(-\frac{2(8-3)}{9 \cdot 40} + 0,5 \cdot \frac{3}{9 \cdot 40} \right) P = -\frac{8,5}{9 \cdot 40} P = -0,0236 P.$$

$$M_{x(c,1)} = \left(+\frac{3}{9 \cdot 40} - 0,5 \cdot \frac{2(8-3)}{9 \cdot 40} \right) P = -\frac{2}{9 \cdot 40} P = -0,0056 P.$$

$$M_{x(d,1)} = \left(+\frac{8-3}{9 \cdot 40} + 0,5 \cdot \frac{8-3}{9 \cdot 40} \right) P = +\frac{7,5}{9 \cdot 40} P = +0,0208 P.$$

For $\mu = 0,5$ bliver $M_{x,0} = -\frac{107}{3 \cdot 9 \cdot 40} Pl = -0,0991 Pl,$

og $M_{x,1} = +\frac{13}{3 \cdot 9 \cdot 40} Pl = +0,0120 Pl.$

For en Plade med variabelt Inertimoment er Momenterne $M_{x,0}$ og $M_{x,1}$ altsaa ikke uafhængige af μ , saaledes som det er Tilfældet for en Plade med konstant Inertimoment (se § 2). Ligevægtsbetingelserne kræver imidlertid, at $M_{x,1} - M_{x,0}$ er konstant og uafhængig af μ . Ligesom for $\mu = 0$ finder man derfor ogsaa for $\mu = 0,5$

$$M_{x,1} - M_{x,0} = \frac{1}{3} Pl.$$

§ 16. Kantbetingelserne.

I § 6 er Kantbetingelserne opstillet for en Plade med konstant Inertimoment. For Elementet $abcd$ (Fig. 12) fandtes Lign. (32). Denne Ligning gælder ogsaa, naar Pladen har variabelt Inertimoment. De bøjende og de vridende Momenter, som indgaar i Lign. (32), udtrykkes ved Nedbøjningerne ved Hjælp af Lign. (11). Inertimomentet i et vilkaarligt Punkt (r, n) udtrykkes ved $I_{(r,n)} = I_c \cdot \frac{I_{(r,n)}}{I_c} = I_c \cdot \beta_{(r,n)}$. Med $\Delta x = \Delta y = \lambda$ faas herved for det vilkaarlige Kantsystempunkt (c, n) (Fig. 30) den paa Side 85 angivne Lign. (55).

For det næstyderste Kantelement (Punkt $(c, 1)$, Fig. 30) faas med $\Delta x = \Delta y = \lambda$ den paa Side 84 angivne Lign. (54).

For Hjørneelementet (Punkt $(c, 0)$, Fig. 30) faas med $\Delta x = \Delta y = \lambda$ af Lign. (40) den paa Side 83 angivne Lign. (53).

For et vilkaarligt Element i næstyderste Række (Punkt (d, n) Fig. 30) anvendes Lign. (8). Med $\Delta x = \Delta y = \lambda$ er den Værdi af $\frac{\Delta^2 M_y}{\Delta y^2}$, som indgaar heri

$$\frac{\Delta^2 M_{y(d,n)}}{\Delta y^2} = \frac{1}{\lambda^2} (M_{y(c,n)} - 2M_{y(d,n)} + M_{y(e,n)}),$$

hvor

$$M_{y(c,n)} = 0.$$

Ved Indsættelse i Lign. (8) faas den paa Side 87 angivne Lign. (57).

For det næstyderste Diagonalelement (Punkt $(d, 1)$, Fig. 30) faas med $\Delta x = \Delta y = \lambda$ af Lign. (8) den paa Side 86 angivne Lign. (56).

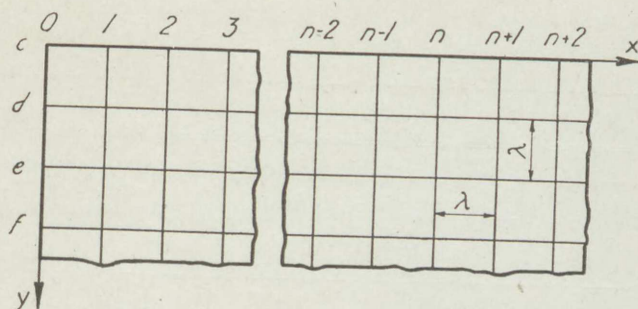


Fig. 30.

Punkt $(c, 0)$

	0	1	2
c	$+\frac{1}{2}\beta_{(c, 1)}$ $+2\beta_{(c, d, 0, 1)}$ $+\frac{1}{2}\beta_{(d, 0)}$	$-\beta_{(c, 1)}$ $-2\beta_{(c, d, 0, 1)}$	$+\frac{1}{2}\beta_{(c, 1)}$
d	$-2\beta_{(c, d, 0, 1)}$ $-\beta_{(d, 0)}$	$+2\beta_{(c, d, 0, 1)}$	
e	$+\frac{1}{2}\beta_{(d, 0)}$		

 $+\mu \cdot$

	0	1
c	$-2\beta_{(c, d, 0, 1)}$	$+2\beta_{(c, d, 0, 1)}$
d	$+2\beta_{(c, d, 0, 1)}$	$-2\beta_{(c, d, 0, 1)}$

	0	1	2
c	$-\frac{1}{2}\beta_{(c, 1)}$ $-\frac{1}{2}\beta_{(d, 0)}$	$+\beta_{(c, 1)}$	$-\frac{1}{2}\beta_{(c, 1)}$
d	$+\beta_{(d, 0)}$		
e	$-\frac{1}{2}\beta_{(d, 0)}$		

 $+\mu^2 \cdot$

$$=(1-\mu^2)(P-R)\frac{\lambda^2}{EI_c} \quad (53)$$

Punkt (c, 1)

	0	1	2	3
c	$-\beta_{(c, 1)}$ $-2\beta_{(c, d, 0, 1)}$	$+2\beta_{(c, 1)}$ $+\frac{1}{2}\beta_{(c, 2)}$ $+2\beta_{(c, d, 0, 1)}$ $+2\beta_{(c, d, 1, 2)}$ $+\beta_{(d, 1)}$	$-\beta_{(c, 1)}$ $-\beta_{(c, 2)}$ $-2\beta_{(c, d, 1, 2)}$	$+\frac{1}{2}\beta_{(c, 2)}$
d	$+2\beta_{(c, d, 0, 1)}$	$-2\beta_{(c, d, 0, 1)}$ $-2\beta_{(c, d, 1, 2)}$ $-2\beta_{(d, 1)}$	$+2\beta_{(c, d, 1, 2)}$	
e		$+\beta_{(d, 1)}$		

	0	1	2
c	$+2\beta_{(c, d, 0, 1)}$	$-2\beta_{(c, d, 0, 1)}$ $-2\beta_{(c, d, 1, 2)}$	$+2\beta_{(c, d, 1, 2)}$
d	$-2\beta_{(c, d, 0, 1)}$ $+\beta_{(d, 1)}$	$+2\beta_{(c, d, 0, 1)}$ $+2\beta_{(c, d, 1, 2)}$ $-2\beta_{(d, 1)}$	$-2\beta_{(c, d, 1, 2)}$ $+\beta_{(d, 1)}$

	0	1	2	3
$+\mu^2 \cdot c$	$+\beta_{(c, 1)}$	$-2\beta_{(c, 1)}$ $-\frac{1}{2}\beta_{(c, 2)}$	$+\beta_{(c, 1)}$ $+\beta_{(c, 2)}$	$-\frac{1}{2}\beta_{(c, 2)}$

$$= (1 - \mu^2)(P - R) \frac{\lambda^2}{EI_c}. \quad (54)$$

Punkt (c, n)

	$n-2$	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$
c	$\frac{1}{2}\beta_{(c, n-1)}$	$-\beta_{(c, n-1)} - \beta_{c, n}$ $-2\beta_{(c, d, n-1, n)}$	$+\frac{1}{2}\beta_{(c, n-1)} + 2\beta_{(c, n)} + \frac{1}{2}\beta_{(c, n+1)}$ $+2\beta_{(c, d, n-1, n)} + 2\beta_{(c, d, n, n+1)}$ $+ \beta_{(d, n)}$	$-\beta_{(c, n)} - \beta_{(c, n+1)}$ $-2\beta_{(c, d, n, n+1)}$	$+\frac{1}{2}\beta_{(c, n+1)}$
d		$+2\beta_{(c, d, n-1, n)}$	$-2\beta_{(c, d, n-1, n)} - 2\beta_{(c, d, n, n+1)}$ $-2\beta_{(d, n)}$	$+2\beta_{(c, d, n, n+1)}$	
e			$+ \beta_{(d, n)}$		

	$n-1$	n	$n+1$
c	$+2\beta_{(c, d, n-1, n)}$	$-2\beta_{(c, d, n-1, n)} - 2\beta_{(c, d, n, n+1)}$	$+2\beta_{(c, d, n, n+1)}$
d	$-2\beta_{(c, d, n-1, n)}$ $+ \beta_{(d, n)}$	$+2\beta_{(c, d, n-1, n)} + 2\beta_{(c, d, n, n+1)}$ $-2\beta_{(d, n)}$	$-2\beta_{(c, d, n, n+1)}$ $+ \beta_{(d, n)}$

	$n-2$	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$
$+ \mu^2 \cdot c$	$-\frac{1}{2}\beta_{(c, n-1)}$	$+\beta_{(c, n-1)} + \beta_{c, n}$	$-\frac{1}{2}\beta_{c, n-1} - 2\beta_{(c, n)} - \frac{1}{2}\beta_{(c, n+1)}$	$+\beta_{c, n} + \beta_{(c, n+1)}$	$-\frac{1}{2}\beta_{(c, n+1)}$

$$= (1 - \mu^2)(P - R) \frac{\lambda^2}{EI_c} \quad (55)$$

Punkt $(d, 1)$

	0	1	2	3
c	$+2\beta_{(c, d, 0, 1)}$	$-2\beta_{(c, d, 0, 1)} - 2\beta_{(c, d, 1, 2)}$ $-2\beta_{(d, 1)}$	$+2\beta_{(c, d, 1, 2)}$	
d	$-2\beta_{(c, d, 0, 1)}$ $-2\beta_{(d, 1)}$ $-2\beta_{(d, e, 0, 1)}$	$+2\beta_{(c, d, 0, 1)} + 2\beta_{(c, d, 1, 2)}$ $+8\beta_{(d, 1)} + \beta_{(d, 2)}$ $+2\beta_{(d, e, 0, 1)} + 2\beta_{(d, e, 1, 2)}$ $+ \beta_{(e, 1)}$	$-2\beta_{(c, d, 1, 2)}$ $-2\beta_{(d, 1)} - 2\beta_{(d, 2)}$ $-2\beta_{(d, e, 1, 2)}$	$+ \beta_{(d, 2)}$
e	$+2\beta_{(d, e, 0, 1)}$	$-2\beta_{(d, 1)}$ $-2\beta_{(d, e, 0, 1)} - 2\beta_{(d, e, 1, 2)}$ $-2\beta_{(e, 1)}$	$+2\beta_{(d, e, 1, 2)}$	
f		$+ \beta_{(e, 1)}$		

	0	1	2
c	$-2\beta_{(c, d, 0, 1)}$	$+2\beta_{(c, d, 0, 1)} + 2\beta_{(c, d, 1, 2)}$ $-2\beta_{(d, 1)}$	$-2\beta_{(c, d, 1, 2)}$ $+ \beta_{(d, 2)}$
$+ \mu \cdot d$	$+2\beta_{(c, d, 0, 1)}$ $-2\beta_{(d, 1)}$ $+2\beta_{(d, e, 0, 1)}$	$-2\beta_{(c, d, 0, 1)} - 2\beta_{(c, d, 1, 2)}$ $+8\beta_{(d, 1)}$ $-2\beta_{(d, e, 0, 1)} - 2\beta_{(d, e, 1, 2)}$	$+2\beta_{(c, d, 1, 2)}$ $-2\beta_{(d, 1)} - 2\beta_{(d, 2)}$ $+2\beta_{(d, e, 1, 2)}$
e	$-2\beta_{(d, e, 0, 1)}$ $+ \beta_{(e, 1)}$	$-2\beta_{(d, 1)}$ $+2\beta_{(d, e, 0, 1)} + 2\beta_{(d, e, 1, 2)}$ $-2\beta_{(e, 1)}$	$+ \beta_{(d, 2)}$ $-2\beta_{(d, e, 1, 2)}$ $+ \beta_{(e, 1)}$

$$= (1 - \mu^2) P \frac{\lambda^2}{EI_c}. \quad (56)$$

Punkt (d, n)

	$n-2$	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$
c		$+2\beta_{(c, d, n-1, n)}$	$-2\beta_{(c, d, n-1, n)} - 2\beta_{(c, d, n, n+1)}$ $-2\beta_{(d, n)}$	$+2\beta_{(c, d, n, n+1)}$	
d	$+\beta_{(d, n-1)}$	$-2\beta_{(c, d, n-1, n)}$ $-2\beta_{(d, n-1)} - 2\beta_{(d, n)}$ $-2\beta_{(d, e, n-1, n)}$	$+2\beta_{(c, d, n-1, n)} + 2\beta_{(c, d, n, n+1)}$ $+\beta_{(d, n-1)} + 8\beta_{(d, n)} + \beta_{(d, n+1)}$ $+2\beta_{(d, e, n-1, n)} + 2\beta_{(d, e, n, n+1)}$ $+\beta_{(e, n)}$	$-2\beta_{(c, d, n, n+1)}$ $-2\beta_{(d, n)} - 2\beta_{(d, n+1)}$ $-2\beta_{(d, e, n, n+1)}$	$+\beta_{(d, n+1)}$
e		$+2\beta_{(d, e, n-1, n)}$	$-2\beta_{(d, n)}$ $-2\beta_{(d, e, n-1, n)} - 2\beta_{(d, e, n, n+1)}$ $-2\beta_{(e, n)}$	$+2\beta_{(d, e, n, n+1)}$	
f			$+\beta_{(e, n)}$		

	$n-1$	n	$n+1$
c	$-2\beta_{(c, d, n-1, n)}$ $+\beta_{(d, n-1)}$	$+2\beta_{(c, d, n-1, n)} + 2\beta_{(c, d, n, n+1)}$ $-2\beta_{(d, n)}$	$-2\beta_{(c, d, n, n+1)}$ $+\beta_{(d, n+1)}$
$+ \mu \cdot d$	$+2\beta_{(c, d, n-1, n)}$ $-2\beta_{(d, n-1)} - 2\beta_{(d, n)}$ $+2\beta_{(d, e, n-1, n)}$	$-2\beta_{(c, d, n-1, n)} - 2\beta_{(c, d, n, n+1)}$ $+8\beta_{(d, n)}$ $-2\beta_{(d, e, n-1, n)} - 2\beta_{(d, e, n, n+1)}$	$+2\beta_{(c, d, n, n+1)}$ $-2\beta_{(d, n)} - 2\beta_{(d, n+1)}$ $+2\beta_{(d, e, n, n+1)}$
e	$+\beta_{(d, n-1)}$ $-2\beta_{(d, e, n-1, n)}$ $+\beta_{(e, n)}$	$-2\beta_{(d, n)}$ $+2\beta_{(d, e, n-1, n)} + 2\beta_{(d, e, n, n+1)}$ $-2\beta_{(e, n)}$	$+\beta_{(d, n+1)}$ $-2\beta_{(d, e, n, n+1)}$ $+\beta_{(e, n)}$

$$= (1 - \mu^2) P \frac{\lambda^2}{EI_c} \quad (57)$$

Exempel. Den i Fig. 31 viste kvadratiske Fundamentplade paa-
virkes af Belastningen P . Belastningen antages at virke enten som en

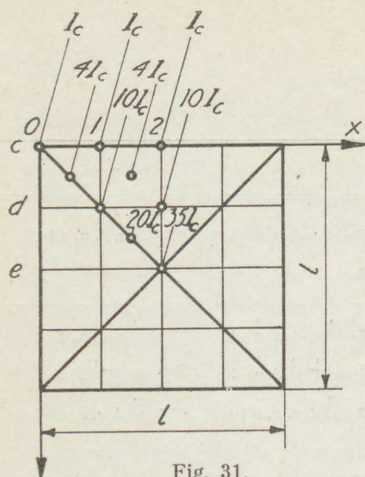


Fig. 31.

Belastning P ensformig fordelt
paa det skraverede Areal.

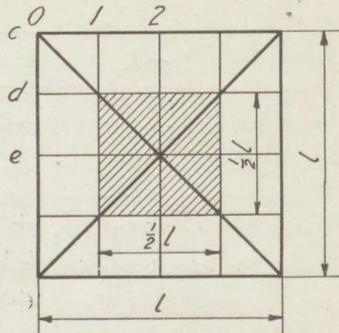


Fig. 32.

Enkeltkraft i Pladens Midtpunkt, eller som en ensformig fordelt Belastning paa et Kvadrat med Sidelinie $\frac{1}{2}l$ (Fig. 32). Reaktionen paa Under-
siden af Pladen regnes ensformig fordelt. Pladen er symmetrisk om
Systemlinierne e og 2 samt om Diagonalerne. Dens Inertimoment vari-
erer som angivet i Fig. 31 og i hosstaaende Tabel.

	0	0 — 1	1	1 — 2	2	
c	1		1		1	I_c
$c — d$		4		4		»
d	1		10		10	»
$d — e$		4		20		»
e	1		10		35	»

Ligesom i Exemplet i § 15 regnes Belastningens og Reaktionens
Retning positiv opad.

Med en Enkeltkraft P virkende nedad i Pladens Midtpunkt faas
de i hosstaaende Tabel angivne Kræfter i Systempunkterne

	0	1	2	
c	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16} P$
d		1	1	»
e			-15	»

For Punkt $(c, 0)$ opskrives Lign. (53),

» » $(c, 1)$ » » (54),

» » $(c, 2)$ » » (55),

» » $(d, 1)$ » » (56),

» » $(d, 2)$ » » (57),

» » $(e, 2)$ » » (52).

Herved faas følgende Ligninger (Side 89 og 90):

Punkt (c, 0)

	0	1	2
c	$+\frac{1}{2}$ +8	-1 -8	$+\frac{1}{2}$
d	$+\frac{1}{2}$ -8	+8	
e	$+\frac{1}{2}$		

 $+ \mu \cdot$

	0	1
c	-8	+8
d	+8	-8

 $+ \mu^2 \cdot$

	0	1	2
c	$-\frac{1}{2}$ +1	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
d	$-\frac{1}{2}$ +1		
e	$-\frac{1}{2}$		

 $= \frac{1}{4} \cdot (1 - \mu^2) \cdot \frac{1}{16} P \frac{\lambda^2}{EI_c},$

Punkt (c, 1)

	0	1	2	1
c	-1 -8	+2 +8	$+\frac{1}{2}$ +8	-1 -8
d	+8	-8	-8	+8
e		+10		

 $+ \mu \cdot$

	0	1	2
c	+8	-8	-8
d	-8	+8	+8
e		+10	

$+ \mu^2 \cdot$

	0	1	2	1
c	+1	-2	$-\frac{1}{2}$	+1
				$-\frac{1}{2}$

 $= \frac{1}{2} \cdot (1 - \mu^2) \cdot \frac{1}{16} P \frac{\lambda^2}{EI_c},$

Punkt (c, 2)

	0	1	2	1	0
c	$+\frac{1}{2}$ -1	-1 -8	$+\frac{1}{2}$ +2	$+\frac{1}{2}$ +8	-1 -8
d		+8	-8	-8	+8
e			+10		

 $+ \mu \cdot$

	1	2	1
c	+8	-8	-8
d	-8	+8	+8
e		+10	

$+ \mu^2 \cdot$

	0	1	2	1	0
c	$-\frac{1}{2}$	+1	+1	$-\frac{1}{2}$	-2
					$-\frac{1}{2}$

 $= \frac{1}{2} \cdot (1 - \mu^2) \cdot \frac{1}{16} P \frac{\lambda^2}{EI_c},$

Punkt (d, 1)

	0	1	2	1
c	+8	-8 -8 -20	+8	
d	-8 -20 -8	+8 +8 +80 +10 +8 +40 +10	-8 -20 -20 -40	+10
e	+8	-20 -8 -40 -20	+40	
d		+10		

+ $\mu \cdot$

	0	1	2
c	-8	+8 +8 -20	-8 +10
d	+8 -20 +8	-8 -8 +80 -8 -40	+8 -20 -20 +40
e	-8 +10	-20 +8 +40 -20	+10 -40 +10

$$= (1 - \mu^2) \cdot \frac{1}{16} P \frac{\lambda^2}{EI_c},$$

Punkt (d, 2)

	0	1	2	1	0
c		+8	-8 -8 -20	+8	
d	+10	-8 -20 -20 -40	+8 +8 +80 +10 +40 +40 +35	-8 -20 -20 -40	+10
e		+40	-20 -40 -40 -70	+40	
d			+35		

+ $\mu \cdot$

	1	2	1
c	-8 +10	+8 +8 -20	-8 +10
d	+8 -20 -20 +40	-8 -8 +80 -40 -40	+8 -20 -20 +40
e	+10 -40 +35	-20 +40 +40 -70	+10 -40 +35

$$= (1 - \mu^2) \cdot \frac{1}{16} P \frac{\lambda^2}{EI_c},$$

Punkt (e, 2)

	0	1	2	1	0
c			+10		
d		+40	-20 -40 -40 -70	+40	
e	+10	-40 -20 -70 -40	+10 +40 +40 +40 +40 +10	-40 -70 -20 -40	+10
d		+40	-70 -40 -40 -20	+40	
c			+10		

+ $\mu \cdot$

	1	2	1
d	+10 -40 +10	-20 +40 +40 -70	+10 -40 +10
e	+40 -20 -70 +40	-40 -40 +280 -40 -40	+40 -70 -20 +40
d	+10 -40 +10	-70 +40 +40 -20	+10 -40 +10

$$= -15 \cdot (1 - \mu^2) \cdot \frac{1}{16} P \frac{\lambda^2}{EI_c}.$$

For $\mu = 0$ og $e_2 = 0$ findes

$$\begin{aligned} c_0 &= 4368978 \frac{P}{16 \cdot 14004080} \frac{\lambda^2}{EI_c}, \\ c_1 &= 2556558 \quad \quad \quad \gg \quad \quad \quad \gg, \\ c_2 &= 1788278 \quad \quad \quad \gg \quad \quad \quad \gg, \\ d_1 &= 1051248 \quad \quad \quad \gg \quad \quad \quad \gg, \\ d_2 &= 414328 \quad \quad \quad \gg \quad \quad \quad \gg. \end{aligned}$$

Momenterne M_x er opstillet i Tabellen Side 94.

Paa hele Strækningen l i Linierne 1 og 2 er Momenterne $M_{x,1} = \frac{1}{32} Pl$ og $M_{x,2} = \frac{1}{16} Pl$.

For $\mu = 0,5$ og en Enkeltkraft P paa Midten faas

$$\begin{aligned} c_0 &= 166378620 \frac{(1 - \mu^2)P}{16 \cdot 449342760} \frac{\lambda^2}{EI_c}, \\ c_1 &= 96997140 \quad \quad \quad \gg \quad \quad \quad \gg, \\ c_2 &= 52340820 \quad \quad \quad \gg \quad \quad \quad \gg, \\ d_1 &= 51063615 \quad \quad \quad \gg \quad \quad \quad \gg, \\ d_2 &= 21373440 \quad \quad \quad \ll \quad \quad \quad \gg. \end{aligned}$$

For $\mu = 0,5$ og Belastningen P ensformig fordelt over et Kvadrat med Sidelinie $\frac{1}{2} l$ (Fig. 32) bliver

$$\begin{aligned} c_0 &= 120820792 \frac{(1 - \mu^2)P}{16 \cdot 449342760} \frac{\lambda^2}{EI_c}, \\ c_1 &= 62246272 \quad \quad \quad \gg \quad \quad \quad \gg, \\ c_2 &= 32609072 \quad \quad \quad \gg \quad \quad \quad \gg, \\ d_1 &= 26329927 \quad \quad \quad \gg \quad \quad \quad \gg, \\ d_2 &= 8302832 \quad \quad \quad \gg \quad \quad \quad \gg. \end{aligned}$$

De bøjende Momenter M_x , der findes ved Lign. (11), er opstillet i Tabellen Side 94.

Ligesom for $\mu = 0$ findes ved Belastning med en Enkeltkraft P paa Midten

$$\begin{aligned} M_{x,1} &= \frac{1}{32} Pl, \\ M_{x,2} &= \frac{1}{8} Pl, \end{aligned}$$

og ved Belastningen P ensformig fordelt over et Kvadrat med Sidelinie $\frac{1}{2} l$ (Fig. 32)

$$\begin{aligned} M_{x,1} &= \frac{1}{32} Pl, \\ M_{x,2} &= \frac{1}{16} Pl. \end{aligned}$$

Til Sammenligning beregnes Momenterne M_x i en kvadratisk Plade med konstant Inertimoment og $\mu = 0$. Systemlinierne tænkes indlagt paa samme Maade som i Fig. 31.

Ligningerne opstilles lettest ved Anvendelse af Tabellen Side 46—47.
Med en Enkeltkraft P i Pladens Midtpunkt bliver Ligningerne

$$\begin{aligned} 3c_0 - 6c_1 + c_2 + 2d_1 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} P \frac{\lambda^2}{EI}, \\ -3c_0 + 10c_1 - 4c_2 - 6d_1 + 3d_2 &= \frac{1}{2} \quad \gg \quad \gg, \\ c_0 - 8c_1 + 8c_2 + 4d_1 - 6d_2 + e_2 &= \frac{1}{2} \quad \gg \quad \gg, \\ 2c_0 - 12c_1 + 4c_2 + 20d_1 - 16d_2 + 2e_2 &= 1 \quad \gg \quad \gg, \\ 6c_1 - 6c_2 - 16d_1 + 24d_2 - 8e_2 &= 1 \quad \gg \quad \gg, \\ 4c_2 + 8d_1 - 32d_2 + 20e_2 &= -15 \quad \gg \quad \gg. \end{aligned}$$

Sættes $e_2 = 0$ findes herved

$$\begin{aligned} c_0 &= 6172 \frac{P}{16 \cdot 1192} \frac{\lambda^2}{EI}, \\ c_1 &= 4622 \quad \gg \quad \gg, \\ c_2 &= 3810 \quad \gg \quad \gg, \\ d_1 &= 2852 \quad \gg \quad \gg, \\ d_2 &= 1748 \quad \gg \quad \gg. \end{aligned}$$

Med Belastningen P ensformig fordelt over et Kvadrat med Sidelinie $\frac{1}{2}l$ bliver Ligningerne

$$\begin{aligned} 3c_0 - 6c_1 + c_2 + 2d_1 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} P \frac{\lambda^2}{EI}, \\ -3c_0 + 10c_1 - 4c_2 - 6d_1 + 3d_2 &= \frac{1}{2} \quad \gg \quad \gg, \\ c_0 - 8c_1 + 8c_2 + 4d_1 - 6d_2 + e_2 &= \frac{1}{2} \quad \gg \quad \gg, \\ 2c_0 - 12c_1 + 4c_2 + 20d_1 - 16d_2 + 2e_2 &= 0 \quad \gg \quad \gg, \\ 6c_1 - 6c_2 - 16d_1 + 24d_2 - 8e_2 &= -1 \quad \gg \quad \gg, \\ 4c_2 + 8d_1 - 32d_2 + 20e_2 &= -3 \quad \gg \quad \gg. \end{aligned}$$

Herved findes

$$\begin{aligned} c_0 &= 3548 \frac{P}{16 \cdot 1192} \frac{\lambda^2}{EI}, \\ c_1 &= 2482 \quad \gg \quad \gg, \\ c_2 &= 1982 \quad \gg \quad \gg, \\ d_1 &= 1282 \quad \gg \quad \gg, \\ d_2 &= 680 \quad \gg \quad \gg, \end{aligned}$$

Ved Hjælp af Lign. (11) findes Momenterne M_x , som er opstillet i Tabellen Side 94.

Momenter M_x i en kvadratisk Fundamentplade med en ensformig fordelt Reaktion.

	μ	Enkeltkraft P i Pladens Midtpunkt.			Belastning P ensformig fordelt over et Kvadrat med Sidelinie $\frac{1}{2}l$ (Fig. 32).			
Variabelt Inertimoment (Fig. 31)	0		1	2			1	2
		c	0,0050	0,0102	P	c	0,0047	0,0068
		d	0,0392	0,0960	»	d	0,0388	0,0569
		e	0,0416	0,2978	»	e	0,0428	0,1294
	0,5		1	2			1	2
		c	0,0026	0,0093	P	c	0,0030	0,0062
		d	0,0339	0,0893	»	d	0,0374	0,0613
		e	0,0546	0,3122	»	e	0,0473	0,1212
Konstant Inertimoment	0		1	2			1	2
		c	0,0387	0,0852	P	c	0,0297	0,0525
		d	0,0349	0,1158	»	d	0,0314	0,0631
		e	0,0165	0,1833	»	e	0,0326	0,0713

Ude ved Kanten af Pladen i Punkterne $(c, 1)$ og $(c, 2)$ er Momenterne M_x i Pladen med variabelt Inertimoment smaa i Forhold til Momenterne i Pladen med konstant Inertimoment. I Pladen med variabelt Inertimoment vil de bøjende Momenter, som optræder i Snittene 1 og 2, have deres største Værdier i Midten af Snittene, hvor Inertimomentet er større end ude ved Kanterne.

For Pladen med konstant Inertimoment vil der med $\mu = 0$ optræde ret forskellige Værdier af Momenterne M_x i Snitlinie 1, eftersom Belastningen virker som en Enkeltkraft eller som en ensformig fordelt Belastning over et Kvadrat med Sidelinie $\frac{1}{2}l$. Ved Pladen med variabelt Inertimoment vil der derimod i Snitlinie 1 baade for $\mu = 0$ og for $\mu = 0,5$ ikke være nogen betydelig Forskel paa Momenterne M_x i de to Belastningstilfælde.

I Snitlinierne 1 og 2 varierer Momenterne M_x en Del med Forholdet μ , saaledes at Momenterne ved Kanten af Pladen er mindst ved de største Værdier af μ ; men hele Momentet $M_{x,1}$ i Snit 1 ligesom ogsaa hele Momentet $M_{x,2}$ i Snit 2 er uafhængigt af μ .

§ 17. Spring i Inertimomentet.

I Figurerne 33, 34, 35, 36, 37 og 38 er Pladens Inertimoment paa det skraverede Areal $I = \beta I_c$. Uden for det skraverede Areal er Inertimomentet $I = I_c$. I Fig. 33 og Fig. 34 er Systemlinierne indlagt saaledes, at Overgangen mellem $I = I_c$ og $I = \beta I_c$ følger en Systemlinie. I Figurerne 35, 36, 37 og 38 ligger Overgangen mellem de to forskellige Inertimomenter midt imellem to Systemlinier. I alle Figurerne er forudsat $\Delta x = \Delta y = \lambda$.

For hvert af de i Figurerne indcirklede Punkter gælder Lign. (8). Det skal derfor blot undersøges, hvorledes de bøjende og de vridende Momenter, som indgaar i Lign. (8), kan udtrykkes ved Nedbøjningerne.

I Linie n (Fig. 33) vil der ved Punkt (f, n) , hvor Pladens Inertimoment springer fra $I = I_c$ til $I = \beta I_c$, ligeledes være et Spring i M_x , medens derimod M_y vil variere kontinuert. Bibeholder man Betegnelsen M_x , hvor $I = I_c$, og anvender Betegnelsen $M_{x\beta}$, hvor $I = \beta I_c$, har man

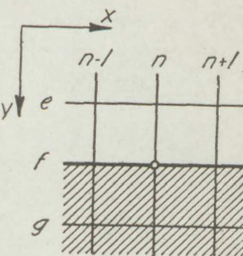


Fig. 33.

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} = -\frac{1}{EI_c} (M_x - \mu M_y),$$

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} = -\frac{1}{\beta EI_c} (M_{x\beta} - \mu M_y),$$

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{M_y}{EI_c} - \mu \frac{M_x}{EI_c} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{M_y}{\beta EI_c} - \mu \frac{M_{x\beta}}{\beta EI_c} \right).$$

Heraf findes

$$\left. \begin{aligned} M_y &= -2\beta EI_c \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}}{(1 + \beta)(1 - \mu^2)}, \\ M_x &= -EI_c \left(\frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}}{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} + 2\mu \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)(1 - \mu^2)}} \right), \\ M_{x\beta} &= -\beta EI_c \left(\frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}}{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} + 2\mu \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}}{(1 + \beta)(1 - \mu^2)}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

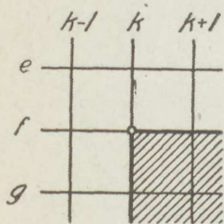


Fig. 34.

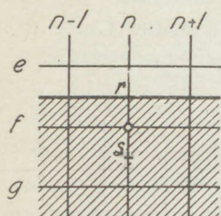
For Punkt (f, k) (Fig. 34) er der ingen Spring i Momenterne M_x og M_y . Man har da

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{M_x}{EI_c} - \mu \frac{M_y}{EI_c} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{M_x}{2EI_c} - \mu \frac{M_y}{2EI_c} + \frac{M_x}{2\beta EI_c} - \mu \frac{M_y}{2\beta EI_c} \right) \\ &= -\frac{1}{EI_c} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4\beta} \right) (M_x - \mu M_y), \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} = -\frac{1}{EI_c} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4\beta} \right) (M_y - \mu M_x),$$

hvoraf

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\beta EI_c \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}}{(\frac{3}{4}\beta + \frac{1}{4})(1 - \mu^2)}, \\ M_y &= -\beta EI_c \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}}{(\frac{3}{4}\beta + \frac{1}{4})(1 - \mu^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$



For Punkt (f, n) (Fig. 35) er

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} &= -\frac{1}{\beta EI_c} (M_{x\beta} - \mu M_y), \\ \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} &= \frac{e_n - 2f_n + g_n}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Fig. 35.

Idet z_r og z_s betegner Nedbøjningerne af Punkterne r og s , har man

$$\begin{aligned} \frac{e_n - 2z_r + f_n}{\lambda^2} &= -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{M_y}{EI_c} - \mu \frac{M_x}{EI_c} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{M_y}{\beta EI_c} - \mu \frac{M_{x\beta}}{\beta EI_c} \right) \right], \\ \frac{2z_r - 4f_n + 2z_s}{\lambda^2} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{M_y}{\beta EI_c} - \mu \frac{M_{x\beta}}{\beta EI_c} \right), \\ \frac{f_n - 2z_s + g_n}{\lambda^2} &= -\frac{1}{4} \left(\frac{M_y}{\beta EI_c} - \mu \frac{M_{x\beta}}{\beta EI_c} \right). \end{aligned}$$

Ved Addition faas

$$\frac{e_n - 2f_n + g_n}{\lambda^2} = \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} = - \left[\frac{7}{8} \frac{M_y}{\beta EI_c} + \frac{1}{8} \frac{M_y}{EI_c} - \mu \left(\frac{7}{8} \frac{M_{x\beta}}{\beta EI_c} + \frac{1}{8} \frac{M_x}{EI_c} \right) \right].$$

Regnes heri tilnærmelsesvis $M_{x\beta} = \beta M_x$, faas

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} = - \left(\frac{7}{8} \frac{M_y}{\beta EI_c} + \frac{1}{8} \frac{M_y}{EI_c} - \mu \frac{M_{x\beta}}{\beta EI_c} \right).$$

Herved findes

$$\left. \begin{aligned} M_{x\beta} &= -\beta EI_c \frac{(\frac{7}{8} + \frac{1}{8}\beta) \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}}{\frac{7}{8} + \frac{1}{8}\beta - \mu^2}, \\ M_y &= -\beta EI_c \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}}{\frac{7}{8} + \frac{1}{8}\beta - \mu^2}. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

I Punkt $(e, f, n-1, n)$ (Fig. 35) er

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y} = -\frac{1}{2} (1 + \mu) \left(\frac{M_v}{EI_c} + \frac{M_v}{\beta EI_c} \right),$$

hvoraf

$$M_v = -\beta EI_c \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y}}{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\beta)(1 + \mu)}. \quad (61)$$

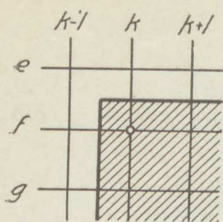


Fig. 36.

For Punkt (f, k) (Fig. 36) er

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} = - \left(\frac{7}{8} \frac{M_x}{\beta EI_c} + \frac{1}{8} \frac{M_x}{EI_c} - \mu \frac{M_y}{\beta EI_c} \right),$$

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} = - \left(\frac{7}{8} \frac{M_y}{\beta EI_c} + \frac{1}{8} \frac{M_y}{EI_c} - \mu \frac{M_x}{\beta EI_c} \right),$$

hvoraf

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\beta EI_c \frac{(\frac{7}{8} + \frac{1}{8}\beta) \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}}{(\frac{7}{8} + \frac{1}{8}\beta)^2 - \mu^2}, \\ M_y &= -\beta EI_c \frac{(\frac{7}{8} + \frac{1}{8}\beta) \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}}{(\frac{7}{8} + \frac{1}{8}\beta)^2 - \mu^2}. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

For Punkt $(e, f, k-1, k)$ er

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y} = -(1+\mu) \left(\frac{3}{4} \frac{M_v}{EI_c} + \frac{1}{4} \frac{M_v}{\beta EI_c} \right),$$

hvoraf

$$M_v = -\beta EI_c \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y}}{(\frac{3}{4}\beta + \frac{1}{4})(1+\mu)}. \quad (63)$$

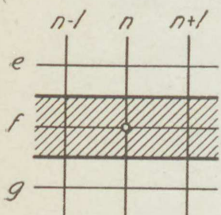


Fig. 37.

For Punkt (f, n) (Fig. 37) er

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} = - \frac{1}{\beta EI_c} (M_x - \mu M_y),$$

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} = - \left(\frac{3}{4} \frac{M_y}{\beta EI_c} + \frac{1}{4} \frac{M_y}{EI_c} - \mu \frac{M_x}{\beta EI_c} \right),$$

hvoraf

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\beta EI_c \frac{(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\beta) \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\beta - \mu^2}, \\ M_y &= -\beta EI_c \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\beta - \mu^2}. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

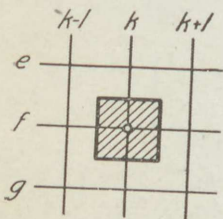


Fig. 38.

For Punkt (f, k) (Fig. 38) er

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} = - \left(\frac{3}{4} \frac{M_x}{\beta EI_c} + \frac{1}{4} \frac{M_x}{EI_c} - \mu \frac{M_y}{\beta EI_c} \right),$$

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} = - \left(\frac{3}{4} \frac{M_y}{\beta EI_c} + \frac{1}{4} \frac{M_y}{EI_c} - \mu \frac{M_x}{\beta EI_c} \right),$$

hvoraf

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\beta EI_c \frac{(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\beta) \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}}{(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\beta)^2 - \mu^2}, \\ M_y &= -\beta EI_c \frac{(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\beta) \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}}{(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\beta)^2 - \mu^2}. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

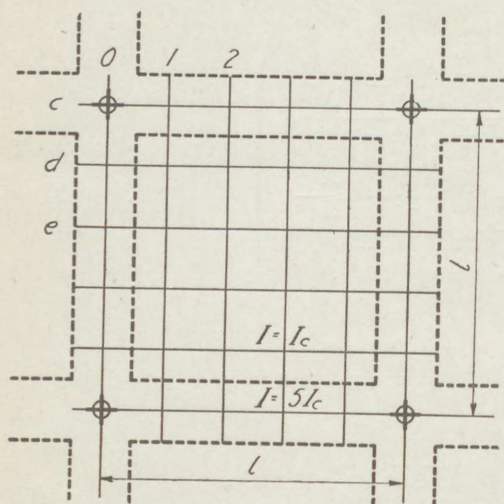


Fig. 39.

Exempel. Fig. 39 fremstiller en Plade, som understøttes i enkelte Punkter, hvis Afstande i begge Retninger er l . Pladen er i Understøtningsrækkerne forsynet med Ribber, hvis Bredde er $0,2l$, og Inertimomentet er her $I = 5I_c$. Mellem Ribberne er $I = I_c$. Pladen tænkes at strække sig over uendelig mange Fag i begge Retninger. Belastningen er ensformig fordelt over alle Fag. Poisson's Forhold forudsættes at være $\mu = 0,2$.

Systemlinierne indlægges med Afstand $\lambda = \frac{1}{3}l$ i begge Retninger. Paa Grund af Symmetrien om Diagonalerne har man

$$\begin{aligned} d_0 &= c_1, \\ e_0 &= c_2, \\ \text{og } e_1 &= d_2. \end{aligned}$$

Endvidere har man

$$\begin{aligned} M_x(d, 0) &= M_y(c, 1), \\ M_x(e, 0) &= M_y(c, 2), \\ M_x(e, 1) &= M_y(d, 2), \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} M_y(d, 0) &= M_x(c, 1), \\ M_y(e, 0) &= M_x(c, 2), \\ M_y(e, 1) &= M_x(d, 2). \end{aligned}$$

Ved Bestemmelsen af Nedbøjningerne i Punkterne $(c, 0)$, $(c, 1)$, $(c, 2)$, $(d, 1)$, $(d, 2)$ og $(e, 2)$ opstilles Lign. (8) for hvert af disse Punkter. Momenterne, som indgaar i Lign. (8), udtrykkes ved Nedbøjningerne.

For Punkt $(c, 0)$ har man af Lign. (11)

$$\begin{aligned} M_x &= -\beta EI_c \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}}{1 - \mu^2} = -\frac{5EI_c}{0,96\lambda^2} \left\{ \begin{array}{c} + 0,2c_1 \\ c_1 - 2,4c_0 + c_1 \\ + 0,2c_1 \end{array} \right\}, \\ M_y &= -\beta EI_c \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}}{1 - \mu^2} = -\frac{5EI_c}{0,96\lambda^2} \left\{ \begin{array}{c} + c_1 \\ 0,2c_1 - 2,4c_0 + 0,2c_1 \\ + c_1 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Punkt (c, 1) (Fig. 37, Lign. (64) anvendes):

$$M_x = -\beta EI_c \frac{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\beta\right) \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\beta - \mu^2} = -\frac{5EI_c}{1,96\lambda^2} \left\{ \begin{array}{c} + 0,2d_1 \\ 2c_0 - 4,4c_1 + 2c_2 \\ + 0,2d_1 \end{array} \right\},$$

$$M_y = -\beta EI_c \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\beta - \mu^2} = -\frac{5EI_c}{1,96\lambda^2} \left\{ \begin{array}{c} + d_1 \\ 0,2c_0 - 2,4c_1 + 0,2c_2 \\ + d_1 \end{array} \right\}.$$

Punkt (c, 2) (Fig. 37, Lign. (64)):

$$M_x = -\frac{5EI_c}{1,96\lambda^2} \left\{ \begin{array}{c} + 0,2d_2 \\ 2c_1 - 4,4c_2 + 2c_2 \\ + 0,2d_2 \end{array} \right\},$$

$$M_y = -\frac{5EI_c}{1,96\lambda^2} \left\{ \begin{array}{c} + d_2 \\ 0,2c_1 - 2,4c_2 + 0,2c_2 \\ + d_2 \end{array} \right\}.$$

For Punkt (d, 1) faas af Fig. 36, Lign. (62), idet βI_c erstattes af I_c og β af $\frac{1}{\beta}$:

$$M_x = -EI_c \frac{\left(\frac{7}{8} + \frac{1}{8\beta}\right) \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}}{\left(\frac{7}{8} + \frac{1}{8\beta}\right)^2 - \mu^2} = -\frac{EI_c}{0,77\lambda^2} \left\{ \begin{array}{c} + 0,2c_1 \\ 0,9c_1 - 2,2d_1 + 0,9d_2 \\ + 0,2d_2 \end{array} \right\},$$

$$M_y = -\frac{EI_c}{0,77\lambda^2} \left\{ \begin{array}{c} + 0,9c_1 \\ 0,2c_1 - 2,2d_1 + 0,2d_2 \\ + 0,9d_2 \end{array} \right\}.$$

For Punkt (d, 2) faas af Fig. 35, Lign. (60), idet βI_c erstattes af I_c og β af $\frac{1}{\beta}$:

$$M_x = -EI_c \frac{\left(\frac{7}{8} + \frac{1}{8\beta}\right) \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}}{\frac{7}{8} + \frac{1}{8\beta} - \mu^2} = -\frac{EI_c}{0,86\lambda^2} \left\{ \begin{array}{c} + 0,2c_2 \\ 0,9d_1 - 2,2d_2 + 0,9d_2 \\ + 0,2e_2 \end{array} \right\},$$

$$M_y = -EI_c \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}}{\frac{7}{8} + \frac{1}{8\beta} - \mu^2} = -\frac{EI_c}{0,86\lambda^2} \left\{ \begin{array}{c} + c_2 \\ 0,2d_1 - 2,4d_2 + 0,2d_2 \\ + e_2 \end{array} \right\}.$$

Punkt (e, 2) (Lign. 11):

$$M_x = -\frac{EI_c}{0,96\lambda^2} \left\{ \begin{array}{c} + 0,2d_2 \\ d_2 - 2,4e_2 + e_2 \\ + 0,2e_2 \end{array} \right\},$$

$$M_y = -\frac{EI_c}{0,96\lambda^2} \left\{ \begin{array}{c} + d_2 \\ 0,2d_2 - 2,4e_2 + 0,2e_2 \\ + e_2 \end{array} \right\}.$$

Punkt (c, d, 0,1) (Fig. 36, Lign. (63); βI_c erstattes af I_c og β af $\frac{1}{\beta}$):

$$M_v = -EI_c \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y}}{\left(\frac{3}{4\beta} + \frac{1}{4}\right)(1+\mu)} = -\frac{EI_c}{0,48\lambda^2} \left\{ \begin{array}{c} c_0 - c_1 \\ -c_1 + d_1 \end{array} \right\}.$$

Punkt (c, d, 1,2) (Fig. 35, Lign. (61):

$$M_v = -EI_c \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y}}{\left(\frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2}\right)(1+\mu)} = -\frac{EI_c}{0,72\lambda^2} \left\{ \begin{array}{c} c_1 - c_2 \\ -d_1 + d_2 \end{array} \right\}.$$

Punkt (d, e, 1,2) (Lign. (11)):

$$M_v = -EI_c \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y}}{1+\mu} = -\frac{EI_c}{1,20\lambda^2} \left\{ \begin{array}{c} d_1 - d_2 \\ -d_2 + e_2 \end{array} \right\}.$$

Ved at indføre disse Udtryk for Momenterne i Lign. (8) faas følgende Ligninger:

Punkt (c, 0)

	2	1	0	1	2
e			$+\frac{10}{1,96}$		
d		$+\frac{1}{1,96}$ $+\frac{1}{0,24}$ $+\frac{1}{1,96}$	$-\frac{22}{1,96}$ $-\frac{1}{0,24}$ $-\frac{1}{0,24}$ $-\frac{10+2}{0,96}$	$+\frac{1}{1,96}$ $+\frac{1}{0,24}$ $+\frac{1}{1,96}$	
c	$+\frac{10}{1,96}$ $-\frac{22}{1,96}$ $-\frac{1}{0,24}$ $-\frac{10+2}{0,96}$	$+\frac{1}{0,24}$ $+\frac{1}{0,24}$ $+\frac{1}{0,24}$ $+\frac{1}{0,24}$ $+\frac{1}{1,96}$	$+\frac{10}{1,96}$ $+\frac{24+24}{0,96}$ $+\frac{10}{1,96}$ $+\frac{1}{0,24}$ $+\frac{1}{0,24}$ $+\frac{10}{1,96}$	$-\frac{10+2}{0,96}$ $-\frac{22}{1,96}$ $-\frac{1}{0,24}$ $+\frac{10}{1,96}$	$= -24 \frac{P_{\lambda^4}}{EJ_c}$
d	$+\frac{1}{1,96}$ $+\frac{1}{0,24}$ $+\frac{1}{1,96}$	$-\frac{10+2}{0,96}$ $-\frac{1}{0,24}$ $-\frac{1}{0,24}$ $-\frac{22}{1,96}$ $+\frac{1}{1,96}$	$+\frac{1}{1,96}$ $+\frac{1}{0,24}$ $+\frac{1}{0,24}$ $+\frac{1}{1,96}$		
e			$+\frac{10}{1,96}$		

Punkt (c, 1)

	1	0	1	2	2
e			$+\frac{0,9}{0,77}$		
d		$+\frac{0,2}{0,77}$ $+\frac{1}{0,24}$ $+\frac{1}{0,96}$	$-\frac{2,2}{0,77}$ $-\frac{1}{0,24}$ $-\frac{1}{0,36}$ $-\frac{10+2}{1,96}$	$+\frac{0,2}{0,77}$ $+\frac{1}{0,36}$ $+\frac{1}{1,96}$	
c	$+\frac{5}{0,96}$ $-\frac{12}{0,96}$ $-\frac{20+2}{1,96}$ $-\frac{1}{0,24}$	$+\frac{1}{0,24}$ $+\frac{1}{0,24}$ $+\frac{1}{0,24}$ $+\frac{1}{0,24}$ $+\frac{1}{0,36}$ $+\frac{0,9}{0,77}$	$+\frac{5}{0,96}$ $+\frac{44+24}{1,96}$ $+\frac{10}{1,96}$ $+\frac{1}{0,24}$ $+\frac{1}{0,36}$ $+\frac{0,9}{0,77}$	$-\frac{20+2}{1,96}$ $-\frac{22}{1,96}$ $+\frac{10}{1,96}$ $-\frac{1}{0,36}$ $+\frac{1}{1,96}$	$= \frac{P_{\lambda^4}}{EJ_c}$
d	$+\frac{1}{0,96}$ $+\frac{1}{0,24}$ $+\frac{0,2}{0,77}$	$-\frac{10+2}{1,96}$ $-\frac{1}{0,24}$ $-\frac{1}{0,36}$ $-\frac{2,2}{0,77}$	$+\frac{1}{0,36}$ $+\frac{1}{1,96}$ $+\frac{0,2}{0,77}$		
e			$+\frac{0,9}{0,77}$		

Punkt (c, 2)

	0	1	2	2	1
e			$+\frac{1}{0,86}$		
d		$+\frac{0,2}{0,86}$	$-\frac{2,4}{0,86}$	$+\frac{0,2}{0,86}$	
		$+\frac{1}{0,36}$	$-\frac{1}{0,36}$		
		$+\frac{1}{1,96}$	$-\frac{2+10}{1,96}$	$+\frac{1}{1,96}$	
c	$+\frac{10}{1,96}$	$-\frac{22}{1,96}$	$+\frac{10}{1,96}$	$-\frac{20+2}{1,96}$	$+\frac{10}{1,96}$
		$-\frac{1}{0,36}$	$+\frac{1}{0,36}$	$-\frac{22}{1,96}$	
		$-\frac{1}{0,36}$	$+\frac{1}{0,36}$	$-\frac{22}{1,96}$	
			$+\frac{1}{0,86}$		
d	$+\frac{1}{1,96}$	$+\frac{1}{0,36}$	$-\frac{2+10}{1,96}$	$+\frac{1}{1,96}$	
		$-\frac{0,2}{0,86}$	$-\frac{2,4}{0,86}$	$+\frac{0,2}{0,86}$	
e			$+\frac{1}{0,86}$		

$$= \frac{P\lambda^4}{EJ_c}$$

Punkt (d, 1)

	1	0	1	2	2
d			$+\frac{5}{1,96}$		
c		$+\frac{1}{1,96}$	$-\frac{12}{1,96}$	$+\frac{1}{1,96}$	
		$+\frac{1}{0,24}$	$-\frac{1}{0,24}$	$+\frac{1}{0,36}$	
		$+\frac{1}{1,96}$	$-\frac{0,4+1,8}{0,77}$	$+\frac{0,2}{0,86}$	
d	$+\frac{5}{1,96}$	$-\frac{12}{1,96}$	$+\frac{5}{1,96}$	$-\frac{1,8+0,4}{0,77}$	$+\frac{0,9}{0,86}$
		$-\frac{1}{0,36}$	$+\frac{1}{0,36}$	$-\frac{2,2}{0,86}$	
			$+\frac{1}{0,6}$	$-\frac{1}{0,6}$	
			$+\frac{0,9}{0,86}$		
e	$+\frac{1}{1,96}$	$+\frac{1}{0,36}$	$-\frac{0,4+1,8}{0,77}$	$+\frac{0,2}{0,86}$	
		$+\frac{0,2}{0,86}$	$-\frac{2,2}{0,86}$	$+\frac{0,2}{0,86}$	
e			$+\frac{0,9}{0,86}$		

$$= \frac{P\lambda^4}{EJ_c}$$

Punkt (d, 2)

	0	1	2	2	1
d			$+\frac{5}{1,96}$		
c		$+\frac{1}{1,96}$	$-\frac{12}{1,96}$	$+\frac{1}{1,96}$	
		$+\frac{1}{0,36}$	$-\frac{1}{0,36}$		
		$+\frac{0,2}{0,77}$	$-\frac{2+0,4}{0,86}$	$+\frac{0,2}{0,86}$	
d		$-\frac{1}{0,36}$	$+\frac{5}{1,96}$		
		$+\frac{0,9}{0,77}$	$+\frac{1}{0,36}$		
		$-\frac{2,2}{0,77}$	$+\frac{4,8+4,4}{0,86}$	$+\frac{0,9}{0,86}$	
		$-\frac{0,4+1,8}{0,86}$	$+\frac{1}{0,6}$	$-\frac{0,4+1,8}{0,86}$	
		$-\frac{1}{0,6}$	$+\frac{1}{0,96}$	$-\frac{2,2}{0,86}$	
			$+\frac{0,9}{0,86}$	$+\frac{0,9}{0,86}$	
e		$+\frac{0,2}{0,77}$	$-\frac{2+0,4}{0,86}$	$+\frac{0,2}{0,86}$	
		$+\frac{1}{0,6}$	$-\frac{1}{0,6}$		
		$+\frac{0,2}{0,96}$	$-\frac{2,4}{0,96}$	$+\frac{0,2}{0,96}$	
e			$+\frac{1}{0,96}$		

$$= \frac{P_A^4}{EJ_c}$$

Punkt (e, 2)

	0	1	2	2	1
c			$+\frac{1}{0,86}$		
d		$+\frac{0,2}{0,86}$	$-\frac{2,4}{0,86}$	$+\frac{0,2}{0,86}$	
		$+\frac{1}{0,6}$	$-\frac{1}{0,6}$		
		$+\frac{0,2}{0,86}$	$-\frac{0,4+2}{0,96}$	$+\frac{0,2}{0,96}$	
e		$-\frac{1}{0,6}$	$+\frac{1}{0,86}$		
		$+\frac{1}{0,86}$	$+\frac{4,8+4,8}{0,96}$	$+\frac{1}{0,96}$	
		$-\frac{2,4}{0,86}$	$+\frac{1}{0,96}$	$-\frac{2+0,4}{0,96}$	
		$-\frac{2+0,4}{0,96}$	$+\frac{1}{0,96}$	$-\frac{2,4}{0,96}$	
			$+\frac{1}{0,96}$	$+\frac{1}{0,96}$	
e		$+\frac{0,2}{0,86}$	$-\frac{0,4+2}{0,96}$	$+\frac{0,2}{0,96}$	
		$+\frac{0,2}{0,96}$	$-\frac{2,4}{0,96}$	$+\frac{0,2}{0,96}$	
d			$+\frac{1}{0,96}$		

$$= \frac{P_A^4}{EJ_c}$$

De ordnede Ligninger er:

$$\begin{aligned}
 (c, 0) \quad & 40,96 c_0 - 60,32 c_1 + 9,60 c_2 + 9,76 d_1 = -11,28960000 \frac{p\lambda^4}{EI_c}, \\
 (c, 1) \quad & -34,83480 c_0 + 84,07784 c_1 - 24,88640 c_2 \\
 & -34,60688 d_1 + 10,25024 d_2 = 1,08662400 \quad \gg, \\
 (c, 2) \quad & 3,09600 c_0 - 13,89760 c_1 + 18,40480 c_2 \\
 & + 4,27264 d_1 - 13,28704 d_2 + 1,41120 e_2 = 0,60681600 \quad \gg, \\
 (d, 1) \quad & 2,4236520 c_0 - 14,8809584 c_1 + 3,2899328 c_2 \\
 & + 16,4072216 d_1 - 8,2359200 d_2 + 0,9960720 e_2 = 0,46724832 \quad \gg, \\
 (d, 2) \quad & 2,2038016 c_1 - 5,1155104 c_2 \\
 & - 4,1179600 d_1 + 9,5877628 d_2 - 2,5580940 e_2 = 0,46724832 \quad \gg, \\
 (e, 2) \quad & 0,96 c_2 + 0,88 d_1 - 4,52 d_2 + 2,68 e_2 = 0,41280000 \quad \gg.
 \end{aligned}$$

Den ene af disse Ligninger kan udledes af de andre. Sættes $c_0=0$, faas ved Løsning af Ligningerne

$$\begin{aligned}
 c_1 &= 0,4169 \frac{p\lambda^4}{EI_c}, \\
 c_2 &= 0,9498 \quad \gg, \\
 d_1 &= 0,7635 \quad \gg, \\
 d_2 &= 1,2012 \quad \gg, \\
 e_2 &= 1,5890 \quad \gg.
 \end{aligned}$$

Ved Hjælp af de paa Side 98—100 angivne Udtryk for Momenterne findes herved følgende Værdier at Momenterne M_x

Momenter M_x for $\mu = 0,2$ (Fig. 39).

	0	1	2	
c	— 0,2309	— 0,0176	+ 0,0893	pl^2
d	— 0,0621	— 0,0078	+ 0,0171	»
e	— 0,0413	— 0,0023	+ 0,0194	»

Dersom man i Stedet for $\mu = 0,2$ kunde regne $\mu = 0$, vilde man faa følgende Relationer mellem Momenterne og Nedbøjningerne:

$$\text{Punkt } (c, 0). \quad M_x = M_y = -\frac{5EI_c}{\lambda^2} (c_1 - 2c_0 + c_1).$$

$$\text{Punkt } (c, 1). \quad M_x = -\frac{5EI_c}{\lambda^2} (c_0 - 2c_1 + c_2),$$

$$M_y = -\frac{5EI_c}{2\lambda^2} \left\{ \begin{array}{l} + d_1 \\ -2c_1 \\ + d_1 \end{array} \right\}.$$

Punkt (c, 2).
$$M_x = -\frac{5EI_c}{\lambda^2}(c_1 - 2c_2 + c_3),$$

$$M_y = -\frac{5EI_c}{2\lambda^2} \begin{Bmatrix} + & d_2 \\ -2c_2 \\ + & d_2 \end{Bmatrix}.$$

Punkt (d, 1).
$$M_x = M_y = -\frac{EI_c}{0,9\lambda^2}(c_1 - 2d_1 + d_2).$$

Punkt (d, 2).
$$M_x = -\frac{EI_c}{\lambda^2}(d_1 - 2d_2 + d_3),$$

$$M_y = -\frac{EI_c}{0,9\lambda^2} \begin{Bmatrix} + & c_2 \\ -2d_2 \\ + & e_2 \end{Bmatrix}.$$

Punkt (e, 2).
$$M_x = M_y = -\frac{EI_c}{\lambda^2}(d_2 - 2e_2 + e_3).$$

Punkt (c, d, 0, 1).
$$M_v = -\frac{EI_c}{0,4\lambda^2} \begin{Bmatrix} c_0 - c_1 \\ -c_1 + d_1 \end{Bmatrix}.$$

Punkt (c, d, 1, 2).
$$M_v = -\frac{EI_c}{0,6\lambda^2} \begin{Bmatrix} c_1 - c_2 \\ -d_1 + d_2 \end{Bmatrix}.$$

Punkt (d, e, 1, 2).
$$M_v = -\frac{EI_c}{\lambda^2} \begin{Bmatrix} d_1 - d_2 \\ -d_2 + e_2 \end{Bmatrix}.$$

Disse Udtryk indføres i Lign. (8), som opstilles for Punkterne (c, 0), (c, 1), (c, 2), (d, 1), (d, 2) og (e, 2). Idet $c_0 = 0$, findes ved Løsning af Ligningerne

$$\begin{aligned} c_1 &= 1945008 \cdot \frac{p\lambda^4}{3820430 EI_c}, \\ c_2 &= 3937830 \quad \quad \quad \rangle \quad \quad , \\ d_1 &= 3147702 \quad \quad \quad \rangle \quad \quad , \\ d_2 &= 4877337 \quad \quad \quad \rangle \quad \quad , \\ e_2 &= 6382827 \quad \quad \quad \rangle \quad \quad , \end{aligned}$$

hvorefter Momenterne M_x bliver som angivet i hosst. Tabel.

Momenter M_x for $\mu = 0$ (Fig. 39).

	0	1	2	
c	-0,2036	-0,0025	+0,1043	pl^2
d	-0,0630	-0,0061	+0,0181	»
e	-0,0492	-0,0066	+0,0158	»

§ 18. Jernbetonplader. Armering i forskellige Retninger.

Saa længe Spændingerne i Jernbetonplader ikke overskrider en vis Grænse, vil disse Plader i Hovedsagen forholde sig, som om de bestod af et homogent Materiale. I § 13 og § 14 har man saaledes set, at der ved de Forsøg, som udførtes af Bach og Graf, var god Overensstemmelse mellem de maalte og de beregnede Nedbøjninger, saa længe der endnu ikke var fremkommet Revner. Det blev herved i Beregningen forudsat, at Inertimomentet var konstant overalt i Pladen og havde samme Værdi i de tre Ligninger (11) ganske uafhængigt af Jernindlægget. Med Poisson's Forhold $\mu = 0,2$ vil Beregningen give nogenlunde rigtige Resultater, saa længe der endnu ikke er indtraadt Revner, og den angivne Beregning synes derfor at være godt egnet til Undersøgelse af, hvorvidt Konstruktionen har en bestemt Sikkerhed imod Revnedannelse. Ønskes en Bestemmelse af Spændingerne, efter at Pladen er revnet i Træksiden, vil den anvendte Fremgangsmaade sandsynligvis næppe give saa gode Resultater. Man vil ganske vist i alle Tilfælde opnaa at faa Ligevægtsbetingelserne tilfredsstillet. Tænker man sig en vilkaarlig Del af Pladen udskåret, vil denne Del være i Ligevægt for Belastningen og de fundne Snitkræfter. Men Pladens Formforandring vil, i hvert Fald efter at der er indtraadt Revner i Træksiden, være afhængig af Jernindlæggets Størrelse og Retning, saaledes at man i de tre Ligninger (11) maatte indføre forskellige Værdier af Inertimomentet, og man vil da finde, at de bøjende og de vridende Momenter i Almindelighed fordeler sig noget anderledes end i en Plade med samme Inertimoment i alle Retninger.

For en Jernbetonplade, i hvilken der optræder saa store Spændinger, at der er indtraadt Revner i Træksiden, vil man derfor i Bestemmelsen af Nedbøjninger og Momenter kunne opnaa nøjagtigere Resultater ved at regne med forskellige Værdier af Inertimomentet, saaledes at dette bestemmes ved Jernindlæggets Størrelse og Retning. Man vil da med tilstrækkelig Nøjagtighed kunne sætte $\mu = 0$. I den Side af Pladen, hvor der allerede er indtraadt Revner, kan en Trækspænding eller Trykspænding ikke antages at fremkalde nogen Forkortelse eller Forlængelse i den paa Spændingen vinkelrette Retning, og Poisson's Forhold vil derfor kun faa Betydning, hvor der i den ene Side af Pladen optræder Trykspændinger i to paa hinanden vinkelrette Retninger. Desuden vil den Fejl, man begaar ved at sætte $\mu = 0$, være lille i Sammenligning med de Fejl, man er udsat for at begaa ved Bestemmelsen af Inertimomentet. En større eller mindre Del af Betonen i Træksiden vil virke med til at optage Trækspændinger, og man kender derfor ikke den Del af Tværsnittet, hvoraf Inertimomentet skulde bestemmes.

Ved en Plade med Armering i to paa hinanden vinkelrette Retninger kan Koordinatakserne indlægges parallelt med Armeringsretningerne. Dersom man regner, at der ikke optræder Trækspændinger i Betonen, er Inertimomentet pr. Længdeenhed i et Snit vinkelret paa en af Armeringsretningerne udtrykt ved

$$I = F_i \cdot e \cdot \eta.$$

Heri betegner F_i Tværsnitsarealet af Jernindlægget pr. Længdeenhed, e Afstanden fra Jernindlægget til Nullinien og η Afstanden mellem Træk- og Trykcentret. Naar Inertimomentet paa denne Maade bestemmes af Jerntværsnittet, maa E , som sammen med I indgaar i Lign. (11), betegne Jernets Elasticitetskoefficient.

Dersom en Plade med Armering i to paa hinanden vinkelrette Retninger parallelle med x -Aksen og y -Aksen paavirkes alene af et vridende Moment, saa vil dette Moment, saa længe Pladen endnu ikke er revnet, foroven og forneden i Pladen fremkalde Forlængelser og Forkortelser i de Retninger, som danner Vinkler paa 45° med Koordinatakserne. Forudsættes Betonens Elasticitetskoefficienter for Træk og for Tryk lige store, vil der i Koordinataksernes Retninger derimod ikke fremkomme nogen Længdeændring. Saa længe der endnu ikke er indtraadt Revner, vil Jernindlægget altsaa ikke komme i Virksomhed.

Efter at der er indtraadt Revner, vil der optræde Trækspændinger i Jernindlægget. Tænkes Pladen armeret i Oversiden med et Jernindlæg i x -Aksens Retning og et Jernindlæg i y -Aksens Retning og armeret i Undersiden paa samme Maade, saa vil der optræde Trækspændinger i alle fire Jernindlæg efter Revnedannelsen.

Forudsættes alle fire Jernindlæg lige store, vil der foregaa samme Forlængelse i x -Aksens og i y -Aksens Retning og samme Forlængelse foroven og forneden. De to Lag Jern foroven kan med Tilnærmelse regnes at ligge i samme Højde; det samme gælder for de to Lag forneden.

Fig. 40 viser en lille Del af Jernindlægget i Pladens Underside. Afstanden mellem Armeringsjernene er i begge Retninger s . Et vridende Moment vil give et Træk i den ene Diagonals Retning og et Tryk i den anden Diagonals Retning. Trækket antages at forlænge den halve Diagonal d_1 med Stykket a , medens Trykket antages at forkorte den halve Diagonal d_2 med Stykket b i Højde med Jernindlægget.

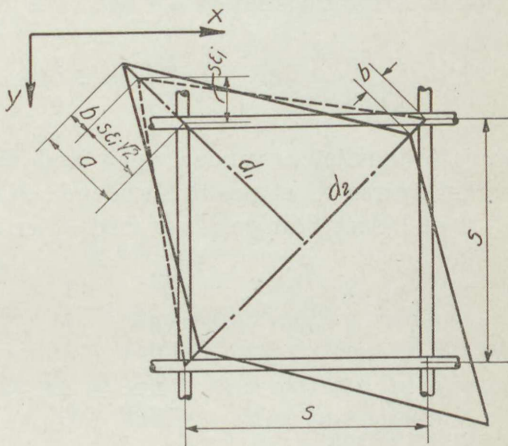


Fig. 40.

Dersom b var Nul, vilde Forlængelsen af d_1 være $s\varepsilon_i/2$, hvor ε_i er Forlængelsen af Jernindlægget pr. Længdeenhed. Stængerne vilde da være fremstillet ved de i Fig. 40 viste punkterede Linier. Ved Sammentrykningen af Diagonalen d_2 antages Jernstængerne at beholde deres Spænding og Længde uforandret. Naar d_2 forkortes med Stykket b , vil d_1 herved forlænges med det samme Stykke b . Man har altsaa

$$a = s\varepsilon_i/2 + b.$$

Idet ε_1 betegner Forlængelsen pr. Længdeenhed af d_1 og ε_2 Forkortelsen pr. Længdeenhed af d_2 , har man

$$\varepsilon_1 = \frac{a\sqrt{2}}{s} \quad \text{og} \quad \varepsilon_2 = \frac{b\sqrt{2}}{s},$$

hvorved man finder

$$\varepsilon_1 = 2\varepsilon_l + \varepsilon_2. \quad (66)$$

I Pladens Overside vil det vridende Moment bevirke en lignende Formforandring som i Pladens Underside, saaledes at d_1 i Højde med Jernindlægget i Oversiden forkortes Stykket b , medens d_2 forlænges Stykket a . Forlængelsen pr. Længdeenhed af d_1 i Højde med det nederste Jernindlæg er altsaa ε_1 og Forkortelsen af d_1 i Højde med det øverste Jernindlæg er ε_2 .

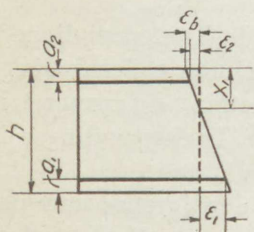


Fig. 41.

Fig. 41 fremstiller et lodret Snit parallelt med d_1 . Snittet begrænses før Formforandringen af to lodrette Snit, som er parallelle med d_2 , og hvis Afstand er lig med Længdeenheden. Efter Formforandringen er Forkortelsen i Pladens Overside ε_b , Forkortelsen i Højde med øverste Jernindlæg ε_2 og Forlængelsen i Højde med nederste Jernindlæg ε_1 . Pladetykkelsen er h , Afstanden fra Nulllinien til den trykkede Kant x_1 , nederste Jernindlægs Afstand fra Undersiden a_1 og øverste Jernindlægs Afstand fra Oversiden a_2 . Pladens Krumningsradius ϱ i det viste Snit kan da udtrykkes ved

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} = -\frac{1}{\varrho} = -\frac{\varepsilon_b}{x_1},$$

hvor Konkaviteten vender opad ved den forudsatte Formforandring, hvilket svarer til et positivt vridende Moment.

I et lodret Snit parallelt med d_2 er

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} = \frac{1}{\varrho} = +\frac{\varepsilon_b}{x_1}.$$

Idet

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} = -\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2},$$

har man altsaa

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\varepsilon_b}{x_1}. \quad (67)$$

For at finde den Formforandring, som hidrører fra et vridende Moment M_v , gælder det derfor om at udtrykke Forholdet $\frac{\varepsilon_b}{x_1}$ ved M_v .

Jerntværsnittet pr. Længdeenhed i et Snit vinkelret paa hver af Armeringsretningerne er F_i forneden og ligeledes F_i foroven. Spændingen i Jernene er overalt $\sigma_i = E_i \varepsilon_i$.

I et lodret Snit parallelt med d_2 skæres Armeringsretningerne både foroven og forneden under 45° . Trækket pr. Længdeenhed vinkelret paa Snittet hidrørende fra Trækspændingerne i Jernindlægget er altsaa

$$\frac{4F_i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sigma_i}{\sqrt{2}} = 2F_i\sigma_i = 2F_iE_i\varepsilon_i.$$

Trykkraften pr. Længdeenhed af Snittet er

$$\frac{1}{2}\sigma_b x_1 = \frac{1}{2}E_b\varepsilon_b x_1.$$

Forudsættes Trækkraften og Trykkraften lige store, faas altsaa

$$2F_iE_i\varepsilon_i = \frac{1}{2}E_b\varepsilon_b x_1.$$

Sættes heri $E_i = nE_b$, faas

$$\varepsilon_b \cdot x_1 = 4nF_i\varepsilon_i.$$

Af Lign. (66) har man $\varepsilon_i = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$, hvorved man finder

$$\varepsilon_b \cdot x_1 = 2nF_i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Af Fig. 41 ses, at

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{x_1 - a_2}{h - a_1 - x_1},$$

og

$$\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_1} = \frac{x_1}{h - a_1 - x_1}.$$

Indsættes disse Forhold, faas

$$x_1^2 + 4nF_ix_1 - 2nF_i(h - a_1 + a_2) = 0.$$

Forudsættes $a_1 = a_2$, og indsættes $\frac{F_i}{h} = \varphi$, faas

$$\frac{x_1}{h} = 2n\varphi \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{2n\varphi}} \right).$$

Da Trækspændingerne er lige store i Jernindlæggene foroven og forneden, bliver disse Trækspændingers Moment med Hensyn til Snittets Midtlinie Nul og Trykspændingernes Moment med Hensyn til Snittets Midtlinie lig med Momentet af de ydre Kræfter. Man har altsaa

$$M_x = M_v = \frac{1}{2}\sigma_b x_1 \left(\frac{h}{2} - \frac{x_1}{3} \right) = \frac{1}{2}E_b\varepsilon_b x_1 \left(\frac{h}{2} - \frac{x_1}{3} \right),$$

hvoraf

$$\varepsilon_b = \frac{2M_v}{E_b x_1 \left(\frac{h}{2} - \frac{x_1}{3} \right)}.$$

I Stedet for den hidtil behandlede Plade med den i Fig. 40 viste Armering kan man tænke sig en anden Plade med samme Højde h

men med Jernindlæg F_i forneden i Retningen d_1 og Jernindlæg F_i foroven i Retningen d_2 . For denne Plade er Afstanden fra Nullinien til den trykkede Kant som bekendt

$$x_1 = nF_i \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2(h - a_1)}{nF_i}} \right).$$

Sættes $a_1 = 0,1h$ og $\frac{F_i}{h} = \varphi$, faas

$$\frac{x_1}{h} = n\varphi \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{1,8}{n\varphi}} \right).$$

Endvidere er

$$M_v = \frac{1}{2} \sigma_b x_1 \left(0,9h - \frac{x_1}{3} \right) = \frac{1}{2} E_b \varepsilon_b x_1 \left(0,9h - \frac{x_1}{3} \right),$$

hvoraf

$$\varepsilon_b = \frac{2M_v}{E_b x_1 \left(0,9h - \frac{x_1}{3} \right)}.$$

Med $n=15$ og $\varphi = 0,002$, $\varphi = 0,005$ og $\varphi = 0,010$ beregnes x_1 og ε_b for de to Plader, hvorefter $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ findes ved Hjælp af Lign. (67). Værdierne af x_1 og $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ er angivet i hosst. Tabel.

φ		Plade med Armering $\nparallel$ Koordinat- akserne	Plade med Armering i Diagonal- retningerne
0,002	$x_1 =$	0,192 h	0,204 h
	$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$	$125 \frac{M_v}{E_b h^3}$	$58 \frac{M_v}{E_b h^3}$
0,005	$x_1 =$	0,265 h	0,300 h
	$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$	$69 \frac{M_v}{E_b h^3}$	$28 \frac{M_v}{E_b h^3}$
0,010	$x_1 =$	0,324 h	0,391 h
	$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$	$49 \frac{M_v}{E_b h^3}$	$17 \frac{M_v}{E_b h^3}$

For en vilkaarlig Værdi af φ beliggende mellem $\varphi = 0,002$ og $\varphi = 0,010$ er $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ i Pladen med Armeringsjernene parallelle med Koordinat-akserne over dobbelt saa stor som i Pladen med Armeringen i Diagonal-retningerne.

Da $\sigma_b = E_b \varepsilon_b = -E_b x_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, vil det ses, at Trykspændingen i Betonen bliver tilnærmelsesvis dobbelt saa stor i Pladen med Armeringen parallel med Koordinataksene som i Pladen med Armeringen i Diagonalretningerne.

Trækspændingen i Jernet bestemmes for begge Pladers Vedkommende ved

$$\sigma_i = \frac{M_v}{F_i \eta},$$

hvor η er Afstanden mellem Træk- og Trykcentret, idet Trækcentret for begge Plader regnes beliggende i Højde med Jernindlægget i den strakte Side. Da η meget nær har samme Størrelse, enten Armeringen ligger parallel med Koordinataksene eller i Diagonalretningerne, bliver Trækspændingerne i Jernet tilnærmelsesvis lige store i de to Plader.

For en Plade, som hovedsagelig paavirkes af vridende Momenter, vil man altsaa med Tilnærmelse kunne regne, at Formforandringen paa Grund af et vridende Moment er dobbelt saa stor i en Plade med Armeringen parallel med Koordinataksene som i en Plade med Armeringen i Diagonalretningerne.

Paavirkes Pladen foruden af M_v tillige af Momenterne M_x og M_y , vil de Formforandringer, som det vridende Moment fremkalder i Pladen med Armeringen parallel med Koordinataksene, ikke være saa store, som hvis M_v virkede alene.

Dersom M_x og M_y har samme Fortegn, vil de Spændinger, som fremkaldes af M_v i den trykkede Side af Pladen, forøge Sammentrykningen i den ene Diagonals Retning og formindske Sammentrykningen i den andens Retning. Den herved foraarsagede Formforandring er mindre, end hvis M_v virkede alene. I den strakte Side vil de Spændinger, som hidrører fra M_v , sandsynligvis give en lignende Formforandring, som hvis M_v virkede alene. Den samlede Formforandring hidrørende fra M_v bliver derfor mindre, end hvis M_v virkede alene.

Dersom M_x og M_y har modsat Fortegn, vil et vridende Moment baade foroven og forneden i Pladen forøge Trækspændingerne i de strakte Jern paa samme Maade, som hvis det vridende Moment virkede alene. I Stedet for at strække Jernene i den herpaa vinkelrette Retning, vil det vridende Moment formindske de tilstedeværende Trykspændinger. Da den Formforandring, som hidrører fra Formindsnelsen af Betonens Trykspændinger, er mindre end den Formforandring, som hidrører fra en Forøgelse af Jernets Trækspændinger, vil den samlede Formforandring hidrørende fra M_v blive mindre, end hvis M_v virkede alene.

I en Plade med Armeringen i to paa hinanden vinkelrette Retninger parallelle med Koordinataksene vil den Formforandring, som hidrører fra et vridende Moment M_v , altsaa delvis være afhængig af de bøjende Momenter M_x og M_y , som optræder samtidig med M_v .

Idet man sætter $\mu = 0$, faar man altsaa i Stedet for Ligningerne (11)

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -E_i I_x \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}, \\ M_y &= -E_i I_y \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}, \\ M_v &= -E_i I_v \frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y}. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Heri er

$$I_x = F_{ix} \cdot e \cdot \eta,$$

$$I_y = F_{iy} \cdot e \cdot \eta,$$

hvor F_{ix} og F_{iy} betegner Tværsnitsarealet pr. Længdeenhed af Jernindlægget i Træksiden. For I_v kan man da regne

$$I_v = k F_{iv} \cdot e \cdot \eta,$$

hvor F_{iv} er Middelværdien af Tværsnitsarealerne af de Armeringsjern, som strækkes paa Grund af det vridende Moment M_v , og k er en Konstant, som er beliggende mellem 0,5 og 1. Konstanten k er afhængig af Størrelsen af M_v i Forhold til Størrelsen af M_x og M_y , saaledes at k har sin mindste Værdi, naar Pladen alene paavirkes af et vridende Moment.

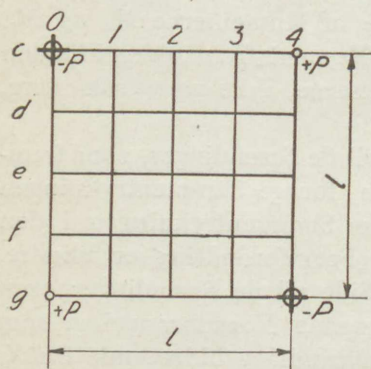


Fig. 42.

Exempel. To kvadratiske Jernbetonplader har samme Betondimensioner. Den ene Plade er armeret med Jernindlægget F_i pr. Længdeenhed parallelt med begge Sider baade foroven og forneden. Der ligger altsaa to Lag Jern foroven og to Lag forneden, og Tværsnitsarealet pr. Længdeenhed af hvert af disse fire Lag er F_i . Den anden Plade er armeret i Diagonalretningerne. I Retningen $(c, 0) - (g, 4)$ (Fig. 42) ligger Jernindlægget F_i forneden, og i Retningen $(c, 4) - (g, 0)$ ligger Jernindlægget F_i foroven. Denne Plade er

altsaa kun armeret med to Lag Jern, saaledes at den samlede Jernvægt kun er halv saa stor som i den første Plade. Begge Plader understøttes i Hjørnerne $(c, 0)$ og $(g, 4)$ og belastes i hvert af Hjørnerne $(c, 4)$ og $(g, 0)$ med Kraften P .

For begge Plader regnes Nedbøjningen i Midtpunktet $e_2 = 0$. Nedbøjningen vil da være Nul overalt i Systemlinierne e og 2 . De eneste ubekendte Nedbøjninger er da c_0 , c_1 og d_1 , idet de øvrige Nedbøjninger findes ved Hjælp af Symmetrien.

For Pladen med Armeringen parallel med Siderne regnes $I_x = I_y = I_c$ og $I_v = 0,5 I_c$. Hvis man i Stedet for at udtrykke M_x , M_y og M_v ved Lign. (11), saaledes som det er gjort ved Opstillingen af Ligningerne Side 46-47, udtrykker M_x , M_y og M_v ved Lign. (68) og heri indfører $I_x = I_y = I_c$ og $I_v = 0,5 I_c$ faas følgende Ligninger:

Punkt (c, 0)

	0	1	2	
c	+ 2	- 2	+ $\frac{1}{2}$	$= -\frac{P\lambda^2}{EI_c}$
d	- 2	+ 1		
e	+ $\frac{1}{2}$			

Punkt (c, 1)

	0	1	2	3	
c	- 2	+ $\frac{11}{2}$	- 3	+ $\frac{1}{2}$	$= 0.$
d	+ 1	- 4	+ 1		
e		+ 1			

Punkt (d, 1)

	0	1	2	3	
c	+ 1	- 4	+ 1		$= 0.$
d	- 4	+ 14	- 6	+ 1	
e	+ 1	- 6	+ 1		
f		+ 1			

Idet

$$e_0 = e_1 = e_2 = d_2 = c_2 = 0,$$

$$d_0 = c_1,$$

$$c_3 = -c_1 \quad \text{og} \quad d_3 = f_1 = -d_1,$$

bliver de ordnede Ligninger

$$\begin{aligned} 2c_0 - 4c_1 + d_1 &= -\frac{P\lambda^2}{EI_c}, \\ -2c_0 + 6c_1 - 4d_1 &= 0, \\ c_0 - 8c_1 + 12d_1 &= 0. \end{aligned}$$

Heraf faas

$$\begin{aligned} c_0 &= -4 \frac{P\lambda^2}{EI_c}, \\ c_1 &= -2 \text{ » } , \\ d_1 &= -1 \text{ » } . \end{aligned}$$

Ved Ligning (68) findes $M_x = M_y = 0$ og $M_v = \frac{I_v}{I_c} P = 0,5 P$ overalt i Pladen.

For Pladen med Armeringen i Diagonalretningerne regnes som for en Plade med konstant Inertimoment*). Ved Anvendelse af Ligningerne Side 46—47 faas

$$\begin{aligned} 3c_0 - 6c_1 + 2d_1 &= -\frac{P\lambda^2}{EI_c}, \\ -3c_0 + 9c_1 - 6d_1 &= 0, \\ 2c_0 - 12c_1 + 16d_1 &= 0, \end{aligned}$$

hvoraf

$$\begin{aligned} c_0 &= -2 \frac{P\lambda^2}{EI_c}, \\ c_1 &= -1 \quad \text{»} \quad , \\ d_1 &= -0,5 \quad \text{»} \quad . \end{aligned}$$

Ved Lign. (11) findes herved $M_x = M_y = 0$ og $M_v = 0,5 P$ overalt i Pladen.

Momenterne bliver altsaa i det undersøgte specielle Tilfælde ikke forskellige i de to Plader, men Nedbøjningerne bliver dobbelt saa store i Pladen med Armeringen parallel med Siderne som i Pladen med Armeringen i Diagonalretningerne. Saafremt Armeringsprocenten er tilstrækkelig lille til, at der maa indtræde Brud, naar Jernspændingen har naaet en vis Størrelse, medens Trykspændingerne i Betonen endnu er under Brud, saa vil der sandsynligvis indtræde Brud i de to Plader for omtrent samme Belastning, da Jernspændingerne tilnærmelsesvis er lige store. Da Trykspændingerne i Betonen er dobbelt saa store i Pladen med Armeringen parallel med Siderne som i Pladen med Armeringen i Diagonalretningerne, vil der være Grund til at antage, at Pladen med Armeringen i Diagonalretningerne ved store Armeringsprocenter vil kunne bære en større Belastning end Pladen med Armeringen parallel med Siderne.

§ 19. Sammenligning med Forsøg af Talbot og Slater.

Dersom man ved Forsøg kunde bestemme Størrelsen af de bøjende Momenter, vilde man herved faa en Kontrol paa Beregningen. Bestaar Pladen af et homogent Materiale med samme Elasticitetskoefficient for Træk og for Tryk, maatte man da ved Forsøgene bestemme Pladens Krumning i to paa hinanden vinkelrette Retninger og dernæst beregne Momenterne ved Hjælp af Ligningerne

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -EI \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{1 - \mu^2}, \\ M_y &= -EI \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{1 - \mu^2}. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

*) Egentlig burde I_x og I_y indføres med en mindre Værdi end I_v , men ved Beregningen med konstant Inertimoment viser det sig, at $M_x = M_y = 0$ overalt i Pladen, og Størrelsen af I_x og I_y vil da være ligegyldig. Naar Differensligningen overalt tilfredsstilles af $M_x = M_y = 0$ for $I_x = I_y = I_c$, vil den tilfredsstilles af $M_x = M_y = 0$ for vilkaarlige Værdier af I_x og I_y , idet man da ifølge Lign. (68) har $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ overalt i Pladen.

Hvis Pladen overalt har samme Tykkelse og Inertimoment, eller hvis Pladens Tyngdepunktsflade er en Plan, vil der, saa længe Nedbøjningerne er smaa i Forhold til Spændvidden, ikke optræde centralt Træk eller Tryk. Hvor Pladens Tyngdepunktsflade derimod ikke er en Plan, som f. Ex. naar Pladen er forsynet med den i Fig. 43 viste forøgede Tykkelse, vil der tilige kunne optræde centrale Træk- eller Trykspændinger. Umiddelbart til venstre og til højre for Punkt a vil Spændingerne i Snit $A-A$ kunne fremstilles ved de to Diagrammer nederst til højre i Figuren. Foruden Momentet vil der da optræde et centralt Tryk i den tykke Del og et centralt Træk i den tynde Del af Pladen. Saadanne centrale Træk- og Trykspændinger optræder i Nærheden af de Steder, hvor Pladetykkelsen ændres.

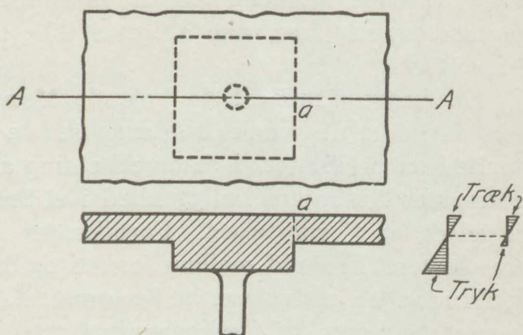


Fig. 43.

Naar man nu i et vilkaarligt Punkt af Pladen maaler Forlængelsen eller Forkortelsen baade foroven og forneden i Retningerne x og y , bestemmes herved baade Krumningerne $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ og Middelværdierne ϵ_x og ϵ_y af Forlængelserne. Foruden Ligningerne (69) til Bestemmelse af Momenterne har man da til Bestemmelse af de centrale Træk- og Trykkræfter pr. Længdeenhed følgende Ligninger

$$\left. \begin{aligned} N_x &= Eh \frac{\epsilon_x + \mu \epsilon_y}{1 - \mu^2}, \\ N_y &= Eh \frac{\epsilon_y + \mu \epsilon_x}{1 - \mu^2}, \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

idet h betegner Pladetykkelsen paa det Sted, hvor Formforandringerne maales.

Er Pladen af Jernbeton, vil den, saa længe Spændingerne er smaa, forholde sig som en homogen Plade, og man vil da kunne bestemme Momenterne i den som ovenfor angivet. Bliver Spændingerne derimod saa store, at Brudgrænsen overskrides for Betonens Trækspændinger, bliver det ikke muligt at bestemme Momenterne som ovenfor. Man har i dette Tilfælde sædvanlig ladet sig nøje med at maale Jernets Forlængelse og herved bestemme Spændingen i Jernet. Ved at skønne Trykcentrets Beliggenhed kan den Del af Momentet, som paavirker Jernene til Træk, beregnes.

Selv om man nu vilde se bort fra, at Momentet i et Snit vinkelret paa x -Aksen ikke er bestemt alene ved Krumningen i Retningen x , da Forholdet μ maaske ikke er helt uden Betydning for den Del af Betonen,

som paavirkes af Spændinger, og selv om man vilde se bort fra eventuelle centrale Træk- og Trykkræfter, saa vil der altid i en større eller mindre Del af Tværsnittet optræde Trækspændinger i Betonen. Nøjes man derfor med at bestemme Spændingerne i Jernet og beregner det hertil svarende Moment ved at multiplicere Jernspændingen med Momentarmen, saa faar man alligevel ikke at vide, hvor stort det virkelige Moment er.

En bedre Værdi af de bøjende Momenter vilde man faa, dersom man foruden at maale Forlængelsen ϵ_i af Jernet i Træksiden tillige maalte Forkortelsen ϵ_b i samme Retning af Betonen i Tryksiden. Herved bestemmes Nulliniens Beliggenhed i et Snit vinkelret paa de maalte Forlængelser og Forkortelser. Forudsættes en retliniet Spændingsfordeling og et bestemt Forhold mellem Jernets og Betonens Elasticitetskoefficienter, og forudsættes endvidere, at Summen af Trækspændingerne i Snittet er lig med Summen af Trykspændingerne, bestemmes herved den Del af Snittet, hvori der optræder Trækspændinger i Betonen. Af ϵ_i og ϵ_b og Elasticitetskoefficienterne E_i og E_b for Jern og Beton bestemmes dernæst Størrelsen af Spændingerne i Snittet, og af Spændingernes Størrelse og Udstrækning over Snittet beregnes det bøjende Moment.

Imidlertid er Forudsætningerne saa mangelfulde, at man heller ikke paa denne Maade kan vente at faa de bøjende Momenter bestemt med særlig stor Nøjagtighed.

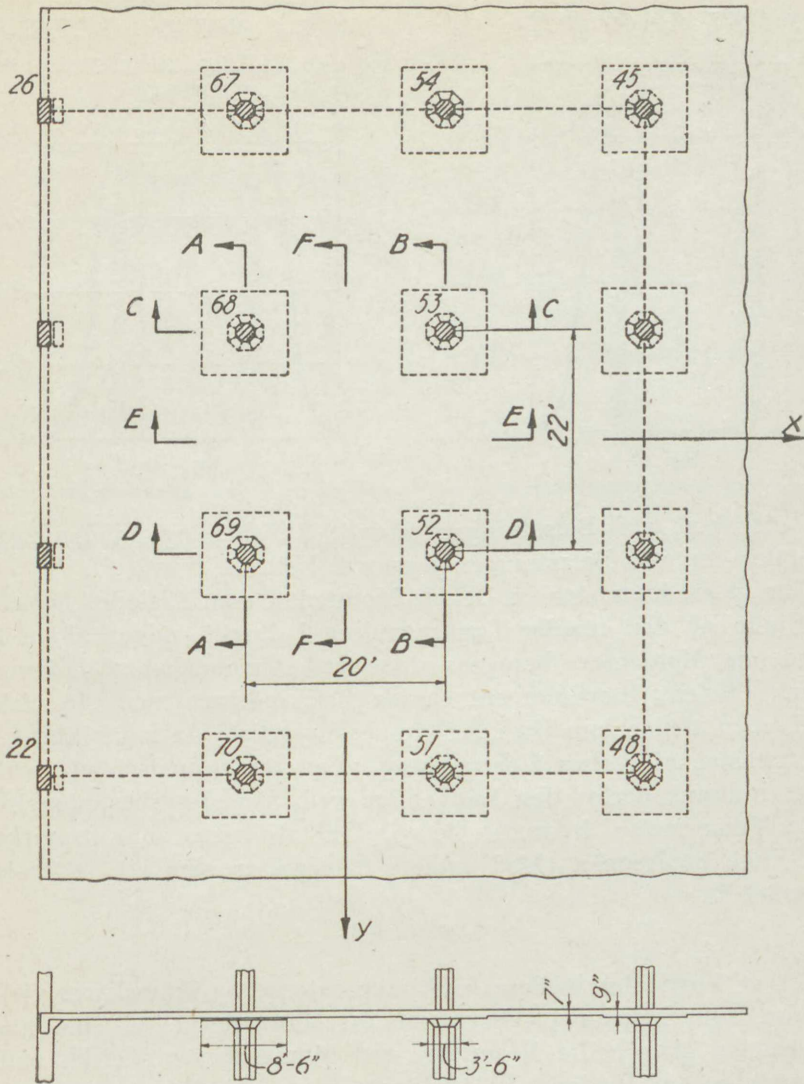
I University of Illinois Bulletin Nr 84, 31. Januar 1916, findes omtalt nogle Pladeforsøg, udført af A. N. Talbot og W. A. Slater. I et af disse Forsøg (The Shredded Wheat Factory Building Test, Side 12 i ovennævnte Bulletin) belastes den i Fig. 44 viste Plade med

- 1) en ensformig fordelt Belastning $p = 191$ lb. pr. sq. ft. = 930 kg/m^2 paa de ni Felter inden for Søjlerne 26—45—48—22;
- 2) en ensformig fordelt Belastning $p = 191$ lb. pr. sq. ft. = 930 kg/m^2 paa de tre Felter inden for Søjlerne 67—54—51—70;
- 3) en ensformig fordelt Belastning $p = 243$ lb. pr. sq. ft. = 1180 kg/m^2 paa det enkelte Felt inden for Søjlerne 68—53—52—69.

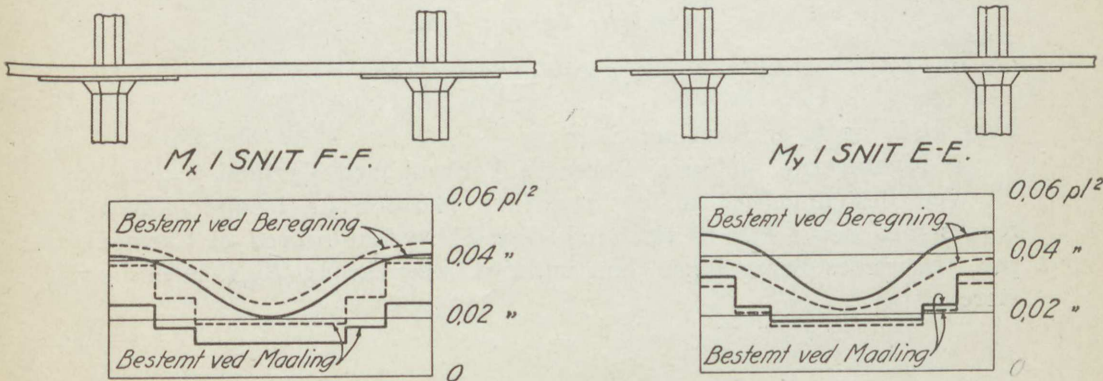
Spændvidden i Retn. x (Midte til Midte af Søjle) er $20' = 6,1 \text{ m}$,
 » » » y » » » » » $22' = 6,7 \text{ m}$.

Angaaende Detail af Konstruktionen og Beskrivelse af Forsøget henvises til ovennævnte Bulletin.

Ved Hjælp af Jernets Forlængelser, som maalttes i en Række Punkter, er den Del af de positive bøjende Momenter, som paavirker Jernene til Træk, beregnet for Snittene $F-F$ og $E-E$ og afsat i Fig. 45 og Fig. 46 for Belastning over 9 Felter og for Belastning over 3 Felter. Paa samme Maade er de negative Momenter i Snittene $A-A$ og $B-B$ samt i Snittene $C-C$ og $D-D$ bestemt for Belastning over 9 Felter og afsat i Fig. 47 og Fig. 48. Ved Belastningen p i et enkelt Felt faas mindre positive



Belastning 930 kg/m^2 over 9 Feller ———
 " " " " 3 " - - - -



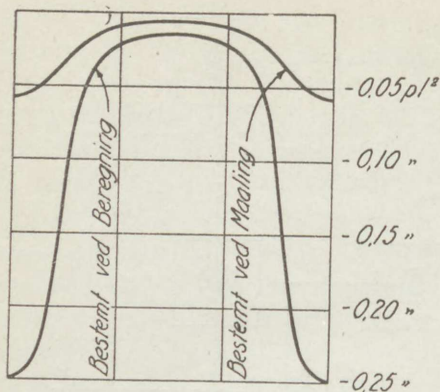
M_x I SNIT A-A OG B-B.

Fig. 47.

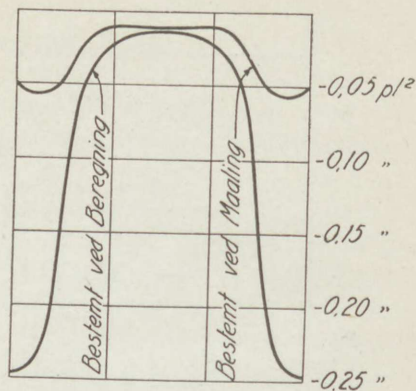
 M_y I SNIT C-C OG D-D.

Fig. 48.

Momenter end ved Belastningen p over 3 Felter og mindre negative Momenter end ved Belastningen p over 9 Felter.

For at se, hvor stor en Del de Momenter, som saaledes bestemmes ved Hjælp af den maalte Trækspænding i Jernet, udgør af de fulde, optrædende Momenter, beregnes disse ved Anvendelse af Differensligninger. Pladens Inertimoment skulde heri indføres med sin virkelige Værdi, men denne kan ikke bestemmes nøjagtigt, da man ikke kender Betontrækspændingernes Udstrækning. Ved Bestemmelsen af Inertimomentet indføres derfor den sædvanlige ved Spændingsbestemmelse anvendte Tilnærmelse, hvorefter den Del af Betonen, som paavirkes til Træk, ikke medregnes. Med samme Betegnelser som i § 18 er Inertimomentet da

$$I = F_i \cdot e \cdot \eta.$$

Da det er Forholdet mellem Inertimomenterne og ikke disses virkelige Størrelse, som indgaar i Udtrykkene for Momenterne, vil den angivne Tilnærmelse give bedre Resultater ved Momentbestemmelsen end ved Bestemmelsen af Pladens Nedbøjninger, som afhænger af de virkelige Inertimomenter.

Idet Pladens nyttige Højde maalt fra Jernindlægget til den trykkede Kant er h_n , kan man med tilstrækkelig Tilnærmelse regne

$$e = k_1 h_n \text{ og } \eta = k_2 h_n,$$

altsaa

$$I = k_1 k_2 F_i h_n^2 = k_3 F_i h_n^2,$$

hvor k_1 , k_2 og k_3 er Konstanter.

I Ligningerne indføres Poisson's Forhold med Værdien $\mu = 0$.

Ved Bestemmelsen af de negative Momenter i Søjlerækkerne regnes med den i Fig. 49 viste Inddeling. Man faar herved et Exempel paa, hvorledes Beregningen kan udføres, naar Δx og Δy ikke er lige store.

Ved Opstillingen af Ligningerne for Systempunkterne skal de i Lign. (68) angivne Udtryk for Momenterne indføres i Lign. (8). Med $\Delta x = \lambda$ bliver $\Delta y = \frac{b}{l}\lambda$. Indsættes disse Udtryk i Lign. (8), og indføres heri tillige

$$I_y' = \left(\frac{l}{b}\right)^4 I_y \quad \text{og} \quad I_v' = \left(\frac{l}{b}\right)^2 I_v,$$

faas for et vilkaarligt Systempunkt (f, n) følgende Ligning:

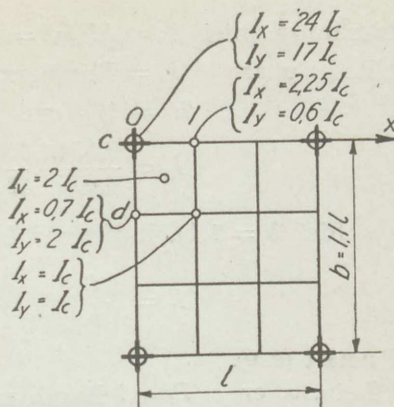


Fig. 49.

	$n-2$	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$
d			$+I_{y(e,n)}$		
e		$+2I_{v(e,f,n-1,n)}$	$-2I_{v(e,f,n-1,n)} \quad -2I_{v(e,f,n,n+1)} \quad -2I_{y(f,n)}$	$+2I_{v(e,f,n,n+1)}$	
f	$+I_{x(f,n-1)}$	$-2I_{v(e,f,n-1,n)} \quad -2I_{x(f,n-1)} \quad -2I_{x(f,n)} \quad -2I_{v(f,g,n-1,n)}$	$+I_{y(e,n)} \quad +2I_{v(e,f,n-1,n)} \quad +2I_{v(e,f,n,n+1)} \quad +I_{x(f,n-1)} + 4I_{x(f,n)} + 4I_{y(f,n)} + I_{x(f,n+1)} \quad +2I_{v(f,g,n-1,n)} \quad +2I_{v(f,g,n,n+1)} \quad +I_{y(g,n)}$	$-2I_{v(e,f,n,n+1)} \quad -2I_{x(f,n)} \quad -2I_{x(f,n+1)} \quad -2I_{v(f,g,n,n+1)} \quad +I_{x(f,n+1)}$	
g		$+2I_{v(f,g,n-1,n)}$	$-2I_{y(f,n)} \quad -2I_{v(f,g,n-1,n)} \quad -2I_{v(f,g,n,n+1)} \quad -2I_{y(g,n)}$	$+2I_{v(f,g,n,n+1)}$	
h			$+I_{y(g,n)}$		

$$= \frac{p\lambda^4}{E_i}. \quad (71)$$

Størrelserne I_x og I_y bestemmes for Punkterne $(c, 0)$, $(c, 1)$, $(d, 0)$ og $(d, 1)$. For $I_{x(d,1)}$ anvendes Betegnelsen I_c ; alle de øvrige I_x og I_y udtrykkes ved I_c .

Punkt $(d, 1)$. Jernindlægget i Retn. x er Rundjern $\frac{1}{2}$ " med $11\frac{1}{2}$ " Afstand.

$$F_i = 4,3 \text{ cm}^3 \text{ pr. m} = 0,043 \text{ cm}^2 \text{ pr. cm.}$$

Den nyttige Højde af Pladen maalt fra dette Jernindlæg er

$$h_n = 15,0 \text{ cm.}$$

Inertimomentet $I_x = kF_i h_n^2 = k \cdot 0,043 \cdot 15,0^2 = I_c$.

I Retn. y er $F_i = \text{Rundjern } \frac{1}{2}''$, Afst. $9\frac{1}{4}'' = 0,054 \text{ cm}^2 \text{ pr. cm.}$
 $h_n = 16,3 \text{ cm.}$

$$I_y = \frac{0,054}{0,043} \cdot \frac{16,3^2}{15,0^2} I_c.$$

Idet $b = 1,1l$, indføres i Ligningerne

$$I_y' = \left(\frac{l}{b}\right)^4 I_y = \frac{1}{1,1^4} I_y = \frac{1}{1,1^4} \cdot \frac{0,054}{0,043} \cdot \frac{16,3^2}{15,0^2} I_c \sim I_c.$$

Punkt (c, 0).

I Retn. x er $F_i = 3 \text{ Rundjern } \frac{5}{8}'' \text{ for hver } 16'' = \frac{3}{2} \cdot 0,097 \text{ cm}^2 \text{ pr. cm.}$
 $h_n = \text{ca. } 40 \text{ cm.}$

$$I_x = \frac{3}{2} \cdot \frac{0,097}{0,043} \cdot \frac{40^2}{15,0^2} I_c \sim 24 I_c.$$

I Retn. y er $F_i = 3 \text{ Rundjern } \frac{5}{8}'' \text{ for hver } 14'' = \frac{3}{2} \cdot 0,111 \text{ cm}^2 \text{ pr. cm.}$
 $h_n = \text{ca. } 38 \text{ cm.}$

$$I_y' = \frac{1}{1,1^4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{0,111}{0,043} \cdot \frac{38^2}{15,0^2} I_c \sim 17 I_c.$$

Punkt (c, 1).

I Retn. x er $F_i = \text{Rundjern } \frac{5}{8}''$, Afst. $8'' = 0,097 \text{ cm}^2 \text{ pr. cm.}$
 $h_n = 15,0 \text{ cm.}$

$$I_x = \frac{0,097}{0,043} I_c \sim 2,25 I_c.$$

I Retn. y er $F_i = \text{Rundjern } \frac{1}{2}''$, Afst. $9\frac{1}{4}'' = 0,054 \text{ cm}^2 \text{ pr. cm.}$
 $h_n = 12,6 \text{ cm.}$

$$I_y' = \frac{1}{1,1^4} \cdot \frac{0,054}{0,043} \cdot \frac{12,6^2}{15,0^2} I_c \sim 0,6 I_c.$$

Punkt (d, 0).

I Retn. x er $F_i = \text{Rundjern } \frac{1}{2}''$, Afst. $11\frac{1}{2}'' = 0,043 \text{ cm}^2 \text{ pr. cm.}$
 $h_n = 12,6 \text{ cm.}$

$$I_x = \frac{12,6^2}{15,0^2} I_c \sim 0,7 I_c.$$

I Retn. y er $F_i = \text{Rundjern } \frac{5}{8}''$, Afst. $7'' = 0,111 \text{ cm}^2 \text{ pr. cm.}$
 $h_n = 16,3 \text{ cm.}$

$$I_y' = \frac{1}{1,1^4} \cdot \frac{0,111}{0,043} \cdot \frac{16,3^2}{15,0^2} \sim 2 I_c.$$

Punkt (c, d, 0, 1).

For $I_v' = \left(\frac{l}{b}\right)^2 I_v = \frac{1}{1,1^2} I_v$ kan tilnærmelsesvis regnes $I_v' = 2 I_c$.

Størrelserne I_x , I_y' og I_v' er indskrevet i Fig. 49 ved de tilhørende Punkter.

Ved Beregningen af Momenterne i det midterste Felt for Belastning over 9 Felter regnes Pladen at bestaa af uendelig mange Fag i begge Retninger og at være belastet med en ensformig fordelt Belastning over alle Fag. Ligningerne bliver da

Punkt (c, 0).

	1	1	0	1	1
d			+ 2		
d		+ 4	- 4 - 4 - 34	+ 4	
c	+ 2,25	- 4,5 - 48 - 4	+ 2 + 4 + 4 + 4 + 4 + 2	- 4 - 48 - 4,5 - 4	+ 2,25
d		+ 4	- 34 - 4 - 4	+ 4	
d			+ 2		

$$= -8 \frac{p\lambda^4}{E_i J_c},$$

eller
$$754c_0 - 466c_1 - 352d_0 + 64d_1 = -4 \cdot 8 \cdot \frac{pl^4}{81E_i J_c}.$$

Paa lignende Maade findes for de øvrige Punkter

Punkt (c, 1) $-2330c_0 + 2506c_1 + 320d_0 - 496d_1 = 40 \frac{pl^4}{81E_i J_c},$
 » (d, 0) $-440c_0 + 80c_1 + 488d_0 - 128d_1 = 10 \quad \text{»} \quad ,$
 » (d, 1) $40c_0 - 62c_1 - 64d_0 + 86d_1 = 10 \quad \text{»} \quad .$

Den ene af disse Ligninger kan udledes af de tre andre. Sætter man $c_0 = 0$, har man tre Ligninger med tre ubekendte. Af disse Ligninger findes

$$\begin{aligned} 1812828c_1 &= 85104 \frac{pl^4}{81E_i J_c}, \\ \text{» } d_0 &= 117519 \quad \text{»} \quad , \\ \text{» } d_1 &= 359604 \quad \text{»} \quad . \end{aligned}$$

De bøjende Momenter M_x i Søjlerækken Linie 0 er

$$\begin{aligned} M_{x(c, 0)} &= \frac{9E_i J_x}{l^2} (-2c_1) = -24 \cdot \frac{170208}{9 \cdot 1812828} pl^2 = -0,2504 pl^2, \\ M_{x(d, 0)} &= \frac{9E_i J_x}{l^2} (2d_0 - 2d_1) = -0,7 \cdot \frac{2 \cdot 242085}{9 \cdot 1812828} pl^2 = -0,0208 \text{ »} . \end{aligned}$$

De bøjende Momenter M_y i Søjlerækken Linie c er

$$M_{y(c,0)} = \frac{9E_t I_y}{b^2} (-2d_0) = -\frac{I_y}{I_c} \cdot \frac{235038}{9 \cdot 1812828} P \frac{l^4}{b^2},$$

eller, idet $\frac{I_y}{I_c} = \frac{b^4}{l^4} \cdot \frac{I_y}{I_c},$

$$M_{y(c,0)} = -\frac{I_y}{I_c} \cdot \frac{235038}{9 \cdot 1812828} P b^2 = -17 \cdot \frac{235038}{9 \cdot 1812828} P b^2 = -0,2448 P b^2,$$

$$M_{y(c,1)} = \frac{9E_t I_y}{b^2} (2c_1 - 2d_1) = -0,6 \cdot \frac{2 \cdot 274500}{9 \cdot 1812828} P b^2 = -0,0202 P b^2.$$

Momenterne M_x er fremstillet i Fig. 47 og Momenterne M_y i Fig. 48 sammen med de ved Maaling bestemte Momenter.

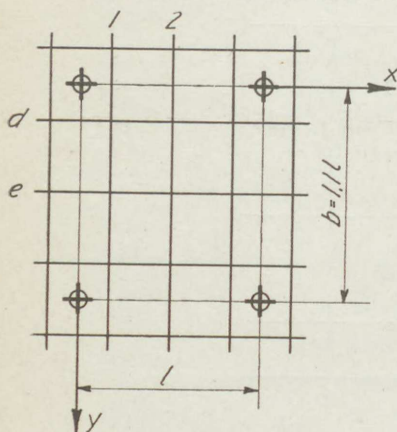


Fig. 50.

Ved Bestemmelse af de positive Momenter i Snit parallelle med Søjlerækkerne gennem Feltets Midtpunkt regnes med den i Fig. 50 viste Inddeling.

Punkt (d, 1). Elementet har varierende Tykkelse og Jernindlæg.

Idet Elementets Areal er $\Delta x \cdot \Delta y = A$, har man i Retningen x paa Arealerne 0,36 A, 0,24 A og 0,40 A følgende Dimensioner:

$$0,36A \dots F_i = \frac{3}{2} \cdot 0,097 \text{ cm}^2 \text{ pr. cm}; h_n = 18,1 \text{ cm};$$

$$0,24A \dots F_i = 0,097 \text{ cm}^2 \text{ pr. cm}; h_n = 16,3 \text{ cm};$$

$$0,40A \dots F_i = 0,043 \text{ cm}^2 \text{ pr. cm}; h_n = 16,3 \text{ cm}.$$

Middelværdien af Inertimomentet er

$$I_x = \left(0,36 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{0,097}{0,043} \cdot \frac{18,1^2}{15,0^2} + 0,24 \cdot \frac{0,097}{0,043} \cdot \frac{16,3^2}{15,0^2} + 0,40 \cdot \frac{16,3^2}{15,0^2} \right) I_c \sim 2,9 I_c.$$

I Retn. y har man

$$\text{paa } 0,36A \dots F_i = \frac{3}{2} \cdot 0,111 \text{ cm}^2 \text{ pr. cm}; h_n = 16,5 \text{ cm};$$

$$\gg 0,24A \dots F_i = 0,111 \text{ cm}^2 \text{ pr. cm}; h_n = 15,0 \text{ cm};$$

$$\gg 0,40A \dots F_i = 0,054 \text{ cm}^2 \text{ pr. cm}; h_n = 15,0 \text{ cm};$$

$$I_y = \frac{1}{1,1^4} \left(0,36 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{0,111}{0,043} \cdot \frac{16,5^2}{15,0^2} + 0,24 \cdot \frac{0,111}{0,043} \cdot \frac{15,0^2}{15,0^2} + 0,40 \cdot \frac{0,054}{0,043} \right) I_c \sim 1,9 I_c.$$

Punkt (d, 2).

I Retning x er paa 0,6A $\dots F_i = 0,097 \text{ cm}^2 \text{ pr. cm}; h_n = 15,0 \text{ cm};$

$$\gg 0,4A \dots F_i = 0,043 \text{ cm}^2 \text{ pr. cm}; h_n = 15,0 \text{ cm}.$$

$$I_x = \left(0,6 \cdot \frac{0,097}{0,043} + 0,4 \right) I_c \sim 1,75 I_c.$$

I Retn. y er

$$F_i = 0,054 \text{ cm}^2 \text{ pr. cm}; h_n = 12,6 \text{ cm}.$$

$$I_y = \frac{1}{1,1^4} \cdot \frac{0,054}{0,043} \cdot \frac{12,6^2}{15,0^2} I_c \sim 0,6 I_c.$$

Punkt (e, 1).

I Retn. x er $F_i = 0,043 \text{ cm}^2 \text{ pr. cm}; h_n = 12,6 \text{ cm}.$

$$I_x = \frac{12,6^2}{15,0^2} I_c \sim 0,7 I_c.$$

I Retn. y er paa $0,6A \dots F_i = 0,111 \text{ cm}^2 \text{ pr. cm}; h_n = 16,3 \text{ cm};$

» $0,4A \dots F_i = 0,054 \text{ cm}^2 \text{ pr. cm}; h_n = 16,3 \text{ cm}.$

$$I_y = \frac{1}{1,1^4} \cdot \frac{16,3^2}{15,0^2} \left(0,6 \cdot \frac{0,111}{0,043} + 0,4 \cdot \frac{0,054}{0,043} \right) I_c \sim 1,65 I_c.$$

Punkt (e, 2). $I_x = I_y = I_c.$

Punkt (d, e, 0, 1) og (d, e, 1, 2).

For $I_v = \frac{1}{1,1^2} I_v$ regnes tilnærmelsesvis $I_v = I_c.$

Paa Grund af de stive Kapitæler kan man med tilstrækkelig Tilnærmelse ved Bestemmelse af Momenterne i Snit parallelle med Søjlerækkerne gennem Feltets Midtpunkt regne Pladen understøttet ved hver Søjle i de fire nærmest ved Søjlen beliggende Systempunkter. Ligesom ved Beregningen af de negative Momenter i Søjlerækkerne regnes Pladen at strække sig over uendelig mange Fag i begge Retninger. De bøjende Momenter beregnes for en ensformig fordelt Belastning p baade over 9 Felter og over 3 Felter. I Stedet for Belastningen p over 9 Felter regnes Belastningen p over alle Fag, og i Stedet for Belastningen p over 3 Felter regnes med en Belastning p i hvert andet Fag, saaledes at Belastningen virker i Striber parallelle med y -Aksen.

1. Ensformig fordelt Belastning p over 9 Felter.

Idet Belastningen regnes ensformig fordelt over alle Fag, bliver Ligningerne

Punkt (d, 1).

	2	1	1	2	1
e			+1,9		
d			-3,8		
			-3,8		
			+1,9		
d	+2,9	-5,8 -5,8	+2,9+11,6+7,6+1,75 +2	-5,8 -3,5 -2	+1,75
			+1,65		
e			-3,8		
			-3,3	+2	
d			+1,65		

$$= -\frac{5 p \lambda^4}{4 E I_c}$$

eller
$$272d_1 - 168d_2 - 144e_1 + 40e_2 = -20 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{pl^4}{81E_iI_c}.$$

Paa lignende Maade findes for de øvrige Punkter

$$\begin{aligned} \text{Punkt } (d, 2) &- 168d_1 + 194d_2 + 40e_1 - 66e_2 = 10 \frac{pl^4}{81E_iI_c}, \\ \text{» } (e, 1) &- 144d_1 + 40d_2 + 171e_1 - 67e_2 = 10 \quad \text{»} \quad , \\ \text{» } (e, 2) &- 80d_1 - 132d_2 - 134e_1 + 186e_2 = 10 \quad \text{»} \quad . \end{aligned}$$

Den ene af disse Ligninger kan udledes af de tre andre. Sættes $d_1 = 0$, faas

$$\begin{aligned} 167440d_2 &= 16419 \frac{pl^4}{81E_iI_c}, \\ \text{» } e_1 &= 19567 \quad \text{»} \quad , \\ \text{» } e_2 &= 34751 \quad \text{»} \quad . \end{aligned}$$

De bøjende Momenter M_x i Snit 2 er

$$\begin{aligned} M_{x(d, 2)} &= \frac{9E_iI_x}{l^4} \cdot 2d_2 = 1,75 \cdot \frac{2 \cdot 16419}{9 \cdot 167440} pl^2 = 0,0382 pl^2, \\ M_{x(e, 2)} &= \frac{9E_iI_x}{l^2} \cdot (2e_2 - 2e_1) = \frac{2 \cdot 15184}{9 \cdot 167440} pl^2 = 0,0201 pl^2. \end{aligned}$$

De bøjende Momenter M_y i Snit e er

$$\begin{aligned} M_{y(e, 1)} &= \frac{9E_iI_y}{b^2} \cdot 2e_1 = 1,65 \cdot \frac{2 \cdot 19567}{9 \cdot 167440} pb^2 = 0,0428 pb^2, \\ M_{y(e, 2)} &= \frac{9E_iI_y}{b^2} (2e_2 - 2d_2) = \frac{2 \cdot 18332}{9 \cdot 167440} pb^2 = 0,0243 pb^2. \end{aligned}$$

Momenterne M_x er fremstillet i Fig. 45 og Momenterne M_y i Fig. 46 ved de fuldt optrukne Kurver. Momenterne M_x og M_y bestemt ved Forsøg er fremstillet i de samme Figurer ved de fuldt optrukne, aftrappede Linier.

2. Ensformig fordelt Belastning over 3 Felter.

For at finde Momenterne paa Grund af Stribebelastningen p ensformig fordelt over hvert andet Fag med Stribernes Retning parallel med y -Aksen kan man først tænke sig Pladen belastet med $+\frac{p}{2}$ og $-\frac{p}{2}$ skiftevis i hvert andet Fag. For denne Belastning vil Pladens Nedbøjning og Momenter i Punkter, som er symmetrisk beliggende med Hensyn til Stribernes Begrænsningslinier, være lige store med modsatte Fortegn. Da baade Søjlerne og de Dele af Pladen, som ligger i Nærheden af Søjlerne, er i Besiddelse af en forholdsvis stor Stivhed, vil Søjlerne ved denne Belastning faa en betydelig Indflydelse paa Momenternes Stør-

relse og Fordeling, hvorfor der ogsaa tages Hensyn hertil ved Beregningen. Dernæst tænkes Pladen belastet yderligere med $+\frac{p}{2}$ over alle Fag, hvorved den resulterende Belastning bliver $+p$ i hvert andet Fag, og de resulterende Momenter findes ved Hjælp af Superpositionsloven.

I Stedet for Stribebelastningen $+\frac{p}{2}$ og $-\frac{p}{2}$ med paafølgende Totalbelastning $\frac{p}{2}$ regnes med Stribebelastningen $+p$ og $-p$ med paafølgende Totalbelastning p , og de resulterende Momenter, som svarer til Stribebelastningen $2p$ i hvert andet Fag, halveres.

Ved Stribebelastningen $+p$ og $-p$ skiftevis i hvert andet Fag tænkes det i Fig. 50 viste Felt beliggende i en Stribe med Belastningen $+p$, medens Belastningen til højre og til venstre for det viste Felt er $-p$. Der ses foreløbig bort fra Søjlerens Stivhed, og Pladen beregnes, som om den var understøttet af Pendulsøjler.

For det i Fig. 50 viste belastede Felt er de søgte Nedbøjninger d_1, d_2, e_1 og e_2 . Til venstre for det viste Felt er Nedbøjningerne $-d_1, -d_2, -e_1$ og $-e_2$. Dette kan angives som i nedenstaaende Ligning for Punkt $(d, 1)$ ved at tilføje et Minus til Tallene 1 og 2 i de to første Rubrikker til venstre. Ligningen for dette Punkt bliver da

Punkt $(d, 1)$

	-2	-1	1	2	1	
e			+1,9			
d			-3,8			
			-3,8			
			+1,9			
d	+2,9	-5,8-5,8	+2,9+11,6+7,6+1,75	-5,8-3,5	+1,75	$= \frac{p\lambda^4}{E_t I_c}$
		-2	+2	-2		
			+1,65			
			-3,8			
e		+2	-2	+2		
			-3,3			
d			+1,65			

Denne Ligning kan skrives

$$816d_1 - 284d_2 - 224e_1 + 40e_2 = 20 \frac{p\lambda^4}{81E_t I_c}.$$

For de øvrige Punkter faas

$$\begin{array}{ll}
 \text{Punkt } (d, 2) & -284d_1 + 194d_2 + 40e_1 - 66e_2 = 10 \frac{pl^4}{81E_iI_c}, \\
 \text{» } (e, 1) & -224d_1 + 40d_2 + 307e_1 - 81e_2 = 10 \text{ » } , \\
 \text{» } (e, 2) & 80d_1 - 132d_2 - 162e_1 + 186e_2 = 10 \text{ » } .
 \end{array}$$

Herved findes

$$\begin{array}{ll}
 11963012d_1 = 4517635 \frac{pl^4}{81E_iI_c}, \\
 \text{» } d_2 = 9547860 \text{ » } , \\
 \text{» } e_1 = 5046370 \text{ » } , \\
 \text{» } e_2 = 9871230 \text{ » } .
 \end{array}$$

De bøjende Momenter M_0 , som herved bestemmes i den paa Pendulsøjler understøttede Plade, er

$$\begin{array}{ll}
 \text{i Punkt } (d, 2) & M_{0x} = \frac{9E_i I_x}{l^2} (2d_2 - 2d_1) = 0,1635pl^2, \\
 \text{» » } (e, 2) & M_{0x} = \frac{9E_i I_x}{l_2} (2e_2 - 2e_1) = 0,0895 \text{ » } ; \\
 \text{» » } (e, 1) & M_{0y} = \frac{9E_i I_y}{b_2} (2e_1 - 2d_1) = 0,0162pb^2, \\
 \text{» » } (e, 2) & M_{0y} = \frac{9E_i I_y}{b_2} (2e_2 - 2d_2) = 0,0060 \text{ » } .
 \end{array}$$

Dernæst beregnes Søjlerne Indflydelse. Paa Grund af Kapitælerne Stivhed kan man regne, at det bøjende Moment, som findes ved Overgangen mellem Søjlen og Pladen, paavirker Pladen som Enkeltkræfter i de fire nærmest ved Søjlen beliggende Systempunkter. Den lodrette Kraft, hvormed Søjlen paavirker Pladen i Punkt $(d, 1)$ (Fig. 50), kaldes X_d .

For $X_d = -1$ bliver Ligningerne

$$\begin{array}{ll}
 \text{Punkt } (d, 1) & 816d_1 - 284d_2 - 224e_1 + 40e_2 = -20 \frac{l^3}{9bE_iI_c}, \\
 \text{» } (d, 2) & -284d_1 + 194d_2 + 40e_1 - 66e_2 = 0, \\
 \text{» } (e, 1) & -224d_1 + 40d_2 + 307e_1 - 81e_2 = 0, \\
 \text{» } (e, 2) & 80d_1 - 132d_2 - 162e_1 + 186e_2 = 0.
 \end{array}$$

Herved findes

$$\begin{array}{ll}
 5981506d_1 = -801912 \frac{l^3}{9bE_iI_c}, \\
 \text{» } d_2 = -1482126 \text{ » } , \\
 \text{» } e_1 = -751122 \text{ » } , \\
 \text{» } e_2 = -1361126 \text{ » } .
 \end{array}$$

Vinkelændringen α_p af Pladen paa Grund af $X_d = -1$ er

$$\alpha_p = \frac{2 \cdot 801912}{\frac{1}{3} l \cdot 5981506} \cdot \frac{l^3}{9bE_iI_c} = 0,0894 \frac{l^2}{bE_iI_c}.$$

Forudsættes Søjlerne forsynede med Charnierer i Etageadskillelserne over og under den betragtede Plade, bliver Vinkelændringen α_s af Søjlerne paa Grund af Momentet $2 \cdot \frac{1}{3} l = \frac{2}{3} l$, svarende til $X_d = -1$,

$$\alpha_s = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} l}{E_s \left(\frac{I_1}{h_1} + \frac{I_2}{h_2} \right)} = \frac{2}{9} \frac{l}{E_i I_c} \cdot \frac{E_i}{E_s} \cdot \frac{I_c}{\frac{I_1}{h_1} + \frac{I_2}{h_2}},$$

hvor I_1 og I_2 er Inertimomenterne og h_1 og h_2 Længderne af Søjlerne mellem Gulv og Kapitæl henholdsvis over og under Pladen. Søjlerens Inertimoment beregnes som for et homogent Materiale, hvis Elasticitetskoefficient $E_s = \frac{1}{10} E_i$. Idet Søjlerne har regulært, ottekantet Tværsnit, hvis indskrevne Cirkels Diameter er $d_1 = 56$ cm i Søjlen over Pladen og $d_2 = 64$ cm i Søjlen under Pladen, bliver

$$I_1 = 0,055 \cdot 56^4 \text{ cm}^4 \quad \text{og} \quad I_2 = 0,055 \cdot 64^4 \text{ cm}^4.$$

Søjlerens Længde er $h_1 = h_2 = \text{ca. } 300$ cm. Inertimomentet pr. Længdeenhed I_c er udtrykt ved $I_c = F_i \eta = \text{ca. } 0,043 \cdot 0,7 \cdot 0,9 \cdot 15,0^2 \text{ cm}^4$. Man finder herved

$$\frac{E_i}{E_s} \cdot \frac{I_c}{\frac{I_1}{h_1} + \frac{I_2}{h_2}} = 10 \cdot \frac{0,043 \cdot 0,9 \cdot 0,7 \cdot 15,0^2}{\frac{0,055}{300} (56^4 + 64^4)} = 0,0125,$$

og

$$\alpha_s = \frac{2}{9} \frac{l}{E_i I_c} \cdot 0,0125 = 0,0028 \frac{l}{E_i I_c} = 0,0030 \frac{l^2}{b E_i I_c}.$$

Den gensidige Vinkelændring er altsaa

$$\delta_{dd} = \alpha_p + \alpha_s = \frac{l^2}{b E_i I_c} (0,0894 + 0,0030) = 0,0924 \frac{l^2}{b E_i I_c}.$$

For Stribebelastningen $+p$ og $-p$ skiftevis i hvert andet Fag er Vinkelændringen af Pladen, naar denne understøttes af Pendulsøjler,

$$\delta_{dm} = -\frac{2 \cdot 4517635}{\frac{1}{3} l \cdot 11963012} \cdot \frac{p l^4}{81 E_i I_c} = -0,0280 \frac{p l^3}{E_i I_c},$$

hvorved findes

$$X_d = \frac{\delta_{dm}}{\delta_{dd}} = -\frac{0,0280}{0,0924} p b l = -0,303 p b l.$$

Da α_s er lille i Forhold til α_p , vil en Fejl i de antagne Værdier af Søjlerens Elasticitetskoefficient og Inertimoment kun faa ringe Indflydelse paa δ_{dd} og X_d .

Summen af Momenterne i Søjlerne over og under Pladen er

$$\frac{2}{3} X_d l = \frac{2}{3} \cdot 0,303 p l^2 b = 0,202 p l^2 b,$$

som fordeles i Forhold til Inertimomenterne I_1 og I_2 med $0,075 p l^2 b$ i Søjlen over Pladen og $0,127 p l^2 b$ i Søjlen under Pladen.

Naar Belastningen p virker i hvert andet Fag, medens de øvrige Fag er ubelastede, vil Momentet i Søjlerne være halvt saa stort som ved Belastningen $+p$ og $-p$ skiftevis i hvert andet Fag.

Med $p = 930 \text{ kg/m}^2$, $l = 6,1 \text{ m}$ og $b = 6,7 \text{ m}$ bliver Momentet i Søjlen under Pladen

$$M_s = \frac{1}{2} \cdot 0,127 \cdot pl^2b = \frac{1}{2} \cdot 0,127 \cdot 930 \cdot 6,1^2 \cdot 6,7 = 14700 \text{ kgm}.$$

Umiddelbart under Kapitælet fandtes for denne Belastning ved Forsøget Forlængelsen 0,0003 paa den strakte Side og Forkortelsen 0,0004 paa den trykkede Side. Vinkelændringen pr. cm er altsaa

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{0,0003 + 0,0004}{64} = \frac{M}{E_s I_1},$$

hvoraf (med $E_s = 210000 \text{ kg/cm}^2$ og $I_1 = 0,055 \cdot 64^4 \text{ cm}^4$):

$$M = \frac{0,0007}{64} \cdot 210000 \cdot 0,055 \cdot 64^4 = 2130000 \text{ kgcm} = 21300 \text{ kgm}.$$

Det ved Maaling bestemte Moment er altsaa ca. $1,45 M_s$, hvor M_s er fundet ved Beregning. Sandsynligvis har Trækspændingerne i den strakte Side af Søjlen været saa store, at Betonens Trækbrudstyrke har været overskredet, hvorfor Vinkelændringen pr. cm er blevet forholdsvis stor i Nærheden af Kapitælet.

For $X_d = -1$ bliver de bøjende Momenter M_d i Pladen

$$\text{i Punkt } (d, 2): M_{dx} = \frac{9EI_x}{l^2} (2d_2 - 2d_1) = -0,398 \frac{l}{b},$$

$$\text{» » } (e, 2): M_{dx} = \frac{9EI_x}{l^2} (2e_2 - 2e_1) = -0,204 \frac{l}{b};$$

$$\text{i Punkt } (e, 1): M_{dy} = \frac{9EI_y}{b^2} (2e_1 - 2d_1) = +0,028 \frac{b}{l},$$

$$\text{» » } (e, 2): M_{dy} = \frac{9EI_y}{b^2} (2e_2 - 2d_2) = +0,040 \frac{b}{l}.$$

De bøjende Momenter i Pladen hidrørende fra Stribebelastningen $+p$ og $-p$ skiftevis i hvert andet Fag er

$$M_{(+p)} = M_{0(+p)} - X_d M_d.$$

Momenterne paa Grund af Stribebelastningen p i hvert andet Fag er

$$M = \frac{1}{2} (M_{(p)} + M_{(+p)}) = \frac{1}{2} (M_{(p)} + M_{0(+p)} - X_d M_d),$$

hvor $M_{(p)}$ er Momenterne paa Grund af Belastningen p over alle Fag. Herved findes

- i Punkt (d, 2): $M_x = \frac{1}{2} (0,0382 + 0,1635 - 0,303 \cdot 0,398) pl^2 = 0,0406 pl^2$,
 » » (e, 2): $M_x = \frac{1}{2} (0,0201 + 0,0895 - 0,303 \cdot 0,204) pl^2 = 0,0239 pl^2$;
 i Punkt (e, 1): $M_y = \frac{1}{2} (0,0428 + 0,0162 + 0,303 \cdot 0,028) pb^2 = 0,0337 pb^2$,
 » » (e, 2): $M_y = \frac{1}{2} (0,0243 + 0,0060 + 0,303 \cdot 0,040) pb^2 = 0,0212 pb^2$.

Momenterne M_x er fremstillet i Fig. 45 og Momenterne M_y i Fig. 46 ved de punkterede Kurver. Momenterne M_x og M_y bestemt ved Maaling er fremstillet i de samme Figurer ved de punkterede, aftrappede Linier.

Grunden til, at de positive M_x ved Beregningen kun findes ca. 20 % større ved Belastning over 3 Felter end ved Belastning over 9 Felter, medens de tilsvarende Momenter bestemt ved Maaling er ca. 50 % større, skyldes forskellige Omstændigheder. For det første vil Pladens virkelige Inertimoment ikke variere saa stærkt som det i Beregningen indførte Inertimoment, der er bestemt ved Jernindlægget og under Forudsætning af, at der ikke optræder Trækspændinger i Betonen. Herved er Momentet ved Belastning over 3 Felter fundet for stort i Søjlerne og det pos. M_x i Pladen for lille. For det andet er de ved Maaling bestemte Momenter for smaa, og Fejlen er større ved Belastning over 9 Felter end ved Belastning over 3 Felter, da Trækspændingerne i Betonen optager en større Del af de bøjende Momenter ved Belastning over 9 Felter end ved Belastning over 3 Felter. Endelig har sandsynligvis den overvejende Del af Formforandringerne ved Belastning over 9 Felter været elastisk, medens en større Del af Formforandringerne ved Belastning over 3 Felter har været blivende.

TREDIE AFSNIT.

FORSKELLIGE ANVENDELSER.

§ 20. Kvadratisk Plade, simpelt understøttet langs alle fire Sider, ensformig fordelt Belastning.

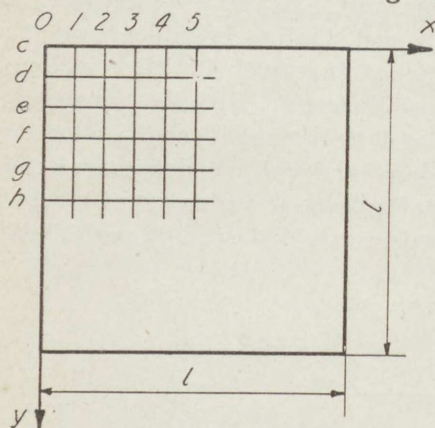


Fig. 51.

Pladen forudsættes at hvile paa faste simple Understøtninger, som tillader den frit at dreje sig, men hindrer den i at bøje sig op eller ned. Endvidere forudsættes konstant Inertimoment.

I Fig. 51 er Systemlinierne indlagt saaledes, at $\lambda = \frac{1}{10}l$. Beregningen udføres paa lignende Maade som angivet i § 7. Ligningerne (16) til Bestemmelse af $D_1, D_2, D_3, \dots$ er

(d, 1)	$-4D_1 + 2D_2$	$= 1 \cdot (1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}$
(d, 2)	$D_1 - 4D_2 + D_3 + E_2$	$= 1 \cdot \text{»}$
(d, 3)	$D_2 - 4D_3 + D_4 + E_3$	$= 1 \cdot \text{»}$
(d, 4)	$D_3 - 4D_4 + D_5 + E_4$	$= 1 \cdot \text{»}$
(d, 5)	$2D_4 - 4D_5 + E_5$	$= 1 \cdot \text{»}$
(e, 2)	$2D_2 - 4E_2 + 2E_3$	$= 1 \cdot \text{»}$
(e, 3)	$D_3 + E_2 - 4E_3 + E_4 + F_3$	$= 1 \cdot \text{»}$
(e, 4)	$D_4 + E_3 - 4E_4 + E_5 + F_4$	$= 1 \cdot \text{»}$
(e, 5)	$D_5 + 2E_4 - 4E_5 + F_5$	$= 1 \cdot \text{»}$
(f, 3)	$2E_3 - 4F_3 + 2F_4$	$= 1 \cdot \text{»}$
(f, 4)	$E_4 + F_3 - 4F_4 + F_5 + G_4$	$= 1 \cdot \text{»}$
(f, 5)	$E_5 + 2F_4 - 4F_5 + G_5$	$= 1 \cdot \text{»}$
(g, 4)	$2F_4 - 4G_4 + 2G_5$	$= 1 \cdot \text{»}$
(g, 5)	$F_5 + 2G_4 - 4G_5 + H_5$	$= 1 \cdot \text{»}$
(h, 5)	$4G_5 - 4H_5$	$= 1 \cdot \text{»}$

Man finder herved

	1	2	3	4	5	
<i>D</i>	—187389	—301654	—371428	—409486	—421608	$\frac{1-\mu^2}{146248} \frac{p\lambda^4}{EI}$
<i>E</i>		—501551	—628324	—698660	—721212	» »
<i>F</i>			—795409	—889370	—919672	» »
<i>G</i>				—997491	—1032488	» »
<i>H</i>					—1069050	» »

Ligningerne (15) til Bestemmelse af $d_1, d_2, d_3 \dots$ faas ved i ovenstaaende Ligningers venstre Side at ombytte D_1 med d_1 , D_2 med d_2 o. s. v. Paa højre Side af Lighedstegnet indgaar de fundne Værdier af $D_1, D_2, D_3 \dots$. Herved findes

	1	2	3	4	5	
<i>d</i>	93395572682	173088512128	232812624856	269546199040	281921049360	$\frac{1-\mu^2}{146248^2} \frac{p\lambda^4}{EI}$
<i>e</i>		322029556782	434295186112	503564613416	526932472576	» »
<i>f</i>			586882821042	681306968256	713203801536	» »
<i>g</i>				791508053270	828768606400	» »
<i>h</i>					867855212500	» »

Nedbøjningen samt de bøjende Momenter og Reaktionerne er opstillet i nedenstaaende Tabeller. De bøjende Momenter er kun angivet med Værdien af M_x for $\mu = 0$. M_y for $\mu = 0$ findes ved Symmetrien om en Diagonal. Kaldes disse Værdier af M_x og M_y henholdsvis $M_{x(\mu=0)}$ og $M_{y(\mu=0)}$, findes ifølge Lign. (11) M_x og M_y for en vilkaarlig Værdi af μ ved

$$M_x = M_{x(\mu=0)} + \mu \cdot M_{y(\mu=0)},$$

$$M_y = M_{y(\mu=0)} + \mu \cdot M_{x(\mu=0)}.$$

Nedbøjninger.

	0	1	2	3	4	5	
<i>c</i>	0	0	0	0	0	0	
<i>d</i>	0	0,00044	0,00081	0,00109	0,00126	0,00132	$(1-\mu^2) \frac{pl^4}{EI}$
<i>e</i>	0	0,00081	0,00151	0,00203	0,00235	0,00246	» »
<i>f</i>	0	0,00109	0,00203	0,00274	0,00319	0,00334	» »
<i>g</i>	0	0,00126	0,00235	0,00319	0,00370	0,00388	» »
<i>h</i>	0	0,00132	0,00246	0,00334	0,00388	0,00406	» »

Momenter M_x for $\mu = 0$.

	0	1	2	3	4	5	
c	0	0	0	0	0	0	
d	0	0,0064	0,0093	0,0108	0,0114	0,0116	pl^2
e	0	0,0113	0,0172	0,0201	0,0215	0,0219	»
f	0	0,0147	0,0229	0,0272	0,0292	0,0298	»
g	0	0,0166	0,0263	0,0316	0,0341	0,0348	»
h	0	0,0173	0,0275	0,0331	0,0358	0,0366	»

Punkt	Reaktion
$(c, 0)$	$\begin{cases} -(0,085 - \mu \cdot 0,087) pl^2 & \text{som Enkeltkraft.} \\ 0 & \text{pr. Længdeenhed.} \end{cases}$
$(d, 0)$	$(0,242 - \mu \cdot 0,064) pl$ » »
$(e, 0)$	$(0,350 - \mu \cdot 0,093)$ » » »
$(f, 0)$	$(0,411 - \mu \cdot 0,108)$ » » »
$(g, 0)$	$(0,444 - \mu \cdot 0,114)$ » » »
$(h, 0)$	$(0,454 - \mu \cdot 0,116)$ » » »

Til Sammenligning anføres de af Dr. Leitz*) angivne Resultater for den kvadratiske Plade med ensformig fordelt Belastning. Disse Resultater er fundet ved Løsning af Differentialligningen, idet Belastningsfladen fremstilles ved Rækkeudvikling.

Nedbøjninger (Leitz, Side 24).

	0	1	2	3	4	5	
c	0	0	0	0	0	0	
d	0	0,00043	0,00080	0,00108	0,00128	0,00132	$(1 - \mu^2) \frac{pl^4}{EI}$
e	0	0,00080	0,00150	0,00203	0,00238	0,00246	» »
f	0	0,00108	0,00203	0,00274	0,00322	0,00332	» »
g	0	0,00128	0,00238	0,00322	0,00382	0,00390	» »
h	0	0,00132	0,00246	0,00332	0,00390	0,00407	» »

*) Heinrich Leitz, Die Berechnung der frei aufliegenden, rechteckigen Platten, Berlin, 1914.

Momenter M_x for $\mu = 0$ (Leitz, Side 27).

	0	1	2	3	4	5	
c	0	0	0	0	0	0	
d	0	0,0065	0,0093	0,0108	0,0113	0,0115	pl^2
e	0	0,0116	0,0172	0,0202	0,0215	0,0220	»
f	0	0,0148	0,0230	0,0274	0,0294	0,0299	»
g	0	0,0169	0,0266	0,0318	0,0344	0,0351	»
h	0	0,0175	0,0278	0,0334	0,0361	0,0368	»

Punkt	Reaktion. (Leitz, Side 26 og 38).
$(c, 0)$	$\left\{ \begin{array}{l} (0,092 - \mu \cdot 0,092) pl^2 \text{ som Enkeltkraft} \\ 0 \dots\dots\dots \text{pr. Længdeenhed.} \end{array} \right.$
$(d, 0)$	$(0,241 - \mu \cdot 0,071) pl$ » »
$(e, 0)$	$(0,346 - \mu \cdot 0,096)$ » » »
$(f, 0)$	$(0,411 - \mu \cdot 0,111)$ » » »
$(g, 0)$	$(0,446 - \mu \cdot 0,116)$ » » »
$(h, 0)$	$(0,460 - \mu \cdot 0,120)$ » » »

Der er saaledes overalt god Overensstemmelse mellem de paa Side 131—132 fundne og de af Dr. Leitz angivne Resultater.

For at undersøge om man opnaar tilstrækkelig Nøjagtighed, naar man indfører λ med en større Værdi, beregnes Nedbøjninger, bøjende Momenter og Reaktioner med $\lambda = \frac{1}{5} l$ (Fig. 52). Ligningerne bliver da:

$$(e, 2) -4E_2 + 2E_4 = 1 \cdot (1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI},$$

$$(e, 4) \quad E_2 - 3E_4 + G_4 = 1 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad ,$$

$$(g, 4) \quad 2E_4 - 2G_4 = 1 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad .$$

$$\text{hvoraf} \quad E_2 = -5 \cdot \frac{1 - \mu^2}{6} \cdot \frac{p\lambda^4}{EI},$$

$$E_4 = -7 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad ,$$

$$G_4 = -10 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad .$$

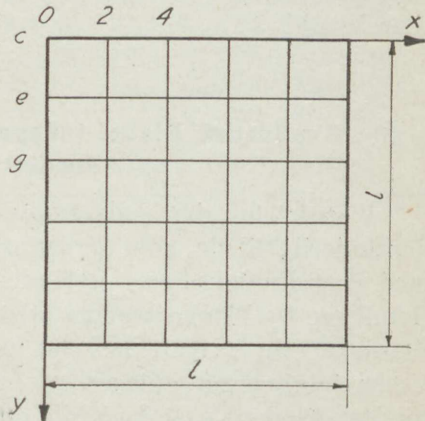


Fig. 52.

De fundne Værdier af E_2 , E_4 og G_4 indføres i Ligningerne

$$\left. \begin{aligned} -4e_2 + 2e_4 &= E_2, \\ e_2 - 3e_4 + g_4 &= E_4, \\ 2e_4 - 2g_4 &= G_4, \end{aligned} \right\} \text{ hvorefter findes } \begin{cases} e_2 = 34 \cdot \frac{1 - \mu^2}{36} \frac{p\lambda^4}{EI}, \\ e_4 = 53 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»}, \\ g_4 = 83 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»}. \end{cases}$$

De bøjende Momenter og Reaktionen findes paa lignende Maade som i § 7. Resultaterne er opstillet i nedenstaaende Tabeller.

Nedbøjninger.					Momenter M_x for $\mu = 0$.				
	0	2	4			0	2	4	
c	0	0	0		c	0	0	0	
e	0	0,00151	0,00236	$(1 - \mu^2) \frac{p l^4}{EI}$	e	0	0,0167	0,0211	$p l^2$
g	0	0,00236	0,00369	» »	g	0	0,0256	0,0333	»

Punkt	Reaktion
$(c, 0)$	$\begin{cases} -(0,066 - \mu \cdot 0,076) p l^2 & \text{som Enkeltkraft,} \\ 0 \dots\dots\dots & \text{pr. Længdeenhed.} \end{cases}$
$(e, 0)$	$(0,350 - \mu \cdot 0,083) p l$ » »
$(g, 0)$	$(0,439 - \mu \cdot 0,106) \text{ » } \text{ » } \text{ »}$

Enkeltkraften i Hjørnet findes noget for lille med $\lambda = \frac{1}{3} l$. De øvrige Resultater er ikke meget forskellige, enten man regner med $\lambda = \frac{1}{10} l$ eller $\lambda = \frac{1}{5} l$.

§ 21. Kvadratisk Plade, indspændt langs alle fire Sider, ensformig fordelt Belastning.

I Stedet for den indspændte kvadratiske Plade tænker man sig en kontinuerlig Plade, som hviler paa retliniede Understøtninger parallelle med Koordinatakserne. Afstanden mellem Understøtningerne er i begge Retninger l . Pladen tænkes udstrakt over uendelig mange Fag i begge Retninger og overalt belastet med en ensformig fordelt Belastning p . Understøtningerne antages at være af en saadan Beskaffenhed, at de hindrer Pladen i at bøje sig op og ned. Den indspændte kvadratiske Plade kan erstattes af et enkelt Felt af denne Plade, idet Understøtningsbetingelserne i begge Tilfælde er de samme.

Inertimomentet forudsættes at være konstant.

Beregningen udføres med $\lambda = \frac{1}{10} l$ (Fig. 53).

Ligningerne (15) og (16) kan anvendes til Bestemmelse af de 15 ubekendte Nedbøjninger. Man maa da begynde, med at opskrive Lign. (16) for de 15 Punkter, hvis Nedbøjninger søges. Herved indføres 5 nye ubekendte, nemlig Størrelserne C_1, C_2, C_3, C_4 og C_5 . Af Lign. (16) findes hver af Størrelserne $D_1, D_2, \dots$ udtrykt ved Belastningen p og ved de 5 ubekendte C 'er. Dernæst opstilles Lign. (15) baade for de Punkter, hvis Nedbøjninger søges, og for Punkterne $(c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4)$ og $(c, 5)$. Herved faas 20 Ligninger til Bestemmelse af de 5 Størrelser C og de 15 ubekendte Nedbøjninger.

Da man i Ligningerne (15) har faaet indført 5 nye ubekendte, bliver denne Fremgangsmaade imidlertid ret besværlig. og det foretrakkes derfor at opskrive Lign. (14) til direkte Bestemmelse af de søgte Nedbøjninger. Ligningerne bliver da:

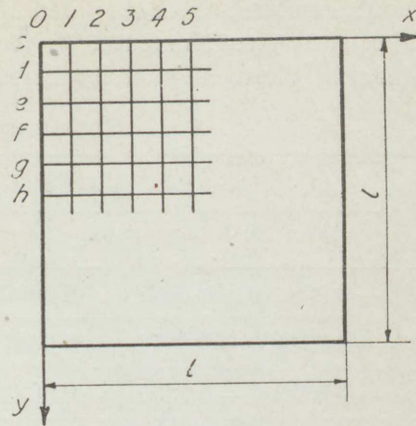


Fig. 53.

$$\begin{array}{ll}
 (d, 1) & 22d_1 - 16d_2 + 2d_3 + 2e_2 = 1 \cdot (1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}, \\
 (d, 2) & -8d_1 + 23d_2 - 8d_3 + d_4 - 8e_2 = 1 \quad \gg, \\
 (d, 3) & d_1 - 8d_2 + 21d_3 - 8d_4 + d_5 + 2e_2 - 8e_3 + 2e_4 + f_3 = 1 \quad \gg, \\
 (d, 4) & d_2 - 8d_3 + 22d_4 - 8d_5 + 2e_3 - 8e_4 + 2e_5 + f_4 = 1 \quad \gg, \\
 (d, 5) & 2d_3 - 16d_4 + 21d_5 + 4e_4 - 8e_5 + f_5 = 1 \quad \gg, \\
 (e, 2) & 2d_1 - 16d_2 + 4d_3 + 20e_2 - 16e_3 + 2e_4 + 2f_3 = 1 \quad \gg, \\
 (e, 3) & 3d_2 - 8d_3 + 2d_4 - 8e_3 + 22e_4 - 8e_5 + e_6 - 8f_3 + 3f_4 = 1 \quad \gg, \\
 (e, 4) & 2d_3 - 8d_4 + 2d_5 + e_2 - 8e_3 + 21e_4 - 8e_5 + 2f_3 - 8f_4 + 2f_5 + g_4 = 1 \quad \gg, \\
 (e, 5) & 4d_4 - 8d_5 + 2e_3 - 16e_4 + 20e_5 + 4f_4 - 8f_5 + g_5 = 1 \quad \gg, \\
 (f, 3) & 2d_3 + 2e_2 - 16e_3 + 4e_4 + 20f_3 - 16f_4 + 2f_5 + 2g_4 = 1 \quad \gg, \\
 (f, 4) & d_4 + 3e_3 - 8e_4 + 2e_5 - 8f_3 + 23f_4 - 8f_5 - 8g_4 + 3g_5 = 1 \quad \gg, \\
 (f, 5) & 4e_4 - 8e_5 + 2f_3 - 16f_4 + 20f_5 + 4g_4 - 8g_5 + h_5 = 1 \quad \gg, \\
 (g, 4) & 2e_4 + 2f_3 - 16f_4 + 4f_5 + 22g_4 - 16g_5 + 2h_5 = 1 \quad \gg, \\
 (g, 5) & e_5 + 6f_4 - 8f_5 - 16g_4 + 25g_5 - 8h_5 = 1 \quad \gg, \\
 (h, 5) & 4f_5 + 8g_4 - 32g_5 + 20h_5 = 1 \quad \gg.
 \end{array}$$

Idet $\lambda = \frac{1}{10} l$, findes herved følgende Nedbøjninger:

	0	1	2	3	4	5	
c	0	0	0	0	0	0	
d		0,0000469	0,0001207	0,0001863	0,0002289	0,0002436	$(1 - \mu^2) \frac{p l^4}{EI}$
e			0,0003135	0,0004894	0,0006062	0,0006467	» »
f				0,0007701	0,0009588	0,0010243	» »
g					0,0011969	0,0012799	» »
h						0,0013694	» »

De herved bestemte Nedbøjninger, bøjende Momenter og Reaktioner er opstillet i nedenstaaende Tabeller.

Nedbøjninger.				Momenter M_x for $\mu = 0$.					
	0	2	4		0	2	4		
c	0	0	0	c	0	0	0		
e	0	0,00045	0,00080	$(1-\mu^2)\frac{pl^4}{EI}$,	e	-0,0225	+0,0025	+0,0088	pl^2
g	0	0,00080	0,00145	» » .	g	-0,0400	+0,0038	+0,0163	»

Punkt	(c, 0)	(c, 2)	(c, 4)	
Reaktion	-0,062	0,250	0,406	pl

Ved Sammenligning mellem Resultaterne ses, at Momenterne i Nærheden af Pladens Midte og Reaktionerne findes med meget nær de samme Værdier, enten man regner med $\lambda = \frac{1}{10}l$ eller $\lambda = \frac{1}{5}l$. Med $\lambda = \frac{1}{5}l$ findes Indspændingsmomenterne mindre og Nedbøjningerne større end med $\lambda = \frac{1}{10}l$, og navnlig for Nedbøjningernes Vedkommende er der en ret betydelig Forskel paa de to Resultater.

I § 5 er omtalt, hvorledes man ved kontinuerlige Plader vil kunne opnaa nøjagtigere Resultater, naar man for de Elementer, som er beliggende over Understøtningerne, udtrykker $\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}$ og $\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}$ ved Lign. (25) eller Lign. (26) i Stedet for Lign. (9). For et vilkaarligt Punkt (c, n) beliggende paa Understøtningen parallel med x -Aksen har man ved Lign. (25):

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} = \frac{1}{\lambda^2}(-2c_n + 2d_n) = -\frac{1}{EI} \left[\frac{2}{3}(M_{y(c,n)} - \mu M_{x(c,n)}) + \frac{1}{3}(M_{y(d,n)} - \mu M_{x(d,n)}) \right]. \quad (72)$$

For Punkt (d, n) er ifølge Lign. (9)

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} = \frac{1}{\lambda^2}(c_n - 2d_n + e_n) = -\frac{1}{EI}(M_{y(d,n)} - \mu M_{x(d,n)}). \quad (73)$$

Af Ligningerne (72) og (73) faas

$$\frac{1}{\lambda^2}(-3,5c_n + 4d_n - 0,5e_n) = -\frac{1}{EI}(M_{y(c,n)} - \mu M_{x(c,n)}). \quad (74)$$

Endvidere har man ifølge Lign. (9) for Punkt (c, n)

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} = 0 = -\frac{1}{EI}(M_{x(c,n)} - \mu M_{y(c,n)}). \quad (75)$$

Af Ligningerne (74) og (75) faas

$$M_{y(c,n)} = -EI \frac{3,5c_n + 4d_n - 0,5e_n}{\lambda^2(1 - \mu^2)}. \quad (76)$$

Af Lign. (75) har man endvidere

$$M_{x(c,n)} = \mu M_{y(c,n)} = -\mu EI \frac{3,5c_n + 4d_n - 0,5e_n}{\lambda^2(1 - \mu^2)}.$$

Differensligningen til Bestemmelse af Nedbøjningerne vil imidlertid faa en simplere Form, dersom man i Stedet for dette Udtryk for $M_{x(c,n)}$ anvender Lign. (11), hvorefter

$$M_{x(c,n)} = -EI \frac{\mu \frac{\Delta^2 z}{1 - \mu^2}}{\lambda^2(1 - \mu^2)} = -\mu EI \frac{2c_n + 2d_n}{\lambda^2(1 - \mu^2)}.$$

Alle de Led, hvor Faktoren μ indgaar i Differensligningens venstre Side, vil herved forsvinde ligesom i Ligningerne (13) og (14).

Ved Beregningen maa der i alle Tilfælde sørges for, at et vilkaarligt Element er i Ligevægt. For at finde den rigtige Fordeling af de indre Kræfter udtrykkes de bøjende og de vridende Momenter ved Formforandringerne saavidt muligt i Overensstemmelse med de virkelige Forhold. Da de Forudsætninger, som er nødvendige for at kunne udtrykke Momenterne ved Formforandringerne, altid er mere eller mindre mangelfulde, kan disse Forudsætninger, uden at det faar Indflydelse paa Nøjagtigheden af Resultaterne, tillempes saaledes, at Beregningen ikke bliver unødvendig besværlig at udføre.

Idet Ligevægtsbetingelserne for et vilkaarligt Element opfyldes uafhængigt af, hvorledes Momenterne udtrykkes ved Formforandringerne, vil man med en god Tilnærmelse kunne udtrykke $M_{x(c,n)}$ ved Lign. (11), medens $M_{y(c,n)}$ udtrykkes ved Lign. (76).

For et vilkaarligt Punkt $(k, 0)$, beliggende paa Understøtningen parallel med y -Aksen, har man i Lighed med Lign. (76)

$$M_{x(k,0)} = -EI \frac{3,5k_0 + 4k_1 - 0,5k_2}{\lambda^2(1 - \mu^2)}. \quad (77)$$

Naar man ved Beregningen med $\lambda = \frac{1}{10}l$ (Fig. 53) i Lign. (8) udtrykker M_y for de Punkter, som er beliggende over Understøtningslinien c , ved Lign. (76), og M_x for de Punkter, som er beliggende over Understøtningslinien 0 , ved Lign. (77), medens alle øvrige Momenter udtrykkes ved Lign. (11), bliver de 5 første Ligninger (Side 135)

$$\begin{array}{llll} (d, 1) & 26d_1 - 17d_2 + 2d_3 & + 2e_2 & = (1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}, \\ (d, 2) & -8d_1 + 25d_2 - 8d_3 + d_4 & - 8,5e_2 + 3e_3 & = \text{»} \text{»}, \\ (d, 3) & d_1 - 8d_2 + 23d_3 - 8d_4 + d_5 & + 2e_2 - 8,5e_3 + 2e_4 & + f_3 = \text{»} \text{»}, \\ (d, 4) & d_2 - 8d_3 + 24d_4 - 8d_5 & + 2e_3 - 8,5e_4 + 2e_5 & + f_4 = \text{»} \text{»}, \\ (d, 5) & 2d_3 - 16d_4 + 23d_5 & + 4e_4 - 8,5e_5 & + f_5 = \text{»} \text{»}. \end{array}$$

De andre Ligninger bliver uforandrede.

Man finder herved følgende Nedbøjninger

	0	1	2	3	4	5	
<i>c</i>	0	0	0	0	0	0	
<i>d</i>		0,0000339	0,0000951	0,0001506	0,0001869	0,0001993	$(1-\mu^2)\frac{pl^4}{EI}$,
<i>e</i>			0,0002673	0,0004280	0,0005354	0,0005726	» » ,
<i>f</i>				0,0006907	0,0008685	0,0009306	» » ,
<i>g</i>					0,0010953	0,0011748	» » ,
<i>h</i>						0,0012604	» » ,

Momenterne M_x bestemmes herefter for Punkterne over Understøttelseslinien 0 ved Lign. (77) og for de øvrige Punkter ved Lign. (11). Momenterne M_x for $\mu = 0$ er angivet i nedenstaaende Tabel.

Momenter M_x for $\mu = 0$.

	0	1	2	3	4	5	
<i>c</i>	0	0	0	0	0	0	
<i>d</i>	-0,0088	-0,0027	+0,0006	+0,0019	+0,0024	+0,0025	pl^2
<i>e</i>	-0,0247	-0,0077	+0,0012	+0,0053	+0,0070	+0,0075	»
<i>f</i>	-0,0388	-0,0127	+0,0015	+0,0085	+0,0116	+0,0124	»
<i>g</i>	-0,0480	-0,0162	+0,0015	+0,0106	+0,0147	+0,0159	»
<i>h</i>	-0,0511	-0,0174	+0,0015	+0,0114	+0,0159	+0,0171	»

Dr. Leitz*) har ved Løsning af Differentialligningen med Belastningsfladen fremstillet ved Rækkeudvikling fundet Nedbøjningen midt i Pladen

$$z_{(h,5)} = 0,00127(1-\mu^2)\frac{pl^4}{EI},$$

og Momenterne M_x for $\mu = 0$:

	0	1	2	3	4	5	
<i>c</i>	0	0	0	0	0	0	
<i>d</i>	-0,0077	-0,0027	+0,0003	+0,0018	+0,0019	+0,0026	pl^2
<i>e</i>	-0,0248	-0,0074	+0,0010	+0,0051	+0,0066	+0,0081	»
<i>f</i>	-0,0391	-0,0126	+0,0014	+0,0085	+0,0113	+0,0134	»
<i>g</i>	-0,0482	-0,0159	+0,0017	+0,0105	+0,0148	+0,0171	»
<i>h</i>	-0,0515	-0,0172	+0,0017	+0,0114	+0,0158	+0,0184	»

*) Leitz, Berechnung der eingespannten rechteckigen Platte, Zeitschrift f. Math. u. Physik, Bd. 64, 1917.

Naar undtages Momenterne i Linie 5, som af Dr. Leitz er angivet indtil 8 % større end de ved Anvendelse af Differensligningen fundne Værdier, er der overalt særdeles god Overensstemmelse.

Reaktionerne i den tænkte kontinuerlige Plade beregnes ved Hjælp af Lign. (8). For det vilkaarlige Kantsystempunkt (c, n) , for hvilket Lign. (8) opskrives, udtrykkes M_y ved Lign. (76), medens de øvrige Momenter, som indgaar i Ligningen, udtrykkes ved Lign. (11). Ligningen til Bestemmelse af Reaktionen i Punkt (c, n) bliver da

	$n-2$	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	
e			+ 1,5			$= (1 - \mu^2)(p\lambda^2 - R) \frac{\lambda^2}{EI}$
d		+2	-10	+2		
c	+1	-8	+23	-8	+1	
d		+2	-10	+2		
e			+ 1,5			

eller, idet Nedbøjningerne i Linie c er Nul,

$$4d_{n-1} - 20d_n + 4d_{n+1} + 3e_n = (1 - \mu^2)(p\lambda^2 - R) \frac{\lambda^2}{EI}.$$

De herved bestemte Reaktioner udtrykkes pr. Længdeenhed af Understøtningen og halveres, hvorved man finder følgende Værdier:

Punkt	$(c, 0)$	$(c, 1)$	$(c, 2)$	$(c, 3)$	$(c, 4)$	$(c, 5)$	
Reaktion	-0,043	0,056	0,231	0,350	0,416	0,437	pl

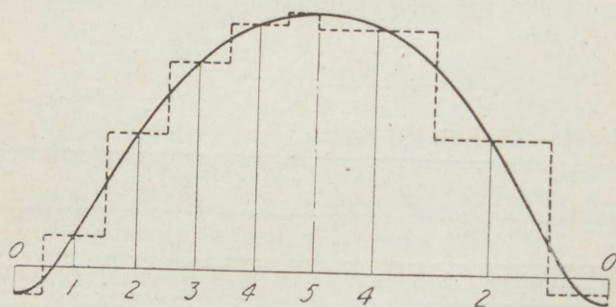


Fig. 55.

De fundne Reaktioner er fremstillet ved den aftrappede, punkterede Linie til venstre i Fig. 55. Reaktionens virkelige Forløb er antydet ved den fuldt optrukne Kurve.

Med $\lambda = \frac{1}{5}l$ (Fig. 54) bliver Ligningerne, idet M_y for Punkterne i Linie c udtrykkes ved Lign. (76) og M_x for Punkterne i Linie 0 ved Lign. (77),

$$\begin{aligned}(e, 2) \quad & 26e_2 - 15e_4 + 2g_4 = (1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}, \\(e, 4) \quad & -7e_2 + 17e_4 - 5,5g_4 = \quad \quad \quad \gg \quad \quad \quad \gg, \\(g, 4) \quad & 2e_2 - 10e_4 + 6g_4 = \quad \quad \quad \gg \quad \quad \quad \gg;\end{aligned}$$

heraf findes

$$\begin{aligned}e_2 &= 331 \cdot \frac{1 - \mu^2}{1658} \frac{p\lambda^4}{EI}, \\e_4 &= 624 \quad \quad \quad \gg \quad \quad \quad \gg, \\g_4 &= 1206 \quad \quad \quad \gg \quad \quad \quad \gg.\end{aligned}$$

De herved bestemte Nedbøjninger, bøjende Momenter og Reaktioner findes angivet i nedenstaaende Tabeller.

Nedbøjninger.				Momenter M_x for $\mu = 0$.			
	0	2	4		0	2	4
c	0	0	0	c	0	0	0
e	0	0,00032	0,00060	e	-0,0244	+0,0009	+0,0071
			$(1-\mu^2)\frac{pl^4}{EI}$				pl^2
g	0	0,00060	0,00116	g	-0,0457	+0,0010	+0,0140
			» »				»

Punkt	(c, 0)	(c, 2)	(c, 4)	
Reaktion	-0,030	0,236	0,404	pl

De fundne Reaktionen er fremstillet ved den aftrappede, punkterede Linie til højre i Fig. 55.

Naar de bøjende Momenter i Pladen over Understøtningen udtrykkes ved Ligningerne (76) og (77), findes saaledes en god Overensstemmelse mellem de med $\lambda = \frac{1}{10}l$ og de med $\lambda = \frac{1}{5}l$ beregnede Momenter og Reaktionen. For Nedbøjningernes Vedkommende er der ogsaa betydelig bedre Overensstemmelse end i det tidligere behandlede Tilfælde, hvor alle Momenter udtryktes ved Lign. (11).

Dr. Hencky*) har i Midtpunktet $(c, 5)$ af Understøtningen fundet Reaktionen $0,44 pl$ og i Fjerdedelspunktet, beliggende midt imellem $(c, 2)$ og $(c, 3)$, Reaktionen $0,30 pl$, hvilket stemmer godt med de ovenfor fundne Værdier.

Regnes $\mu = 0,3$, bliver det bøjende Moment $M_{x(h, 5)}$ midt i Pladen og Indspændingsmomentet $M_{x(h, 0)}$ ved Midten af Indspændingen, beregnet med $\lambda = \frac{1}{10}l$ og Lign. (14) for alle Systempunkter

*) H. Hencky, Der Spannungszustand in rechteckigen Platten, München und Berlin, 1913, Side 49.

$$M_{x(h,5)} = +0,0233 pl^2 \quad \text{og} \quad M_{x(h,0)} = -0,0487 pl^2,$$

og beregnet med $\lambda = \frac{1}{10} l$ og Ligningerne (76) og (77) for Punkterne over Understøtningerne

$$M_{x(h,5)} = +0,0223 pl^2 \quad \text{og} \quad M_{x(h,0)} = -0,0511 pl^2.$$

De tilsvarende Momenter finder Dr. Hencky*)

$$M_{x(h,5)} = +0,023 pl^2 \quad \text{og} \quad M_{x(h,0)} = -0,051 pl^2,$$

og Dr. Árpád Nádai**)

$$M_{x(h,5)} = +0,023 pl^2 \quad \text{og} \quad M_{x(h,0)} = -0,049 pl^2.$$

§ 22. **Kvadratiske og rektangulære Plader, simpelt understøttede langs to modstaaende Sider, ensformig fordelt Belastning.**

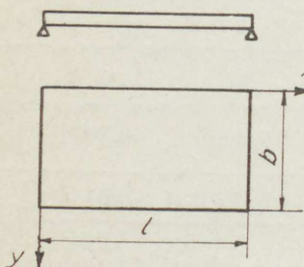


Fig. 56.

En rektangulær Plade med Siderne l og b (Fig. 56) tænkes simpelt understøttet langs Siderne b , medens Siderne l er frie. For en vilkaarlig Belastning paa denne Plade kan de bøjende Momenter i et Snit parallelt med Understøtningerne beregnes paa samme Maade som i en Bjælke med Spændvidde l . Man kan altsaa ved de statiske Ligevægtsbetingelser finde hele det bøjende Moment i Snittet, men man ved ikke paa Forhaand, hvorledes dette Moment fordeles sig i Snittet. Selv naar Belastningen paa Pladen er ensformig fordelt og Pladens Inertimoment konstant, vil Størrelsen af det bøjende Moment pr. Længdeenhed i Snittet variere. Ligeledes vil Pladens Nedbøjninger langs Snittet og Reaktionerne pr. Længdeenhed langs Understøtningerne variere.

Ifølge Lign. (9) er

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} = -\frac{1}{EI} (M_y - \mu M_x).$$

Dersom b er stor i Forhold til l , vil $\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}$ for en ensformig fordelt Belastning være lille i Afstanden $\frac{b}{2}$ fra de frie Kanter, saaledes at man for $b = \infty$ har $\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} = 0$, og $M_y = \mu M_x$. $\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}$ vil være størst ved de frie

*) H. Hencky, Der Spannungszustand in rechteckigen Platten, München und Berlin, 1913, Side 53.

**) Árpád Nádai, Die Formänderungen und die Spannungen von rechteckigen elastischen Platten, Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 170 und 171, Berlin, 1915, Side 86.

Kanter, hvor $M_y = 0$. Dersom b derimod er lille i Forhold til l , vil Pladen tilnærmelsesvis forholde sig som en Bjælke, for hvilken man tilstrækkelig nøjagtigt kan regne $M_y = 0$.

For at undersøge, hvilken Betydning disse Forhold har, bestemmes i de følgende Exempler Nedbøjningerne, de bøjende og de vridende Momenter samt Reaktionerne for kvadratiske og rektangulære Plader med forskelligt Forhold mellem l og b . I alle de behandlede Tilfælde forudsættes ensformig fordelt Belastning p og konstant Inertimoment.

1. Kvadratisk Plade. $\lambda = \frac{1}{2} l$. (Fig. 57).

Nedbøjningerne i Linierne 1 og 2 beregnes ved Hjælp af Ligningerne Side 46—47. Disse Ligninger er

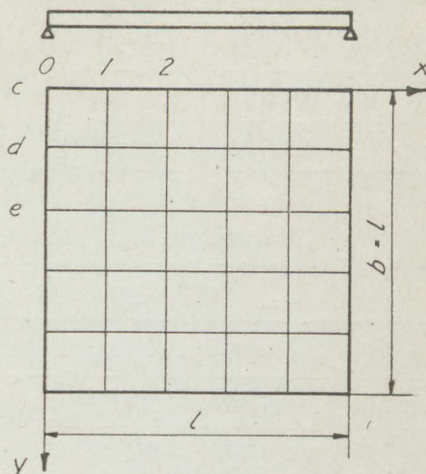


Fig. 57.

$$\begin{array}{ll}
 (c, 1) & (\frac{1}{2} - 4\mu - \frac{5}{2}\mu^2) c_1 - (\frac{7}{2} - 2\mu - \frac{3}{2}\mu^2) c_2 - (6 - 2\mu) d_1 + (2 - \mu) d_2 + e_1 = \frac{1}{2}(1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}, \\
 (c, 2) & -(\frac{7}{2} - 2\mu - \frac{3}{2}\mu^2) c_1 + (4 - 2\mu - \mu^2) c_2 + (2 - \mu) d_1 - (4 - \mu) d_2 + e_2 = \frac{1}{2} \text{ » } \text{ » } , \\
 (d, 1) & -(6 - 2\mu) c_1 + (2 - \mu) c_2 + 18d_1 - 7d_2 - 7e_1 + 2e_2 = 1 \text{ » } \text{ » } , \\
 (d, 2) & (2 - \mu) c_1 - (4 - \mu) c_2 - 7d_1 + 11d_2 + 2e_1 - 5e_2 = 1 \text{ » } \text{ » } , \\
 (e, 1) & c_1 - 7d_1 + 2d_2 + 11e_1 - 5e_2 = 1 \text{ » } \text{ » } , \\
 (e, 2) & c_2 + 2d_1 - 5d_2 - 5e_1 + 6e_2 = 1 \text{ » } \text{ » } .
 \end{array}$$

$$\text{For } \mu = 0,3 \text{ findes herved } c_1 = 5513965380 \cdot \frac{1 - \mu^2}{961686054} \frac{p\lambda^4}{EI},$$

$$c_2 = 8822535120 \text{ » » } ,$$

$$d_1 = 5031515286 \text{ » » } ,$$

$$d_2 = 8054138421 \text{ » » } ,$$

$$e_1 = 4855960179 \text{ » » } ,$$

$$e_2 = 7771102227 \text{ » » } .$$

I Punkterne $(c, 1)$ og $(c, 2)$ er ifølge Lign. (33)

$$M_{x(c, 1)} = -EI \frac{2c_1 + c_2}{\lambda^2} \quad \text{og} \quad M_{x(c, 2)} = -EI \frac{c_1 - c_2}{\lambda^2}.$$

I de øvrige Punkter bestemmes M_x og M_y ved Hjælp af Lign. (11), som ogsaa anvendes til Bestemmelse af M_v .

Nedbøjningerne samt de bøjende og de vridende Momenter er angivet i omstaaende Tabeller.

Nedbøjninger.

	0	1	2	
c	0	0,00835	0,01336	$\frac{pl^4}{EI}$
d	0	0,00761	0,01219	»
e	0	0,00735	0,01178	»

Momenter M_v .

	0	1	2	
c				
d	+0,0141	+0,0083	0	pl^2
e	+0,0051	+0,0031	0	»
	0	0	0	»

Momenter M_x .

	0	1	2	
c	0	+0,0835	+0,1252	pl^2
d	0	+0,0797	+0,1196	»
e	0	+0,0785	+0,1178	»

Momenter M_y .

	0	1	2	
c	0	0	0	pl^2
d	0	+0,0133	+0,0175	»
e	0	+0,0169	+0,0246	»

Ved Hjælp af Ligningerne Side 46—47 findes Reaktionen i Punkterne (c, 0), (d, 0) og (e, 0).

I Hjørnet optræder som Reaktion en Enkeltkraft, der ifølge Lign. (46) er $R_a = 2M_{va}$, hvor M_{va} betegner det vridende Moment pr. Længdeenhed ved Hjørnet. Ved Konstruktion (Fig. 58) findes

$$M_{va} = + 0,0225 pl^2,$$

og Hjørnereaktionen bliver altsaa $R_a = + 2 \cdot 0,0225 = + 0,045 pl^2$.

Den øvrige Del af Reaktionen beregnes pr. Længdeenhed af Understøtningen, hvorved man finder

Punkt	Reaktion
(c, 0)	$0,045 pl^2$ som Enkeltkraft, $0,348 pl$ pr. Længdeenhed.
(d, 0)	0,409 » » »
(e, 0)	0,442 » » »

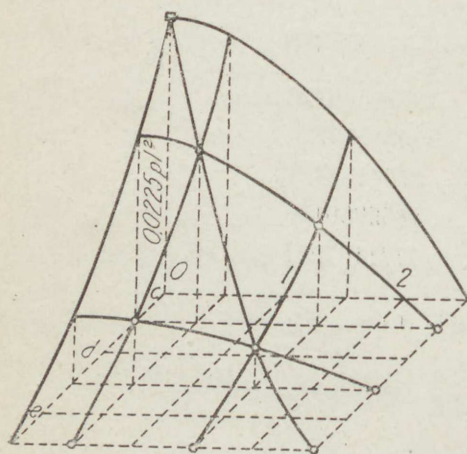


Fig. 58.

De fundne Nedbøjninger, bøjende Momenter og Reaktionen er fremstillet i Fig. 59. Det ses, at baade Nedbøjningerne og de bøjende Momenter er større ved Midten af de frie Kanter end midt i Pladen. Reaktionen pr. Længdeenhed er størst ved Midten af Understøtningen. Den aftager ud imod Pladens Hjørner,

KVADRATISK PLADE

med konstant Inertimoment.

Simpelt understøttet langs to modstående Sider.

$$\mu = 0.3.$$

Belastning p ensformig fordelt.

NEDBØJNINGER.

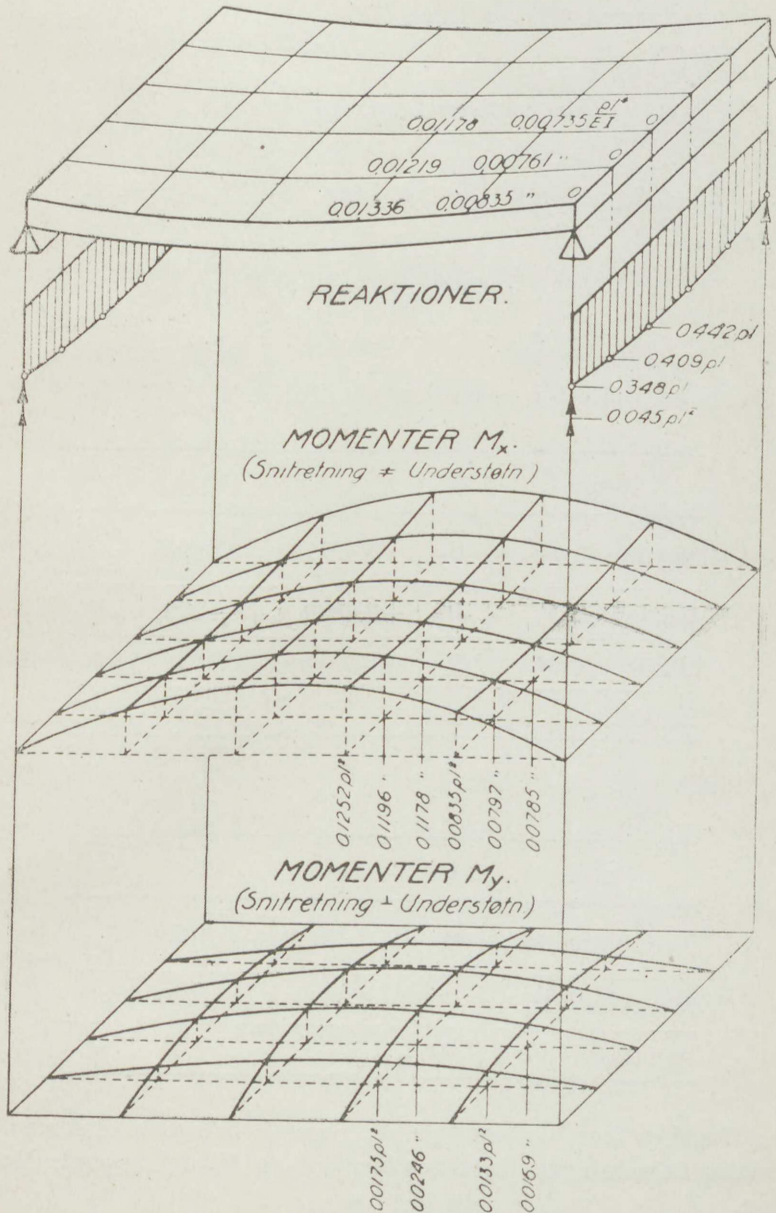


Fig. 59.

men til Gengæld vil der i Hjørnerne som Reaktioner optræde de angivne Enkeltkræfter.

Til Sammenligning beregnes Nedbøjninger, bøjende Momenter og Reaktionen for en Plade med $b = \infty$, $\mu = 0,3$, ensformig fordelt Belastning p , Spændvidde l og $\lambda = \frac{1}{3}l$ (Fig. 60).

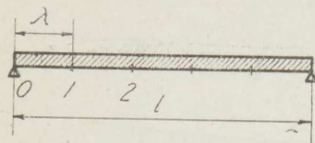


Fig. 60.

For et Punkt i Linie 1 bliver Lign. (16)

$$-2Z_1 + Z_2 = (1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}$$

og Lign. (15)

$$-2z_1 + z_2 = Z_1,$$

og for et Punkt i Linie 2 bliver Lign. (16)

$$Z_1 - Z_2 = (1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI} \quad \text{og Lign. (15)} \quad z_1 - z_2 = Z_2.$$

Heraf findes

$$z_1 = 5(1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI} = \frac{5}{6 \cdot 25} \cdot 0,91 \frac{pl^4}{EI},$$

$$z_2 = 8 \quad \gg \quad \gg = \frac{8}{6 \cdot 25} \quad \gg \quad \gg.$$

Resultaterne er angivet i nedenstaaende Tabel.

Punkt	0	1	2	
Nedbøjninger	0	0,00728	0,01165	$\frac{pl^4}{EI}$
Momenter M_x	0	+0,0800	+0,1200	pl^2
Momenter M_y	0	+0,0240	+0,0360	pl^2
Reaktion	0,5			pl

For en Plade med $\mu = 0$ faas

Punkt	0	1	2	
Nedbøjninger	0	0,00800	0,01280	$\frac{pl^4}{EI}$
Momenter M_x	0	+0,0800	+0,1200	pl^2
Reaktion	0,5			pl

Samme Værdier faas for en Bjælke, naar I betegner Bjælkens Inertimoment, p Belastningen pr. Længdeenhed og M_x det bøjende Moment i Bjælken.

Nedbøjningen midt i den kvadratiske Plade er lidt større end i en uendelig lang Plade, og Nedbøjningen ved de frie Kanter af den kvadratiske Plade er lidt større end Nedbøjningen af en Plade med $\mu = 0$.

2. Kvadratisk Plade, $\lambda = \frac{1}{3}l$. (Fig. 61).

Ligningerne til Bestemmelse af Nedbøjningerne c_1 og d_1 er

$$\begin{aligned} (c, 1) \quad & \left(\frac{7}{2} - 2\mu - \frac{1}{2}\mu^2\right)c_1 - (3 - \mu)d_1 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}, \\ (d, 1) \quad & -(3 - \mu)c_1 + 4d_1 = 1 \quad \text{»} \quad \text{»} \end{aligned}$$

For $\mu = 0,3$ faas

$$\begin{aligned} c_1 &= 940 \cdot \frac{1 - \mu^2}{826} \cdot \frac{p\lambda^4}{EI}, \\ d_1 &= 841 \quad \text{»} \quad \text{»} \end{aligned}$$

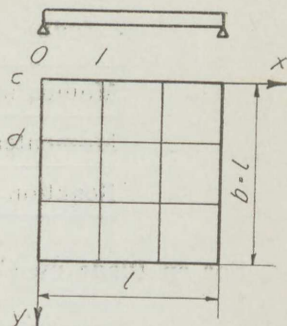


Fig. 61.

Herved bestemmes følgende Nedbøjninger og Momenter.

Nedbøjninger.

	0	1	
c	0	0,01278	$\frac{p\lambda^4}{EI}$
d	0	0,01144	»

Momenter M_v .

	0	1	
c	0,0093	0	pl^2
d	0	0	»

Momenter M_x .

	0	1	
c	0	0,1151	pl^2
d	0	0,1091	»

Momenter M_y .

	0	1	
c	0	0	pl^2
d	0	0,0206	»

Ved Konstruktion af M_v -Fladen (Fig. 62) bestemmes Hjørnereaktionen

$$R_a = 2M_{va} = 2 \cdot 0,0225pl^2 = 0,045pl^2.$$

Reaktionerne bliver

Punkt	Reaktion
(c, 0)	$\left\{ \begin{array}{l} 0,045pl^2 \text{ som Enkeltkraft,} \\ 0,354pl \text{ pr. Længdeenhed.} \end{array} \right.$
(d, 0)	$\left\{ \begin{array}{l} 0,438 \text{ »} \\ \text{»} \end{array} \right.$

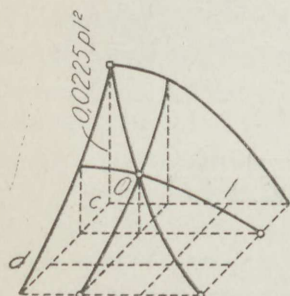


Fig. 62.

For en Plade med $b = \infty$, $\mu = 0,3$, ensformig fordelt Belastning p og Spændvidde l , findes med $\lambda = \frac{1}{3}l$

Punkt	0	1	
Nedbøjninger	0	0,01123	$\frac{pl^4}{EI}$
Momenter M_x	0	0,1111	pl^2
Momenter M_y	0	0,0333	pl^2
Reaktion	0,5		pl

For en Plade med $\mu = 0$ eller for en Bjælke faas

Punkt	0	1	
Nedbøjninger	0	0,01233	$\frac{pl^4}{EI}$
Momenter M_x	0	0,1111	pl^2
Reaktion	0,5		pl

Ved Sammenligning mellem Resultaterne for den kvadratiske Plade, beregnet med $\lambda = \frac{1}{3}l$ og med $\lambda = \frac{1}{3}l$, ses, at man i Almindelighed finder baade Nedbøjningerne, Momenterne og Reaktionen tilstrækkelig nøjagtigt med $\lambda = \frac{1}{3}l$.

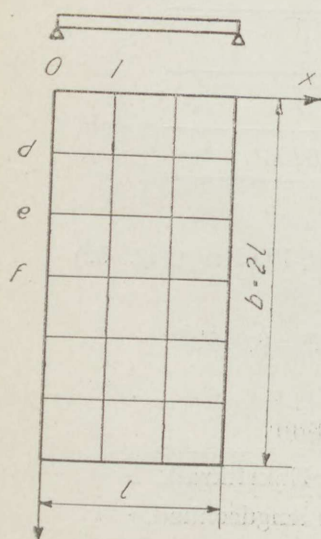


Fig. 63.

3. Rektangulær Plade, $b=2l$, $\lambda = \frac{1}{3}l$ (Fig. 63).
Nedbøjningerne bestemmes af Ligningerne

$$\begin{aligned}
 (c, 1) & \left(\frac{7}{2} - 2\mu - \frac{1}{2}\mu^2 \right) c_1 - (4 - \mu) d_1 + e_1 = \frac{1}{2} (1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}, \\
 (d, 1) & -(4 - \mu) c_1 + 10 d_1 - 6 e_1 + f_1 = 1 \quad \gg \gg, \\
 (e, 1) & c_1 - 6 d_1 + 12 e_1 - 6 f_1 = 1 \quad \gg \gg, \\
 (f, 1) & 2 d_1 - 12 e_1 + 11 f_1 = 1 \quad \gg \gg.
 \end{aligned}$$

For $\mu = 0,3$ faas

$$c_1 = 45660 \frac{1 - \mu^2}{39522} \frac{p\lambda^4}{EI},$$

$$d_1 = 40509 \quad \gg \quad \gg,$$

$$e_1 = 39285 \quad \gg \quad \gg,$$

$$f_1 = 39084 \quad \gg \quad \gg.$$

Nedbøjninger.

	0	1	
<i>c</i>	0	0,01298	$\frac{pl^4}{EI}$
<i>d</i>	0	0,01152	»
<i>e</i>	0	0,01117	»
<i>f</i>	0	0,01111	»

Momenter M_v .

	0	1	
<i>c</i>			
<i>d</i>	0,0101	0	pl^2
<i>e</i>	0,0024	0	»
<i>f</i>	0,0004	0	»
	-0,0004	0	»

Momenter M_x .

	0	1	
<i>c</i>	0	0,1168	pl^2
<i>d</i>	0	0,1106	»
<i>e</i>	0	0,1096	»
<i>f</i>	0	0,1095	»

Momenter M_y .

	0	1	
<i>c</i>	0	0	pl^2
<i>d</i>	0	0,0231	»
<i>e</i>	0	0,0303	»
<i>f</i>	0	0,0319	»

Ved Konstruktion af M_v -Fladen (Fig. 64) findes Hjørnereaktionen

$$R_a = 2M_{va} = 2 \cdot 0,024 pl^2 = 0,048 pl^2.$$

Reaktionerne bliver

Punkt	Reaktion
$(c, 0)$	$\begin{cases} 0,048 pl^2 & \text{som Enkeltkraft,} \\ 0,351 pl & \text{pr. Længdeenhed.} \end{cases}$
$(d, 0)$	0,452 » »
$(e, 0)$	0,483 » »
$(f, 0)$	0,491 » »

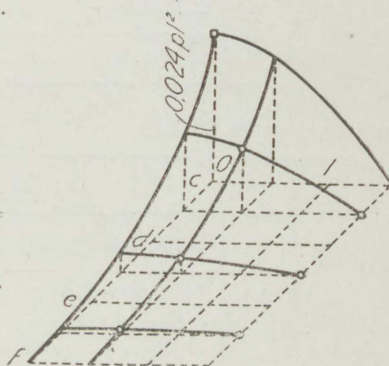


Fig. 64.

Ved $(f, 1)$ er Nedbøjningen ca. 1 %, M_x ca. 1,5 % og M_y ca. 4 % mindre end for en Plade med $b = \infty$ (Side 148). Ved $(f, 0)$ er Reaktionen ca. 2 % mindre end for en Plade med $b = \infty$. Naar Pladens Bredde b er mindst dobbelt saa stor som dens Spændvidde l , kan man derfor ved Beregning af Nedbøjninger, Momenter og Reaktioner for den Del af Pladen, hvis Afstand fra de frie Kanter er lig med eller større end Spændvidden, med tilstrækkelig Tilnærmelse regne som for en Plade med $b = \infty$.

Hjørnereaktionen og det bøjende Moment M_x langs de frie Kanter findes lidt større for Pladen med $b = 2l$ end for den kvadratiske Plade.

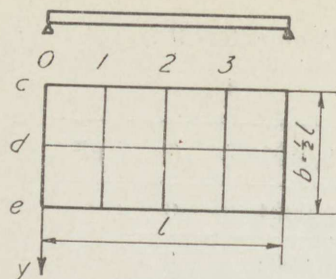


Fig. 65.

4. Rektangulær Plade, $b = \frac{1}{2}l$, $\lambda = \frac{1}{4}l$,
(Fig. 65).

Punkterne (d, 1) og (d, 2) ligger i næst-yderste Række baade fra Linie c og fra Linie e. Paa lignende Maade som ved Opstillingen af Ligningerne (43) og (44) har man

$$\begin{aligned} \text{for Punkt (d, 1)} \quad \frac{\Delta^4 z}{\Delta y^4} \lambda^4 &= \begin{cases} -\mu c_0 - (2-2\mu)c_1 - \mu c_2 \\ \quad + 4d_1 \\ -\mu e_0 - (2-2\mu)e_1 - \mu e_2, \end{cases} \\ \text{og} \\ \text{for Punkt (d, 2)} \quad \frac{\Delta^4 z}{\Delta y^4} \lambda^4 &= \begin{cases} -\mu c_1 - (2-2\mu)c_2 - \mu c_3 \\ \quad + 4d_2 \\ -\mu e_1 - (2-2\mu)e_2 - \mu e_3. \end{cases} \end{aligned}$$

Indsættes disse Udtryk i Lign. 13, faas for Punkt (d, 1)

	0	1	2	1
c	$+(2-2\mu)$	$-(6-2\mu)$	$+(2-\mu)$	
d	$-(6-2\mu)$	$+17$	-8	$+1$
e	$+(2-2\mu)$	$-(6-2\mu)$	$+(2-\mu)$	

$$= (1-\mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI},$$

og for Punkt (d, 2)

	0	1	2	1	0
c		$+(2-\mu)$	$-(6-2\mu)$	$+(2-\mu)$	
d	$+1$	-8	$+18$	-8	$+1$
e		$+(2-\mu)$	$-(6-2\mu)$	$+(2-\mu)$	

$$= (1-\mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}.$$

Ligningerne til Bestemmelse af Nedbøjningerne bliver da

$$\begin{aligned} (c, 1) \quad & (9-4\mu-3\mu^2)c_1 - (4-2\mu-2\mu^2)c_2 - (6-2\mu)d_1 + (2-\mu)d_2 = \frac{1}{2}(1-\mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}, \\ (c, 2) \quad & -(8-4\mu-4\mu^2)c_1 + (9-4\mu-3\mu^2)c_2 + (4-2\mu)d_1 - (6-2\mu)d_2 = \frac{1}{2} \gg \gg, \\ (d, 1) \quad & -(12-4\mu)c_1 + (4-2\mu)c_2 + 18d_1 - 8d_2 = 1 \gg \gg, \\ (d, 2) \quad & (8-4\mu)c_1 - (12-4\mu)c_2 - 16d_1 + 18d_2 = 1 \gg \gg. \end{aligned}$$

For $\mu = 0,3$ faas

$$\begin{aligned} c_1 &= 601860 \frac{1-\mu^2}{215796} \frac{p\lambda^4}{EI}, \\ c_2 &= 842520 \gg \gg, \\ d_1 &= 566850 \gg \gg, \\ d_2 &= 793998 \gg \gg. \end{aligned}$$

Nedbøjninger.

	0	1	2	
c	0	0,00991	0,01388	$\frac{pl^4}{EI}$
d	0	0,00934	0,01307	»

Momenter M_v .

	0	1	2	
c				
d	0,0071	0,0027	pl^2	

Momenter M_x .

	0	1	2	
c	0	0,0953	0,1268	pl^2
d	0	0,0922	0,1232	»

Momenter M_y .

	0	1	2	
c	0	0	0	pl^2
d	0	0,0092	0,0114	»

Ligningerne til Bestemmelse af Reaktionerne er

$$\begin{aligned} (c, 0) & -(3-2\mu-\mu^2)c_1 + (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu^2)c_2 + (2-2\mu)d_1 = (1-\mu^2)(\frac{1}{4}p\lambda^2-R)\frac{\lambda^2}{EI}, \\ (d, 0) & (4-2\mu)c_1 - (6-2\mu)d_1 + d_2 = \text{»} \quad (\frac{1}{2}p\lambda^2-R) \text{»} \end{aligned}$$

Ved Konstruktion af M_v -Fladen (Fig. 66) findes Hjørnereaktionen

$$R_a = 2M_{va} = 2 \cdot 0,018 pl^2 = 0,036 pl^2.$$

Den øvrige Del af Reaktionen udtrykkes pr. Længdeenhed af Understøtningen, hvorved man finder

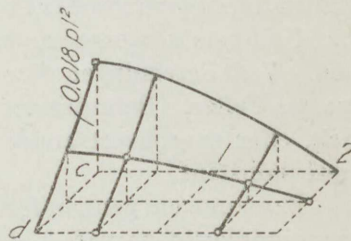


Fig. 66.

Punkt	Reaktion
$(c, 0)$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,036 pl^2 \text{ som Enkeltkraft,} \\ 0,331 pl \text{ pr. Længdeenhed.} \end{array} \right.$
$(d, 0)$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,381 \text{ » » »} \end{array} \right.$

For en Plade med $\mu = 0$ eller for en Bjælke (ensformig fordelt Belastning p , Spændvidde l , $\lambda = \frac{1}{4}l$) faas

Punkt	0	1	2	
Nedbøjninger	0	0,00977	0,01368	$\frac{pl^4}{EI}$
Momenter M_x	0	0,0938	0,1250	pl^2
Reaktion	0,5			pl

Naar Pladens Spændvidde l er dobbelt saa stor som dens Bredde b , bliver Nedbøjningen langs de frie Kanter ca. 1,5 % større end for en

Bjælke med samme l , p , E og I . I et Snit parallelt med de frie Kanter gennem Midten af Pladen bliver Nedbøjningen ca. 4 % mindre end for Bjælken. De bøjende Momenter i et Snit parallelt med Understøtningerne bliver ved Kanten af Snittet ca. 1,5 % større og i Midten af Snittet ca. 1,5 % mindre end Momentet i en Bjælke med samme l og p . Man kan altsaa for Nedbøjningernes og Momenternes Vedkommende med tilstrækkelig Tilnærmelse regne som for en Bjælke, naar Spændvidden er mindst dobbelt saa stor som Pladebredden.

Reaktionen pr. Længdeenhed er, som sædvanligt ved Plader, der er simpelt understøttede langs to modstaaende Sider, størst ved Midten af Understøtningen og aftagende ud imod Hjørnerne, hvor der tillige optræder Enkeltkræfter.

§ 23. Plade, simpelt understøttet i den ene Retning og kontinuerlig i den anden.

I det følgende skal behandles en Plade, som er simpelt understøttet langs to parallelle lange Sider og kontinuerlig over Understøtninger, beliggende vinkelret paa de lange Sider, saaledes at Pladen ved disse Understøtninger inddeles i lige store kvadratiske eller rektangulære Felter.

Understøtningerne antages at hindre Pladen i at bøje sig op og ned. Ved Beregningen forudsættes Pladen at strække sig over uendelig mange Felter. Belastningen p er ensformig fordelt, enten over hvert Felt, eller over hvert andet Felt. Pladens Inertimoment forudsættes at være konstant.

Beregningen gennemføres ved Hjælp af Ligningerne Side 46—47. Da man imidlertid herved finder de negative Momenter over Understøtningerne lidt for smaa, udføres for Belastningen p over alle Felter en nøjagtigere Bestemmelse af disse Momenter ved Anvendelse af Lign. (77).

1. Kvadratiske Felter, $\lambda = \frac{1}{2} l$.

a. Belastning p ensformig fordelt over alle Felter (Fig. 67).

Ligningerne til Bestemmelse af Nedbøjningerne er:

$$\begin{array}{llll}
 (d, 1) & 20d_1 - 8d_2 + d_3 - 8e_1 + 2e_2 & + f_1 & = 1 \cdot (1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}, \\
 (d, 2) & -8d_1 + 20d_2 - 8d_3 + 2e_1 - 8e_2 + 2e_3 & + f_2 & = 1 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 (d, 3) & 2d_1 - 16d_2 + 19d_3 & + 4e_2 - 8e_3 & + f_3 = 1 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 (e, 1) & -8d_1 + 2d_2 & + 22e_1 - 8e_2 + e_3 - 8f_1 + 2f_2 & = 1 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 (e, 2) & 2d_1 - 8d_2 + 2d_3 - 8e_1 + 22e_2 - 8e_3 + 2f_1 - 8f_2 + 2f_3 & = 1 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 (e, 3) & 4d_2 - 8d_3 + 2e_1 - 16e_2 + 21e_3 & + 4f_2 - 8f_3 & = 1 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 (f, 1) & 2d_1 & - 16e_1 + 4e_2 & + 21f_1 - 8f_2 + f_3 = 1 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 (f, 2) & & 2d_2 & + 4e_1 - 16e_2 + 4e_3 - 8f_1 + 21f_2 - 8f_3 = 1 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 (f, 3) & & 2d_3 & + 8e_2 - 16e_3 + 2f_1 - 16f_2 + 20f_3 = 1 \quad \text{»} \quad \text{»}.
 \end{array}$$

Heraf findes

	1	2	3	
<i>d</i>	312300287	649978732	782707185	$\frac{1-\mu^2}{509913612} \frac{p\lambda^4}{EI}$
<i>e</i>	500861088	1063162620	1286829180	» »
<i>f</i>	561594007	1200319172	1455519195	» »

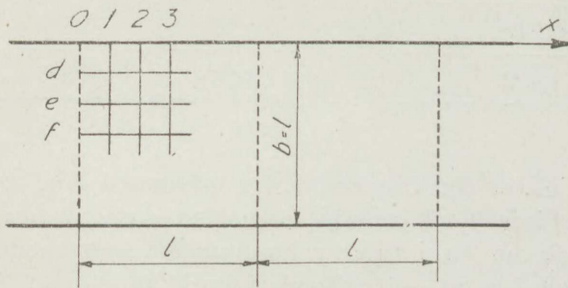


Fig. 67.

Nedbøjninger.

	0	1	2	3	
<i>c</i>	0	0	0	0	
<i>d</i>	0	0,00047	0,00098	0,00118	$(1-\mu^2) \frac{pl^4}{EI}$
<i>e</i>	0	0,00076	0,00161	0,00195	» »
<i>f</i>	0	0,00085	0,00182	0,00220	» »

Momenter M_x .

	0	1	2	3	
<i>c</i>	0	0	0	0	
<i>d</i>	-0,0340	-0,0014 + $\mu \cdot 0,0067$	0,0112 + $\mu \cdot 0,0129$	0,0145 + $\mu \cdot 0,0152$	pl^2
<i>e</i>	-0,0546	-0,0033 + $\mu \cdot 0,0070$	0,0185 + $\mu \cdot 0,0150$	0,0244 + $\mu \cdot 0,0183$	»
<i>f</i>	-0,0612	-0,0042 + $\mu \cdot 0,0066$	0,0209 + $\mu \cdot 0,0150$	0,0278 + $\mu \cdot 0,0184$	»

Momenter M_y .

	0	1	2	3	
<i>c</i>	0	0	0	0	
<i>d</i>	$-\mu \cdot 0,0340$	0,0067 - $\mu \cdot 0,0014$	0,0129 + $\mu \cdot 0,0112$	0,0152 + $\mu \cdot 0,0145$	pl^2
<i>e</i>	$-\mu \cdot 0,0546$	0,0070 - $\mu \cdot 0,0033$	0,0150 + $\mu \cdot 0,0185$	0,0183 + $\mu \cdot 0,0244$	»
<i>f</i>	$-\mu \cdot 0,0612$	0,0066 - $\mu \cdot 0,0042$	0,0150 + $\mu \cdot 0,0209$	0,0184 + $\mu \cdot 0,0278$	»

Reaktioner.

Linie 0.

Punkt	Reaktion	
(c, 0)	0	
(d, 0)	0,721	pl
(e, 0)	0,949	»
(f, 0)	1,009	»

Linie c.

Punkt	Reaktion	
(c, 0)	$-(0,325 - \mu \cdot 0,204)$	pl
(c, 1)	$(0,107 + \mu \cdot 0,008)$	»
(c, 2)	$(0,295 - \mu \cdot 0,067)$	»
(c, 3)	$(0,347 - \mu \cdot 0,086)$	»

I Linie 0 bliver Reaktionen pr. Længdeenhed Nul ved Punkt (c, 0). Reaktionen i Linie 0 vil nemlig være den samme som for en Plade, der strækker sig ud forbi Linie c kontinuerlig over uendelig mange Fag og belastes med $+p$ og $-p$ skiftevis i hvert andet Fag. For en saadan Plade skifter Reaktionen i Linie 0 Fortegn i Punkt (c, 0). Den ved Lign. (35) bestemte Reaktion i Punkt (c, 0) er derfor beregnet pr. Længdeenhed i Linie c.

- b. Belastningen p ensformig fordelt over hvert andet Felt (Fig. 68).

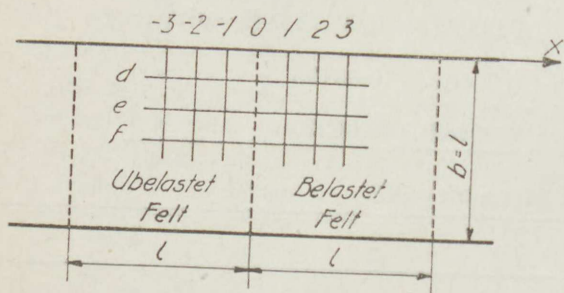


Fig. 68.

Belastningen p i hvert andet Felt kan tænkes fremkommen ved først at anbringe Belastningen $\frac{1}{2}p$ over alle Felter og dernæst anbringe Belastningen $+\frac{1}{2}p$ og $-\frac{1}{2}p$ skiftevis i hvert andet Felt. I Stedet for Belastningen $\frac{1}{2}p$ kan man regne med Belastningen p og halvere Resultaterne.

Belastningen $+p$ og $-p$ skiftevis i hvert andet Felt vil give $\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} = 0$ over Understøtningen i Linie 0. I et Felt, som paavirkes af Belastningen $+p$ kan Nedbøjningerne da bestemmes ved de samme Ligninger, som anvendes til Bestemmelse af Nedbøjningen i en kvadratisk Plade, der er simpelt understøttet langs alle fire Sider. Nedbøjningerne og Momenterne samt Reaktionen langs Linie c findes derfor som for denne Plade. Reaktionen langs Linie 0 bliver Nul. I § 7 er Resultaterne beregnet for en kvadratisk Plade, simpelt understøttet langs alle fire Sider. De fundne Resultater for Belastningen p over alle Felter og for Belastningen skiftevis $+p$ og $-p$ adderes og halveres, hvorved findes

Nedbøjninger.

	-3	-2	-1	0	1	2	3	
<i>c</i>	0	0	0	0	0	0	0	
<i>d</i>	-0,00047	-0,00044	-0,00032	0	0,00079	0,00142	0,00165	$(1-\mu^2)\frac{pl^4}{EI}$
<i>e</i>	-0,00080	-0,00075	-0,00055	0	0,00131	0,00236	0,00275	» »
<i>f</i>	-0,00093	-0,00087	-0,00063	0	0,00148	0,00269	0,00313	» »

 M_x i ubelastet Felt.

	-3	-2	-1	0	
<i>c</i>	0	0	0	0	
<i>d</i>	$-0,0020-\mu \cdot 0,0045$	$-0,0032-\mu \cdot 0,0043$	$-0,0073-\mu \cdot 0,0033$	-0,0170	pl^2
<i>e</i>	$-0,0036-\mu \cdot 0,0077$	$-0,0055-\mu \cdot 0,0073$	$-0,0124-\mu \cdot 0,0053$	-0,0273	»
<i>f</i>	$-0,0041-\mu \cdot 0,0088$	$-0,0064-\mu \cdot 0,0083$	$-0,0142-\mu \cdot 0,0060$	-0,0306	»

 M_x i belastet Felt.

	0	1	2	3	
<i>c</i>	0	0	0	0	
<i>d</i>	-0,0170	$0,0059+\mu \cdot 0,0100$	$0,0144+\mu \cdot 0,0172$	$0,0165+\mu \cdot 0,0197$	pl^2
<i>e</i>	-0,0273	$0,0091+\mu \cdot 0,0123$	$0,0240+\mu \cdot 0,0223$	$0,0280+\mu \cdot 0,0260$	»
<i>f</i>	-0,0306	$0,0100+\mu \cdot 0,0126$	$0,0273+\mu \cdot 0,0233$	$0,0319+\mu \cdot 0,0272$	»

 M_y i ubelastet Felt.

	-3	-2	-1	0	
<i>c</i>	0	0	0	0	
<i>d</i>	$-0,0045-\mu \cdot 0,0020$	$-0,0043-\mu \cdot 0,0032$	$-0,0033-\mu \cdot 0,0073$	$-\mu \cdot 0,0170$	pl^2
<i>e</i>	$-0,0077-\mu \cdot 0,0036$	$-0,0073-\mu \cdot 0,0055$	$-0,0053-\mu \cdot 0,0124$	$-\mu \cdot 0,0273$	»
<i>f</i>	$-0,0088-\mu \cdot 0,0041$	$-0,0083-\mu \cdot 0,0064$	$-0,0060-\mu \cdot 0,0142$	$-\mu \cdot 0,0306$	»

M_y i belastet Felt.

	0	1	2	3	
c	0	0	0	0	
d	$-\mu \cdot 0,0170$	$0,0100 + \mu \cdot 0,0059$	$0,0172 + \mu \cdot 0,0144$	$0,0197 + \mu \cdot 0,0165$	pl^2
e	$-\mu \cdot 0,0273$	$0,0123 + \mu \cdot 0,0091$	$0,0223 + \mu \cdot 0,0240$	$0,0260 + \mu \cdot 0,0280$	»
f	$-\mu \cdot 0,0306$	$0,0126 + \mu \cdot 0,0100$	$0,0233 + \mu \cdot 0,0273$	$0,0272 + \mu \cdot 0,0319$	»

Linie 0.

Punkt	Reaktion	
$(c, 0)$	0	
$(d, 0)$	0,361	pl
$(e, 0)$	0,474	»
$(f, 0)$	0,504	»

Reaktioner.

Linie c.

Punkt	Reaktion	
$(c, -3)$	$-(0,052 - \mu \cdot 0,012)$	pl
$(c, -2)$	$-(0,064 - \mu \cdot 0,019)$	»
$(c, -1)$	$-(0,107 - \mu \cdot 0,044)$	»
$(c, 0)$	$-(0,162 - \mu \cdot 0,102)$	»
$(c, 1)$	$(0,214 - \mu \cdot 0,035)$	»
$(c, 2)$	$(0,358 - \mu \cdot 0,086)$	»
$(c, 3)$	$(0,399 - \mu \cdot 0,099)$	»

c. Beregning af de negative bøjende Momenter ved Anvendelse af Lign. (77).

Anvendes ved Belastningen p over alle Felter Lign. (77) for Punkterne $(d, 0)$, $(e, 0)$ og $(f, 0)$ (Fig. 67), har man for Punkterne $(d, 1)$, $(e, 1)$ og $(f, 1)$ følgende Ligninger

$$\begin{aligned}
 (d, 1) \quad & 22d_1 - 8,5d_2 + d_3 - 8e_1 + 2e_2 + f_1 = 1 \cdot (1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}, \\
 (e, 1) \quad & -8d_1 + 2d_2 + 24e_1 - 8,5e_2 + e_3 - 8f_1 + 2f_2 = 1 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 (f, 1) \quad & 2d_1 - 16e_1 + 4e_2 + 23f_1 - 8,5f_2 + f_3 = 1 \quad \text{»} \quad \text{»}.
 \end{aligned}$$

De øvrige Ligninger (Side 152) bliver uforandrede. Herved findes

	1	2	3	
d	1146136709	2583249126	3162894001	$\frac{1 - \mu^2}{2312804146} \frac{p\lambda^4}{EI}$
e	1816338060	4197787040	5171231634	»
f	2027650518	4727224238	5836235637	»

hvoraf ved Lign. (77)

$$M_{x(d,0)} = -0,0396 pl^2,$$

$$M_{x(e,0)} = -0,0621 \gg,$$

$$M_{x(f,0)} = -0,0690 \gg.$$

For Belastningen p over alle Felter findes altsaa med $\mu = 0,3$ de bøjende Momenter over Midten af Understøtningen i Linie 0 og midt i Feltet (Fig. 67):

$$M_{x(f,0)} = -0,0690 pl^2, \quad M_{x(f,3)} = +0,0333 pl^2, \quad M_{y(f,3)} = +0,0267 pl^2.$$

De tilsvarende Momenter finder Dr. Árpád Nádai*)

$$M_{x(f,0)} = -0,0698 pl^2, \quad M_{x(f,3)} = +0,0334 pl^2, \quad M_{y(f,3)} = +0,0239 pl^2.$$

2. Rektangulære Felter, $b = \frac{2}{3}l$, $\lambda = \frac{1}{6}L$.

a. Belastning p ensformig fordelt over alle Felter (Fig. 69).

Ligningerne til Bestemmelse af Nedbøjningerne er:

$$(d, 1) \quad 21d_1 - 8d_2 + d_3 - 8e_1 + 2e_2 = 1 \cdot (1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI},$$

$$(d, 2) \quad -8d_1 + 21d_2 - 8d_3 + 2e_1 - 8e_2 + 2e_3 = 1 \gg \gg,$$

$$(d, 3) \quad 2d_1 - 16d_2 + 20d_3 + 4e_2 - 8e_3 = 1 \gg \gg,$$

$$(e, 1) \quad -16d_1 + 4d_2 + 21e_1 - 8e_2 + e_3 = 1 \gg \gg,$$

$$(e, 2) \quad 4d_1 - 16d_2 + 4d_3 - 8e_1 + 21e_2 - 8e_3 = 1 \gg \gg,$$

$$(e, 3) \quad 8d_2 - 16d_3 + 2e_1 - 16e_2 + 20e_3 = 1 \gg \gg.$$

Heraf findes

	1	2	3	
d	529975117	1036141778	1223144489	$\frac{1-\mu^2}{1128781822} \frac{p\lambda^4}{EI}$
e	724256029	1429671166	1691809301	$\gg \gg$

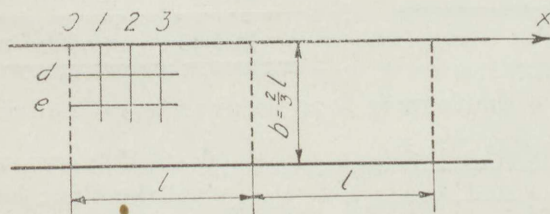


Fig. 69.

*) Árpád Nádai, Die Formänderungen und die Spannungen von rechteckigen elastischen Platten, Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft. 170 und 171, Berlin, 1915, Side 86.

Nedbøjninger.

	0	1	2	3	
<i>c</i>	0	0	0	0	
<i>d</i>	0	0,00036 0,00183	0,00071 0,00358	0,00084 0,00424	$(1-\mu^2) \frac{p}{EI} l^4$ » » b^4
<i>e</i>	0	0,00050 0,00251	0,00098 0,00495	0,00116 0,00585	» » l^4 » » b^4

Momenter M_x .

	0	1	2	3	
<i>c</i>	0	0	0	0	
<i>d</i>	-0,0261	$0,0006 + \mu \cdot 0,0083$	$0,0079 + \mu \cdot 0,0158$	$0,0092 + \mu \cdot 0,0186$	pl^2
<i>e</i>	-0,0357	$0,0005 + \mu \cdot 0,0096$	$0,0109 + \mu \cdot 0,0194$	$0,0129 + \mu \cdot 0,0231$	»

Momenter M_y .

	0	1	2	3	
<i>c</i>	0	0	0	0	
<i>d</i>	$-\mu \cdot 0,0587$	$0,0186 + \mu \cdot 0,0013$	$0,0356 + \mu \cdot 0,0177$	$0,0418 + \mu \cdot 0,0207$	pb^2
<i>e</i>	$-\mu \cdot 0,0801$	$0,0215 + \mu \cdot 0,0010$	$0,0436 + \mu \cdot 0,0245$	$0,0519 + \mu \cdot 0,0290$	»

Reaktioner.

Linie 0

Punkt	Reaktion	
(<i>c</i> , 0)	0	
(<i>d</i> , 0)	0,685	pl
(<i>e</i> , 0)	0,830	»

Linie *c*

Punkt	Reaktion	
(<i>c</i> , 0)	$-(0,345 - \mu \cdot 0,235)$	pb
(<i>c</i> , 1)	$(0,210 - \mu \cdot 0,005)$	»
(<i>c</i> , 2)	$(0,409 - \mu \cdot 0,071)$	»
(<i>c</i> , 3)	$(0,458 - \mu \cdot 0,083)$	»

b. Belastning p ensformig fordelt over hvert andet Felt (Fig. 70).



Fig. 70.

Ligesom ved den kvadratiske Plade bestemmes først Nedbøjningerne, Momenterne og Reaktionen langs Linie *c* for Pladen belastet med $+p$ og $-p$ skiftevis i hvert andet Felt. Man an-

vender til Beregningen af Nedbøjningerne i et Felt belastet med $+p$ lettest Ligningerne (15) og (16). Lign. (16) giver:

$$\begin{aligned}
 (d, 1) \quad & -4D_1 + D_2 + E_1 = 1 \cdot (1-\mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}, \\
 (d, 2) \quad & D_1 - 4D_2 + D_3 + E_2 = 1 \quad \gg \quad \gg, \\
 (d, 3) \quad & 2D_2 - 4D_3 + E_3 = 1 \quad \gg \quad \gg, \\
 (e, 1) \quad & 2D_1 - 4E_1 + E_2 = 1 \quad \gg \quad \gg, \\
 (e, 2) \quad & 2D_2 + E_1 - 4E_2 + E_3 = 1 \quad \gg \quad \gg, \\
 (e, 3) \quad & 2D_3 + 2E_2 - 4E_3 = 1 \quad \gg \quad \gg.
 \end{aligned}$$

Af Lign. (15) faas:

$$\begin{aligned}
 (d, 1) \quad & -4d_1 + d_2 + e_1 = D_1, \\
 (d, 2) \quad & d_1 - 4d_2 + d_3 + e_2 = D_2, \\
 (d, 3) \quad & 2d_2 - 4d_3 + e_3 = D_3, \\
 (e, 1) \quad & 2d_1 - 4e_1 + e_2 = E_1, \\
 (e, 2) \quad & 2d_2 + e_1 - 4e_2 + e_3 = E_2, \\
 (e, 3) \quad & 2d_3 + 2e_2 - 4e_3 = E_3.
 \end{aligned}$$

Heraf findes

	1	2	3	
d	1441262	2341220	2637890	$\frac{1-\mu^2}{1844164} \frac{p\lambda^4}{EI}$
e	1993854	3251444	3667802	$\gg \quad \gg$

De herved bestemte Værdier af Nedbøjninger, bøjende Momenter og Reaktionen for et Felt med Belastningen $+p$ bliver

Nedbøjninger.

	0	1	2	3	
c	0	0	0	0	
d	0	0,00060	0,00098	0,00110	$(1-\mu^2) \frac{P}{EI} l^4$
		0,00306	0,00496	0,00558	$\gg \quad \gg \quad b^4$
e	0	0,00083	0,00136	0,00153	$\gg \quad \gg \quad l^4$
		0,00422	0,00689	0,00777	$\gg \quad \gg \quad b^4$

Momenter M_x .

	0	1	2	3	
<i>c</i>	0	0	0	0	
<i>d</i>	0	$0,0082 + \mu \cdot 0,0134$	$0,0091 + \mu \cdot 0,0216$	$0,0090 + \mu \cdot 0,0242$	pl^2
<i>e</i>	0	$0,0111 + \mu \cdot 0,0167$	$0,0127 + \mu \cdot 0,0274$	$0,0126 + \mu \cdot 0,0310$	»

Momenter M_y .

	0	1	2	3	
<i>c</i>	0	0	0	0	
<i>d</i>	0	$0,0301 + \mu \cdot 0,0183$	$0,0485 + \mu \cdot 0,0204$	$0,0545 + \mu \cdot 0,0201$	pb^2
<i>e</i>	0	$0,0375 + \mu \cdot 0,0250$	$0,0618 + \mu \cdot 0,0285$	$0,0698 + \mu \cdot 0,0282$	»

Reaktioner i Linie *c*.

Punkt	Reaktion	
(<i>c</i> , 0)	0	
(<i>c</i> , 1)	$(0,392 - \mu \cdot 0,073)$	pb
(<i>c</i> , 2)	$(0,482 - \mu \cdot 0,082)$	»
(<i>c</i> , 3)	$(0,504 - \mu \cdot 0,081)$	»

For et Felt med Belastningen $-p$ har Nedbøjninger, Momenter og og Reaktioner samme Størrelse som i et Felt med Belastningen $+p$, men med modsat Fortegn.

De fundne Resultater for Belastningen p over alle Felter og for Belastningen skiftevis $+p$ og $-p$ adderes og halveres, hvorved findes (Fig. 70):

Nedbøjninger.

	-3	-2	-1	0	1	2	3	
<i>c</i>	0	0	0	0	0	0	0	
<i>d</i>	-0,00013	-0,00014	-0,00012	0	0,00048	0,00085	0,00097	$(1-\mu^2) \frac{p}{EI} l^4$
	-0,00067	-0,00069	-0,00062	0	0,00245	0,00427	0,00491	» » b^4
<i>e</i>	-0,00019	-0,00019	-0,00017	0	0,00037	0,00117	0,00135	» » l^4
	-0,00096	-0,00097	-0,00086	0	0,00367	0,00592	0,00681	» » b^4

M_x i ubelastet Felt.

	-3	-2	-1	0	
<i>c</i>	0	0	0	0	
<i>d</i>	$+0,0001 - \mu \cdot 0,0028$	$-0,0006 - \mu \cdot 0,0029$	$-0,0038 - \mu \cdot 0,0026$	$-0,0131$	pl^2
<i>e</i>	$+0,0002 - \mu \cdot 0,0040$	$-0,0009 - \mu \cdot 0,0040$	$-0,0053 - \mu \cdot 0,0036$	$-0,0179$	»

 M_x i belastet Felt.

	0	1	2	3	
<i>c</i>	0	0	0	0	
<i>d</i>	$-0,0131$	$0,0044 + \mu \cdot 0,0109$	$0,0085 + \mu \cdot 0,0187$	$0,0091 + \mu \cdot 0,0214$	pl^2
<i>e</i>	$-0,0179$	$0,0058 + \mu \cdot 0,0132$	$0,0118 + \mu \cdot 0,0234$	$0,0128 + \mu \cdot 0,0271$	»

 M_y i ubelastet Felt.

	-3	-2	-1	0	
<i>c</i>	0	0	0	0	
<i>d</i>	$-0,0064 + \mu \cdot 0,0003$	$-0,0065 - \mu \cdot 0,0014$	$-0,0058 - \mu \cdot 0,0085$	$-\mu \cdot 0,0294$	pb^2
<i>e</i>	$-0,0090 + \mu \cdot 0,0004$	$-0,0091 - \mu \cdot 0,0020$	$-0,0080 - \mu \cdot 0,0120$	$-\mu \cdot 0,0401$	»

 M_y i belastet Felt.

	0	1	2	3	
<i>c</i>	0	0	0	0	
<i>d</i>	$-\mu \cdot 0,0294$	$0,0244 + \mu \cdot 0,0098$	$0,0421 + \mu \cdot 0,0191$	$0,0482 + \mu \cdot 0,0204$	pb^2
<i>e</i>	$-\mu \cdot 0,0401$	$0,0295 + \mu \cdot 0,0130$	$0,0527 + \mu \cdot 0,0265$	$0,0609 + \mu \cdot 0,0286$	»

Reaktioner.

Linie 0

Punkt	Reaktion	
(<i>c</i> , 0)	0	
(<i>d</i> , 0)	0,343	pl
(<i>e</i> , 0)	0,415	»

Linie *c*

Punkt	Reaktion	
(<i>c</i> , -3)	$-(0,023 + \mu \cdot 0,001)$	pb
(<i>c</i> , -2)	$-(0,037 - \mu \cdot 0,005)$	»
(<i>c</i> , -1)	$-(0,091 - \mu \cdot 0,034)$	»
(<i>c</i> , 0)	$-(0,173 - \mu \cdot 0,118)$	»
(<i>c</i> , 1)	$(0,301 - \mu \cdot 0,039)$	»
(<i>c</i> , 2)	$(0,446 - \mu \cdot 0,076)$	»
(<i>c</i> , 3)	$(0,481 - \mu \cdot 0,082)$	»

c. Beregning af de negative bøjende Momenter ved Anvendelse af Lign. (77).

For Punkterne $(d, 1)$ og $(e, 1)$ (Fig. 69) bliver Ligningerne

$$\begin{aligned} (d, 1) \quad 23d_1 - 8,5d_2 + d_3 - 8e_1 + 2e_2 &= 1 \cdot (1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}, \\ (e, 1) \quad -16d_1 + 4d_2 + 23e_1 - 8,5e_2 + e_3 &= 1 \quad \gg \quad \gg \end{aligned}$$

De øvrige Ligninger (Side 157) bliver uforandrede. Herved findes

	1	2	3	
d	902397	1903848	2284259	$\frac{1 - \mu^2}{2280142} \frac{p\lambda^4}{EI}$
e	1227399	2621326	3154196	» »

hvoraf ved Lign. (77)

$$M_{x(d, 0)} = -0,0324 p l^2,$$

$$M_{x(e, 0)} = -0,0438 \gg.$$

3. Rektangulære Felter, $b = 1,5l$, $\lambda = \frac{1}{4}l$.

a. Belastning p ensformig fordelt over alle Felter (Fig. 71).

Ligningerne til Bestemmelse af Nedbøjningerne er

$$\begin{aligned} (d, 1) \quad 21d_1 - 8d_2 - 8e_1 + 2e_2 + f_1 &= 1 \cdot (1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}, \\ (d, 2) \quad -16d_1 + 19d_2 + 4e_1 - 8e_2 + f_2 &= 1 \quad \gg \quad \gg, \\ (e, 1) \quad -8d_1 + 2d_2 + 23e_1 - 8e_2 - 8f_1 + 2f_2 &= 1 \quad \gg \quad \gg, \\ (e, 2) \quad 4d_1 - 8d_2 - 16e_1 + 21e_2 + 4f_1 - 8f_2 &= 1 \quad \gg \quad \gg, \\ (f, 1) \quad 2d_1 - 16e_1 + 4e_2 + 22f_1 - 8f_2 &= 1 \quad \gg \quad \gg, \\ (f, 2) \quad 2d_2 + 8e_1 - 16e_2 - 16f_1 + 20f_2 &= 1 \quad \gg \quad \gg. \end{aligned}$$

Heraf findes

	1	2	
d	973927	1498654	$\frac{1 - \mu^2}{2864852} \frac{p\lambda^4}{EI}$
e	1481436	2313156	» »
f	1626793	2552762	» »

Nedbøjninger.

	0	1	2	
c	0	0	0	
d	0	0,00133	0,00205	$(1-\mu^2) \frac{p}{EI} l^4$
		0,00026	0,00040	» » b^4
e	0	0,00202	0,00316	» » l^4
		0,00040	0,00062	» » b^4
f	0	0,00222	0,00348	» » l^4
		0,00044	0,00069	» » b^4

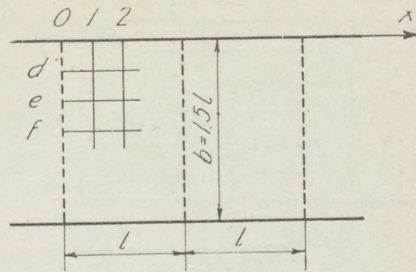


Fig. 71.

Momenter M_x .

	0	1	2	
c	0	0	0	
d	-0,0425	$0,0098 + \mu \cdot 0,0102$	$0,0229 + \mu \cdot 0,0149$	pl^2
e	-0,0647	$0,0142 + \mu \cdot 0,0079$	$0,0363 + \mu \cdot 0,0125$	»
f	-0,0710	$0,0153 + \mu \cdot 0,0064$	$0,0404 + \mu \cdot 0,0105$	»

Momenter M_y .

	0	1	2	
c	0	0	0	
d	$-\mu \cdot 0,0189$	$0,0045 + \mu \cdot 0,0043$	$0,0066 + \mu \cdot 0,0102$	pb^2
e	$-\mu \cdot 0,0287$	$0,0035 + \mu \cdot 0,0063$	$0,0056 + \mu \cdot 0,0161$	»
f	$-\mu \cdot 0,0315$	$0,0028 + \mu \cdot 0,0068$	$0,0046 + \mu \cdot 0,0179$	»

Reaktioner.

Linie 0

Punkt	Reaktion	
(c, 0)	0	
(d, 0)	0,831	pl
(e, 0)	1,007	»
(f, 0)	1,042	»

Linie c

Punkt	Reaktion	
(c, 0)	$-(0,143 - \mu \cdot 0,113)$	pb
(c, 1)	$(0,163 - \mu \cdot 0,026)$	»
(c, 2)	$(0,245 - \mu \cdot 0,061)$	»

b. Belastning p ensformig fordelt over hvert andet Felt (Fig. 72).

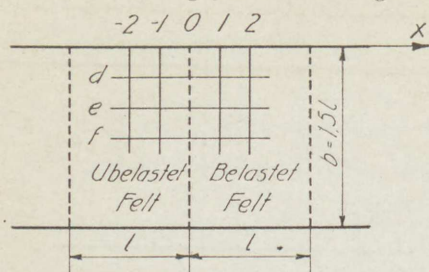


Fig. 72.

Med Belastningen $+p$ og $-p$ skiftevis i hvert andet Felt bestemmes Nedbøjningerne i et med $+p$ belastet Felt som for den rektangulære Plade med $b = \frac{2}{3}l$ (Side 158), idet c, d, e, f ombyttes med $0, 1, 2, 3$. Man har altsaa

	1	2	
d	1441262	1993854	$\frac{1-\mu^2}{1844164} \frac{p\lambda^4}{EI}$
c	2341220	3251444	» »
f	2637890	3667802	» »

Nedbøjninger.

	0	1	2	
c	0	0	0	
d	0	0,00306 0,00060	0,00422 0,00083	$(1-\mu^2) \frac{p}{EI} l^4$ » » b^4
e	0	0,00496 0,00098	0,00689 0,00136	» » l^4 » » b^4
f	0	0,00558 0,00110	0,00777 0,00153	» » l^4 » » b^4

Momenter M_x .

	0	1	2	
c	0	0	0	
d	0	$0,0301 + \mu \cdot 0,0183$	$0,0375 + \mu \cdot 0,0250$	pl^2
e	0	$0,0485 + \mu \cdot 0,0204$	$0,0618 + \mu \cdot 0,0285$	»
f	0	$0,0545 + \mu \cdot 0,0201$	$0,0698 + \mu \cdot 0,0282$	»

Momenter M_y .

	0	1	2	
c	0	0	0	
d	0	$0,0082 + \mu \cdot 0,0134$	$0,0111 + \mu \cdot 0,0167$	pb^2
e	0	$0,0091 + \mu \cdot 0,0216$	$0,0127 + \mu \cdot 0,0274$	»
f	0	$0,0090 + \mu \cdot 0,0242$	$0,0126 + \mu \cdot 0,0310$	»

Reaktioner i Linie c .

Punkt	Reaktion	
$(c, 0)$	0	
$(c, 1)$	$(0,293 - \mu \cdot 0,080)$	pb
$(c, 2)$	$(0,350 - \mu \cdot 0,050)$	»

For et Felt med Belastningen $-p$ haves samme Værdier med modsat Fortegn.

De fundne Resultater for Belastningen p over alle Felter og for Belastningen $+p$ og $-p$ skiftevis i hvert andet Felt adderes og halveres, hvorved findes (Fig. 72):

Nedbøjninger.

	- 2	- 1	0	1	2	
c	0	0	0	0	0	
d	$-0,00109$	$-0,00087$	0	$0,00219$	$0,00313$	$(1 - \mu^2) \frac{p}{EI} l^4$
	$-0,00022$	$-0,00017$		$0,00043$	$0,00062$	» » b^4
e	$-0,00186$	$-0,00147$	0	$0,00349$	$0,00502$	» » l^4
	$-0,00037$	$-0,00029$		$0,00069$	$0,00099$	» » b^4
f	$-0,00214$	$-0,00168$	0	$0,00390$	$0,00562$	» » l^4
	$-0,00042$	$-0,00033$		$0,00077$	$0,00111$	» » b^4

Momenter M_x .

	- 2	- 1	0	1	2	
c	0	0	0	0	0	
d	$-0,0073 - \mu \cdot 0,0050$	$-0,0101 - \mu \cdot 0,0040$	$-0,0213$	$0,0200 + \mu \cdot 0,0142$	$0,0302 + \mu \cdot 0,0199$	pl^2
e	$-0,0127 - \mu \cdot 0,0080$	$-0,0171 - \mu \cdot 0,0062$	$-0,0324$	$0,0313 + \mu \cdot 0,0141$	$0,0490 + \mu \cdot 0,0205$	»
f	$-0,0147 - \mu \cdot 0,0088$	$-0,0196 - \mu \cdot 0,0069$	$-0,0355$	$0,0349 + \mu \cdot 0,0132$	$0,0551 + \mu \cdot 0,0193$	»

Momenter M_y .

	— 2	— 1	0	1	2	
c	0	0	0	0	0	
d	$-0,0022 - \mu \cdot 0,0032$	$-0,0018 - \mu \cdot 0,0045$	$-\mu \cdot 0,0095$	$0,0063 + \mu \cdot 0,0089$	$0,0088 + \mu \cdot 0,0134$	pb^2
e	$-0,0035 - \mu \cdot 0,0056$	$-0,0028 - \mu \cdot 0,0076$	$-\mu \cdot 0,0144$	$0,0063 + \mu \cdot 0,0139$	$0,0091 + \mu \cdot 0,0217$	»
f	$-0,0040 - \mu \cdot 0,0065$	$-0,0031 - \mu \cdot 0,0087$	$-\mu \cdot 0,0158$	$0,0059 + \mu \cdot 0,0155$	$0,0086 + \mu \cdot 0,0245$	»

Reaktioner.

Linie 0			Linie c		
Punkt	Reaktion		Punkt	Reaktion	
$(c, 0)$	0		$(c, -2)$	$-(0,052 + \mu \cdot 0,006)$	pb
$(d, 0)$	0,416	pl	$(c, -1)$	$-(0,065 - \mu \cdot 0,027)$	»
$(e, 0)$	0,503	»	$(c, 0)$	$-(0,072 - \mu \cdot 0,057)$	»
$(f, 0)$	0,521	»	$(c, 1)$	$(0,228 - \mu \cdot 0,053)$	»
			$(c, 2)$	$(0,298 - \mu \cdot 0,056)^*$	»

c. Beregning af de negative bøjende Momenter ved Anvendelse af Lign. (77).

For Punkterne $(d, 1)$, $(e, 1)$ og $(f, 1)$ (Fig. 71) bliver Ligningerne

$$\begin{aligned}
 (d, 1) \quad & 23d_1 - 8,5d_2 - 8e_1 + 2e_2 + f_1 = 1 \cdot (1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}, \\
 (e, 1) \quad & -8d_1 + 2d_2 + 25e_1 - 8,5e_2 - 8f_1 + 2f_2 = 1 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 (f, 1) \quad & 2d_1 \quad -16e_1 + 4e_2 + 24f_1 - 8,5f_2 = 1 \quad \text{»} \quad \text{»}.
 \end{aligned}$$

De øvrige Ligninger (Side 162) bliver uforandrede. Herved findes

	1	2	
d	4938987	8038964	$\frac{1 - \mu^2}{19051240} \frac{p\lambda^4}{EI}$
e	7305740	12147720	» »
f	7936213	13293516	» »

hvoraf ved Lign. (77)

$$M_{x(d, 0)} = -0,0516pl^2,$$

$$M_{x(e, 0)} = -0,0759 \text{ » },$$

$$M_{x(f, 0)} = -0,0823 \text{ » }.$$

§ 24. Trekantet Plade, simpelt understøttet langs Siderne, ensformig fordelt Belastning.

En Plade, hvis Udstrækning er uendelig baade i x -Aksens og i y -Aksens Retning, tænkes overalt belastet som vist i Fig. 73, hvor de skraverede Arealer paavirkes af Belastningen $+p$, medens de ikke skraverede Arealer paavirkes af Belastningen $-p$.

Hvert af de skraverede Arealer begrænses af tre Snit, i hvilke de bøjende Momenter er Nul, da Belastningen paa to Pladeelementer, som er symmetrisk beliggende med Hensyn til Snittet, giver lige store positive og negative Momenter. I Snittene virker der kun lodret forskydende Kræfter og vridende Momenter.

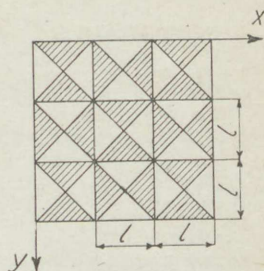


Fig. 73.

Hvis man langs Siderne af det trekantede Pladestykke, som tænkes udskaaret, i Stedet for Snitkræfterne anbringer en simpel Understøtning, vil Nedbøjningerne samt de bøjende og de vridende Momenter ikke herved forandres. Reaktionen langs Siderne vil da kunne udtrykkes ved de lodret forskydende Kræfter og de vridende Momenter som angivet i § 8, Lign. (45).

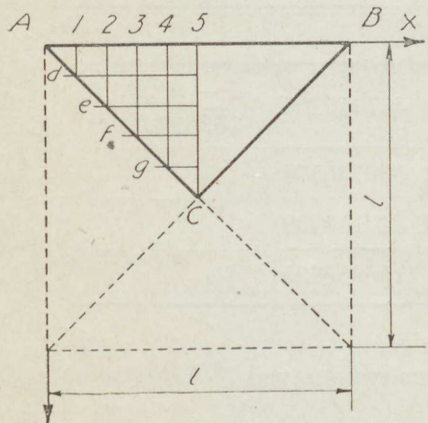


Fig. 74.

I Fig. 74 angiver ABC en saadan Plade. Beregningen udføres for en kontinuerlig Plade, belastet som i Fig. 73, idet Nedbøjningerne og Momenterne, der herved bestemmes, er de samme som i den simpelt understøttede Plade.

Til Bestemmelse af Nedbøjningerne kan man da anvende Ligningerne (15)

og (16). Langs Siderne bliver baade Nedbøjningerne $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$, d_1, e_2, f_3, g_4, h_5 og Størrelserne $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, D_1, E_2, F_3, G_4, H_5$ Nul. Ligningerne bliver da:

$$\begin{aligned}
 (d, 2) \quad & -4D_2 + D_3 & & = 1 \cdot (1-u^2) \frac{p\lambda^4}{EI}, \\
 (d, 3) \quad & D_2 - 4D_3 + D_4 + E_3 & & = \quad \gg \quad \gg, \\
 (d, 4) \quad & D_3 - 4D_4 + D_5 + E_4 & & = \quad \gg \quad \gg, \\
 (d, 5) \quad & 2D_4 - 4D_5 + E_5 & & = \quad \gg \quad \gg, \\
 (e, 3) \quad & D_3 - 4E_3 + E_4 & & = \quad \gg \quad \gg, \\
 (e, 4) \quad & D_4 + E_3 - 4E_4 + E_5 + F_4 & & = \quad \gg \quad \gg, \\
 (e, 5) \quad & D_5 + 2E_4 - 4E_5 + F_5 & & = \quad \gg \quad \gg, \\
 (f, 4) \quad & E_4 - 4F_4 + F_5 & & = \quad \gg \quad \gg, \\
 (f, 5) \quad & E_5 + 2F_4 - 4F_5 + G_5 & & = \quad \gg \quad \gg, \\
 (g, 5) \quad & F_5 - 4G_5 & & = \quad \gg \quad \gg,
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll}
\text{og } (d, 2) & -4d_2 + d_3 & & = D_2, \\
(d, 3) & d_2 - 4d_3 + d_4 & + e_3 & = D_3, \\
(d, 4) & d_3 - 4d_4 + d_5 & + e_4 & = D_4, \\
(d, 5) & 2d_4 - 4d_5 & + e_5 & = D_5, \\
(e, 3) & d_3 & - 4e_3 + e_4 & = E_3, \\
(e, 4) & d_4 & + e_3 - 4e_4 + e_5 + f_4 & = E_4, \\
(e, 5) & d_5 & + 2e_4 - 4e_5 + f_5 & = E_5, \\
(f, 4) & & e_4 - 4f_4 + f_5 & = F_4, \\
(f, 5) & & e_5 + 2f_4 - 4f_5 + g_5 & = F_5, \\
(g, 5) & & & f_5 - 4g_5 = G_5.
\end{array}$$

Heraf findes

	2	3	4	5	
d	101763444	254261178	385972837	437615205	$\frac{1 - \mu^2}{18281^2} \frac{p\lambda^4}{EI}$
e		252333000	493085811	590738574	» »
f			306529181	440114450	» »
g				155959625	» »

Den indskrevne Cirkels Radius r bestemmes ved

$$r(1 + \sqrt{2}) = \frac{1}{2}l = 5\lambda.$$

Man finder herved følgende Værdier af de bøjende og de vridende Momenter.

Momenter M_x .

	0	1	2	3	4	5	
c	0	0	0	0	0	0	
d		$-0,071 + \mu \cdot 0,071$	$-0,035 + \mu \cdot 0,142$	$+0,015 + \mu \cdot 0,179$	$+0,056 + \mu \cdot 0,195$	$+0,072 + \mu \cdot 0,199$	pr^2
e			$-0,105 + \mu \cdot 0,105$	$+0,008 + \mu \cdot 0,175$	$+0,100 + \mu \cdot 0,205$	$+0,136 + \mu \cdot 0,212$	»
f				$-0,038 + \mu \cdot 0,038$	$+0,121 + \mu \cdot 0,084$	$+0,186 + \mu \cdot 0,093$	»
g					$+0,105 - \mu \cdot 0,105$	$+0,218 - \mu \cdot 0,090$	»
h						$+0,218 - \mu \cdot 0,218$	»

Momenter M_y .

	0	1	2	3	4	5	
c	0	0	0	0	0	0	
d		$+0,071 - \mu \cdot 0,071$	$+0,142 - \mu \cdot 0,035$	$+0,179 + \mu \cdot 0,015$	$+0,195 + \mu \cdot 0,056$	$+0,199 + \mu \cdot 0,072$	pr^2
e			$+0,105 - \mu \cdot 0,105$	$+0,175 + \mu \cdot 0,008$	$+0,205 + \mu \cdot 0,100$	$+0,212 + \mu \cdot 0,136$	»
f				$+0,038 - \mu \cdot 0,038$	$+0,084 + \mu \cdot 0,121$	$+0,093 + \mu \cdot 0,186$	»
g					$-0,105 + \mu \cdot 0,105$	$-0,090 + \mu \cdot 0,218$	»
h						$-0,218 + \mu \cdot 0,218$	»

Momenter M_v .

	0	1	2	3	4	5	
c							
d	0	$-0,071$	$-0,106$	$-0,092$	$-0,036$	$(1 - \mu) pr^2$	
e		0	$-0,070$	$-0,076$	$-0,032$	»	»
f			0	$-0,046$	$-0,025$	»	»
g				0	$-0,016$	»	»
					0	»	»

For $\mu = 0,2$ bliver det bøjende Moment M_y i Punkt (e, 5)

$$M_{y(e,5)} = 0,239 pr^2 = \text{ca. } \frac{1}{4} pr^2,$$

der tilnærmelsesvis angiver det største bøjende Moment pr. Længdeenhed i Pladen.

I en Plade, der har Form som en retvinklet, ligebenet Trekant, simpelt understøttet langs Siderne, bliver det største bøjende Moment pr. Længdeenhed for en ensformig fordelt Belastning p altsaa ca. $\frac{1}{4} pr^2$.

Ved forskelligt formede trekantede Plader bliver de bøjende Momenter forskellige. Gaar man ud fra den retvinklede, ligebenede Trekant og forøger Topvinklen fra 90° til 180° , vil det bøjende Moment pr. Længdeenhed herved vokse til $\frac{1}{2} pr^2$. Formindskes Topvinklen fra 90° til 0° , vil det bøjende Moment pr. Længdeenhed ligeledes vokse til $\frac{1}{2} pr^2$.

I en vilkaarlig formet, trekantet Plade (Fig. 75) vil man da med rimelig Tilnærmelse kunne regne det bøjende Moment pr. Længdeenhed lig med $\frac{1}{4} pr^2$, naar ingen af

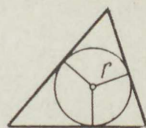


Fig. 75.

Trekantens Vinkler er mindre end 45^0 *). Er en eller to af Trekantens Vinkler mindre end 45^0 , vil det største bøjende Moment pr. Længdeenhed kunne regnes at være beliggende mellem $\frac{1}{4} pr^2$ og $\frac{1}{2} pr^2$.

*) I »Beitrag zur Berechnung der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten und deren Aufnahmeträger, von Ingenieur Arturo Danusso, bearbeitet nach den Veröffentlichungen des Verfassers in der Zeitschrift *Il Cemento* (Heft. 1—10, 1911), af Dipl. Ing. Hugo von Bronneck, Berlin, 1913, Side 104, findes det bøjende Moment midt i en simpelt understøttet, ligesidet trekantet Plade med Sidelinie l , paavirket af en ensformig fordelt Belastning p ,

$$0,592\lambda P + 0,930\lambda P,$$

fordelt paa Strækningen $\frac{l\sqrt{3}}{6}$.

Heri er $\lambda = \frac{1}{6} l$ og $P = \frac{\sqrt{3}}{72} pl^2$. Momentet pr. Længdeenhed er altsaa

$$M = \frac{(0,592 + 0,930) \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{72}}{\frac{\sqrt{3}}{6}} pl^2 = \frac{1}{47,3} pl^2.$$

Udtrykkes l ved den indskrevne Cirkels Radius $r = \frac{1}{3} l$, faas

$$M = 0,190 pr^2.$$

Ved Beregningen af de bøjende Momenter forudsætter Danusso, at Pladen bestaar af Bjælker parallelle med Siderne. Da disse Bjælkens Nedbøjning udtrykkes ved de bøjende Momenter i Bjælkerne paa lignende Maade som Nedbøjningen i en Plade, for hvilken $\mu = 0$, udtrykkes ved de bøjende Momenter i Pladen, maa de af Danusso fundne Momenter regnes at gælde for en Plade med $\mu = 0$. I en Plade, der har Form som en ligesidet Trekant, findes det bøjende Moment altsaa lidt mindre end i en Plade, der har Form som en retvinklet, ligebenet Trekant.

FJERDE AFSNIT.

PLADE, UNDERSTØTTET AF SØJLER MED KAPITÆLER (FLAT SLAB).

§ 25. Bemærkninger vedrørende Spændingsbestemmelsen.

Ved de i dette Afsnit behandlede Plader tænkes navnlig paa Jernbetonkonstruktioner, hvor Søjle, Kapitæl og Plade er sammenstøbte.

Ved Spændingsbestemmelsen i en saadan Konstruktion vil det være rigtigst at regne med Pladens varierende Tykkelse, idet Kapitælet medregnes til Pladen i Bestemmelsen af dennes Inertimoment.

I mange Tilfælde vil man dog opnaa tilstrækkelig nøjagtige Resultater ved at regne med konstant Inertimoment, hvorved Beregningen bliver lettere at udføre.

Naar Søjlernes Tværsnit ikke er ualmindelig stort, vil man opnaa tilstrækkelig Nøjagtighed ved at forudsætte, at Pladen understøttes i enkelte Punkter, beliggende over Søjletværsnittenes Midtpunkter.

Forudsættes Pladens Inertimoment konstant, vil man dog til en vis Grad kunne tage Hensyn til Kapitælernes Indflydelse paa Nedbøjningernes Størrelse og Spændingernes Fordeling i Pladen ved at regne Reaktionen ensformig fordelt over Arealelementer af Kapitælernes Udstrækning. De bøjende Momenter, som herved optræder i Kapitælet med tilhørende Parti af Pladen over Kapitælet, kan da tilnærmelsesvis regnes at være lig med Summen af de Momenter, som ved Beregningen findes i Pladen over Kapitælet, og de Momenter, som optræder i Kapitælet, hidrørende fra den ensformig fordelte Belastning, hvormed Pladen forudsættes at paavirke dette.

I Konstruktioner, hvor Pladetykkelsen forøges i Nærheden af Kapitælet (dropped panel), bør Pladen beregnes med det herved bestemte variable Inertimoment (§ 17).

Derksom Nedbøjningen ikke ønskes bestemt med særlig stor Nøjagtighed, vil Bestemmelsen af Inertimomentet i Almindelighed kunne udføres tilstrækkelig nøjagtigt uden at tage Hensyn til Jernindlægget. Naar Spændingerne kommer op i Nærheden af eller overskrider Betonens Trækbrudgrænse, vil man maaske kunne opnaa nøjagtigere Resultater

ved at bestemme Inertimomentet saaledes, at man i den strakte Side af Pladen medregner Jernindlægget, men derimod ikke Betonen, som forudsættes at være spændingsløs (se § 19). Der vil dog altid optræde Trækspændinger i en Del af Betonen, og man vil derfor under alle Omstændigheder kun kunne opnaa en Tilnærmelse, da man ikke kender Betontrækspændingernes Udstrækning.

Som tidligere omtalt, vil man imidlertid ved Beregningen altid finde saadanne Værdier af de indre Kræfter, at Belastningen og Snitkræfterne for et vilkaarligt Element af Pladen vil holde hinanden i Ligevægt. Ved at indføre andre Værdier af Pladens Inertimoment i Beregningen vil man kun opnaa at finde de indre Kræfter noget anderledes fordelte.

Er Belastningen symmetrisk beliggende med Hensyn til Søjlerækkerne, vil der ikke optræde Bøjning i Søjlerne. Ved usymmetrisk Belastning vil der derimod optræde bøjende Momenter i Søjlerne, hvorved Spændingerne i Pladen som Følge af den stive Forbindelse mellem Søjle og Plade vil faa andre Værdier, end hvis Pladen var understøttet paa Pendulsøjler eller i Punkter, hvor den frit kunde dreje sig. Ved usymmetrisk Belastning bør man derfor beregne Spændingerne baade i Søjlerne og i Pladen.

§ 26. Kvadratiske Felter; Plade kontinuert over uendelig mange Fag i begge Retninger; Belastning ensformig fordelt over alle Fag.

1. Plade med konstant Inertimoment.

Beregningen af den kvadratiske Plade med konstant Inertimoment og ensformig fordelt Belastning p over alle Fag udføres dels under Forudsætning af, at Pladen understøttes i enkelte Punkter, dels under Forudsætning af, at Reaktionerne er ensformig fordelt over Arealelementerne $0,2l-0,2l$, hvor l er Afstanden mellem Søjlerækkerne. For at kunne danne sig et Skøn over den opnaaede Nøjagtighed udføres Beregningen i det første Tilfælde baade med $\lambda = \frac{1}{10}l$ og med $\lambda = \frac{1}{5}l$.

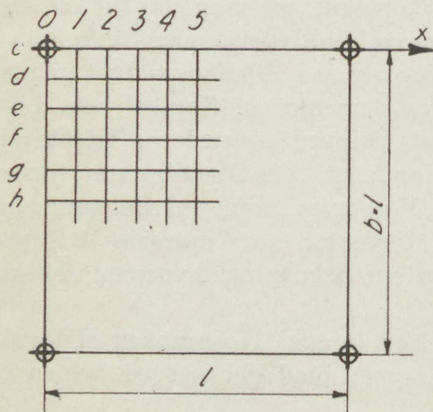


Fig. 76.

handlet med $\lambda = \frac{1}{6}l$. For de i Linierne c og d beliggende Punkter bliver Lign. (16):

For den i Fig. 76 viste Plade, som regnes understøttet i enkelte Punkter, udføres Beregningen som i § 2, hvor den samme Plade er be-

(c, 0)	$-4C_0 + 4C_1$							$= -99(1-\mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}$
(c, 1)	$C_0 - 4C_1 + C_2$	$+2D_1$						$= 1 \quad \text{»} \quad \text{»}$
(c, 2)	$C_1 - 4C_2 + C_3$	$+2D_2$						$= 1 \quad \text{»} \quad \text{»}$
(c, 3)	$C_2 - 4C_3 + C_4$	$+2D_3$						$= 1 \quad \text{»} \quad \text{»}$
(c, 4)	$C_3 - 4C_4 + C_5$	$+2D_4$						$= 1 \quad \text{»} \quad \text{»}$
(c, 5)	$2C_4 - 4C_5$	$+2D_5$						$= 1 \quad \text{»} \quad \text{»}$
(d, 1)	$2C_1$	$-4D_1 + 2D_2$						$= 1 \quad \text{»} \quad \text{»}$
(d, 2)	C_2	$+ D_1 - 4D_2 + D_3$	$+E_2$					$= 1 \quad \text{»} \quad \text{»}$
(d, 3)	C_3	$+ D_2 - 4D_3 + D_4$	$+E_3$					$= 1 \quad \text{»} \quad \text{»}$
(d, 4)	C_4	$+ D_3 - 4D_4 + D_5$	$+E_4$					$= 1 \quad \text{»} \quad \text{»}$
(d, 5)	C_5	$+2D_4 - 4D_5$	$+E_5$					$= 1 \quad \text{»} \quad \text{»}$

For Punkterne i Linierne *e*, *f*, *g* og *h* er Ligningerne de samme som for en kvadratisk Plade, der er simpelt understøttet langs alle fire Sider (§ 20).

Den ene af disse Ligninger kan udledes af de andre. Man har altså 20 Ligninger med 21 ubekendte. Af Ligningerne findes:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= C_0 - 3884463 \frac{1-\mu^2}{156948} \frac{p\lambda^4}{EI}, & E_2 &= C_0 - 6362282 \frac{1-\mu^2}{156948} \frac{p\lambda^4}{EI}, \\
 C_2 &= C_0 - 5543684 \quad \text{»} \quad \text{»}, & E_3 &= C_0 - 6771807 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 C_3 &= C_0 - 6384759 \quad \text{»} \quad \text{»}, & E_4 &= C_0 - 7028908 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 C_4 &= C_0 - 6807188 \quad \text{»} \quad \text{»}, & E_5 &= C_0 - 7115559 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 C_5 &= C_0 - 6937775 \quad \text{»} \quad \text{»}, & & \\
 & & F_3 &= C_0 - 7023482 \quad \text{»} \quad \text{»}; \\
 D_1 &= C_0 - 4918610 \quad \text{»} \quad \text{»}, & F_4 &= C_0 - 7196683 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 D_2 &= C_0 - 5874283 \quad \text{»} \quad \text{»}, & F_5 &= C_0 - 7257584 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 D_3 &= C_0 - 6515608 \quad \text{»} \quad \text{»}, & & \\
 D_4 &= C_0 - 6874635 \quad \text{»} \quad \text{»}, & G_4 &= C_0 - 7319810 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 D_5 &= C_0 - 6989888 \quad \text{»} \quad \text{»}, & G_5 &= C_0 - 7364463 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 & & H_5 &= C_0 - 7403700 \quad \text{»} \quad \text{»}.
 \end{aligned}$$

Lign. (15) opskrives for de samme 21 Punkter. Ligningernes venstre Side faas ved at ombytte C_0 med c_0 , C_1 med c_1 o. s. v. Paa højre Side indgaar $\bar{C}_0$ og de ved C_0 udtrykte $C_1, C_2 \dots$. Idet $c_0 = 0$, har man her ved 21 Ligninger til Bestemmelse af $\bar{C}_0$ og de 20 ubekendte Nedbøjninger. Af Ligningerne findes:

$$\begin{aligned}
C_0 &= 6512617,3 \frac{1-\mu^2}{156948} \frac{p\lambda^4}{EI}; & e_2 &= 9043586801236 \frac{1-\mu^2}{10 \cdot 156948^2} \frac{p\lambda^4}{EI}, \\
c_1 &= 2555355650001 \frac{1-\mu^2}{10 \cdot 156948^2} \frac{p\lambda^4}{EI}, & e_3 &= 11207109929361 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
c_2 &= 6043746052936 \quad \text{»} \quad \text{»}, & e_4 &= 12778057474808 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
c_3 &= 9144274404561 \quad \text{»} \quad \text{»}, & e_5 &= 13346098788561 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
c_4 &= 11223192270376 \quad \text{»} \quad \text{»}, & f_3 &= 12844587221236 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
c_5 &= 11951082444625 \quad \text{»} \quad \text{»}, & f_4 &= 14081168548433 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
& & f_5 &= 14536640899936 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
d_1 &= 4151256078916 \quad \text{»} \quad \text{»}, & & \\
d_2 &= 6998037796433 \quad \text{»} \quad \text{»}, & g_4 &= 15091761162916 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
d_3 &= 9755415169808 \quad \text{»} \quad \text{»}, & g_5 &= 15468917378001 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
d_4 &= 11667544705041 \quad \text{»} \quad \text{»}, & & \\
d_5 &= 12345334365376 \quad \text{»} \quad \text{»}, & h_5 &= 15818551497000 \quad \text{»} \quad \text{»}.
\end{aligned}$$

De herved bestemte Nedbøjninger og bøjende Momenter er opstillet i nedenstaaende Tabeller. De bøjende Momenter er angivet med Værdien af M_x for $\mu=0$. M_y for $\mu=0$ findes ved Symmetrien om en Diagonal. Idet disse Værdier af M_x og M_y kaldes henholdsvis $M_{x(\mu=0)}$ og $M_{y(\mu=0)}$, findes M_x og M_y for en vilkaarlig Værdi af μ ved

$$\begin{aligned}
M_x &= M_{x(\mu=0)} + \mu \cdot M_{y(\mu=0)}, \\
M_y &= M_{y(\mu=0)} + \mu \cdot M_{x(\mu=0)}.
\end{aligned}$$

Nedbøjninger.

	0	1	2	3	4	5	
c	0	0,00104	0,00245	0,00371	0,00456	0,00485	$(1-\mu^2) \frac{pl^4}{EI}$
d	0,00104	0,00169	0,00284	0,00396	0,00474	0,00501	» »
e	0,00245	0,00284	0,00367	0,00455	0,00519	0,00542	» »
f	0,00371	0,00396	0,00455	0,00521	0,00572	0,00590	» »
g	0,00456	0,00474	0,00519	0,00572	0,00613	0,00628	» »
h	0,00485	0,00501	0,00542	0,00590	0,00628	0,00642	» »

Momenter M_x for $\mu=0$.

	0	1	2	3	4	5	
c	-0,2075	-0,0379	+0,0157	+0,0415	+0,0548	+0,0591	pl^2
d	-0,1296	-0,0508	+0,0036	+0,0343	+0,0501	+0,0550	»
e	-0,0775	-0,0443	-0,0048	+0,0241	+0,0407	+0,0461	»
f	-0,0496	-0,0341	-0,0075	+0,0163	+0,0317	+0,0370	»
g	-0,0361	-0,0270	-0,0078	+0,0119	+0,0257	+0,0306	»
h	-0,0320	-0,0246	-0,0077	+0,0105	+0,0237	+0,0284	»

Baade midt i Feltet og midt imellem Understøtningspunkterne i Søjlerækkerne er der saaledes god Overensstemmelse mellem de fundne bøjende Momenter pr. Længdeenhed med $\lambda = \frac{1}{6}l$ (§ 2) og med $\lambda = \frac{1}{10}l$. Det samme er Tilfældet over Understøtningspunkterne. Idet M_x beregnes som Middelværdien af det bøjende Moment pr. Længdeenhed paa Strækningen λ , maa man over Understøtningerne finde en større Værdi af det negative Moment M_x for $\lambda = \frac{1}{10}l$ end for $\lambda = \frac{1}{6}l$.

Hovedsnitenes Retning og Hovedmomenternes Størrelse kan beregnes som i § 4.

Med $\lambda = \frac{1}{6}l$ (Fig. 77) bliver Ligningerne

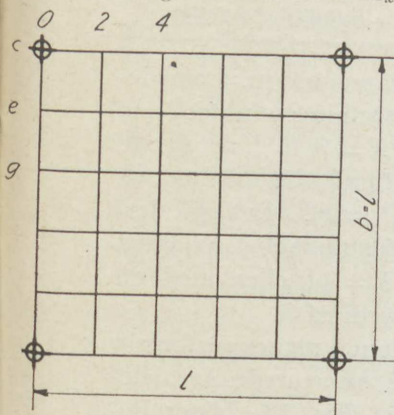


Fig. 77.

$$\begin{array}{llll}
 (c, 0) & -4C_0 + 4C_2 & = & -24(1-\mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}, \\
 (c, 2) & C_0 - 4C_2 + C_4 + 2E_2 & = & 1 \quad \gg \quad \gg, \\
 (c, 4) & C_2 - 3C_4 + 2E_4 & = & 1 \quad \gg \quad \gg, \\
 (e, 2) & 2C_2 - 4E_2 + 2E_4 & = & 1 \quad \gg \quad \gg, \\
 (e, 4) & C_4 + E_2 - 3E_4 + G_4 & = & 1 \quad \gg \quad \gg, \\
 (g, 4) & 2E_4 - 2G_4 & = & 1 \quad \gg \quad \gg,
 \end{array}$$

hvoraf

$$\begin{array}{ll}
 C_2 = C_0 - 6(1-\mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}, & E_2 = C_0 - 7,5(1-\mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}, \\
 C_4 = C_0 - 8 \quad \gg \quad \gg, & E_4 = C_0 - 8,5 \quad \gg \quad \gg, \\
 & G_4 = C_0 - 9 \quad \gg \quad \gg.
 \end{array}$$

De fundne C_2 , C_4 , E_2 , E_4 og G_4 indsættes i Ligningerne

$$\begin{array}{ll}
 -4c_0 + 4c_2 & = C_0, \\
 c_0 - 4c_2 + c_4 + 2e_2 & = C_2, \\
 c_2 - 3c_4 + 2e_4 & = C_4, \\
 2c_2 - 4e_2 + 2e_4 & = E_2, \\
 c_4 + e_2 - 3e_4 + g_4 & = E_4, \\
 2e_4 - 2g_4 & = G_4,
 \end{array}$$

hvorefter findes

$$\begin{array}{ll}
 C_0 = 7,6(1-\mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}, & e_2 = 58 \frac{1-\mu^2}{20} \frac{p\lambda^4}{EI}, \\
 c_2 = 38 \frac{1-\mu^2}{20} \frac{p\lambda^4}{EI}, & e_4 = 79 \quad \gg \quad \gg, \\
 c_4 = 68 \quad \gg \quad \gg, & g_4 = 93 \quad \gg \quad \gg.
 \end{array}$$

Nedbøjninger.					Momenter M_x for $\mu = 0$.				
	0	2	4			0	2	4	
c	0	0,00304	0,00544	$(1-\mu^2) \frac{pl^4}{EI}$	c	-0,1520	+0,0160	+0,0600	pl^2
e	0,00364	0,00464	0,00632	» »	e	-0,0800	-0,0020	+0,0420	»
g	0,00544	0,00632	0,00744	» »	g	-0,0440	-0,0060	+0,0280	»

Da de fundne M_x angiver Middelværdien af Momentet pr. Længdeenhed paa Strækningen λ , finder man ved Understøtningspunktet (c , 0) et mindre negativt Moment M_x for $\lambda = \frac{1}{5}l$ end for $\lambda = \frac{1}{10}l$. I de øvrige Punkter er der god Overensstemmelse mellem de fundne Momenter for $\lambda = \frac{1}{10}l$ og for $\lambda = \frac{1}{5}l$. Det vil derfor ofte være tilstrækkelig nøjagtigt at regne med $\lambda = \frac{1}{5}l$ eller med en endnu større Værdi af λ .

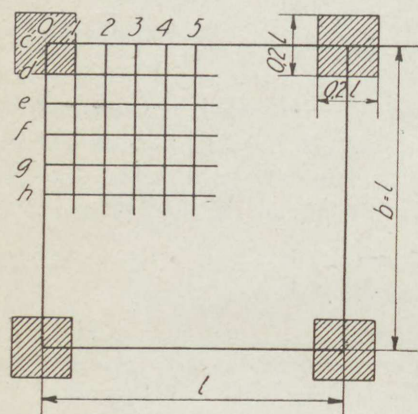


Fig. 78.

Naar Reaktionen regnes ensformig fordelt over de skraverede Arealelementer $0,2l \cdot 0,2l$ (Fig. 78), bliver Belastningen

$$\begin{aligned} \text{i Punkt } (c, 0) \quad & p\lambda^2 - 25 p\lambda^2 = -24 p\lambda^2, \\ \text{» » } (c, 1) \quad & p\lambda^2 - \frac{25}{2} p\lambda^2 = -\frac{23}{2} p\lambda^2, \\ \text{» » } (d, 1) \quad & p\lambda^2 - \frac{25}{4} p\lambda^2 = -\frac{21}{4} p\lambda^2. \end{aligned}$$

Herved bliver Lign. (16) for disse tre Punkter

$$\begin{aligned} (c, 0) \quad & -4C_0 + 4C_1 = -24(1-\mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}, \\ (c, 1) \quad & C_0 - 4C_1 + C_2 + 2D_1 = -\frac{23}{2} \text{ » » }, \\ (d, 1) \quad & 2C_1 - 4D_1 + 2D_2 = -\frac{21}{4} \text{ » » }. \end{aligned}$$

De øvrige Ligninger bliver de samme som for Pladen understøttet i enkelte Punkter (Fig. 76). Af Ligningerne findes

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 - 6336 \frac{1-\mu^2}{1056} \frac{p\lambda^4}{EI}, & E_2 &= C_0 - 21134 \frac{1-\mu^2}{1056} \frac{p\lambda^4}{EI}, \\ C_2 &= C_0 - 16118 \text{ » » }, & E_3 &= C_0 - 23934 \text{ » » }, \\ C_3 &= C_0 - 21468 \text{ » » }, & E_4 &= C_0 - 25681 \text{ » » }, \\ C_4 &= C_0 - 24236 \text{ » » }, & E_5 &= C_0 - 26268 \text{ » » }, \\ C_5 &= C_0 - 25100 \text{ » » }, & & \\ D_1 &= C_0 - 10685 \text{ » » }, & F_3 &= C_0 - 25634 \text{ » » }, \\ D_2 &= C_0 - 17806 \text{ » » }, & F_4 &= C_0 - 26806 \text{ » » }, \\ D_3 &= C_0 - 22231 \text{ » » }, & F_5 &= C_0 - 27218 \text{ » » }, \\ D_4 &= C_0 - 24660 \text{ » » }, & G_4 &= C_0 - 27635 \text{ » » }, \\ D_5 &= C_0 - 25436 \text{ » » }, & G_5 &= C_0 - 27936 \text{ » » }, \\ & & H_5 &= C_0 - 28200 \text{ » » }, \end{aligned}$$

hvorefter

$$\begin{aligned}
 C_0 &= 22477,6 \frac{1-\mu^2}{1056} \frac{p\lambda^4}{EI}; & e_2 &= 22803562286 \frac{1-\mu^2}{1056 \cdot 784740} \frac{p\lambda^4}{EI}, \\
 c_1 &= 4409767956 \frac{1-\mu^2}{1056 \cdot 784740} \frac{p\lambda^4}{EI}, & e_3 &= 29557974036 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 c_2 &= 13946986646 \quad \text{»} \quad \text{»}, & e_4 &= 34514335993 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 c_3 &= 23216133396 \quad \text{»} \quad \text{»}, & e_5 &= 36314157396 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 c_4 &= 29627268956 \quad \text{»} \quad \text{»}, & f_3 &= 34729826786 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 c_5 &= 31896708500 \quad \text{»} \quad \text{»}, & f_4 &= 38663202868 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 & & f_5 &= 40116282146 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 d_1 &= 8179522181 \quad \text{»} \quad \text{»}, & & \\
 d_2 &= 16576338868 \quad \text{»} \quad \text{»}, & g_4 &= 41895697931 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 d_3 &= 25041275743 \quad \text{»} \quad \text{»}, & g_5 &= 43104583956 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 d_4 &= 31008173556 \quad \text{»} \quad \text{»}, & & \\
 d_5 &= 33137196956 \quad \text{»} \quad \text{»}, & h_5 &= 44227233000 \quad \text{»} \quad \text{»}.
 \end{aligned}$$

Herved bestemmes følgende Nedbøjninger og bøjende Momenter:

Nedbøjninger.

	0	1	2	3	4	5	
<i>c</i>	0	0,00053	0,00168	0,00280	0,00358	0,00385	$(1-\mu^2) \frac{pl^4}{EI}$
<i>d</i>	0,00053	0,00099	0,00200	0,00302	0,00374	0,00400	» »
<i>e</i>	0,00168	0,00200	0,00275	0,00357	0,00417	0,00438	» »
<i>f</i>	0,00280	0,00302	0,00357	0,00419	0,00467	0,00484	» »
<i>g</i>	0,00358	0,00374	0,00417	0,00467	0,00506	0,00520	» »
<i>h</i>	0,00385	0,00400	0,00438	0,00484	0,00520	0,00534	» »

Momenter M_x for $\mu = 0$.

	0	1	2	3	4	5	
<i>c</i>	-0,1064	-0,0619	+0,0032	+0,0345	+0,0500	+0,0548	pl^2
<i>d</i>	-0,0910	-0,0558	-0,0008	+0,0301	+0,0463	+0,0514	»
<i>e</i>	-0,0635	-0,0434	-0,0064	+0,0217	+0,0381	+0,0434	»
<i>f</i>	-0,0440	-0,0325	-0,0079	+0,0149	+0,0299	+0,0351	»
<i>g</i>	-0,0333	-0,0256	-0,0078	+0,0111	+0,0244	+0,0292	»
<i>h</i>	-0,0299	-0,0237	-0,0075	+0,0098	+0,0225	+0,0271	»

Nedbøjningen findes overalt i Pladen noget mindre, naar Reaktionen regnes ensformig fordelt over Arealelementer af Kapitælernes Udstrækning (Fig. 78), end naar Pladen regnes understøttet i enkelte Punkter (Fig. 76).

De positive bøjende Momenter i et Snit langs Linie 5 er overalt lidt mindre for Pladen i Fig. 78 end for Pladen i Fig. 76. Ligeledes er de negative bøjende Momenter i et Snit langs Linie 0 uden for Kapitælerne mindre for Pladen i Fig. 78 end for Pladen i Fig. 76. I Fig. 78 paavirkes Kapitælet af Belastningen pl^2 , som regnes ensformig fordelt. Regnes Søjlereaktionen at virke i et enkelt Punkt, bliver Middelværdien af Momentet i Kapitælet hidrørende fra denne Belastning $\frac{1}{8} pl^2 = 0,125 pl^2$. Momentet M_x i Kapitælet med tilhørende Parti af Pladen over Kapitælet er altsaa i Punkt $(c, 0)$

$$M_{x(c, 0)} = -(0,1064 + 0,1250) pl^2 = -0,2314 pl^2.$$

For Pladen i Fig. 78 findes de negative Momenter her altsaa noget større end for Pladen i Fig. 76.

2. Plade med Søjlekapitæler af almindelig Størrelse.

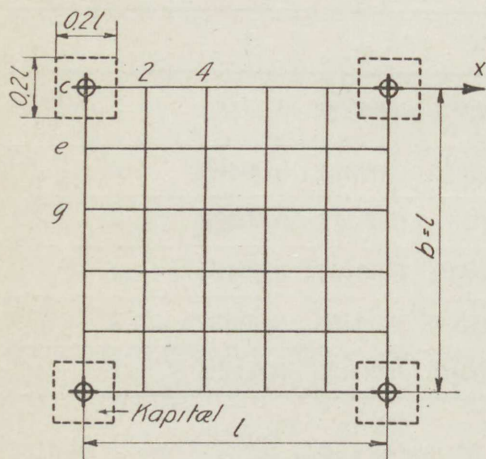


Fig. 79.

Ved den i Fig. 79 viste Plade forudsættes kvadratiske Kapitæler med Sidelinierne $0,2l$. Søjlereaktionen regnes at virke i enkelte Punkter. Kapitælets Inertimoment forudsættes at være uendelig stort i Forhold til Pladens.

For en vilkaarlig Værdi af μ kan Beregningen udføres som angivet i § 17. Af Hensyn til Sammenligningen med de fundne Resultater for Pladen med konstant Inertimoment udføres Beregningen med $\mu = 0$ og $\lambda = \frac{1}{3} l$.

De bøjende og de vridende Momenter, som indgaar i Lign. (8), udtrykkes ved Nedbøjningerne paa følgende Maade:

For Punkt $(c, 0)$ er ifølge Lign. (65), idet I betegner Pladens Inertimoment pr. Længdeenhed uden for Kapitælet og $\beta = \infty$,

$$M_x = -4EI \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} = -4 \frac{EI}{\lambda^2} (c_2 - 2c_0 + c_2),$$

$$M_y = -4 \frac{EI}{\lambda^2} \begin{pmatrix} + & c_2 \\ - & 2c_0 \\ + & c_2 \end{pmatrix}.$$

For Punkt $(c, 2)$ er ifølge Lign. (60), idet x ombyttes med y , og βI_c erstattes af I og β af $\frac{1}{\beta}$,

$$M_x = -EI \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}}{\frac{7}{8} - \mu^2} = -\frac{8}{7} \frac{EI}{\lambda^2} (c_0 - 2c_2 + c_4),$$

$$M_y = -EI \frac{\frac{7}{8} \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}}{\frac{7}{8} - \mu^2} = -\frac{EI}{\lambda^2} \left\{ \begin{array}{c} + e_2 \\ - 2c_2 \\ + e_2 \end{array} \right\}.$$

For Punkterne $(c, 4)$, $(e, 2)$, $(e, 4)$ og $(g, 4)$ udtrykkes M_x og M_y ved Lign. (11).

For Punkt $(c, e, 0, 2)$ er ifølge Lign. (63), idet I_c erstattes af I ,

$$M_v = -EI \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y}}{\frac{3}{4}(1 + \mu)} = -\frac{4}{3} \frac{EI}{\lambda^2} \left\{ \begin{array}{c} c_0 - c_2 \\ - c_2 + e_2 \end{array} \right\}.$$

For Punkterne $(c, e, 2, 4)$ og $(e, g, 2, 4)$ udtrykkes M_v ved Lign. (11).

For Punkterne midt imellem Søjlerækkerne er $M_v = 0$.

Ved at indføre disse Udtryk for Momenterne i Lign. (8) faas for Punkterne $(c, 0)$, $(c, 2)$, $(c, 4)$ og $(e, 2)$ følgende Ligninger

	4	2	0	2	4
g			$+\frac{8}{7}$		
e		$+\frac{32}{3}$	$-\frac{16}{7}$ $-\frac{32}{3}$ -8	$+\frac{32}{3}$	
$(c, 0) \quad c$	$+\frac{8}{7}$	$-\frac{16}{7}$ $-\frac{32}{3}$ -8	$+\frac{8}{7}$ $+\frac{32}{3}$ $+16$ $+\frac{32}{3}$ $+16$ $+\frac{32}{3}$ $+\frac{8}{7}$	-8 $-\frac{32}{3}$ $-\frac{16}{7}$ $-\frac{32}{3}$	$+\frac{8}{7}$
e		$+\frac{32}{3}$	-8 $-\frac{32}{3}$ $-\frac{16}{7}$ $-\frac{32}{3}$	$+\frac{32}{3}$	
g			$+\frac{8}{7}$		

$$= -24 \frac{p\lambda^4}{EI},$$

	2	0	2	4	4
g			+ 1		
e		+ $\frac{2}{3}$	- $\frac{2}{3}$ - 2 - 2	+ 2	
$(c, 2) \quad c$	+ 4	- 8 - $\frac{16}{7}$ - $\frac{2}{3}$	+ 1 + $\frac{2}{3}$ + 2 + 4 + 4 + $\frac{32}{7}$ + 1 + $\frac{2}{3}$ + 2 + 1	- 2 - $\frac{16}{7}$ - 2 - 2	+ 1 = $\frac{p\lambda^4}{EI}$
e		+ $\frac{2}{3}$	- 2 - $\frac{2}{3}$ - 2 - 2	+ 2	
g			+ 1		

	0	2	4	4	2
g			+ 1		
e		+ 2	- 2 - 2		
$(c, 4) \quad c$	+ $\frac{8}{7}$	- $\frac{16}{7}$ - 2 - 2	+ 1 + 2 + $\frac{8}{7}$ + 4 + 4 + 1 + 2 + 1	- 2 - 2	+ 1 = $\frac{p\lambda^4}{EI}$
e		+ 2	- 2 - 2		
g			+ 1		

	2	0	2	4	4
e			+ 1		
c		+ $\frac{8}{3}$	- $\frac{8}{3}$ - 2 - 2	+ 2	
$(e, 2)$ e	+ 1	- 2 - 2 - 2	+ 1 + $\frac{8}{3}$ + 2 + 1 + 4 + 4 + 1 + 2 + 2 + 1	- 2 - 2 - 2	+ 1 = $\frac{p\lambda^4}{EI}$
g		+ 2	- 2 - 2 - 2	+ 2	
g			+ 1		

For Punkterne $(e, 4)$ og $(g, 4)$ anvendes Lign. (14).

De ordnede Ligninger er

$$\begin{aligned}
 (c, 0) \quad & 992c_0 - 1312c_2 + 96c_4 + 224e_2 = -21 \cdot 24 \frac{p\lambda^4}{EI}, \\
 (c, 2) \quad & -328c_0 + 719c_2 - 153c_4 - 364e_2 + 126e_4 = 21 \text{ » }, \\
 (c, 4) \quad & 8c_0 - 51c_2 + 85c_4 + 28e_2 - 84e_4 + 14g_4 = 7 \text{ » }, \\
 (e, 2) \quad & 8c_0 - 52c_2 + 12c_4 + 68e_2 - 42e_4 + 6g_4 = 3 \text{ » }, \\
 (e, 4) \quad & 3c_2 - 6c_4 - 7e_2 + 15e_4 - 5g_4 = 1 \text{ » }, \\
 (g, 4) \quad & 2c_1 + 2e_2 - 10e_4 + 6g_4 = 1 \text{ » }.
 \end{aligned}$$

Den ene af disse Ligninger kan udledes af de fem andre. Sættes $c_0 = 0$, faas

$$\begin{aligned}
 c_2 &= 596967 \frac{p\lambda^4}{766332 EI}, \\
 c_4 &= 1453977 \text{ » }, \\
 e_2 &= 1149141 \text{ » }, \\
 e_4 &= 1806504 \text{ » }, \\
 g_4 &= 2270856 \text{ » }.
 \end{aligned}$$

Nedbøjningerne og de bøjende Momenter M_x , som herved bestemmes, er opstillet i nedenstaaende Tabeller.

Nedbøjninger.					Momenter M_x for $\mu = 0$.				
	0	2	4			0	2	4	
c	0	0,00125	0,00304	$\frac{pl^4}{EI}$	c	— 0,2493	— 0,0155	+ 0,0447	pl^2
e	0,00125	0,00240	0,00377	»	e	— 0,0576	— 0,0055	+ 0,0343	»
g	0,00304	0,00377	0,00474	»	g	— 0,0368	— 0,0058	+ 0,0242	»

Nedbøjningerne findes saaledes lidt mindre for den i Fig. 79 viste Plade, hvor Kapitælerne medregnes til Pladen ved Bestemmelsen af dennes Inertimoment, end for den i Fig. 78 viste Plade, som er beregnet med konstant Inertimoment og ensformig fordelt Reaktion fra Kapitælerne.

De positive bøjende Momenter i et Snit langs Linie 4 og de negative bøjende Momenter i et Snit langs Linie 0 uden for Kapitælerne er ligeledes lidt mindre for Pladen i Fig. 79 end for Pladen i Fig. 78. Det negative bøjende Moment over Kapitælerne findes derimod størst for Pladen i Fig. 79.

Da Kapitælernes Inertimoment ved Pladen i Fig. 79 er forudsat at være uendelig stort, medens det som oftest i Virkeligheden vil have en varierende Størrelse, saaledes at det i Nærheden af Kapitælets Kanter nærmer sig til Inertimomentet I , som gælder for Pladen uden for Kapitælerne, vil de fundne Værdier af Nedbøjningerne og af de positive bøjende Momenter i Linie 4 samt af de negative bøjende Momenter uden for Kapitælerne i Linie 0 være lidt for smaa, hvorfor det maa antages, at de for Pladen i Fig. 78 fundne Værdier af Nedbøjningerne og Momenterne er meget nær ved at være rigtige ved den forudsatte Størrelse af Kapitælerne.

3. Plade med stort Søjlekapitæl.

For en Plade med Kapitælerne $0,4l \cdot 0,4l$ (Fig. 80), hvor Inertimomentet varierer saaledes, at det

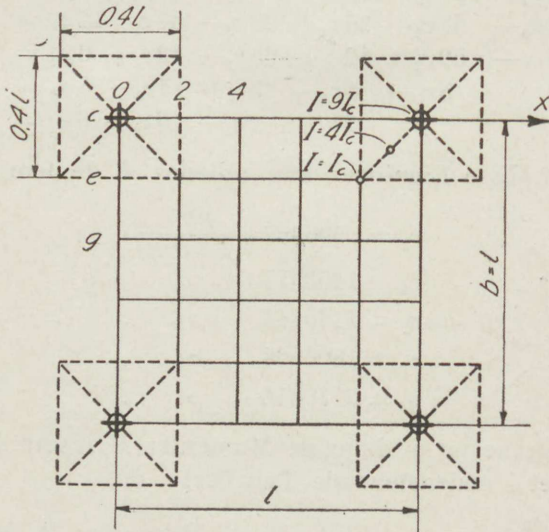


Fig. 80.

- i Punkt $(c, 0)$ er $I = 9 I_c$,
 » » $(c, 2)$ » $I = I_c$,
 » » $(c, e, 0, 2)$ » $I = 4 I_c$,

medens Pladens Inertimoment uden for Kapitælerne er $I = I_c$, udføres Beregningen som angivet i § 15 ved Anvendelse af Lign. (52). Med $\mu = 0$ bliver Ligningerne for Punkterne $(c, 0)$, $(c, 2)$ og $(e, 2)$:

	4	2	0	2	4
g			+1		
e		+8	-2 -8 -8 -18	+8	
$(c, 0) \quad c$	+1	-2 -8 -8	+1 +36 +36 +1 +8 +8 +1	-18 -2 -8	+1
e		+8	-18 -8 -8 -2	+8	
g			+1		

$$= -24 \frac{p\lambda^4}{EI_c}$$

	2	0	2	4	4
g			+1		
e		+8	-2 -8 -2 -2	+2	
$(c, 2) \quad c$	+9	-8 -18 -2 -8	+1 +8 +2 +9 +4 +4 +1 +8 +2 +1	-2 -2 -2 -2	+1
e		+8	-2 -8 -2 -2	+2	
g			+1		

$$= \frac{p\lambda^4}{EI_c}$$

	2	0	2	4	4	
e			+ 1			
c		+ 8	- 8 - 2 - 2	+ 2		
$(e, 2)$ e	+ 1	- 8 - 2 - 2	+ 1 + 8 + 2 + 1 + 4 + 4 + 1 + 2 + 2 + 1	- 2 - 2 - 2	+ 1	$= \frac{p\lambda^4}{EI_c}$
g		+ 2	- 2 - 2 - 2	+ 2		
g			+ 1			

For Punkterne $(c, 4)$, $(e, 4)$ og $(g, 4)$ anvendes Lign. (14).
De ordnede Ligninger er

$$\begin{aligned}
 (c, 0) \quad & 108c_0 - 144c_2 + 4c_4 + 32e_2 = -24 \frac{p\lambda^4}{EI_c}, \\
 (c, 2) \quad & -36c_0 + 65c_2 - 7c_4 - 28e_2 + 6e_4 = 1 \gg, \\
 (c, 4) \quad & c_0 - 7c_2 + 12c_4 + 4e_2 - 12e_4 + 2g_4 = 1 \gg, \\
 (e, 2) \quad & 8c_0 - 28c_2 + 4c_4 + 28e_2 - 14e_4 + 2g_4 = 1 \gg, \\
 (e, 4) \quad & 3c_2 - 6c_4 - 7e_2 + 15e_4 - 5g_4 = 1 \gg, \\
 (g, 4) \quad & 2c_4 + 2e_2 - 10e_4 + 6g_4 = 1 \gg.
 \end{aligned}$$

Den ene af disse Ligninger kan udledes af de fem andre. Sættes $c_0 = 0$, faas

$$\begin{aligned}
 c_2 &= 17750 \frac{p\lambda^4}{42044 EI_c}, \\
 c_4 &= 58096 \gg \gg, \\
 e_2 &= 41080 \gg \gg, \\
 e_4 &= 74201 \gg \gg, \\
 g_4 &= 97617 \gg \gg,
 \end{aligned}$$

Nedbøjninger.

	0	2	4	
c	0	0,00068	0,00221	$\frac{pl^4}{EI_c}$
e	0,00068	0,00156	0,00282	$\gg$
g	0,00221	0,00282	0,00371	$\gg$

Momenter M_x for $\mu = 0$.

	0	2	4	
c	-0,3040	-0,0215	+0,0384	pl^2
e	-0,0444	-0,0093	+0,0315	$\gg$
g	-0,0306	-0,0070	+0,0223	$\gg$

$$M_y = -EI_c \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} = -\frac{EI_c}{\lambda^2} \begin{Bmatrix} + e_2 \\ -2c_2 \\ + e_2 \end{Bmatrix},$$

$$M_{y\beta} = 5M_y,$$

$$\frac{1}{2}(M_y + M_{y\beta}) = -3 \frac{EI_c}{\lambda^2} \begin{Bmatrix} + e_2 \\ -2c_2 \\ + e_2 \end{Bmatrix}.$$

	4	2	0	2	4
g			$+\frac{5}{3}$		
e		$+10$	$-\frac{10}{3}$ -10 -10	$+10$	
$(c, 0) \quad c$	$+\frac{5}{3}$	$-\frac{10}{3}$ -10 -10	$+\frac{5}{3}$ $+10$ $+10$ $+10$ $+10$ $+10$ $+\frac{5}{3}$	$-\frac{10}{3}$ -10 -10 $+\frac{5}{3}$	$+\frac{5}{3}$
e		$+10$	-10 -10 $-\frac{10}{3}$	$+10$	
g			$+\frac{5}{3}$		

$$= -24 \frac{p\lambda^4}{EI_c},$$

	2	0	2	4	4
g			$+\frac{5}{4}$		
e		$+10$	$-\frac{5}{2}$ -10 -2 -6	$+2$	
$(c, 2) \quad c$	$+5$	-10 -10 $-\frac{10}{3}$	$+\frac{5}{4}$ $+10$ $+2$ $+10$ $+2$ $+10$ $+12$ $+1$ $+\frac{5}{4}$	-2 $-\frac{10}{3}$ -2 -2	$+1$
e		$+10$	-6 -10 -2 $-\frac{5}{2}$	$+2$	
g			$+\frac{5}{4}$		

$$= \frac{p\lambda^4}{EI_c},$$

For Punkt (e, 2) er ifølge Lign. (59)

$$M_x = -\frac{5}{4} EI_c \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} = -\frac{5}{4} \frac{EI_c}{\lambda^2} (c_2 - 2e_2 + e_4),$$

$$M_y = -\frac{5}{4} \frac{EI_c}{\lambda^2} \left\{ \begin{array}{c} + c_2 \\ - 2e_2 \\ + e_4 \end{array} \right\}.$$

De øvrige Momenter udtrykkes ved Lign. (11).

De fundne Udtryk for Momenterne indføres i Lign. (8), som opskrives for Punkterne (c, 0), (c, 2), (c, 4), (e, 2) og (e, 4).

	0	2	4	4	2
g			+ 1		
e		+ 2	- 2 - 2 - 2	+ 2	
$(c, 4) \quad c$	+ $\frac{5}{3}$	- 2 - 2	+ 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1	- 2 - 2 - 2 - 2	+ 1
e		+ 2	- 2 - 2 - 2	+ 2	
g			+ 1		

$$= \frac{p\lambda^4}{EI_c},$$

	2	0	2	4	4
e			+ 3		
c		+ 10	- 6 - 10 - 2 - $\frac{5}{2}$	+ 2	
$(e, 2) \quad e$	+ 3	- 10 - 6 - $\frac{5}{2}$ - 2	+ 3 + 10 + 2 + 3 + 5 + 5 + 1 + 2 + 2 + 1	- 2 - $\frac{5}{2}$ - 2 - 2	+ 1
g		+ 2	- $\frac{5}{2}$ - 2 - 2 - 2	+ 2	
g			+ 1		

$$= \frac{p\lambda^4}{EI_c},$$

	0	2	4	4	2
e			+1		
c		+2	-2 -2 -2	+2	
$(e, 4)$			+1		
e	+ $\frac{5}{4}$	- $\frac{5}{2}$ -2	+2 +2 +2 +1	-2 -2	+1
		-2	+2 +2	-2	
			+1		
g		+2	-2 -2 -2	+2	
g			+1		

$$= \frac{p\lambda^4}{EI_c}$$

For Punkt $(g, 4)$ anvendes Lign. (14).

De ordnede Ligninger er

$$\begin{aligned}
 (c, 0) \quad & 260 c_0 - 400 c_2 + 20 c_4 + 120 e_2 = -3 \cdot 24 \frac{p\lambda^4}{EI}, \\
 (c, 2) \quad & -200 c_0 + 457 c_2 - 50 c_4 - 246 e_2 + 39 e_4 = 6 \text{ » }, \\
 (c, 4) \quad & 5 c_0 - 25 c_2 + 38 c_4 + 12 e_2 - 36 e_4 + 6 g_4 = 3 \text{ » }, \\
 (e, 2) \quad & 10 c_0 - 41 c_2 + 4 c_4 + 40 e_2 - 15 e_4 + 2 g_4 = 1 \text{ » }, \\
 (e, 4) \quad & 13 c_2 - 24 c_4 - 30 e_2 + 61 e_4 - 20 g_4 = 4 \text{ » }, \\
 (g, 4) \quad & 2 c_4 + 2 e_2 - 10 e_4 + 6 g_4 = 1 \text{ » }.
 \end{aligned}$$

Sættes $c_0 = 0$, faas

$$\begin{aligned}
 c_2 &= 598824 \frac{p\lambda^4}{1114770 EI}, \\
 c_4 &= 1539114 \text{ » }, \\
 e_2 &= 1070694 \text{ » }, \\
 e_4 &= 1881384 \text{ » }, \\
 g_4 &= 2451489 \text{ » }.
 \end{aligned}$$

Nedbøjninger.

	0	2	4	
c	0	0,00086	0,00221	$\frac{pl^4}{EI}$
e	0,00086	0,00154	0,00270	»
g	0,00221	0,00270	0,00352	»

Momenter M_x for $\mu = 0$.

	0	2	4	
c	-0,2418	-0,0204	+0,0337	pl^2
e	-0,1693 -0,0339	-0,0152	+0,0291	»
g	-0,0246	-0,0082	+0,0205	»

For Punkt $(e, 0)$ (Fig. 81), hvor Pladens Inertimoment ved Overgangen fra den normale Pladetykkelse til den forøgede Tykkelse springer fra I_c til $5I_c$, er angivet begge de hertil svarende Værdier af M_x .

De negative bøjende Momenter i de Partier af Pladen, hvis Tykkelse er forøget, er større end de tilsvarende Momenter i en Plade med samme Spændvidde og konstant Inertimoment I_c (Fig. 77). I den øvrige Del af Pladen er de bøjende Momenter mindre end for Pladen i Fig. 77.

Nedbøjningerne er kun omtrent halvt saa store som for en Plade med samme Spændvidde og konstant Inertimoment I_c .

5. Plade, hvori der ikke kan optræde negative bøjende Momenter i Søjlerækkerne.

Ved Systemer med Jernindlæg i fire Retninger, hvor Jernindlægget over Søjlerne er anbragt i fire Striber, af hvilke de to ligger i Søjlerækkerne, medens de andre to ligger i Diagonalretningerne, bliver enten Jernene i alle fire Striber eller kun Jernene i de to af Striberne, i Almindelighed i Diagonalretningerne, bøjet op i Pladens Overside i Nærheden af Understøtningerne.

I Søjlerækkerne vil der da være nogle Strækninger, som ikke overdækkes af opbøjede Jern. Man kan da paa disse Strækninger indlægge Jern i Pladens Overside vinkelret paa de i Undersiden liggende Striber*). I mange udførte Konstruktioner har man dog ikke indlagt disse Jern i Pladens Overside**), og man maa da for saadanne Plader regne, at der ikke kan optræde negative Momenter paa de Strækninger i Søjlerækkerne, hvor der ikke findes opbøjede Jern.

Forudsættes Armeringsstribernes Bredde at være $\frac{7}{16}l$ ***), og antages alle Diagonaljernene at være opbøjede, bliver den Strækning, paa hvilken der ikke findes opbøjede Jern,

$$l \cdot \left(1 - \frac{7}{16} \sqrt{2}\right) = \text{ca. } 0,4l.$$

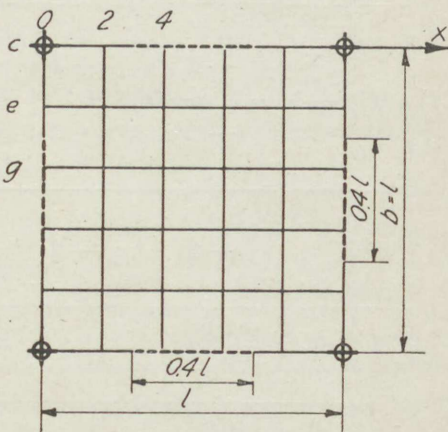


Fig. 82.

*) Dette er f. Ex. angivet i Taylor and Thompson, Concrete, Plain and Reinforced, New York and London, 1916, Side 541, Fig. 166. Forfatterne anbefaler her at lade de to Stribers Jernindlæg være gennemgaaende i Pladens Underside.

**) Dette er saaledes Tilfældet i »Mushroom System«. Se f. Ex. Eddy, The Theory of the Flexure and Strength of Rectangular Flat Plates, Applied to Reinforced Concrete Floor Slabs, Minneapolis 1913, Side 2. I Plader udført efter dette System bøjes alle fire Stribers Jernindlæg op i Pladens Overside over Kapitælerne.

*** Eddy, The Theory of the Flexure . . ., Side 2.

Fig. 82 viser en saadan Plade, for hvilken det antages, at der ikke kan optræde negative Momenter i de viste punkterede Snit i Søjlerækkerne. Snittenes Længde er 0,4*l*. I Punkt (c, 4) regnes derfor Momentet $M_y = 0$ og i Punkt (g, 0) Momentet $M_x = 0$. I de øvrige Punkter antages Momenterne at kunne udtrykkes ved Nedbøjningerne ved Hjælp af Lign. (11).

For $\mu = 0$ bliver Lign. (8), som opskrives for Punkterne (c, 4) og (e, 4), herved

	0	2	4	4	2
<i>g</i>			+ 1		
<i>e</i>		+ 2	- 2 - 2	+ 2	
(c, 4) <i>c</i>	+ 1	- 2 - 2	+ 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1	- 2 - 2	+ 1
<i>e</i>		+ 2	- 2 - 2 - 2	+ 2	
<i>g</i>			+ 1		

$$= \frac{p\lambda^4}{EI},$$

	0	2	4	4	2
<i>e</i>					
<i>c</i>		+ 2	- 2 - 2 - 2	+ 2	
(e, 4) <i>e</i>	+ 1	- 2 - 2	+ 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1	- 2 - 2	+ 1
<i>g</i>		+ 2	- 2 - 2 - 2	+ 2	
<i>g</i>			+ 1		

$$= \frac{p\lambda^4}{EI}.$$

For Punkterne $(c, 0)$, $(c, 2)$, $(e, 2)$ og $(g, 4)$ anvendes Lign. (14).
De ordnede Ligninger er

$$\begin{array}{llll}
 (c, 0) & 20 c_0 - 32 c_2 + 4 c_4 + 8 e_2 & = -24 \frac{p\lambda^4}{EI}, \\
 (c, 2) & -8 c_0 + 25 c_2 - 7 c_4 - 16 e_2 + 6 e_4 & = 1 \gg, \\
 (c, 4) & c_0 - 7 c_2 + 8 c_4 + 4 e_2 - 8 e_4 + 2 g_4 & = 1 \gg, \\
 (e, 2) & 2 c_0 - 16 c_2 + 4 c_4 + 22 e_2 - 14 e_4 + 2 g_4 & = 1 \gg, \\
 (e, 4) & 3 c_2 - 4 c_4 - 7 e_2 + 13 e_4 - 5 g_4 & = 1 \gg, \\
 (g, 4) & 2 c_4 + 2 e_2 - 10 e_4 + 6 g_4 & = 1 \gg.
 \end{array}$$

Idet $c_0 = 0$, findes heraf

$$\begin{array}{ll}
 c_2 = 478 \frac{p\lambda^4}{240 EI}, \\
 c_4 = 816 \gg, \\
 e_2 = 784 \gg, \\
 e_4 = 1091 \gg, \\
 g_4 = 1325 \gg.
 \end{array}$$

Nedbøjninger.

	0	2	4	
c	0	0,00319	0,00544	$\frac{pl^4}{EI}$
e	0,00319	0,00523	0,00727	$\gg$
g	0,00544	0,00727	0,00883	$\gg$

Momenter M_x for $\mu = 0$.

	0	2	4	
c	-0,1593	+0,0233	+0,0563	pl^2
e	-0,1020	-0,0002	+0,0512	$\gg$
g	0	+0,0068	+0,0390	$\gg$

De positive bøjende Momenter midt i Feltet bliver altsaa en Del større end i en Plade med konstant Inertimoment (Fig. 77).

§ 27. Kvadratiske og rektangulære Felter; Plade kontinuerlig over uendelig mange Fag i begge Retninger; konstant Inertimoment.

I § 26 er det for en Plade med kvadratiske Felter og ensformig fordelt Belastning undersøgt, hvorledes Nedbøjningerne og de bøjende Momenter varierer ved forskellige Konstruktioner af Plader og Kapitæler.

I det følgende beregnes Nedbøjninger og bøjende Momenter i en Plade med kvadratiske Felter og i en Plade med rektangulære Felter, hvis Sidelinier er l og $b = \frac{2}{3}l$. For begge Plader forudsættes konstant Inertimoment, og Reaktionen regnes at virke i enkelte Punkter. Hver af Pladerne beregnes for

- en ensformig fordelt Belastning over alle Fag,
- en ensformig fordelt Belastning i hvert andet Fag (Stribebelastning, Fig. 84 og 90),
- en Enkeltkraft P midt i hvert Felt.

Ved Pladen med kvadratiske Felter udføres Beregningen tillige for en ensformig fordelt Belastning p i Skakbrætform (Fig. 87). Endvidere undersøges for denne Plade, hvilken Indflydelse Søjlerne Stivhed har paa Nedbøjningerne og de bøjende Momenter i Pladen, og de største bøjende Momenter i Søjlerne beregnes.

Beregningen udføres for den kvadratiske Plade med $\lambda = \frac{1}{6}l$ og for den rektangulære Plade med $\lambda = \frac{1}{6}l = \frac{1}{4}b$.

1. Kvadratisk Plade.

a. Ensformig fordelt Belastning over alle Fag (Fig. 83).

Beregningen er udført i Exemplet i § 2. Nedbøjningerne og de bøjende Momenter M_x er gengivet i nedenstaaende Tabeller.

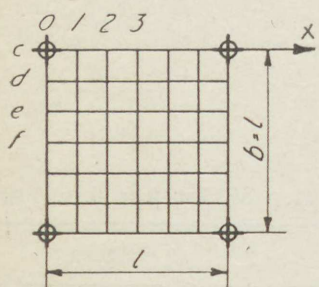


Fig. 83.

Nedbøjninger.

	0	1	2	3	
c	0	0,00231	0,00458	0,00545	$(1-\mu^2) \frac{pl^4}{EI}$
d	0,00231	0,00359	0,00526	0,00596	»
e	0,00458	0,00526	0,00636	0,00685	»
f	0,00545	0,00596	0,00695	0,00726	»

Momenter M_x .

	0	1	2	3	
c	$-0,1666 - \mu \cdot 0,1666$	$+0,0019 - \mu \cdot 0,0920$	$+0,0501 - \mu \cdot 0,0493$	$+0,0626 - \mu \cdot 0,0369$	pl^2
d	$-0,0920 + \mu \cdot 0,0019$	$-0,0140 - \mu \cdot 0,0140$	$+0,0349 - \mu \cdot 0,0148$	$+0,0502 - \mu \cdot 0,0136$	»
e	$-0,0493 + \mu \cdot 0,0501$	$-0,0148 + \mu \cdot 0,0349$	$+0,0217 + \mu \cdot 0,0217$	$+0,0355 + \mu \cdot 0,0172$	»
f	$-0,0369 + \mu \cdot 0,0626$	$-0,0136 + \mu \cdot 0,0502$	$+0,0172 + \mu \cdot 0,0355$	$+0,0298 + \mu \cdot 0,0298$	»

b. Ensformig fordelt Belastning i hvert andet Fag (Stribebelastning, Fig. 84).

Belastningen p forudsættes at virke i Striber, hvis Bredde er lig med Fagvidden, og hvis Længde i y -Aksens Retning er uendelig. Disse Belastningsstriber er beliggende saaledes, at hvert andet Fag er belastet, medens hvert andet er ubelastet.

Som angivet i § 19 kan denne Belastning tænkes fremkommen ved først at anbringe Belastningen $\frac{1}{2}p$ over alle Fag og dernæst

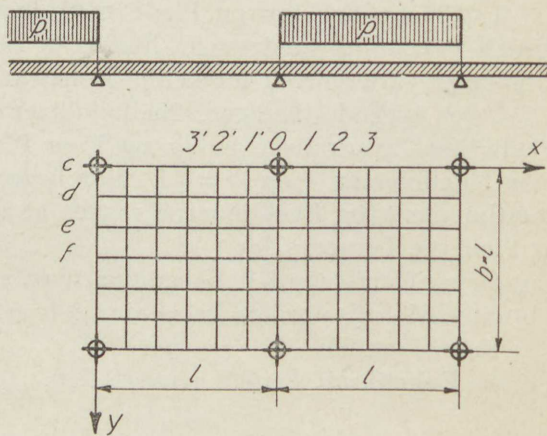


Fig. 84.

anbringe Belastningen $+\frac{1}{2}p$ og $-\frac{1}{2}p$ skiftevis i hvert andet Fag. I Stedet for Belastningen $\frac{1}{2}p$ regnes med Belastningen p , hvorefter Resultaterne halveres.

Ved en Plade med Stribe-
belastningen $+p$ og $-p$
skiftevis i hvert andet Fag
(Fig. 85) forsvinder Søjle-
reaktioner, og $\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}$ bliver

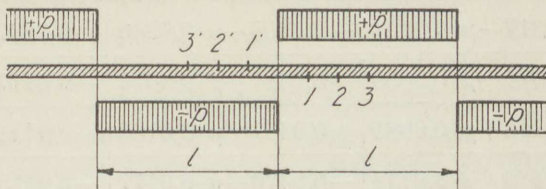


Fig. 85.

overalt Nul. For et vilkaar-
ligt Punkt i Linierne 1, 2 og 3 bliver Ligningerne (15) og (16) herved

Lign. 16				Lign. 15			
$-2Z_1 + Z_2$	$= 1$	$(1 - \mu^2)$	$\frac{p\lambda^4}{EI}$	$-2z_1 + z_2$	$=$	Z_1	
$Z_1 - 2Z_2 + Z_3$	$= 1$	»	»	$z_1 - 2z_2 + z_3$	$=$	Z_2	
$2Z_2 - 2Z_3$	$= 1$	»	»	$2z_2 - 2z_3$	$=$	Z_3	

Heraf findes

	3'	2'	1'	0	1	2	3	
$Z =$	+ 9	+ 8	+ 5	0	- 5	- 8	- 9	$(1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{2EI}$
$z =$	-69	-60	-35	0	+35	+60	+69	$(1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{4EI}$

eller, idet $M_x = -\frac{EI}{1 - \mu^2} \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}$ og $Z = \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}$,

	3'	2'	1'	0	1	2	3	
$Z =$	-0,01331	-0,01157	-0,00675	0	+0,00675	+0,01157	+0,01331	$(1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}$
$M_x =$	-0,1250	-0,1111	-0,0694	0	+0,0694	+0,1111	+0,1250	pl^2

De fundne Resultater for Belastningen p over alle Fag og for Belastningen skiftevis $+p$ og $-p$ adderes og halveres, hvorved findes for den i Fig. 84 viste Plade:

Nedbøjninger.

	3'	2'	1'	0	1	2	3	
c	-0,00393	-0,00349	-0,00222	0	+0,00453	+0,00808	+0,00938	$(1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}$
d	-0,00367	-0,00315	-0,00158	+0,00116	+0,00517	+0,00842	+0,00964	»
e	-0,00322	-0,00260	-0,00074	+0,00229	+0,00601	+0,00897	+0,01009	»
f	-0,00302	-0,00236	-0,00039	+0,00273	+0,00636	+0,00921	+0,01029	»

M_x i ubelastet Fag.

	3'	2'	1'	0	
c	$-0,0312 - \mu \cdot 0,0184$	$-0,0305 - \mu \cdot 0,0246$	$-0,0337 - \mu \cdot 0,0460$	$-0,0833 - \mu \cdot 0,0833$	pl^2
d	$-0,0374 - \mu \cdot 0,0068$	$-0,0381 - \mu \cdot 0,0074$	$-0,0417 - \mu \cdot 0,0070$	$-0,0460 + \mu \cdot 0,0009$	»
e	$-0,0448 + \mu \cdot 0,0086$	$-0,0447 + \mu \cdot 0,0108$	$-0,0421 + \mu \cdot 0,0175$	$-0,0246 + \mu \cdot 0,0250$	»
f	$-0,0476 + \mu \cdot 0,0149$	$-0,0470 + \mu \cdot 0,0177$	$-0,0415 + \mu \cdot 0,0251$	$-0,0184 + \mu \cdot 0,0313$	»

 M_x i belastet Fag.

	0	1	2	3	
c	$-0,0833 - \mu \cdot 0,0833$	$+0,0357 - \mu \cdot 0,0460$	$+0,0806 - \mu \cdot 0,0246$	$+0,0938 - \mu \cdot 0,0184$	pl^2
d	$-0,0460 + \mu \cdot 0,0009$	$+0,0277 - \mu \cdot 0,0070$	$+0,0730 - \mu \cdot 0,0074$	$+0,0876 - \mu \cdot 0,0068$	»
e	$-0,0246 + \mu \cdot 0,0250$	$+0,0273 + \mu \cdot 0,0175$	$+0,0664 + \mu \cdot 0,0108$	$+0,0802 + \mu \cdot 0,0086$	»
f	$-0,0184 + \mu \cdot 0,0313$	$+0,0279 + \mu \cdot 0,0251$	$+0,0641 + \mu \cdot 0,0177$	$+0,0774 + \mu \cdot 0,0149$	»

Kun Momenterne M_x er opstillet i Tabellerne. I et vilkaarligt Punkt har man ifølg Lign. (11)

$$M_x = -EI \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}}{1 - \mu^2} = a + \mu \cdot b,$$

og

$$M_y = -EI \frac{\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} + \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}}{1 - \mu^2} = b + \mu \cdot a.$$

M_y er saaledes bestemt ved de angivne Værdier af M_x . F. Eks. er i Punkt (f, 3)

$$M_{y(f,3)} = (0,0149 + \mu \cdot 0,0774) pl^2.$$

For $\mu = 0,2$ bliver de positive bøjende Momenter i et belastet Fag i Punkterne (c, 3) og (f, 3) (Fig. 84)

$$M_{x(c,3)} = (0,0938 - 0,2 \cdot 0,0184) pl^2 = 0,0901 pl^2 \sim \frac{1}{11,1} pl^2,$$

$$M_{x(f,3)} = (0,0774 + 0,2 \cdot 0,0149) pl^2 = 0,0804 pl^2 \sim \frac{1}{12,4} pl^2.$$

c. Enkeltkraft P midt i hvert Felt (Fig. 86).

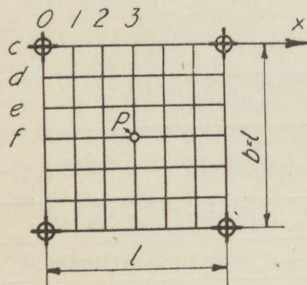


Fig. 86.

For en Enkeltkraft P virkende midt i hvert Felt kan Nedbøjningen bestemmes paa sædvanlig Maade ved Hjælp af Ligningerne (15) og (16), hvorefter Momenterne bestemmes ved Lign. (11). Da man imidlertid i det foregaaende har beregnet Nedbøjningerne og de bøjende Momenter for en ensformig fordelt Belastning over alle Fag, vil man lettere komme til Resultaterne ved Anvendelse af Superpositionsloven. En Be-

lastning bestaaende af en Enkeltkraft P midt i hvert Felt kan nemlig tænkes fremkommen ved Addition af to forskellige Belastninger. Først tænkes en ensformig fordelt Belastning p anbragt over alle Fag, hvorved Søjlereaktionerne bliver $P=pl^2$. For denne Belastning er Nedbøjningerne og de bøjende Momenter angivet ved den i Fig. 83 viste Plade. Dernæst anbringes Belastningen $-p$ over alle Fag og Enkeltkræfterne $P=pl^2$ midt i alle Felterne. For denne Belastning findes de samme Nedbøjninger og bøjende Momenter M_x som ved den i Fig. 83 viste Plade, men med modsat Fortegn og med Understøtningspunkterne forskudt saaledes, at Enkeltkraften i Punkt $(c, 0)$ tænkes flyttet til Punkt $(f, 3)$.

Ved Addition af disse to Belastninger faas som resulterende Belastning en Enkeltkraft P midt i hvert Felt. Nedbøjningerne og de bøjende Momenter findes da som Summen af de Nedbøjninger og bøjende Momenter, der svarer til de to Belastningstilfælde.

For Punkt $(c, 2)$ finder man saaledes

$$M_x = (0,0501 - \mu \cdot 0,0493)P - (-0,0136 + \mu \cdot 0,0502)P = (0,0637 - \mu \cdot 0,0995)P.$$

For Nedbøjningernes Vedkommende vilde man ved Addition af Nedbøjningerne svarende til de to Belastningstilfælde finde

$$c_0 = -f_3 = -0,00726(1 - \mu^2) \frac{Pl^2}{EI}.$$

Forudsættes Nedbøjningen over Understøtningspunkterne at være Nul, maa der til alle Nedbøjningerne adderes $0,00726(1 - \mu^2) \frac{Pl^2}{EI}$. For Punkt $(c, 2)$ finder man saaledes

$$c_2 = (0,00458 - 0,00596 + 0,00726)(1 - \mu^2) \frac{Pl^2}{EI} = 0,00588(1 - \mu^2) \frac{Pl^2}{EI}.$$

Paa lignende Maade findes alle de i nedenstaaende Tabeller angivne Nedbøjninger og bøjende Momenter M_x .

Nedbøjninger.

	0	1	2	3	
c	0	0,00272	0,00588	0,00726	$(1 - \mu^2) \frac{Pl^2}{EI}$
d	0,00272	0,00449	0,00726	0,00864	» »
e	0,00588	0,00726	0,01003	0,01180	» »
f	0,00726	0,00864	0,01180	0,01452	» »

Momenter M_x .

	0	1	2	3	
c	$-0,1964 - \mu \cdot 0,1964$	$-0,0153 - \mu \cdot 0,1275$	$+0,0637 - \mu \cdot 0,0995$	$+0,0995 - \mu \cdot 0,0995$	P
d	$-0,1275 - \mu \cdot 0,0153$	$-0,0357 - \mu \cdot 0,0357$	$+0,0497 - \mu \cdot 0,0497$	$+0,0995 - \mu \cdot 0,0637$	»
e	$-0,0995 + \mu \cdot 0,0637$	$-0,0497 + \mu \cdot 0,0497$	$+0,0357 + \mu \cdot 0,0357$	$+0,1275 + \mu \cdot 0,0153$	»
f	$-0,0995 + \mu \cdot 0,0995$	$-0,0637 + \mu \cdot 0,0995$	$+0,0153 + \mu \cdot 0,1275$	$+0,1964 + \mu \cdot 0,1964$	»

For $\mu = 0,2$ bliver Middelværdien af det bøjende Moment pr. Længdeenhed paa Strækningen $\lambda = \frac{1}{8}l$ midt i Feltet altsaa

$$M_{x(f,3)} = (0,1964 + 0,2 \cdot 0,1964) P = 0,2357 P \sim \text{ca. } \frac{1}{4,2} P.$$

Midt imellem Søjlerne bliver

$$M_{x(c,3)} = (0,0995 - 0,2 \cdot 0,0995) P = 0,0796 P \sim \text{ca. } \frac{1}{12,5} P,$$

og

$$M_{y(c,3)} = M_{x(f,0)} = -M_{x(c,3)}.$$

Baade de positive og de negative bøjende Momenter bliver altsaa her ca. $\frac{1}{12,5} P$.

d. Ensformig fordelt Belastning i Skakbrætform. (Fig. 87).

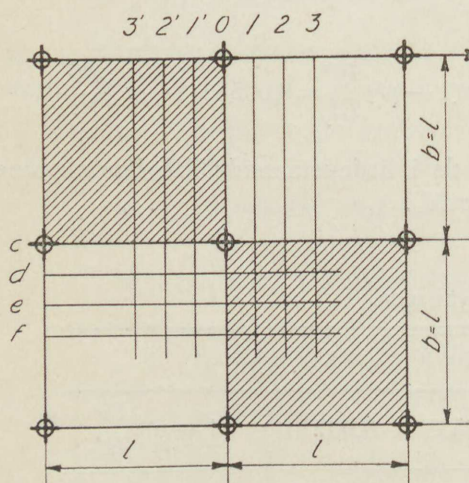


Fig. 87.

Fig. 87 fremstiller en Del af en Plade, som er belastet med en ensformig fordelt Belastning p i Skakbrætform. Denne Belastning kan tænkes fremkommen ved først at anbringe Belastningen $\frac{1}{2}p$ over alle Fag og dernæst anbringe Belastningen $+\frac{1}{2}p$ i de skraverede Felter og $-\frac{1}{2}p$ i de ikke skraverede Felter. I Stedet for at regne med Belastningen $\frac{1}{2}p$ kan man regne med Belastningen p og halvere Resultaterne.

For en Plade belastet med $+p$ og $-p$ i Skakbrætform bliver Ligningerne til Bestemmelse af Nedbøjningerne i et belastet Felt de samme som for en kvadratisk Plade, understøttet langs alle fire Sider og paavirket af Belastningen p . For denne Plade er Beregningen udført i § 7.

De fundne Resultater for Belastningen p over alle Fag og for Belastningen $+p$ og $-p$ i Skakbrætform adderes og halveres, hvorved findes for den i Fig. 87 viste Plade:

Nedbøjninger.

	3'	2'	1'	0	1	2	3	
c	+0,00273	+0,00229	+0,00116	0	+0,00116	+0,00229	+0,00273	$(1-\mu^2) \frac{pl^3}{EI}$
d	+0,00193	+0,00171	+0,00124	+0,00116	+0,00235	+0,00356	+0,00404	» »
e	+0,00165	+0,00163	+0,00171	+0,00229	+0,00356	+0,00474	+0,00520	» »
f	+0,00161	+0,00165	+0,00193	+0,00273	+0,00404	+0,00520	+0,00566	» »

 M_x i ubelastet Felt.

	3'	2'	1'	0	
c	+0,0313— $\mu \cdot 0,0185$	+0,0251— $\mu \cdot 0,0247$	+0,0010— $\mu \cdot 0,0460$	—0,0833— $\mu \cdot 0,0833$	pl^2
d	+0,0159— $\mu \cdot 0,0189$	+0,0087— $\mu \cdot 0,0182$	—0,0136— $\mu \cdot 0,0136$	—0,0460+ $\mu \cdot 0,0010$	»
e	+0,0020— $\mu \cdot 0,0083$	—0,0039— $\mu \cdot 0,0039$	—0,0182+ $\mu \cdot 0,0087$	—0,0247+ $\mu \cdot 0,0251$	»
f	—0,0032— $\mu \cdot 0,0032$	—0,0083+ $\mu \cdot 0,0083$	—0,0189+ $\mu \cdot 0,0159$	—0,0185+ $\mu \cdot 0,0313$	»

 M_x i belastet Felt.

	0	1	2	3	
c	—0,0833— $\mu \cdot 0,0833$	+0,0010— $\mu \cdot 0,0460$	+0,0251— $\mu \cdot 0,0247$	+0,0313— $\mu \cdot 0,0185$	pl^2
d	—0,0460+ $\mu \cdot 0,0010$	—0,0004— $\mu \cdot 0,0004$	+0,0262+ $\mu \cdot 0,0034$	+0,0344+ $\mu \cdot 0,0053$	»
e	—0,0247+ $\mu \cdot 0,0251$	+0,0034+ $\mu \cdot 0,0262$	+0,0256+ $\mu \cdot 0,0256$	+0,0335+ $\mu \cdot 0,0255$	»
f	—0,0185+ $\mu \cdot 0,0313$	+0,0053+ $\mu \cdot 0,0344$	+0,0255+ $\mu \cdot 0,0335$	+0,0330+ $\mu \cdot 0,0330$	»

Nedbøjningerne er overalt mindre end Nedbøjningerne ved ensformig fordelt Belastning over alle Fag (Fig. 83).

I Nærheden af de belastede Felters Midtpunkter er de bøjende Momenter lidt større end ved Belastning over alle Fag.

e. Søjlerens Indflydelse paa Momenter og Nedbøjninger. (Fig. 88).

I § 19 er det allerede blevet omtalt, at der ved usymmetrisk Belastning vil optræde bøjende Momenter i Søjlerne, og at disse bøjende Momenter vil faa Indflydelse paa Nedbøjningerne og Momenterne i Pladen. Momenterne i Pladen vil da bestaa af følgende to Dele:

- 1) af de Momenter, der optræder i Pladen, naar denne er simpelt understøttet i enkelte Punkter, og
- 2) af de Momenter, der overføres fra Søjlerne ved disses Forbindelse med Pladen.

For ensformig fordelt Belastning over alle Fag (Fig. 83) og for Belastning i Skakbrætform (Fig. 87) vil der ikke optræde bøjende Momenter i Søjlerne. Dette vil derimod være Tilfældet ved Stribebelastning (Fig. 84 og 88). For denne Belastning beregnes derfor Søjlerens Indflydelse.

Den første Del af de ovenfor omtalte Momenter er beregnet for den i Fig. 84 viste Plade. Den anden Del, som hidrører fra det bøjende Moment i Søjlerne, beregnes i det følgende.

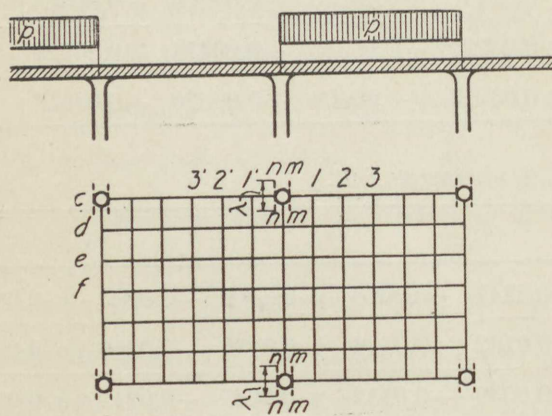


Fig. 88.

Paa Grund af Symmetrien overføres Halvdelen af Søjle's Moment til den ene Side, Halvdelen til den anden Side i Pladen. Momenterne forudsættes at overføres til Pladen i de to tæt ved hinanden liggende Snit $m-m$ og $n-n$ (Fig. 88). Længden af disse Snit er λ . Middelværdien pr. Længdeenhed af det Moment, der

overføres i Snit $m-m$ kaldes X_c . Det tilsvarende Moment pr. Længdeenhed i Snit $n-n$ er $-X_c$, og Momentet foroven i Søjlen er $2X_c\lambda$.

For Simpelteds Skyld regnes Søjlerne forsynede med Charnierer forneden. Hovedsystemet bestaar da af Pladen, som hviler paa Søjler, der er frit drejelige baade foroven og forneden, og som overtallig Størrelse indføres X_c .

X_c bestemmes da ved $X_c = \frac{\delta_{cm}}{\delta_{cc}}$, hvor δ_{cm} er Pladens Vinkelændring i Punkt $(c, 0)$ paa Grund af Belastningen paa Pladen i Hovedsystemet og δ_{cc} den gensidige Vinkelændring af Søjlen og Pladen i Punkt $(c, 0)$ paa Grund af Momentet $X_c = -1$.

For $X_c = -1$ bestemmes Nedbøjningerne ved Ligningerne (15) og (16). Ved Overgangen fra det ubelastede til det belastede Felt i Linie 0 skifter baade Nedbøjningerne og Størrelserne D , E og F Fortegn; man har altsaa $c_0 = d_0 = e_0 = f_0 = 0$ og $D_0 = E_0 = F_0 = 0$.

For Punkt $(c, 1)$ er Lign. (8)

$$\left. \begin{aligned} & + M_{y(d, 1)} \\ & + M_{v(c, d, 0, 1)} - M_{v(c, d, 1, 2)} \\ & + M_{x(c, 0)} \quad \left\{ \begin{array}{l} -2M_{x(c, 1)} \\ -2M_{y(c, 1)} \end{array} \right\} + M_{x(c, 2)} \\ & - M_{v(c, d, 0, 1)} + M_{v(c, d, 1, 2)} \\ & + M_{y(d, 1)} \end{aligned} \right\} = 0.$$

Da $M_{x(c,0)} = X_c = -1$, faas ifølge Lign. (11)

	0	1	2	3
e		+ 1		
d	+ (2— μ)	— 8	+ 2	
c	— (6—2 μ)	+ 19	— 8	+ 1
d	+ (2— μ)	— 8	+ 2	
e		+ 1		

$$= -(1-\mu^2) \frac{\lambda^2}{EI}$$

Idet

$$\left. \begin{array}{l} + d_1 \\ c_0 - 4c_1 + c_2 \\ + d_1 \end{array} \right\} = C_1, \quad \left. \begin{array}{l} + d_2 \\ c_1 - 4c_2 + c_3 \\ + d_2 \end{array} \right\} = C_2, \quad \left. \begin{array}{l} + c_1 \\ d_0 - 4d_1 + d_2 \\ + e_1 \end{array} \right\} = D_1,$$

og $c_0 = d_0 = 0$, kan Ligningen skrives

$$-4C_1 + C_2 + 2D_1 = -(1-\mu^2) \frac{\lambda^2}{EI}$$

Lign. (16) opskrives for de øvrige Punkter, hvis Nedbøjninger søges.

Herved faas følgende Ligninger:

$$\begin{array}{llll} (c, 1) & -4C_1 + C_2 & + 2D_1 & = -(1-\mu^2) \frac{\lambda^2}{EI} \\ (c, 2) & C_1 - 4C_2 + C_3 & + 2D_2 & = 0, \\ (c, 3) & 2C_2 - 4C_3 & + 2D_3 & = 0, \\ (d, 1) & C_1 & - 4D_1 + D_2 & + E_1 = 0, \\ (d, 2) & C_2 & + D_1 - 4D_2 + D_3 & + E_2 = 0, \\ (d, 3) & C_3 & + 2D_2 - 4D_3 & + E_3 = 0, \\ (e, 1) & D_1 & - 4E_1 + E_2 & + F_1 = 0, \\ (e, 2) & D_2 & + E_1 - 4E_2 + E_3 & + F_2 = 0, \\ (e, 3) & D_3 & + 2E_2 - 4E_3 & + F_3 = 0, \\ (f, 1) & 2E_1 & - 4F_1 + F_2 & = 0, \\ (f, 2) & 2E_2 & + F_1 - 4F_2 + F_3 & = 0, \\ (f, 3) & 2E_3 & + 2F_2 - 4F_3 & = 0. \end{array}$$

hvoraf

	1	2	3	
C	1172	720	628	$\frac{1-\mu^2}{2970} \frac{\lambda^2}{EI}$
D	499	540	536	» »
E	284	405	436	» »
F	232	360	398	» »

Lign. (15) faas af Lign. (16) ved at ombytte C_1 med c_1 , C_2 med c_2 o. s. v. og paa højre Side af Lighedstegnet at indføre de fundne Værdier af C_1 , C_2 o. s. v.

Herved findes

	1	2	3	
c	-4399758	-6447600	-7094142	$\frac{1 - \mu^2}{8820900} \frac{\lambda^2}{EI}$
d	-3835296	-6079050	-6808104	» »
e	-3380346	-5621400	-6388254	» »
f	-3221208	-5435100	-6207192	» »

De Værdier af Nedbøjningerne og de bøjende Momenter M_x , som skyldes $X_c = -1$, kaldes henholdsvis z_c og M_{cx} .

Nedbøjninger z_c .

	3'	2'	1'	0	1	2	3	
c	+0,02234	+0,02030	+0,01386	0	-0,01386	-0,02030	-0,02234	$(1 - \mu^2) \frac{l^2}{EI}$
d	+0,02144	+0,01914	+0,01208	0	-0,01208	-0,01914	-0,02144	» »
e	+0,02012	+0,01770	+0,01064	0	-0,01064	-0,01770	-0,02012	» »
f	+0,01955	+0,01712	+0,01015	0	-0,01015	-0,01712	-0,01955	» »

M_{cx} i ubelastet Fag.

	3'	2'	1'	0
c	+0,1466 + $\mu \cdot 0,0649$	+0,1588 + $\mu \cdot 0,0836$	+0,2666 + $\mu \cdot 0,1280$	+1
d	+0,1653 + $\mu \cdot 0,0152$	+0,1717 + $\mu \cdot 0,0101$	+0,1804 - $\mu \cdot 0,0124$	0
e	+0,1739 - $\mu \cdot 0,0271$	+0,1671 - $\mu \cdot 0,0308$	+0,1292 - $\mu \cdot 0,0336$	0
f	+0,1751 - $\mu \cdot 0,0411$	+0,1635 - $\mu \cdot 0,0423$	+0,1142 - $\mu \cdot 0,0361$	0

M_{cx} i belastet Fag.

	0	1	2	3
c	-1	-0,2666 - $\mu \cdot 0,1280$	-0,1588 - $\mu \cdot 0,0836$	-0,1466 - $\mu \cdot 0,0649$
d	0	-0,1804 + $\mu \cdot 0,0124$	-0,1717 - $\mu \cdot 0,0101$	-0,1653 - $\mu \cdot 0,0152$
e	0	-0,1292 + $\mu \cdot 0,0336$	-0,1671 + $\mu \cdot 0,0308$	-0,1739 + $\mu \cdot 0,0271$
f	0	-0,1142 + $\mu \cdot 0,0361$	-0,1635 + $\mu \cdot 0,0423$	-0,1751 + $\mu \cdot 0,0411$

Vinkelændringen af Pladen i Hovedsystemet ved Punkt (c, 0) paa Grund af Momentet $X_c = -1$ findes ved Addition af $\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} \lambda$ i Linie c fra Punkt (c, 3), hvor Tangenten er vandret, til Punkt (c, 0).

Som det ses af ovenstaaende Udtryk for M_x i Linie c, har man de i hosstaaende Tabel angivne Værdier af $\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}$.

Punkt	(c, 0)	(c, 1)	(c, 2)	(c, 3)	
$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} =$	+1	+0,2666	+0,1588	+0,1466	$\frac{1-\mu^2}{EI}$

Vinkelændringen ved Punkt (c, 0) er da

$$\alpha_p = \left(\frac{1}{2} \cdot 0,1466 + 0,1588 + 0,2666 + \frac{1}{2} \cdot 1\right) \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{I(1-\mu^2)}{EI} = (1-\mu^2) \cdot 0,1665 \cdot \frac{I}{EI}.$$

Vinkelændringen af Søjlen i samme Punkt paa Grund af Momentet $2\lambda = 2 \cdot \frac{1}{6} I$, svarende til $X_c = -1$, er

$$\alpha_s = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} I h}{E_s I_s} = 0,1111 \frac{I h}{E_s I_s},$$

hvor h er Søjlen Højde, E_s Søjlematerialets Elasticitetskoefficient og I_s Søjleværsnittets Inertimoment*).

Forudsættes $E_s = E$, bliver den gensidige Vinkelændring altsaa

$$\delta_{cc} = \alpha_p + \alpha_s = \frac{I}{EI} \left[(1-\mu^2) \cdot 0,1665 + 0,1111 h \frac{I}{I_s} \right].$$

For Stribebelastningen (Fig. 84) er

Punkt	(c, 0)	(c, 1)	(c, 2)	(c, 3)	
$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} =$	+0,0833	-0,0357	-0,0806	-0,0938	$(1-\mu^2) \frac{p l^2}{EI}$

og

$$\begin{aligned} \delta_{cm} &= \left[\frac{1}{2} (-0,0938) - 0,0806 - 0,0357 + \frac{1}{2} \cdot 0,0833 \right] \cdot \frac{1}{6} (1-\mu^2) \frac{p l^3}{EI} \\ &= -(1-\mu^2) 0,02025 \frac{p l^3}{EI}. \end{aligned}$$

*) Dersom der findes Søjler baade over og under Pladen, bliver som angivet i § 19

$$\alpha_s = \frac{2}{3} \cdot \frac{\lambda}{E_s \left(\frac{I_1}{h_1} + \frac{I_2}{h_2} \right)},$$

hvor I_1 og I_2 er Inertimomenterne, og h_1 og h_2 Højderne af Søjlerne henholdsvis over og under Pladen.

Man finder altsaa

$$X_c = \frac{\delta_{cm}}{\delta_{cc}} = \frac{-(1 - \mu^2) \cdot 0,02025 \frac{pl^3}{EI}}{\left[(1 - \mu^2) \cdot 0,1665 + 0,1111 h \frac{I}{I_s} \right] \frac{l}{EI}} = - \frac{0,1216}{1 + 0,667 \frac{hI}{(1 - \mu^2) I_s}} pl^2.$$

Ex. 1. Dersom Søjlerne kan regnes uendelig stive i Forhold til Pladen, bliver

$$X_c = -0,1216 pl^2.$$

Idet Nedbøjningerne er

$$z = z_0 - X_c z_c,$$

og Momenterne

$$M = M_0 - X_c M_c,$$

hvor z_0 og M_0 er de i Tabellerne Side 193—194 for Pladen i Fig. 84 angivne Nedbøjninger og Momenter, findes herved:

Nedbøjninger.

	3'	2'	1'	0	1	2	3	
<i>c</i>	—0,00120	—0,00102	—0,00053	0	+0,00285	+0,00561	+0,00667	$(1 - \mu^2) \frac{pl^4}{EI}$
<i>d</i>	—0,00106	—0,00082	—0,00011	+0,00116	+0,00370	+0,00609	+0,00703	» »
<i>e</i>	—0,00077	—0,00045	+0,00055	+0,00229	+0,00472	+0,00682	+0,00764	» »
<i>f</i>	—0,00064	—0,00028	+0,00084	+0,00273	+0,00513	+0,00713	+0,00791	» »

M_x i ubelastet Fag.

	3'	2'	1'	0	
<i>c</i>	—0,0134— $\mu \cdot 0,0105$	—0,0112— $\mu \cdot 0,0144$	—0,0013— $\mu \cdot 0,0304$	+0,0383— $\mu \cdot 0,0833$	pl^2
<i>d</i>	—0,0173— $\mu \cdot 0,0050$	—0,0172— $\mu \cdot 0,0062$	—0,0198— $\mu \cdot 0,0085$	—0,0460+ $\mu \cdot 0,0009$	»
<i>e</i>	—0,0237+ $\mu \cdot 0,0053$	—0,0244+ $\mu \cdot 0,0070$	—0,0264+ $\mu \cdot 0,0134$	—0,0246+ $\mu \cdot 0,0250$	»
<i>f</i>	—0,0263+ $\mu \cdot 0,0099$	—0,0271+ $\mu \cdot 0,0126$	—0,0276+ $\mu \cdot 0,0207$	—0,0184+ $\mu \cdot 0,0313$	»

M_x i belastet Fag.

	0	1	2	3	
<i>c</i>	—0,2049— $\mu \cdot 0,0833$	+0,0033— $\mu \cdot 0,0616$	+0,0613— $\mu \cdot 0,0348$	+0,0760— $\mu \cdot 0,0263$	pl^2
<i>d</i>	—0,0460+ $\mu \cdot 0,0009$	+0,0058— $\mu \cdot 0,0055$	+0,0521— $\mu \cdot 0,0086$	+0,0675— $\mu \cdot 0,0087$	»
<i>e</i>	—0,0246+ $\mu \cdot 0,0250$	+0,0116+ $\mu \cdot 0,0216$	+0,0461+ $\mu \cdot 0,0146$	+0,0591+ $\mu \cdot 0,0119$	»
<i>f</i>	—0,0184+ $\mu \cdot 0,0313$	+0,0140+ $\mu \cdot 0,0295$	+0,0442+ $\mu \cdot 0,0228$	+0,0561+ $\mu \cdot 0,0199$	»

For $\mu = 0,2$ bliver det bøjende Moment i et belastet Fag midt imellem to Søjler

$$M_{x(c,3)} = (0,0760 - 0,2 \cdot 0,0263) pl^2 = 0,0707 pl^2 \sim \frac{1}{14,1} pl^2,$$

og midt i et belastet Felt

$$M_{x(f,3)} = (0,0561 + 0,2 \cdot 0,0199) pl^2 = 0,0601 pl^2 \sim \frac{1}{16,6} pl^2.$$

Dersom Søjlerne var forsynet med Charnierer foroven og forneden, vilde de bøjende Momenter blive (Side 194, Fig. 84)

$$M_{x(c,3)} = 0,0901 pl^2 \sim \frac{1}{11,1} pl^2,$$

og

$$M_{x(f,3)} = 0,0804 pl^2 \sim \frac{1}{12,4} pl^2,$$

medens man med en ensformig fordelt Belastning over alle Fag finder Momenterne (Side 192, Fig. 83)

$$M_{x(c,3)} = (0,0626 - 0,2 \cdot 0,0369) pl^2 = 0,0552 pl^2 \sim \frac{1}{18} pl^2,$$

$$M_{x(f,3)} = (0,0298 + 0,2 \cdot 0,0298) pl^2 = 0,0358 pl^2 \sim \frac{1}{28} pl^2.$$

Det bøjende Moment i Søjlen er

$$M_s = 2X_c\lambda = 2 \cdot 0,1216 \cdot \frac{1}{6} pl^3 = 0,0405 pl^3 \sim \frac{1}{25} pl^3.$$

Dette Moment i Søjlen er fundet under Forudsætning af, at Pladens Inertimoment er konstant. Dersom Pladen har variabelt Inertimoment, der varierer saaledes, at det er størst i Nærheden af Søjlerne, vil Søjlemomentet kunne blive endnu større*).

Ex. 2. Ifølge amerikanske Normer**) maa en Søjles mindste Sidelinie hverken være mindre end $\frac{1}{12}l$ eller $\frac{1}{12}h$. Pladetykkelsen maa ikke være mindre end $\frac{1}{32}l$. Som Exempel undersøges en Plade, hvis Tykkelse er $\frac{1}{32}l$, hvilende paa kvadratiske Søjler med Sidelinie $\frac{1}{12}l$ og med $h = l$. Det forudsættes, at Forholdet mellem Pladens og Søjls Inertimomenter bestemmes som ved homogent Materiale. Man har da

$$X_c = - \frac{0,1216}{1 + 0,667 \frac{hI}{(1 - \mu^2)I_s}} \cdot pl^2,$$

*) Se § 19, hvor der fandtes et Søjlemoment

$$M_s = \frac{1}{2} \cdot 0,202 pl^3 \sim \frac{1}{10} pl^3,$$

der fordeles paa Søjlen over og Søjlen under Pladen.

**) Se f. Ex. Ruling of the Design of Flat Slab Constructions in the City of Chicago 1914.

hvor

$$h = l,$$

$$I = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{24} l\right)^3,$$

altsaa

$$I_s = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{12} l\right)^4,$$

$$h \frac{I}{I_s} = \frac{3}{2}.$$

For $\mu = 0$ bliver

$$X_c = - \frac{0,1216}{1 + 0,667 \cdot \frac{3}{2}} pl^2 = -0,0608 pl^2.$$

Nedbøjninger og Momenter findes af

$$z = z_0 - X_c z_c,$$

og

$$M = M_0 - X_c M_c \quad \text{som i Ex. 1.}$$

Nedbøjninger.

	3'	2'	1'	0	1	2	3	
<i>c</i>	-0,00256	-0,00225	-0,00138	0	+0,00369	+0,00685	+0,00803	$\frac{pl^4}{EI}$
<i>d</i>	-0,00237	-0,00199	-0,00085	+0,00116	+0,00444	+0,00726	+0,00834	»
<i>e</i>	-0,00200	-0,00152	-0,00009	+0,00229	+0,00536	+0,00789	+0,00887	»
<i>f</i>	-0,00183	-0,00132	+0,00023	+0,00273	+0,00574	+0,00817	+0,00910	»

Momenter M_x .

	3'	2'	1'	0	1	2	3	
<i>c</i>	-0,0223	-0,0208	-0,0175	$\begin{matrix} -0,0225 \\ -0,1441 \end{matrix}$	+0,0195	+0,0709	+0,0849	pl^2
<i>d</i>	-0,0273	-0,0277	-0,0307	-0,0460	+0,0167	+0,0626	+0,0775	»
<i>e</i>	-0,0342	-0,0345	-0,0342	-0,0246	+0,0194	+0,0562	+0,0696	»
<i>f</i>	-0,0370	-0,0371	-0,0346	-0,0184	+0,0210	+0,0542	+0,0668	»

For $\mu = 0,2$ bliver

$$X_c = - \frac{0,1216 pl^2}{1 + 0,667 \cdot \frac{3}{2 \cdot 0,96}} = -0,0595 pl^2.$$

Herved findes for Pladen med de forudsatte slanke Søjler

$$M_{x(c,3)} = (0,0851 - 0,2 \cdot 0,0223) pl^2 = 0,0806 pl^2 \sim \frac{1}{12,4} pl^2,$$

og

$$M_{x(f,3)} = (0,0670 + 0,2 \cdot 0,0173) pl^2 = 0,0705 pl^2 \sim \frac{1}{14,2} pl^2.$$

Det bøjende Moment i Søjlen bliver

$$M_s = 2X_c\lambda = 2 \cdot 0,0595 \cdot \frac{1}{6} pl^3 = 0,0198 pl^3 \sim \frac{1}{50} pl^3.$$

2. Rektangulær Plade, $b = \frac{2}{3}l$.

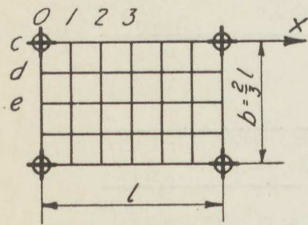


Fig. 89.

a. Ensformig fordelt Belastning over alle Fag (Fig. 89).

Naar Belastningen p er ensformig fordelt over alle Fag, bliver Lign. 16:

$(c, 0)$	$-4C_0 + 2C_1$	$+ 2D_0$	$= -23(1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI},$
$(c, 1)$	$C_0 - 4C_1 + C_2$	$+ 2D_1$	$= 1 \quad \gg \quad \gg,$
$(c, 2)$	$C_1 - 4C_2 + C_3$	$+ 2D_2$	$= 1 \quad \gg \quad \gg,$
$(c, 3)$	$2C_2 - 4C_3$	$+ 2D_3$	$= 1 \quad \gg \quad \gg,$
$(d, 0)$	C_0	$-4D_0 + 2D_1$	$+ E_0 = 1 \quad \gg \quad \gg,$
$(d, 1)$	C_1	$+ D_0 - 4D_1 + D_2$	$+ E_1 = 1 \quad \gg \quad \gg,$
$(d, 2)$	C_2	$+ D_1 - 4D_2 + D_3$	$+ E_2 = 1 \quad \gg \quad \gg,$
$(d, 3)$	C_3	$+ 2D_2 - 4D_3$	$+ E_3 = 1 \quad \gg \quad \gg,$
$(e, 0)$		$2D_0$	$-4E_0 + 2E_1 = 1 \quad \gg \quad \gg,$
$(e, 1)$		$2D_1$	$+ E_0 - 4E_1 + E_2 = 1 \quad \gg \quad \gg,$
$(e, 2)$		$2D_2$	$+ E_1 - 4E_2 + E_3 = 1 \quad \gg \quad \gg,$
$(e, 3)$		$2D_3$	$+ 2E_2 - 4E_3 = 1 \quad \gg \quad \gg,$

hvoraf

$C_1 = C_0 - 2483 \frac{1 - \mu^2}{420} \frac{p\lambda^4}{EI},$	$E_0 = C_0 - 2912 \frac{1 - \mu^2}{420} \frac{p\lambda^4}{EI},$
$C_2 = C_0 - 3456 \quad \gg \quad \gg,$	$E_1 = C_0 - 3267 \quad \gg \quad \gg,$
$C_3 = C_0 - 3731 \quad \gg \quad \gg,$	$E_2 = C_0 - 3680 \quad \gg \quad \gg,$
	$E_3 = C_0 - 3843 \quad \gg \quad \gg.$
$D_0 = C_0 - 2347 \quad \gg \quad \gg,$	
$D_1 = C_0 - 3028 \quad \gg \quad \gg,$	
$D_2 = C_0 - 3595 \quad \gg \quad \gg,$	
$D_3 = C_0 - 3796 \quad \gg \quad \gg,$	

Ved Anvendelse af Lign. (15) findes herefter

$$C_0 = 3126,5 \frac{1 - \mu^2}{420} \frac{p\lambda^4}{EI},$$

og

	0	1	2	3	
<i>c</i>	0	254503	519936	625191	$\frac{1 - \mu^2}{117600} \frac{p\lambda^4}{EI}$
<i>d</i>	183207	339128	553895	645816	» »
<i>e</i>	272832	392487	579520	662823	» »

Nedbøjninger.

	0	1	2	3	
<i>c</i>	0	0,00167	0,00341	0,00410	$(1 - \mu^2) \frac{pl^4}{EI}$
<i>d</i>	0,00120	0,00223	0,00363	0,00424	» »
<i>e</i>	0,00179	0,00258	0,00380	0,00435	» »

Momenter M_x .

	0	1	2	3	
<i>c</i>	$-0,1202 - \mu \cdot 0,0865$	$-0,0026 - \mu \cdot 0,0400$	$+0,0378 - \mu \cdot 0,0160$	$+0,0497 - \mu \cdot 0,0097$	pl^2
<i>d</i>	$-0,0737 + \mu \cdot 0,0221$	$-0,0139 + \mu \cdot 0,0074$	$+0,0290 + \mu \cdot 0,0020$	$+0,0434 + \mu \cdot 0,0009$	»
<i>e</i>	$-0,0565 + \mu \cdot 0,0423$	$-0,0159 + \mu \cdot 0,0252$	$+0,0245 + \mu \cdot 0,0121$	$+0,0394 + \mu \cdot 0,0080$	»

Momenter M_y .

	0	1	2	3	
<i>c</i>	$-0,1947 - \mu \cdot 0,2705$	$-0,0899 - \mu \cdot 0,0058$	$-0,0361 + \mu \cdot 0,0851$	$-0,0219 + \mu \cdot 0,1120$	pb^2
<i>d</i>	$+0,0497 - \mu \cdot 0,1657$	$+0,0166 - \mu \cdot 0,0313$	$+0,0044 + \mu \cdot 0,0653$	$+0,0019 + \mu \cdot 0,0976$	»
<i>e</i>	$+0,0953 - \mu \cdot 0,1271$	$+0,0567 - \mu \cdot 0,0358$	$+0,0272 + \mu \cdot 0,0551$	$+0,0181 + \mu \cdot 0,0886$	»

Ligesom ved den kvadratiske Plade optræder de største positive Momenter i Søjlerækkerne.

For den rektangulære Plade med Sidelinierne l og $\frac{2}{3}l$ (Fig. 89) bliver med $\mu = 0,2$ de positive Momenter i Søjlerækkerne

$$M_{x(c,3)} = (0,0497 - 0,2 \cdot 0,0097) pl^2 = 0,0478 pl^2 \sim \frac{1}{21} pl^2,$$

$$M_{y(e,0)} = (0,0953 - 0,2 \cdot 0,1271) pb^2 = 0,0699 pb^2 \sim \frac{1}{14} pb^2 \sim \frac{1}{32} pl^2,$$

og midt i Feltet

$$M_{x(e,3)} = (0,0394 + 0,2 \cdot 0,0080) pl^2 = 0,0420 pl^2 \sim \frac{1}{24} pl^2.$$

De tilsvarende Momenter i den kvadratiske Plade med Sidelinie l (Fig. 83) er i Søjlerækkerne

$$M_{x(c,3)} = (0,0626 - 0,2 \cdot 0,0369) pl^2 = 0,0552 pl^2 \sim \frac{1}{18} pl^2,$$

$$M_{y(f,0)} = M_{x(e,3)} = 0,0552 pl^2 \sim \frac{1}{18} pl^2,$$

og midt i Feltet

$$M_{x(f,3)} = (0,0298 + 0,2 \cdot 0,0298) pl^2 = 0,0358 pl^2 \sim \frac{1}{28} pl^2.$$

- b. Ensformig fordelt Belastning i hvert andet Fag (Stribebelastning, Fig. 90).

Beregningen af Pladen paavirket af den i Fig. 90 viste Stribebelastning udføres paa samme Maade som for den kvadratiske Plade (Fig. 84). De paa Side 193 angivne Værdier af z og M_x for Belastningen $+p$ og $-p$ skiftevis i hvert andet Fag gælder ogsaa for den rektangulære Plade.

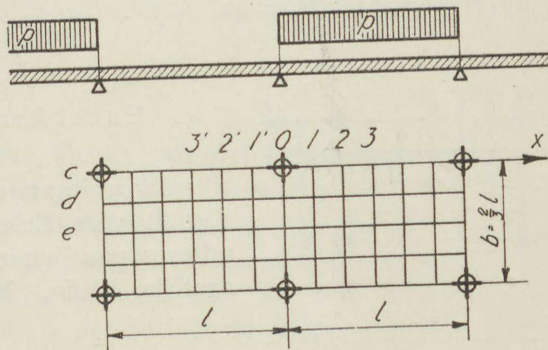


Fig. 90.

Ved at addere og halvere Resultaterne for Belastningen p over alle Fag og for Belastningen skiftevis $+p$ og $-p$ faas for den i Fig. 90 viste Plade:

Nedbøjninger.

	3'	2'	1'	0	1	2	3	
c	-0,00460	-0,00408	-0,00254	0	+0,00421	+0,00749	+0,00871	$(1-\mu^2) \frac{pl^4}{EI}$
d	-0,00453	-0,00397	-0,00226	+0,00060	+0,00449	+0,00760	+0,00878	» »
e	-0,00448	-0,00389	-0,00208	+0,00090	+0,00467	+0,00768	+0,00883	» »

M_x i ubelastet Fag.

	3'	2'	1'	0	
c	-0,0376 - $\mu \cdot 0,0048$	-0,0366 - $\mu \cdot 0,0080$	-0,0360 - $\mu \cdot 0,0200$	-0,0601 - $\mu \cdot 0,0433$	pl^2
d	-0,0408 + $\mu \cdot 0,0004$	-0,0410 + $\mu \cdot 0,0010$	-0,0417 + $\mu \cdot 0,0037$	-0,0368 + $\mu \cdot 0,0111$	»
e	-0,0428 + $\mu \cdot 0,0040$	-0,0433 + $\mu \cdot 0,0060$	-0,0427 + $\mu \cdot 0,0126$	-0,0283 + $\mu \cdot 0,0212$	»

M_x i belastet Fag.

	0	1	2	3	
c	$-0,0601 - \mu \cdot 0,0433$	$+0,0334 - \mu \cdot 0,0200$	$+0,0745 - \mu \cdot 0,0080$	$+0,0874 - \mu \cdot 0,0048$	pl^2
d	$-0,0368 + \mu \cdot 0,0111$	$+0,0277 + \mu \cdot 0,0037$	$+0,0701 + \mu \cdot 0,0010$	$+0,0842 + \mu \cdot 0,0004$	»
e	$-0,0283 + \mu \cdot 0,0212$	$+0,0267 + \mu \cdot 0,0126$	$+0,0678 + \mu \cdot 0,0060$	$+0,0822 + \mu \cdot 0,0040$	»

M_y er bestemt ved de angivne Værdier af M_x paa lignende Maade som ved den kvadratiske Plade. For Punkt $(e, 3)$ har man saaledes

$$M_{y(c,3)} = (0,0040 + \mu \cdot 0,0822) pl^2 = (0,0090 + \mu \cdot 0,1849) pb^2.$$

Momentet i et Snit parallelt med den korte Side gennem et belastet Felts Midtpunkt varierer ikke stærkt. Baade i Punkt $(c, 3)$ og i Punkt $(e, 3)$ er Momentet $M_x = \text{ca. } \frac{1}{12} pl^2$.

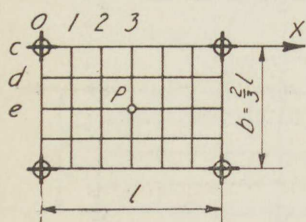


Fig. 91.

c. Enkeltkraft P midt i hvert Felt (Fig. 91).

Beregningen af Pladen paavirket af den i Fig. 91 viste Enkeltkraft P midt i hvert Felt udføres paa lignende Maade som for den kvadratiske Plade. Man finder herved

Nedbøjninger.

	0	1	2	3	
c	0	0,00499	0,01167	0,01499	$(1 - \mu^2) \frac{Pbl}{EI}$
d	0,00296	0,00661	0,01296	0,01661	» »
e	0,00458	0,00790	0,01458	0,01957	» »

Momenter M_x .

	0	1	2	3	
c	$-0,1595 - \mu \cdot 0,0945$	$-0,0271 - \mu \cdot 0,0521$	$+0,0538 - \mu \cdot 0,0412$	$+0,1063 - \mu \cdot 0,0521$	$P \frac{l}{b}$
d	$-0,1171 + \mu \cdot 0,0212$	$-0,0429 + \mu \cdot 0,0054$	$+0,0429 - \mu \cdot 0,0054$	$+0,1171 - \mu \cdot 0,0212$	»
e	$-0,1063 + \mu \cdot 0,0521$	$-0,0538 + \mu \cdot 0,0412$	$+0,0271 + \mu \cdot 0,0521$	$+0,1595 + \mu \cdot 0,0945$	»

Momenter M_y .

	0	1	2	3	
c	$-0,2128 - \mu \cdot 0,3591$	$-0,1172 - \mu \cdot 0,0609$	$-0,0928 + \mu \cdot 0,1209$	$-0,1172 + \mu \cdot 0,2391$	$P \frac{b}{l}$
d	$+0,0478 - \mu \cdot 0,2633$	$+0,0122 - \mu \cdot 0,0966$	$-0,0122 + \mu \cdot 0,0966$	$-0,0478 + \mu \cdot 0,2633$	»
e	$+0,1172 - \mu \cdot 0,2391$	$+0,0928 - \mu \cdot 0,1209$	$+0,1172 + \mu \cdot 0,0609$	$+0,2128 + \mu \cdot 0,3591$	»

For $\mu = 0,2$ bliver Middelværdien af de bøjende Momenter pr. Længdeenhed paa Strækningen $\lambda = \frac{1}{6}l = \frac{1}{4}b$ midt i Feltet altsaa

$$M_{x(e, 3)} = (0,1595 + 0,2 \cdot 0,0945) P \frac{l}{b} = 0,1784 P \frac{l}{b} \sim \frac{1}{5,6} P \frac{l}{b},$$

$$M_{y(e, 3)} = (0,2128 + 0,2 \cdot 0,3591) P \frac{b}{l} = 0,2846 P \frac{b}{l} \sim \frac{1}{3,5} P \frac{b}{l}.$$

§ 28. Yderfag. Kvadratiske Felter; simpel Understøtning langs Kanterne; konstant Inertimoment.

I § 26 og § 27 har det været forudsat, at Pladen strækker sig over uendelig mange Fag i begge Retninger, og denne Forudsætning vil i Regelen give tilstrækkelig nøjagtige Resultater for alle Mellemfagene Vedkommende. I Yderfagene vil der imidlertid kunne optræde større bøjende Momenter. Baade de positive Momenter midt i Faget og de negative Momenter over Søjlerækken mellem det yderste og det næstyderste Fag kan blive større end Momenterne i et Mellemfag.

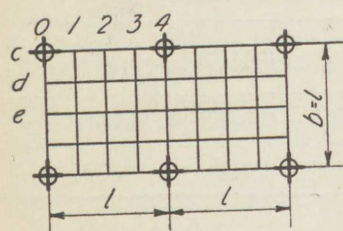
For at undersøge, hvorledes Spændingerne i et Yderfelt forholder sig i Sammenligning med Spændingerne i et Mellemfelt, beregnes Nedbøjninger og bøjende Momenter i en Plade med kvadratiske Felter, kontinuerlig over uendelig mange Fag i den ene Retning og over to Fag i den anden Retning. Beregningen udføres for en ensformig fordelt Belastning p , dels over alle Felter (Fig. 94), dels over alle Felterne paa den ene Side af den langsgaaende Søjlerække (Fig. 95).

For en Plade, som er kontinuerlig over to Fag i begge Retninger, og som altsaa bestaar af fire Hjørnefelter, der forudsættes at være kvadratiske, udføres Beregningen med en ensformig fordelt Belastning baade over alle fire Felter (Fig. 96) og over to sammenstødende Felter (Fig. 98).

For begge Plader forudsættes, at Understøtningerne langs Kanterne er retliniede og i Stand til at hindre Pladen i at bøje sig op eller ned, men at de tillader den frit at dreje sig. Beregningen udføres for begge Plader med $\lambda = \frac{1}{4}l$.

Af Hensyn til Sammenligningen med et Mellemfelt beregnes først Nedbøjninger og Momenter med $\lambda = \frac{1}{4}l$ i en Plade med kvadratiske Felter, kontinuerlig over uendelig mange Fag i begge Retninger. Med

en ensformig fordelt Belastning p over alle Fag har man for denne Plade (Fig. 92) følgende Ligninger (Lign. 16):



$$\begin{array}{llll}
 (c, 0) & -4C_0 + 4C_1 & = & -15(1-\mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI} \\
 (c, 1) & C_0 - 4C_1 + C_2 + 2D_1 & = & 1 \quad \text{»} \quad \text{»} \\
 (c, 2) & 2C_1 - 4C_2 + 2D_2 & = & 1 \quad \text{»} \quad \text{»} \\
 (d, 1) & 2C_1 - 4D_1 + 2D_2 & = & 1 \quad \text{»} \quad \text{»} \\
 (d, 2) & C_2 + 2D_1 - 4D_2 + E_2 & = & 1 \quad \text{»} \quad \text{»} \\
 (e, 2) & 4D_2 - 4E_2 & = & 1 \quad \text{»} \quad \text{»}
 \end{array}$$

Fig. 92.

og det tilsvarende Sæt Ligninger (Lign. 15) med $c_0, c_1 \dots$ i Stedet for $C_0, C_1 \dots$ og $C_0, C_1 \dots$ paa højre Side af Lighedstegnet. Man finder heraf

	0	1	2	
c	0	309	464	$(1-\mu^2) \frac{p\lambda^4}{288 EI}$
d		464	565	» »
e			640	» »

Ved Anvendelse af Symmetrien om Linie 2 faas herved

Nedbøjninger.

	2	3	4	
c	0,00629	0,00419	0	$(1-\mu^2) \frac{pl^4}{EI}$
d	0,00766	0,00629	0,00419	» »
e	0,00868	0,00766	0,00629	» »

Momenter M_x .

	2	3	4	
c	$+0,0673 - \mu \cdot 0,0438$	$+0,0334 - \mu \cdot 0,0673$	$-0,1341 - \mu \cdot 0,1341$	pl^2
d	$+0,0438 + \mu \cdot 0,0056$	$+0,0117 + \mu \cdot 0,0117$	$-0,0673 + \mu \cdot 0,0334$	»
e	$+0,0326 + \mu \cdot 0,0326$	$+0,0056 + \mu \cdot 0,0438$	$-0,0438 + \mu \cdot 0,0673$	»

Momenter M_y .

	2	3	4	
c	$-0,0438 + \mu \cdot 0,0673$	$-0,0673 + \mu \cdot 0,0334$	$-0,1341 - \mu \cdot 0,1341$	pl^2
d	$+0,0056 + \mu \cdot 0,0438$	$+0,0117 + \mu \cdot 0,0117$	$+0,0334 - \mu \cdot 0,0673$	»
e	$+0,0326 + \mu \cdot 0,0326$	$+0,0438 + \mu \cdot 0,0056$	$+0,0673 - \mu \cdot 0,0438$	»

For Stribebelastningen p skiftevis i hvert andet Fag (Fig. 93) udføres Beregningen paa lignende Maade som med $\lambda = \frac{1}{6}l$ (Fig. 84). Med Belastningen $+p$ og $-p$ skiftevis i hvert andet Fag bliver Ligningerne

Lign. (16) $-2Z_1 + Z_2 = 1(1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}$ $2Z_1 - 2Z_2 = 1 \quad \text{»} \quad \text{»}$ hvoraf $z_1 = 5(1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{2EI},$ $z_2 = 7 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad ,$	Lign. (15) $-2z_1 + z_2 = Z_1$ $2z_1 - 2z_2 = Z_2$	
---	---	--

Fig. 93.

og

	2	3	4	5	6	
$z =$	+0,01367	+0,00977	0	-0,00977	-0,01367	$(1 - \mu^2) \frac{pl^4}{EI}$
$M_x =$	+0,1250	+0,0938	0	-0,0938	-0,1250	$p l^2$

Ved at addere og halvere Resultaterne for Belastningen p over alle Fag og for Belastningen skiftevis $+p$ og $-p$ faas for den i Fig. 93 viste Plade:

Nedbøjninger.

	2	3	4	5	6	
c	+0,00998	+0,00698	0	-0,00279	-0,00369	$(1 - \mu^2) \frac{pl^4}{EI}$
d	+0,01066	+0,00803	+0,00210	-0,00174	-0,00301	» »
e	+0,01117	+0,00871	+0,00315	-0,00105	-0,00250	» »

 M_x i belastet Fag.

	2	3	4	
c	+0,0961 $-\mu \cdot 0,0219$	+0,0636 $-\mu \cdot 0,0336$	-0,0671 $-\mu \cdot 0,0671$	pl^2
d	+0,0844 $+\mu \cdot 0,0028$	+0,0527 $+\mu \cdot 0,0059$	-0,0337 $+\mu \cdot 0,0167$	»
e	+0,0788 $+\mu \cdot 0,0163$	+0,0497 $+\mu \cdot 0,0219$	-0,0219 $+\mu \cdot 0,0336$	»

M_x i ubelastet Fag.

	4	5	6	
c	$-0,0671 - \mu \cdot 0,0671$	$-0,0302 - \mu \cdot 0,0336$	$-0,0289 - \mu \cdot 0,0219$	pl^2
d	$-0,0337 + \mu \cdot 0,0167$	$-0,0410 + \mu \cdot 0,0059$	$-0,0406 + \mu \cdot 0,0028$	»
e	$-0,0219 + \mu \cdot 0,0336$	$-0,0441 + \mu \cdot 0,0219$	$-0,0462 + \mu \cdot 0,0163$	»

Beregningen udføres dernæst for de omtalte Yderfelter.

1. Plade kontinuerlig over uendelig mange Fag i den ene Retning og over to Fag i den anden Retning.

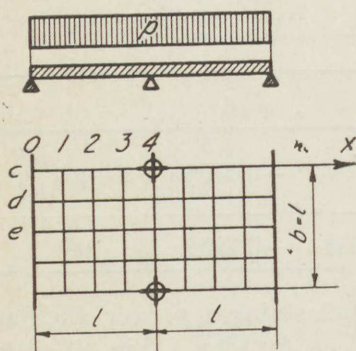


Fig. 94.

- a. Ensformig fordelt Belastning over alle Felter (Fig. 94).

Til Bestemmelse af Nedbøjningerne anvendes Ligningerne (15) og (16). Ved Anvendelse af Lign. (16) faas nedenstaaende Ligninger. De tilsvarende Ligninger (15) faas ved at ombytte $C_1, D_1 \dots$ med $c_1, d_1 \dots$ og indføre $C_1, D_1 \dots$ paa højre Side af Lighedstegnet.

$$\begin{array}{llll}
 (c, 1) & -4C_1 + 2D_1 & + C_2 & = 1 \cdot (1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}, \\
 (d, 1) & C_1 - 4D_1 + E_1 & + D_2 & = 1 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 (e, 1) & 2D_1 - 4E_1 & + E_2 & = 1 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 (c, 2) & C_1 & - 4C_2 + 2D_2 & + C_3 = 1 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 (d, 2) & D_1 & + C_2 - 4D_2 + E_2 & + D_3 = 1 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 (e, 2) & E_1 & + 2D_2 - 4E_2 & + E_3 = 1 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 (c, 3) & C_2 & - 4C_3 + 2D_3 & + C_4 = 1 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 (d, 3) & D_2 & + C_3 - 4D_3 + E_3 & + D_4 = 1 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 (e, 3) & E_2 & + 2D_3 - 4E_3 & + E_4 = 1 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 (c, 4) & 2C_3 & - 4C_4 + 2D_4 & = \left(1 - \frac{R_{(c, 4)}}{\lambda^2}\right) \text{»} \quad \text{»}, \\
 (d, 4) & 2D_3 & + C_4 - 4D_4 + E_4 & = 1 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 (e, 4) & 2E_3 & + 2D_4 - 4E_4 & = 1 \quad \text{»} \quad \text{»}.
 \end{array}$$

I de 12 Ligninger (16) indgaar der 13 ubekendte, nemlig de 12 Størrelser $C_1, D_1 \dots$ og Søjlerreaktionen $R_{(c, 4)}$. Udelades foreløbig Lig-

ningen for Punkt $(c, 4)$, har man tilbage 11 Ligninger med 12 ubekendte. Størrelserne $C_1, D_1, \dots$ kan ved Hjælp af disse Ligninger udtrykkes ved C_4 .

De 12 Ligninger (15) kommer herved til at indeholde 12 ubekendte Nedbøjninger foruden den ubekendte C_4 . Sættes Nedbøjningen $c_4 = 0$, kan de øvrige Nedbøjninger findes ved Løsning af Ligningerne.

Opgaven bliver imidlertid en Del lettere at behandle, dersom man tænker sig Belastningen bestaaende af to Dele, nemlig 1) Reaktionen $R_{(c, 4)}$ virkende opad i Punkt $(c, 4)$ og Kræfterne $\frac{1}{4} R_{(c, 4)}$ virkende nedad i hvert af Punkterne $(c, 4)$, $(d, 4)$ og $(e, 4)$, og 2) Belastningen p over hele Pladen og Kræfterne $\frac{1}{4} R_{(c, 4)}$ virkende opad i hvert af Punkterne $(c, 4)$, $(d, 4)$ og $(e, 4)$.

Ved det første Belastningstilfælde bliver venstre Side af de 12 ovenstaaende Ligninger uforandret. I de 9 første Ligninger bliver Leddet paa højre Side af Lighedstegnet Nul. I de 3 sidste Ligninger bliver Leddet paa højre Side af Lighedstegnet

$$\begin{array}{rcl}
 -\frac{3}{4}(1-\mu^2)R_{(c, 4)}\frac{\lambda^2}{EI} & \text{for Punkt } (c, 4), \\
 \frac{1}{4} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & (d, 4), \\
 \frac{1}{4} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & (e, 4).
 \end{array}$$

Heraf findes

	1	2	3	4	
C	+1251	+5198	+20705	+84412	$\frac{1-\mu^2}{2 \cdot 97 \cdot 577} \cdot \frac{1}{4} R_{(c, 4)} \frac{\lambda^2}{EI}$
D	— 97	— 582	— 3395	—19788	» » »
E	—1057	—4034	—13915	—44836	» » »

og

	1	2	3	4	
c	—78414968	—251320397	—671148236	—1412859610	$\frac{1-\mu^2}{2 \cdot 97^2 \cdot 577^2} \cdot \frac{1}{4} R_{(c, 4)} \frac{\lambda^2}{EI}$
d	+ 3838872	+ 17604239	+ 69212604	+ 207656630	» » »
e	+70737224	+216111919	+532723028	+ 997546350	» » »

Ved det andet Belastningstilfælde bliver Linierne 1, 2, 3 og 4 retliniede efter Formforandringen. Nedbøjningerne bestemmes af følgende Ligninger:

	Lign. (16)		Lign. (15)	
Linie 1	$-2Z_1 + Z_2$	$= (1-\mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}$	$-2z_1 + z_2$	$= Z_1$
» 2	$Z_1 - 2Z_2 + Z_3$	$= \text{ » } \text{ » }$	$z_1 - 2z_2 + z_3$	$= Z_2$
» 3	$Z_2 - 2Z_3 + Z_4$	$= \text{ » } \text{ » }$	$z_2 - 2z_3 + z_4$	$= Z_3$
» 4	$2Z_3 - 2Z_4$	$= \left(\frac{p\lambda^4}{EI} - \frac{1}{4} R_{(c,4)} \frac{\lambda^2}{EI} \right)$	$2z_3 - 2z_4$	$= Z_4$

Heraf faas

$$z_1 = \frac{1-\mu^2}{8} \cdot \frac{p\lambda^4}{EI} \left(168 - 8 \frac{R_{(c,4)}}{\lambda^2} \right),$$

$$z_2 = \text{ » } \text{ » } (308 - 15 \text{ » }),$$

$$z_3 = \text{ » } \text{ » } (400 - 20 \text{ » }),$$

$$z_4 = \text{ » } \text{ » } (432 - 22 \text{ » }).$$

Ved Addition af Nedbøjninger og Momenter for de to Belastningstilfælde faas Nedbøjninger og Momenter for den i Fig. 94 viste Plade. For Punkt (c, 4) har man

$$c_4 = -1412859610 \frac{1-\mu^2}{2 \cdot 97^2 \cdot 577^2} \cdot \frac{1}{4} R_{(c,4)} \frac{\lambda^2}{EI} + \frac{1-\mu^2}{8} \cdot \frac{p\lambda^4}{EI} \left(432 - 22 \frac{R_{(c,4)}}{\lambda^2} \right) = 0.$$

hvoraf

$$R_{(c,4)} = 1,2026 pl^2.$$

Ved at indsætte denne Værdi af $R_{(c,4)}$ og addere Resultaterne svarende til de to Belastningstilfælde, faas for den i Fig. 94 viste Plade følgende Nedbøjninger og bøjende Momenter:

Nedbøjninger.

	0	1	2	3	4	
c	0	0,00663	0,00871	0,00539	0	$(1-\mu^2) \frac{pl^4}{EI}$
d	0	0,00688	0,00951	0,00761	0,00485	» »
e	0	0,00708	0,01011	0,00900	0,00722	» »

Momenter M_x .

	0	1	2	3	4	
c	0	$+0,0729 - \mu \cdot 0,0079$	$+0,0861 - \mu \cdot 0,0258$	$+0,0332 - \mu \cdot 0,0711$	$-0,1725 - \mu \cdot 0,1555$	pl^2
d	0	$+0,0679 + \mu \cdot 0,0007$	$+0,0725 + \mu \cdot 0,0034$	$+0,0136 + \mu \cdot 0,0133$	$-0,0880 + \mu \cdot 0,0399$	»
e	0	$+0,0648 + \mu \cdot 0,0064$	$+0,0661 + \mu \cdot 0,0190$	$+0,0107 + \mu \cdot 0,0445$	$-0,0567 + \mu \cdot 0,0758$	»

Momenter M_y .

	0	1	2	3	4	
c	0	$-0,0079 + \mu \cdot 0,0729$	$-0,0258 + \mu \cdot 0,0861$	$-0,0711 + \mu \cdot 0,0332$	$-0,1555 - \mu \cdot 0,1725$	pl^2
d	0	$+0,0007 + \mu \cdot 0,0679$	$+0,0034 + \mu \cdot 0,0725$	$+0,0133 + \mu \cdot 0,0136$	$+0,0399 - \mu \cdot 0,0880$	»
e	0	$+0,0064 + \mu \cdot 0,0648$	$+0,0190 + \mu \cdot 0,0661$	$+0,0445 + \mu \cdot 0,0107$	$+0,0758 - \mu \cdot 0,0567$	»

Reaktionerne langs Kanterne findes ved Hjælp af Lign. (35).

Punkt	Reaktion
(c, 0)	$(0,354 + \mu \cdot 0,032) pl$ pr. Længdeenhed
(d, 0)	$(0,402 - \mu \cdot 0,003) \gg \gg$
(e, 0)	$(0,436 - \mu \cdot 0,026) \gg \gg$

Søjlerreaktionen er, som tidligere funden,

$$R_{(c,4)} = 1,203 pl^2.$$

Nedbøjningen midt i Yderfeltet (ved (e, 2) Fig. 94) er ca. 16 % større end Nedbøjningen midt i Mellemfeltet (ved (e, 2) Fig. 92).

For $\mu = 0,2$ bliver det største positive Moment i Yderfeltet (ved (c, 2) Fig. 94) ca. 38 % større end det største positive Moment i Mellemfeltet (ved (c, 2) Fig. 92).

De negative Momenter i et Snit langs Linie 4 i Fig. 94, hvor der ligger et Yderfelt paa hver Side af Snittet, er i Punkt (c, 4) ca. 26 % og i Punkt (e, 4) ca. 37 % større end de tilsvarende negative Momenter i Fig. 92, hvor der ligger et Mellemfelt paa hver Side af Snittet.

b. Ensformig fordelt Belastning over alle Felterne paa den ene Side af Søjlerækken. (Fig. 95).

Den i Fig. 95 viste Belastning p paa den ene Side af Søjlerækken tænkes fremkommen ved først at anbringe Belastningen $\frac{1}{2}p$ over alle Felter og dernæst anbringe Belastningen $+\frac{1}{2}p$ til venstre for Søjlerækken og $-\frac{1}{2}p$ til højre for Søjlerækken. I Stedet for $\frac{1}{2}p$ regnes med Belastningen p , og Resultaterne halveres.

For Belastningen $+p$ til venstre og $-p$ til højre for Søjlerækken bliver Nedbøjninger og Momenter de samme som i en Plade, der er kontinuerlig over uendelig mange Fag i begge Retninger og belastet

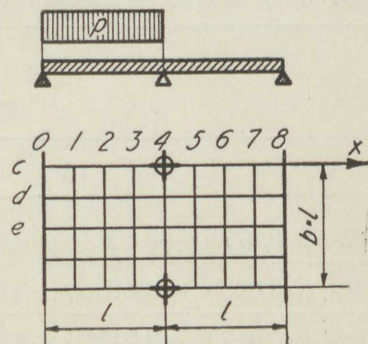


Fig. 95.

med $+p$ og $-p$ skiftevis i hvert andet Fag. Man finder altsaa følgende Nedbøjninger og Momenter (Side 211):

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
$z =$	0	+0,00977	+0,01367	+0,00977	0	-0,00977	-0,01367	-0,00977	0	$(1-\mu^2)\frac{pl^4}{EI}$
$M_x =$	0	+0,0938	+0,1250	+0,0938	0	-0,0938	-0,1250	-0,0938	0	pl^2

Reaktionen i Linie 0 er overalt $+0,5 pl$ og i Linie 8 overalt $-0,5 pl$.

Ved at addere og halvere de fundne Resultater for Belastningen p over begge Fag og for Belastningen $+p$ til venstre og $-p$ til højre for Søjlerækken faas for den i Fig. 95 viste Plade følgende Nedbøjninger, bøjende Momenter og Reaktioner:

Nedbøjninger.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
c	0	+0,00820	+0,01119	+0,00758	0	-0,00219	-0,00248	-0,00157	0	$(1-\mu^2)\frac{pl^4}{EI}$
d	0	+0,00833	+0,01159	+0,00869	+0,00243	-0,00108	-0,00208	-0,00144	0	» »
e	0	+0,00843	+0,01189	+0,00938	+0,00361	-0,00038	-0,00178	-0,00134	0	» »

M_x i belastet Fag.

	0	1	2	3	4	
c	0	+0,0834 $-\mu\cdot 0,0040$	+0,1056 $-\mu\cdot 0,0129$	+0,0635 $-\mu\cdot 0,0355$	-0,0863 $-\mu\cdot 0,0778$	pl^2
d	0	+0,0809 $+\mu\cdot 0,0004$	+0,0988 $+\mu\cdot 0,0017$	+0,0537 $+\mu\cdot 0,0066$	-0,0440 $+\mu\cdot 0,0200$	»
e	0	+0,0793 $+\mu\cdot 0,0032$	+0,0956 $+\mu\cdot 0,0095$	+0,0522 $+\mu\cdot 0,0223$	-0,0284 $+\mu\cdot 0,0379$	»

M_x i ubelastet Fag.

	4	5	6	7	8	
c	-0,0863 $-\mu\cdot 0,0778$	-0,0303 $-\mu\cdot 0,0355$	-0,0194 $-\mu\cdot 0,0129$	-0,0104 $-\mu\cdot 0,0040$	0	pl^2
d	-0,0440 $+\mu\cdot 0,0200$	-0,0401 $+\mu\cdot 0,0066$	-0,0262 $+\mu\cdot 0,0017$	-0,0129 $+\mu\cdot 0,0004$	0	»
e	-0,0284 $+\mu\cdot 0,0379$	-0,0416 $+\mu\cdot 0,0223$	-0,0294 $+\mu\cdot 0,0095$	-0,0145 $+\mu\cdot 0,0032$	0	»

Punkt	Reaktion
$(c, 0)_l$	$(0,427 + \mu \cdot 0,016) pl$
$(d, 0)$	$(0,451 - \mu \cdot 0,001) \gg$
$(e, 0)$	$(0,468 - \mu \cdot 0,013) \gg$

Punkt	Reaktion
$(c, 8)$	$-(0,073 - \mu \cdot 0,016) pl$
$(d, 8)$	$-(0,049 + \mu \cdot 0,001) \gg$
$(e, 8)$	$-(0,032 + \mu \cdot 0,013) \gg$

Søjlerreaktionen er $R_{(c,4)} = 0,601 pl^2$.

Nedbøjningen midt i et belastet Yderfelt (ved $(e, 2)$, Fig. 95) er ca. 6 % større end Nedbøjningen midt i et belastet Mellemfelt (ved $(e, 2)$, Fig. 93).

For $\mu = 0,2$ er det største positive Moment i Yderfeltet (ved $(c, 2)$, Fig. 95) ca. 12 % større end det største positive Moment i Mellemfeltet (ved $(c, 2)$, Fig. 93).

2. Hjørnefelt; Plade kontinuerlig over to Fag i begge Retninger.

a. Ensformig fordelt Belastning over alle fire Felter. (Fig. 96).

For den i Fig. 96 viste Plade antages Belastningen p at være ensformig fordelt over alle fire Felter. Paa Grund af Symmetrien om Linierne g og 4 og om Diagonalerne er det tilstrækkeligt at beregne Nedbøjningerne i følgende Punkter, for hvilke Ligningerne (15) og (16) anvendes. Ligningerne (16) bliver

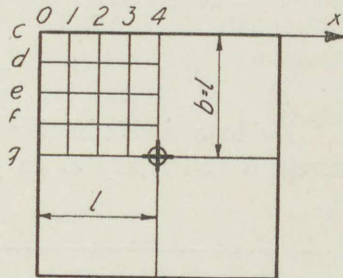


Fig. 96.

$$\begin{array}{llll}
 (d, 1) & -4D_1 + 2D_2 & = & 1 \cdot (1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}, \\
 (d, 2) & D_1 - 4D_2 + D_3 + E_2 & = & 1 \gg \gg, \\
 (d, 3) & D_2 - 4D_3 + D_4 + E_3 & = & 1 \gg \gg, \\
 (d, 4) & 2D_3 - 4D_4 + E_4 & = & 1 \gg \gg, \\
 (e, 2) & 2D_2 - 4E_2 + 2E_3 & = & 1 \gg \gg, \\
 (e, 3) & D_3 + E_2 - 4E_3 + E_4 + F_3 & = & 1 \gg \gg, \\
 (e, 4) & D_4 + 2E_3 - 4E_4 + F_4 & = & 1 \gg \gg, \\
 (f, 3) & 2E_3 - 4F_3 + 2F_4 & = & 1 \gg \gg, \\
 (f, 4) & E_4 + 2F_3 - 4F_4 + G_4 & = & 1 \gg \gg, \\
 (g, 4) & 4F_4 - 4G_4 & = & \left(1 - \frac{R_{(g,4)}}{\lambda^2}\right) \gg \gg.
 \end{array}$$

Udelades foreløbig Ligningen for $(g, 4)$, som indeholder den ubekendte Søjlerreaktion $R_{(g,4)}$, findes af de øvrige Ligninger:

$$\begin{aligned}
D_1 &= (-149 : 152 + 9 G_4 : 266) (1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}, \\
D_2 &= (-222 \quad \gg + 18 \quad \gg \quad \gg) \quad \gg \quad \gg, \\
D_3 &= (-251 \quad \gg + 26 \quad \gg \quad \gg) \quad \gg \quad \gg, \\
D_4 &= (-256 \quad \gg + 30 \quad \gg \quad \gg) \quad \gg \quad \gg, \\
E_2 &= (-336 \quad \gg + 37 \quad \gg \quad \gg) \quad \gg \quad \gg, \\
E_3 &= (-374 \quad \gg + 56 \quad \gg \quad \gg) \quad \gg \quad \gg, \\
E_4 &= (-370 \quad \gg + 68 \quad \gg \quad \gg) \quad \gg \quad \gg, \\
F_3 &= (-387 \quad \gg + 93 \quad \gg \quad \gg) \quad \gg \quad \gg, \\
F_4 &= (-324 \quad \gg + 130 \quad \gg \quad \gg) \quad \gg \quad \gg.
\end{aligned}$$

Sættes $g_4 = 0$, findes dernæst af Ligningerne (15)

$$\begin{aligned}
d_1 &= 29231804 \frac{1 - \mu^2}{31113488} \frac{p\lambda^4}{EI}, & e_2 &= 70759192 \frac{1 - \mu^2}{31113488} \frac{p\lambda^4}{EI}, \\
d_2 &= 46169487 \quad \gg \quad \gg, & e_3 &= 73111031 \quad \gg \quad \gg, \\
d_3 &= 51067212 \quad \gg \quad \gg, & e_4 &= 67915120 \quad \gg \quad \gg, \\
d_4 &= 50686832 \quad \gg \quad \gg, & f_3 &= 62927620 \quad \gg \quad \gg, \\
& & f_4 &= 43676934 \quad \gg \quad \gg.
\end{aligned}$$

De bøjende Momenter bestemmes heraf ved Lign. (11). Reaktionerne beregnes ved Hjælp af de paa Side 46—47 angivne Ligninger.

Nedbøjninger.

	0	1	2	3	4	
<i>c</i>	0	0	0	0	0	
<i>d</i>	0	0,00367	0,00580	0,00641	0,00636	$(1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}$
<i>e</i>	0	0,00580	0,00888	0,00918	0,00853	» »
<i>f</i>	0	0,00641	0,00918	0,00790	0,00548	» »
<i>g</i>	0	0,00636	0,00853	0,00548	0	» »

Momenter M_x .

	0	1	2	3	4	
<i>c</i>	0	0	0	0	0	
<i>d</i>	0	$+0,0247 + \mu \cdot 0,0247$	$+0,0242 + \mu \cdot 0,0434$	$+0,0106 + \mu \cdot 0,0583$	$-0,0015 + \mu \cdot 0,0672$	pl^2
<i>e</i>	0	$+0,0434 + \mu \cdot 0,0242$	$+0,0447 + \mu \cdot 0,0447$	$+0,0152 + \mu \cdot 0,0647$	$-0,0209 + \mu \cdot 0,0833$	»
<i>f</i>	0	$+0,0583 + \mu \cdot 0,0106$	$+0,0647 + \mu \cdot 0,0152$	$+0,0182 + \mu \cdot 0,0182$	$-0,0773 + \mu \cdot 0,0390$	»
<i>g</i>	0	$+0,0672 - \mu \cdot 0,0015$	$+0,0833 - \mu \cdot 0,0209$	$+0,0390 - \mu \cdot 0,0773$	$-0,1755 - \mu \cdot 0,1755$	»

Punkt	Reaktion
(c, 0)	$\begin{cases} -(0,102 - \mu \cdot 0,118) pl^2 & \text{som Enkeltkraft} \\ 0 & \text{pr. Længdeenhed} \end{cases}$
(d, 0)	$(0,422 - \mu \cdot 0,099) pl$ » »
(e, 0)	$(0,492 - \mu \cdot 0,097)$ » » »
(f, 0)	$(0,443 - \mu \cdot 0,043)$ » » »
(g, 0)	$(0,382 + \mu \cdot 0,006)$ » » »

Søjlereaktionen er $R_{(g, 4)} = 1,313 pl^2$.

For $\mu = 0,2$ bliver det største positive Moment (ved (g, 2), Fig. 96) ca. 35 % større end det største positive Moment i Mellemfeltet (ved (c, 2), Fig. 92), eller meget nær lig med det største positive Moment i Yderfaget (ved (c, 2), Fig. 94).

Det negative Moment over Søjlen (ved g, 4), Fig. 96) er for $\mu = 0,2$ ca. 31 % større end det negative Moment over Søjlen ved Mellemfelterne (ved (c, 4), Fig. 92) eller lidt større end det negative Moment over Søjlen ved Yderfelterne (ved (c, 4), Fig. 94).

I Nærheden af Hjørnet (ved (c, 0), Fig. 96) danner Hovedsnittenes Retninger Vinkler paa 45° med Sidelinierne. Ved Hjælp af Lign. (11) faas hosstaaende Værdier af M_v ,

	0	1	2	3
c				
d	-0,059	-0,034	-0,010	$(1-\mu)pl^2$
e	-0,034	-0,015	+0,005	» »
f	-0,010	+0,005	+0,025	» »

og ved Konstruktion af M_v -Fladen (Fig. 97) findes i Hjørnet

$$M_{v(c, 0)} = -0,066 (1 - \mu) pl^2.$$

For $\mu = 0,2$ bliver det bøjende Moment ved Hjørnet i et Snit, som indeholder Diagonalen

$$M_{y'(c, 0)} = +0,053 pl^2,$$

og i et Snit vinkelret paa Diagonalen

$$M_{x'(c, 0)} = -0,053 pl^2.$$

Disse Momenter er ca. 50 % større end de tilsvarende Momenter ved

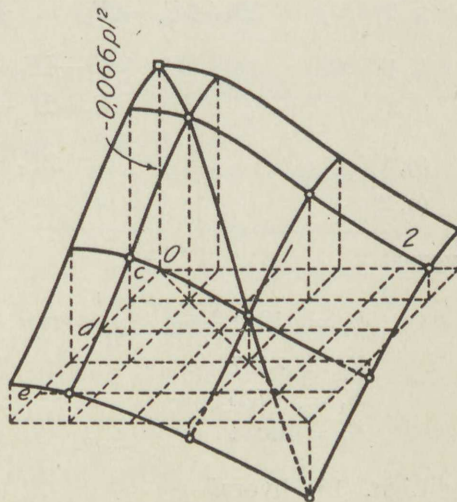


Fig. 97.

Hjørnerne i en kvadratisk Plade med Sidelinie l , simpelt understøttet langs alle fire Sider og paavirket af en ensformig fordelt Belastning p . Af Hensyn til disse højende Momenter bør en Jernbetonplade i Nærheden af Hjørnerne helst forsynes med et Jernindlæg foruden vinkelret paa Diagonalen og et Jernindlæg foroven parallelt med Diagonalen.

b. Ensformig fordelt Belastning over to sammenstødende Felter. (Fig. 98).

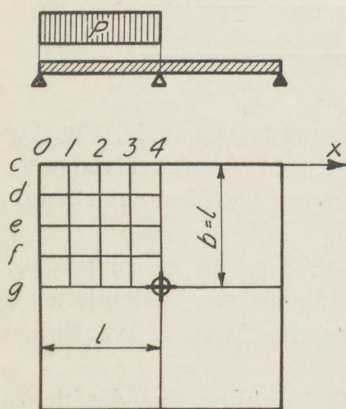


Fig. 98.

I Fig. 98 antages Belastningen p at virke paa de to Felter til venstre for Linie 4. Denne Belastning tænkes fremkommen ved først at anbringe Belastningen $\frac{1}{2}p$ over alle fire Felter og dernæst anbringe Belastningen $+\frac{1}{2}p$ paa de to Felter til venstre for Linie 4 og $-\frac{1}{2}p$ paa de to Felter til højre for Linie 4. I Stedet for $\frac{1}{2}p$ regnes med Belastningen p , hvorefter Resultaterne halveres.

For Belastningen $+p$ til venstre og $-p$ til højre for Linie 4 vil Nedbøjningerne og Momenterne M_x og M_y være Nul i Linie 4. Nedbøjningerne til venstre for Linie 4 kan da beregnes som for en rektangulær Plade med Sidelinierne l og $2l$, simpelt understøttet langs alle fire Sider. Linierne g og 2 bliver Symmetrilinier i denne Plade, og Nedbøjningerne bestemmes af Lign. (16),

$$\begin{aligned}
 (d, 1) \quad -4D_1 + D_2 + E_1 &= 1 \cdot (1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI}, \\
 (d, 2) \quad 2D_1 - 4D_2 + E_2 &= 1 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 (e, 1) \quad D_1 - 4E_1 + E_2 + F_1 &= 1 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 (e, 2) \quad D_2 + 2E_1 - 4E_2 + F_2 &= 1 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 (f, 1) \quad E_1 - 4F_1 + F_2 + G_1 &= 1 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 (f, 2) \quad E_2 + 2F_1 - 4F_2 + G_2 &= 1 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 (g, 1) \quad 2F_1 - 4G_1 + G_2 &= 1 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 (g, 2) \quad 2F_2 + 2G_1 - 4G_2 &= 1 \quad \text{»} \quad \text{»},
 \end{aligned}$$

hvoraf

$$\begin{aligned}
 D_1 &= 5911 \frac{1 - \mu^2}{7426} \frac{p\lambda^4}{EI}, & D_2 &= 7631 \frac{1 - \mu^2}{7426} \frac{p\lambda^4}{EI}, \\
 E_1 &= 8587 \quad \text{»} \quad \text{»}, & E_2 &= 11276 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 F_1 &= 9735 \quad \text{»} \quad \text{»}, & F_2 &= 12873 \quad \text{»} \quad \text{»}, \\
 G_1 &= 10054 \quad \text{»} \quad \text{»}, & G_2 &= 13320 \quad \text{»} \quad \text{»},
 \end{aligned}$$

og Lign. (15), hvoraf

$$\begin{aligned}
 d_1 &= 47635908 \frac{1-\mu^2}{7426^2} \frac{p\lambda^4}{EI}, & d_2 &= 66037712 \frac{1-\mu^2}{7426^2} \frac{p\lambda^4}{EI}, \\
 e_1 &= 80610834 \quad \gg \quad \gg, & e_2 &= 112211226 \quad \gg \quad \gg, \\
 f_1 &= 98829140 \quad \gg \quad \gg, & f_2 &= 137849948 \quad \gg \quad \gg, \\
 g_1 &= 104563668 \quad \gg \quad \gg, & g_2 &= 145935388 \quad \gg \quad \gg.
 \end{aligned}$$

Momenterne bestemmes ved Lign. (11) og Reaktionen ved Ligningerne paa Side 46—47. De fundne Resultater for Belastningen p over alle fire Felter og for Belastningen $+p$ til venstre og $-p$ til højre for Linie 4 adderes og halveres. Man finder herved for den i Fig. 98 viste Plade:

Nedbøjninger.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
c	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
d	0	+0,00352	+0,00524	+0,00489	+0,00318	+0,00152	+0,00056	+0,00015	0	$(1-\mu^2) \frac{pl^4}{EI}$
e	0	+0,00575	+0,00841	+0,00744	+0,00426	+0,00174	+0,00047	+0,00005	0	»
f	0	+0,00670	+0,00947	+0,00745	+0,00274	+0,00045	-0,00029	-0,00029	0	»
g	0	+0,00688	+0,00943	+0,00644	0	-0,00096	-0,00090	-0,00052	0	»

 M_x i belastet Felt.

	0	1	2	3	4	
c	0	0	0	0	0	
d	0	+0,0289+ $\mu \cdot 0,0207$	+0,0330+ $\mu \cdot 0,0330$	+0,0219+ $\mu \cdot 0,0375$	-0,0008+ $\mu \cdot 0,0336$	pl^2
e	0	+0,0495+ $\mu \cdot 0,0205$	+0,0581+ $\mu \cdot 0,0340$	+0,0354+ $\mu \cdot 0,0407$	-0,0105+ $\mu \cdot 0,0417$	»
f	0	+0,0630+ $\mu \cdot 0,0124$	+0,0766+ $\mu \cdot 0,0175$	+0,0430+ $\mu \cdot 0,0162$	-0,0387+ $\mu \cdot 0,0195$	»
g	0	+0,0694+ $\mu \cdot 0,0058$	+0,0885- $\mu \cdot 0,0013$	+0,0553- $\mu \cdot 0,0321$	-0,0878- $\mu \cdot 0,0878$	»

 M_x i ubelastet Felt.

	4	5	6	7	8	
c	0	0	0	0	0	
d	-0,0008+ $\mu \cdot 0,0336$	-0,0113+ $\mu \cdot 0,0208$	-0,0088+ $\mu \cdot 0,0104$	-0,0042+ $\mu \cdot 0,0040$	0	pl^2
e	-0,0105+ $\mu \cdot 0,0417$	-0,0202+ $\mu \cdot 0,0240$	-0,0134+ $\mu \cdot 0,0107$	-0,0061+ $\mu \cdot 0,0037$	0	»
f	-0,0387+ $\mu \cdot 0,0195$	-0,0248+ $\mu \cdot 0,0020$	-0,0119- $\mu \cdot 0,0023$	-0,0047- $\mu \cdot 0,0018$	0	»
g	-0,0878- $\mu \cdot 0,0878$	-0,0163- $\mu \cdot 0,0452$	-0,0052- $\mu \cdot 0,0196$	-0,0022- $\mu \cdot 0,0073$	0	»

Reaktioner.

	Belastet Felt 0	Ubelastet Felt 8	
<i>c</i>	$-(0,097 - \mu \cdot 0,113)$	$-(0,005 - \mu \cdot 0,005)$	pl^2 som Enkeltkraft.
<i>d</i>	$+(0,406 - \mu \cdot 0,083)$	$+(0,016 - \mu \cdot 0,016)$	pl pr. Længdeenhed.
<i>e</i>	$+(0,487 - \mu \cdot 0,082)$	$+(0,005 - \mu \cdot 0,015)$	» » »
<i>f</i>	$+(0,476 - \mu \cdot 0,050)$	$-(0,033 - \mu \cdot 0,007)$	» » »
<i>g</i>	$+(0,449 - \mu \cdot 0,023)$	$-(0,067 - \mu \cdot 0,029)$	» » »

Belastet Felt.

	1	2	3	4	
<i>c</i>	$+(0,439 - \mu \cdot 0,115)$	$+(0,519 - \mu \cdot 0,132)$	$+(0,450 - \mu \cdot 0,087)$	$+(0,191 + \mu \cdot 0,003)$	pl

Ubelastet Felt.

	4	5	6	7	
<i>c</i>	$+(0,191 + \mu \cdot 0,003)$	$-(0,007 - \mu \cdot 0,044)$	$-(0,027 - \mu \cdot 0,035)$	$-(0,017 - \mu \cdot 0,016)$	pl

Søjlereaktionen er $R_{(g, 4)} = 0,656 pl^2$.

For $\mu = 0,2$ bliver det største positive Moment (ved (*g*, 2), Fig. 98) lidt mindre end det største positive Moment i Mellemfeltet (ved (*c*, 2), Fig. 93).

§ 29. Bemærkninger vedrørende amerikanske Normer for »flat slabs«.

De følgende Bemærkninger er fremstillet i Tilknytning til »Final Report of the Joint Committee on Concrete and Reinforced Concrete«^{*)}, idet der til Slut vises en Sammenligning med andre amerikanske Normer.

I ovennævnte Bestemmelser tænkes Pladen, ligesom i alle hidtil anvendte Normer, at strække sig over flere Fag i begge Retninger, og for Beregningen af de bøjende Momenter i Pladen forudsættes denne paavirket af en ensformig fordelt Belastning over alle Fag.

Hvorvidt dette er berettiget, vil delvis afhænge af Pladens Konstruktion. Dersom Pladen har samme Inertimoment overalt, vil de positive bøjende Momenter hidrørende fra en ensformig fordelt Nytte-last p i hvert andet Fag kunne blive omtrent dobbelt saa store som de

^{*)} Proceedings of the American Society of Civil Engineers, December 1916.

positive bøjende Momenter hidrørende fra en ensformig fordelt Belastning p over alle Fag (§ 27, Side 203). Dersom Pladen derimod konstrueres saaledes, at dens Stivhed i Nærheden af Søjlerne er betydelig større end i Midten af Felterne, og dersom Søjlerne tillige har passende Dimensioner, vil man kunne opnaa, at de positive bøjende Momenter i Pladen ved en ensformig fordelt Nyttelast p i hvert andet Fag kun bliver ca. 20 % større end de positive Momenter hidrørende fra en ensformig fordelt Belastning p over alle Fag (§ 19, Side 129).

Normerne opstiller forskellige Regler for Plader med konstant Tykkelse uden for Kapitælerne og for Plader med forøget Tykkelse i Nærheden af Kapitælerne. For Kortheds Skyld kaldes disse sidste Plader i det følgende Plader med Plint*), og i Modsætning hertil kaldes Plader med konstant Tykkelse uden for Kapitælet for Plader uden Plint.

Som Minimumstykkelse af Pladen anbefaler Normerne, idet Søjlekapitælets Diameter forudsættes at være mindst $\frac{1}{3}l$:

Ved Plader uden Plint

$$h = 0,024l\sqrt[3]{q} + 1\frac{1}{2},$$

hvor h = Pladetykkelsen i Tommer, l = største Spændvidde i Fod og q = Summen af Nyttelast og Egenvægt i Pund pr. Kvadratfod (engelsk Maal og Vægt).

Ved Plader med Plint

$$h = 0,02l\sqrt[3]{q} + 1,$$

og

$$h = 0,03l\sqrt[3]{q} + 1\frac{1}{2},$$

henholdsvis for Partiet i Nærheden af Fagmidten og for Partiet i Nærheden af Kapitælerne, idet dette Parti forudsættes at være rektangulært med Sidelinierne 0,4 Gange Længden af de tilsvarende Sider af Felterne (Fig. 81).

Udtrykkes h i Centimeter, l i Meter og q i kg/m^2 , bliver for en Plade uden Plint

$$h = 0,091l\sqrt[3]{q} + 3,8.$$

Sættes heri $h = 0,4\sqrt{M} + 3,8$, hvilket med $\frac{2}{3}\%$ Jernindlæg svarer til en Betontrykspænding paa ca. 40 kg/cm^2 , faas herved det Moment i kgm pr. lbd. m, som med den angivne Pladetykkelse kan optages, uden at Betontrykspændingen σ_b overskrider 40 kg/cm^2 ,

$$M = \text{ca. } \frac{1}{20}ql^2.$$

Af de for Pladerne i Figurerne 76, 77, 78 og 79 beregnede Momenter hidrørende fra en ensformig fordelt Belastning over alle Fag fremgaar, at

*) Plinthos betegner den øverste Del af det doriske Søjlekapitæl. Navnet »plinth« anvendes ogsaa undertiden i Amerika (se Taylor and Thompson, Concrete, Plain and Reinforced, New York and London, 1916, Side 551).

de positive bøjende Momenter midt imellem Søjlerne antager Værdier, som ikke afviger meget fra $\frac{1}{20}ql^2$, medens de negative Momenter i Nærheden af Kapitælet kan blive ca. 50 % større. Forudsættes de positive Momenter at blive ca. 50 % større ved Stribebelastning end ved ensformig fordelt Belastning over alle Fag, vil Trykspændingen i Betonen baade i Nærheden af Kapitælerne og midt imellem Søjlerækkerne med et passende Jernindlæg ikke overskride ca. 60 kg/cm², naar Pladetykkelsen bestemmes ved

$$h = 0,091 l \sqrt{q} + 3,8,$$

hvorfor denne Formel med rimelig Sikkerhed vil kunne lægges til Grund ved Bestemmelsen af Pladetykkelsen.

For en Plade med Plint findes paa lignende Maade af Formlerne til Bestemmelse af Pladetykkelsen med $\sigma_b = 40$ kg/cm² følgende Dimensioneringsmomenter

$M = \text{ca. } \frac{1}{28}ql^2$ for Partiet i Nærheden af Fagmidten,

og

$M = \text{ca. } \frac{1}{12}ql^2$ for Partiet i Nærheden af Kapitælerne.

Af de beregnede Momenter for den i Fig. 81 viste Plade fremgaar, at man for en ensformig fordelt Belastning over alle Fag finder baade de positive og de negative Momenter i den Del af Pladen, hvis Tykkelse ikke er forøget, beliggende i Nærheden af $\frac{1}{28}ql^2$, svarende til $\sigma_b = 40$ kg/cm². Dersom Søjlerne ikke er meget slanke, vil de positive Momenter ved Stribebelastning næppe blive 50 % større, og Trykspændingen i Betonen vil da ikke overskride 60 kg/cm².

De negative bøjende Momenter i den Del af Pladen, hvis Tykkelse er forøget, vil gennemsnitlig være større end $\frac{1}{12}ql^2$, men da Momentet ikke vil være ensformig fordelt, men antage sin største Værdi over Kapitælet, hvis Diameter ved normale Konstruktioner ikke er mindre end ca. 0,2l, vil Momentet $\frac{1}{12}ql^2$ næppe overskrides uden for Kapitælet med mere end 50 %, hvortil svarer en Betontrykspænding paa ca. 60 kg/cm².

De angivne Formler til Bestemmelse af Pladetykkelsen vil derfor ogsaa ved Plader med Plint give en rimelig Sikkerhed.

Vedrørende Pladetykkelsen forlanger Normerne desuden for en Etageadskillelse

$$h \geq \frac{1}{32}l,$$

og for en Tagplade

$$h \geq \frac{1}{40}l,$$

samt at ingen Pladetykkelse maa være mindre end 6" = 15 cm.

Denne sidste Bestemmelse synes at tage Sigte paa Plader med ret stor Spændvidde. Ved smaa Spændvidder vil man kunne opnaa tilstrækkelig Styrke og Stivhed med en mindre Pladetykkelse end 15 cm.

For en kvadratisk Plade med Sidelinie l og Kapitældiameter c (Fig. 99) regnes ifølge Normerne Summen af de numeriske Værdier af Momenterne M_x i de to Snit $ABCDEF$ og $GHIJ$

$$M_{tx} = \frac{1}{8} ql(l - \frac{2}{3}c)^2 = \frac{1}{8} ql^3 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{c}{l}\right)^2 = \frac{1}{8} ql^3 \cdot k_1,$$

hvor

$$k_1 = \left(1 - \frac{2}{3} \frac{c}{l}\right)^2.$$

Et nøjagtigere Udtryk for Totalmomentet M_{tx} er tidligere opstillet af John R. Nichols*).

Ved en ensformig fordelt Belastning over alle Fag vil der ikke optræde lodret forskydende Kræfter i de fire Snit $B-E$, $G-J$, $A-G$ og $F-J$. Den lodret forskydende Kraft langs Omkredsen af Kapitælerne i Snittene $A-B$ og $E-F$ forudsætter Nichols at være ensformig fordelt.

De ydre Kræfter og Snitkræfterne for den Del af Pladen, som udskares ved de nævnte seks Snit, vil holde hinanden i Ligevægt.

Belastningen paa den udskaarne Del af Pladen er

$$\frac{1}{2} ql^2 - \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} qc^2,$$

og Belastningens Tyngdepunktsafstand fra Linie $B-E$

$$\frac{\frac{1}{2} ql^2 \cdot \frac{1}{4} l - \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} qc^2 \cdot \frac{2}{3} \frac{c}{\pi}}{\frac{1}{2} ql^2 - \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} qc^2} = \frac{\frac{1}{8} ql^3 - \frac{1}{12} qc^3}{\frac{1}{2} ql^2 - \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} qc^2}.$$

Den lodret forskydende Krafts Tyngdepunktsafstand fra Linie $B-E$ er $\frac{c}{\pi}$
Momentligningen om en Linie parallel med y -Aksen bliver altsaa

$$M_{tx} - \left(\frac{1}{2} ql^2 - \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} qc^2\right) \left(\frac{\frac{1}{8} ql^3 - \frac{1}{12} qc^3}{\frac{1}{2} ql^2 - \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} qc^2} - \frac{c}{\pi}\right) = 0,$$

eller

$$M_{tx} = \frac{1}{8} ql^3 - \frac{1}{12} qc^3 - \frac{1}{2} ql^2 \cdot \frac{c}{\pi} + \frac{1}{8} qc^3 = \frac{1}{8} ql^3 \left(1 - \frac{4}{\pi} \frac{c}{l} + \frac{1}{8} \frac{c^3}{l^3}\right) = \frac{1}{8} ql^3 \cdot k_2,$$

hvor

$$k_2 = \left(1 - \frac{4}{\pi} \frac{c}{l} + \frac{1}{8} \frac{c^3}{l^3}\right).$$

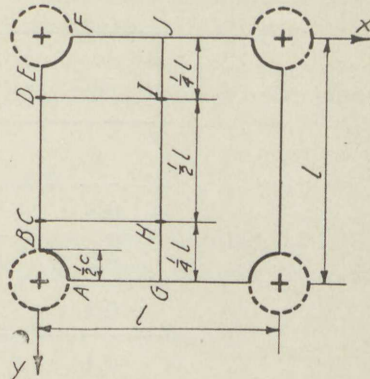


Fig. 99.

*) Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 77, 1914, Side 1670.

For forskellige Værdier af $\frac{c}{l}$ er i hosstaaende Tabel angivet de tilsvarende Værdier af k_1 og k_2 .

$\frac{c}{l}$	k_1	k_2
0	1,000	1,000
0,1	0,871	0,873
0,2	0,751	0,748
0,3	0,640	0,627
0,4	0,538	0,512

De to Formler giver altsaa meget nær samme Resultater. Ved sædvanlig Størrelse af Kapitalet, hvor $\frac{c}{l}$ ligger i Nærheden af 0,2, vil Fejlen ved Anvendelse af den i Normerne angivne Formel

$$M_{tx} = \frac{1}{8} ql(l - \frac{2}{3}c)^2$$

være ganske betydningsløs.

For rektangulære Plader med Sidelængderne l i x -Aksens Retning og b i y -Aksens Retning regnes ifølge Normerne

$$M_{tx} = \frac{1}{8} qb(l - \frac{2}{3}c)^2,$$

og

$$M_{ty} = \frac{1}{8} ql(b - \frac{2}{3}c)^2.$$

Ligesom for den kvadratiske Plade kan man udlede de nøjagtigere Formler for den rektangulære Plade og finder herved

$$M_{tx} = \frac{1}{8} ql^2b \left(1 - \frac{4}{\pi} \frac{c}{l} + \frac{1}{3} \frac{c^3}{l^2b} \right),$$

og

$$M_{ty} = \frac{1}{8} qlb^2 \left(1 - \frac{4}{\pi} \frac{c}{b} + \frac{1}{3} \frac{c^3}{lb^2} \right).$$

Selv om Forholdet $\frac{b}{l}$ afviger betydeligt fra 1, vil den Fejl, man begaar ved Anvendelse af de i Normerne angivne Formler, være uden Betydning. For $b = \frac{2}{3}l$ og $c = 0,2l$ findes saaledes af de i Normerne angivne Formler

$$M_{tx} = 0,751 \cdot \frac{1}{8} ql^2b \quad \text{og} \quad M_{ty} = 0,640 \cdot \frac{1}{8} qlb^2,$$

medens de nøjagtigere Formler giver

$$M_{tx} = 0,749 \cdot \frac{1}{8} ql^2b \quad \text{og} \quad M_{ty} = 0,624 \cdot \frac{1}{8} qlb^2.$$

Summen af de numeriske Værdier af de positive og de negative Momenter kan altsaa herved bestemmes, men Størrelsen af hver af disse afhænger til Dels af Pladens Konstruktion. Normerne foreslaar imidlertid i alle Tilfælde at fordele Totalmomentet M_{tx} i Forholdet $\frac{3}{8}$ for de positive Momenter og $\frac{5}{8}$ for de negative Momenter.

For en kvadratisk Plade med $c = 0,2 l$ bliver herefter det positive Moment i Snit $G-J$

$$0,751 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{8} ql^3 = 0,035 ql^3.$$

For den i Fig. 79 viste kvadratiske Plade med Kapitæl $0,2 l \cdot 0,2 l$, for hvilket Inertimomentet $I = \infty$, fandtes Side 181 det pos. Moment i Linie 4

$$\frac{1}{5} (0,0447 + 2 \cdot 0,0343 + 2 \cdot 0,0242) ql^3 = 0,0323 ql^3.$$

Den foreslaaede Fordeling af de bøjende Momenter synes derfor ved ensformig fordelt Belastning over alle Fag at være i god Overensstemmelse med de virkelige Forhold, saafremt Pladens Inertimoment kan regnes nogenlunde konstant uden for Kapitælerne.

For en Plade med Plint vil derimod paa Grund af Pladens Stivhed i Nærheden af Søjlerne en mindre Del af Totalmomentet optræde som positivt Moment og en større Del som negativt Moment. For den i Fig. 81 viste Plade, hvor Inertimomentet $I = 5 I_c$ i Nærheden af Kapitælerne kan betragtes som en tilnærmet Middelværdi af Pladens og Kapitælets Inertimomenter paa Arealet $0,2 l \cdot 0,2 l$, er det positive Moment i Linie 4

$$\frac{1}{5} (0,0337 + 2 \cdot 0,0291 + 2 \cdot 0,0205) ql^3 = 0,0266 ql^3.$$

Det positive Moment i en Plade med Plint er altsaa for Totalbelastning over alle Fag ca. 20 % mindre end i en Plade uden Plint. Ved Belastning i hvert andet Fag forøges de positive Momenter i de to Plader, og Størrelsen af denne Forøgelse vil være afhængig af Pladens Konstruktion og Søjlernes Stivhed.

I Stedet for at fordele de positive og de negative bøjende Momenter i et bestemt Forhold, som foreslaaet af Normerne, kunde der derfor være Grund til ved Fastsættelsen af disse Momenters Størrelse at tage Hensyn til Nyttelastens Størrelse i Forhold til Egenvægten samt til Pladens Konstruktion og Søjlernes Stivhed.

For at de positive bøjende Momenter i Pladen ved Belastning i hvert andet Fag ikke skal blive betydeligt større end ved Belastning over alle Fag, og den angivne Momentbestemmelse herved blive for usikker, kræver de omtalte Normer, at Søjlerne dimensioneres med en vis Stivhed og Styrke uden dog at angive noget bestemt Søjlemoment.*)

Hvilken Betydning Søjlernes Stivhed har ved forskellige Konstruktioner fremgaar af de undersøgte Plader i § 19 og § 27.

*) *Concrete Institute Committee* forlanger, at Søjlerne ved kvadratiske Felter skal kunne optage Momentet $0,022 p l^2$, hvor p er Nyttelasten.

En Uensartethed i Betonen, som kan have Indflydelse paa Revnedannelse, hvorved Trækspændingerne i Betonen ophæves, vil faa mindre Betydning ved Plader end ved Bjælker. I Normerne har man derfor ment det forsvarligt at regne Totalmomentet noget mindre end $\frac{1}{8} q l (l - \frac{2}{3} c)^2$. Det positive Moment regnes nemlig $\frac{1}{25} q l (l - \frac{2}{3} c)^2$ og det negative Moment $\frac{1}{15} q l (l - \frac{2}{3} c)^2$. Totalmomentet reduceres altsaa med Faktoren

$$\frac{\frac{1}{25} + \frac{1}{15}}{\frac{1}{8}} = \frac{8}{7} = 0,85.$$

Ved Fordelingen af de positive Momenter i Snit *GHIJ* (Fig. 99) behandles den midterste Halvdel *H-I* for sig og de to yderste Fjerdedele *G-H* og *I-J* for sig, og Normerne tillader her et vist Spillerum for Fordelingen.

Det kræves, at mindst 25 % optages paa Strækningen $\frac{1}{2} l$ i Nærheden af Feltets Midte (Strækning *H-I*). Ved Plader uden Plint skal der mindst optages 55 % af det positive Moment paa den øvrige Strækning (Strækn. *G-H + I-J*), og ved Plader med Plint mindst 60 % for Bestemmelsen af Jernindlægget og mindst 70 % for Bestemmelsen af den nødvendige Pladetykkelse.

Til Bestemmelse af Pladetykkelsen skulde man herefter for en Plade med Plint og med Kapitældiameter $c = 0,2 l$ regne det bøjende Moment pr. Længdeenhed

$$M = 0,751 \cdot 0,70 \cdot \frac{1}{25} q \frac{l^3}{\frac{1}{2} l} = \text{ca. } \frac{1}{24} q l^2,$$

hvilket med en Trykspænding paa ca. 45 kg/cm² i Betonen og en Trækspænding paa ca. 1200 kg/cm² i Jernet vilde kræve omtrent samme Pladetykkelse som Bestemmelsen Side 223.

For den i Fig. 79 viste Plade med konstant Tykkelse uden for Kapitælerne er for $\mu = 0$ den Del af det positive Moment, som optræder paa den midterste Strækning $\frac{1}{2} l$ i Linie 4,

$$\frac{2 \cdot 0,0242 + \frac{1}{2} \cdot 0,0343}{0,0447 + 2 \cdot 0,0343 + 2 \cdot 0,0242} = 0,40.$$

For en Plade med Plint som vist i Fig. 81 er den tilsvarende Del af det positive Moment for $\mu = 0$

$$\frac{2 \cdot 0,0205 + \frac{1}{2} \cdot 0,0291}{0,0337 + 2 \cdot 0,0291 + 2 \cdot 0,0205} = 0,42.$$

Forudsættes $\mu = 0,2$, bliver det bøjende Moment paa den midterste Halvdel for begge Plader omtrent lige saa stort som det bøjende Moment paa de to yderste Fjerdedele. Ved en kvadratisk Plade med Armeringen i fire Retninger og samme Armering i hver af de fire Striber vil man faa omtrent samme Jernspænding midt i Feltet og midt

imellem Søjlerne. Forøvrigt vil Pladens Inertimoment være afhængigt af Jernindlæggets Størrelse, og Variationen af Inertimomentet vil have Indflydelse paa Fordelingen af de bøjende Momenter, saaledes at de største bøjende Momenter vil optræde der, hvor Jernindlægget er størst. Det kunde derfor synes heldigt, om Normerne havde givet mere Frihed til Fordelingen af Jernindlægget, og navnlig vilde det være ønskeligt, om den Del af det positive Moment, som forlanges optaget i de to yderste Fjerdedele af Snittet, ikke havde været saa stort som angivet.

Af det negative Moment skal der ifølge Normerne mindst optages 20 % paa Strækningen *C-D* (Fig. 99) og mindst 65 % i de to Snit *A B C* og *D E F* i Plade uden Plint og mindst 80 % i Plade med Plint.

Ved Systemer med Jernindlæg i to Retninger kan Bestemmelsen om, at 20 % af de negative Momenter skal optages paa Strækningen *C-D*, efterkommes ved at bøje en Del af Jernindlægget op i Pladens Overside paa denne Strækning. Ved Systemer med Jernindlæg i fire Retninger kan Bestemmelsen ligeledes uden Indlæg af ekstra Jern i Pladens Overside paa Strækningen *C-D* overholdes ved at gøre de diagonale Striber tilstrækkelig brede, saaledes at de yderste Jern i disse Striber ligger i en saa stor Afstand fra Søjlerne, at de kan bøjes op i Pladens Overside paa Strækningen *C-D*. Forøvrigt kan Bestemmelsen om, at der skal optages mindst 20 % af det negative Moment paa Strækningen *C-D* ikke anses for at være absolut nødvendig af Hensyn til Pladens Styrke. I en Plade, hvor der ikke kan optages negative bøjende Momenter paa Strækningen *C-D*, vil det bøjende Moment i Nærheden af Feltets Midte forøges, som det ses af Momenterne for den i Fig. 82 viste Plade i Sammenligning med Pladen i Fig. 77; men naar Pladen konstrueres stærk nok til at optage disse forøgede Momenter, vil Konstruktionens Sikkerhed mod Brud ikke herved forringes.

For Yderfag forlanger Normerne, at Koefficienterne for Beregning baade af de negative Momenter over den 1ste Søjlerække og af de positive Momenter midt imellem Ydervæggen og den 1ste Søjlerække forhøjes med 20 %.

Ved den i Fig. 94 viste Plade, bestaaende af to Yderfag, fandtes det negative Moment over Søjlerækken for Belastning over begge Fag gennemsnitlig ca. 30 % større end ved den i Fig. 92 viste Plade, som bestaar af Mellemfag. Naar Pladen har mere end to Fag, vil de negative Momenter over den første Søjlerække blive mindre end i Pladen med to Fag, saaledes at en Forøgelse af 20 % til det negative Moment ved Mellemfag maa anses for passende.

Saafernt Væggen ikke kan optage bøjende Momenter, vil det positive Moment midt imellem Væggen og 1ste Søjlerække for en ensformig fordelt Belastning over alle Fag gennemsnitlig være ca. 60 % større end det tilsvarende Moment i et Mellemfag. Naar derimod kun det ene Fag belastes (Fig. 95) bliver de positive bøjende Momenter gennemsnitlig kun ca. 17 % større end de tilsvarende Momenter i et Mellemfag (Fig. 93). Naar Nyttelasten ikke er lille i Forhold til Egenvægten, og

Sammenligning mellem forskellige Normer								
Navn	Pladens Konstruktion	Koefficient <i>k</i>	Negative Momenter pro Cent			Positive Momenter pro Cent		
			Snit <i>ABC</i> og <i>DEF</i>	Snit <i>C—D</i>	Tilsammen	Snit <i>G—H</i> og <i>I—J</i>	Snit <i>H—I</i>	Tilsammen
Joint Committee	Med Plint	0,107	50	12,5	62,5	28,1—22,5	9,4—15,0	37,5
	Uden Plint	0,107	50—40,6	12,5—21,9	62,5	28,1—20,6	9,4—16,9	37,5
Concrete Institute	Med Plint	0,090	60—50	10—20	70—60	18—28	12—22	30—40
	Uden Plint	0,090	60—40	10—30	70—50	18—38	12—32	30—50
Chicago Ruling	Jernindlæg i 4 Retninger	0,087	53,4	13,3	66,7	20	13,3	33,3
	Jernindlæg i 2 Retninger	0,093	50	12,5	62,5	25	12,5	37,5
Akme Standard Two—way	Med Plint	0,096	47	13	60	27	13	40
	Uden Plint	0,096	45	12,5	57,5	30	12,5	42,5
Taylor and Thompson		0,092	54,2	9,6	63,8	ikke over 21,7	ikke under 14,5	36,2

naar Søjlerne i Ydervæggen har en passende Stivhed, maa den angivne Forøgelse af 20 % til det positive Moment ved Mellemfag derfor ogsaa antages at give en rimelig Værdi af det bøjende Moment i Yderfaget i Forhold til Momentet i Mellemfaget.

For at kunne bestemme Størrelsen af de bøjende Momenter i et vilkaarligt med y -Aksen parallelt Snit (Fig. 99) anbefaler Normerne at forudsætte Momenterne M_x varierende saaledes, at de for Plader uden Plint bliver Nul i en Femtedel af Afstanden mellem de to Snit, i hvilke de største negative Momenter regnes at optræde, og for Plader med Plint i en Fjerdedel af Afstanden. For den i Fig. 99 viste Plade skulde Momentnulpunkterne herefter ligge i Afstanden $\frac{1}{5}l$ fra C og D og $\frac{1}{5}(l-c)$ fra A og F . For den i Fig. 79 viste Plade uden Plint ses det imidlertid, at Momentnulpunkterne ikke afviger meget fra at være beliggende i en ret Linie, og for den i Fig. 81 viste Plade med Plint er det samme Tilfældet. Den i Normerne angivne Bestemmelse af Momenterne i et vilkaarligt Snit vil derfor ikke give særlig gode Resultater.

Skønt de af Joint Committee opstillede Normer reducerer de bøjende Momenter med Faktoren 0,85, kræver disse Normer noget større Dimensioner end de øvrige almindeligste amerikanske Normer, hvilket fremgaar af Tabellen*) Side 230, hvori de angivne Snit henviser til Fig. 99. Den i Tabellen opførte Koefficient k indgaar i Udtrykket for Totalmomentet

$$M_t = kql \left(1 - \frac{2}{3}c\right)^2.$$

Ved Chicago Ruling er Momentkoefficienten $k = 0,087$ for Plader med Jernindlæg i fire Retninger og $k = 0,093$ for Plader med Jernindlæg i to Retninger, medens man ved de øvrige Normer regner med samme Moment i begge Tilfælde. Da man ved Armering i fire Retninger lettere opnaar at faa Jernindlægget vilkelret paa de Snit, i hvilke Hovedmomenterne optræder, vil man faa en stivere Plade, naar Jernindlægget i fire Retninger dimensioneres efter samme Moment som Jernindlægget i to Retninger. Sikkerheden mod Brud vil sandsynligvis ogsaa herved forhøjes, idet Hovedmomenterne paa en Strækning langs en Diagonal optræder som positive Momenter i Snit vinkelrette paa Diagonalen og negative Momenter i Snit parallelle med Diagonalen (Fig. 8), hvorfor der paa denne Strækning i Henhold til § 18 kræves Jernindlæg parallelt med Siderne i begge Retninger baade foroven og forneden, ialt fire F_i , for at opnaa samme Styrke, som faas med et enkelt Jernindlæg parallelt med Diagonalen forneden og et enkelt Jernindlæg vinkelret paa Diagonalen foroven, eller tilsammen to F_i . Det kan derfor synes berettiget i Overensstemmelse med Chicago Ruling at regne Momentkoefficienten k lidt mindre for Plader med Jernindlæg i fire Retninger end for Plader med Jernindlæg i to Retninger.

*) For de fire første Normers Vedkommende er Tabellen angivet i *Engineering Record*, 1917, Nr. 10. Den sidste anbefales af Taylor and Thompson, *Concrete Plain and Reinforced*, New York and London, 1916, Side 547.

RETTELSER.

Side	26, Lin.	7 f. o.	$\Delta_x = \Delta_y = \lambda,$	læs	$\Delta_x = \Delta_y = \lambda,$
»	27, »	3 f. n.	$D_3 \quad 4E_3 - 4F_3,$	»	$4E_3 - 4F_3,$
»	28, »	19 f. n.	$d_3 \quad 4e_3 - 4f_3,$	»	$4e_3 - 4f_3,$
»	28, »	1 f. n.	$f_2,$	»	$f_3,$
»	29, »	1 f. n.	0,00695,	»	0,00685,
»	37, »	1 f. n.	$(e - 2),$	»	$(e, 2),$
»	48, »	3 f. o.	$1 \cdot (1 - \mu^2) \frac{EI}{p\lambda^4},$	»	$1 \cdot (1 - \mu^2) \frac{p\lambda^4}{EI},$
»	56, »	3 f. n.	reg-	»	regnes.
»	61, »	2 f. n.	$M_{vd} \Delta x,$	»	$M_{vd} \Delta y,$
»	65, »	2 f. o.	$\left(\frac{10,5}{2} - 5\mu - 3,5\mu^2 \right) c_1,$	»	$(10,5 - 5\mu - 3,5\mu^2) c_1,$
»	66, »	13 f. o.	$f_1,$	»	$f_3,$
»	77, »	5 f. o.	$I_c \cdot \beta_{(f, n-1)},$	»	$I_c \cdot \beta_{(f, n+1)},$
»	96, »	1 f. o.	$+ \mu \frac{\Delta z^2}{\Delta y^2},$	»	$+ \mu \frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2},$
»	101, 102, 103,	2 Steder paa hver Side:	$\frac{P\lambda^4}{EJ_c},$	»	$\frac{p\lambda^4}{EI_c},$
»	102, Lin. 14 f. o.		$-\frac{0,2}{0,86},$	»	$+\frac{0,2}{0,86},$
»	110, »	7 f. n.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial z},$	»	$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$
»	124, »	12 f. o.	$\frac{9E_i I_x}{l^4} \cdot 2d_2,$	»	$\frac{9E_i I_x}{l^2} \cdot 2d_2,$
»	128, »	10 og 11 f. o.	$I_1,$	»	$I_2,$
»	136, »	7, 6 og 5 f. n.	de tre ubekendte $d_1, d_2,$ og e_2 i Ligningerne læs henholdsvis		e_2, e_4 og $g_4,$
»	160, »	2 f. n.	0,00037,	»	0,00067,
»	160, »	1 f. n.	0,00367,	»	0,00337,
»	192, »	17 f. o.	0,00695,	»	0,00685.

