

Denne fil er downloadet fra
Danmarks Tekniske Kulturarv
www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på
www.tekniskkulturarv.dk/about

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

25/4 1930

FORANDERLIGE SYSTEMER

MED

ANVENDELSE PAA BUER MED
SKRAATSTILLEDE HÆNGESTÆNGER

AF

OCTAVIUS F. NIELSEN

CAND. POLYT., M. ING. F.

OVERINGENIØR I FIRMAET CHRISTIANI OG NIELSEN

I KOMMISSION HOS G. E. C. GAD
KØBENHAVN 1930

København DTH DISS

eks 2

Ordensbestemmelser

ved
det mundtlige Forsvar for den tekniske
Doktorgrad.

Uddrag af
Undervisningsministeriets Bekendtgørelse af 24. Juni 1916.

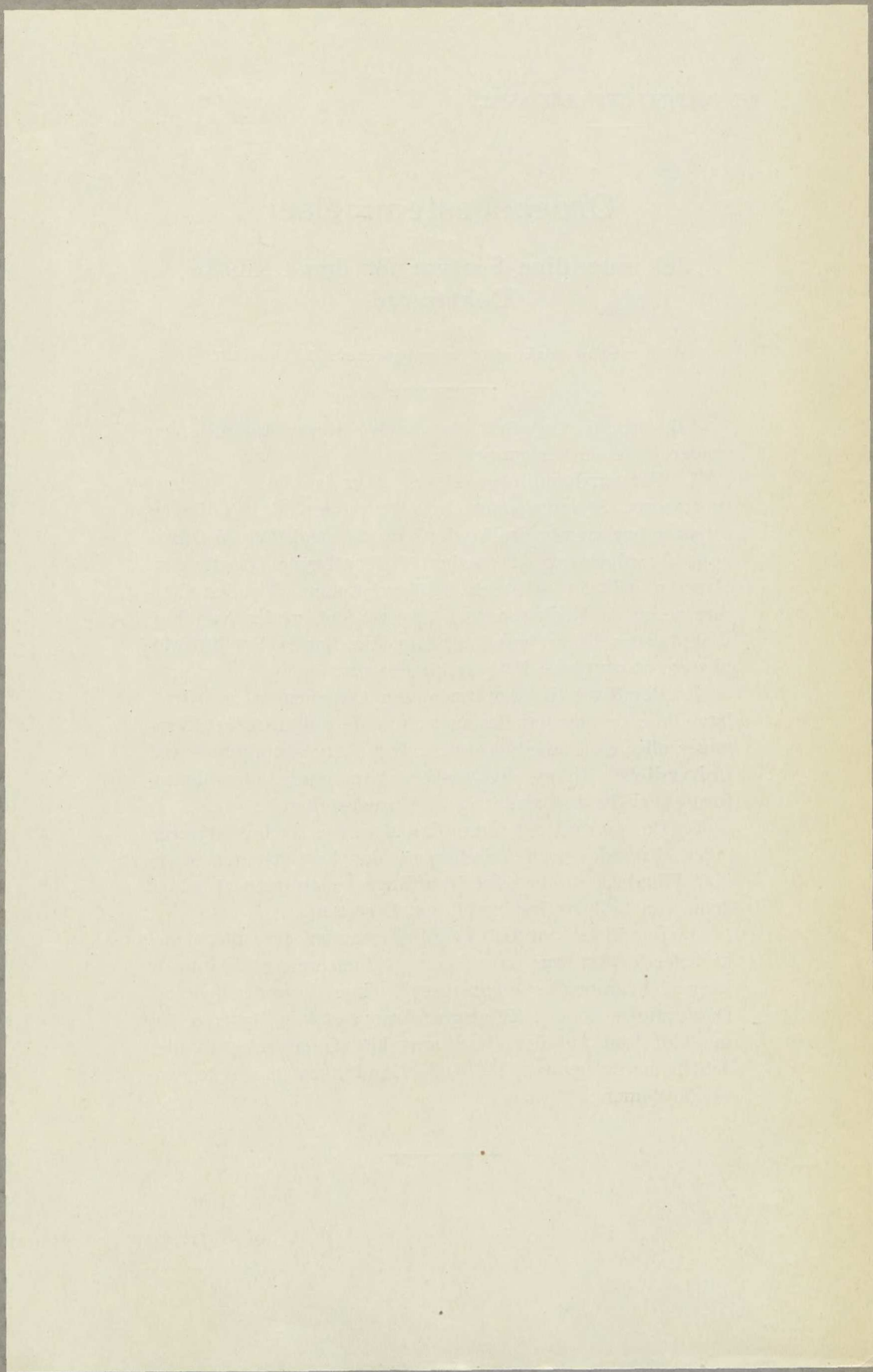
Til Ordens Opretholdelse under Forsvarshandlingen gælder følgende Bestemmelser:

1. Forsvarshandlingen styres af en af Læreanstaltens Professorer. Styreren giver Ordet og paaser, at Handlingen foregaar paa en værdig Maade; han kan paalægge en Opponent at ophøre og i fornødent Fald afbryde Handlingen. Styreren deltager ikke selv i Disputationen. Foruden Censorerne er de Medlemmer af Lærerraadet, under hvis Fag Disputatsens Emne hører, og som ikke har lovligt Forfald, pligtige at overvære Forsvarshandlingen.

2. Berettiget til at optræde som Opponent er ordentligvis kun de, der har bestaaet en af de polytekniske Eksaminer eller en Embedseksamen eller Magisterkonferens ved Universitetet. Andre, der ønsker at opponere, maa derom forud skriftlig henvende sig til Læreanstalten.

3. De, som vil opponere, har at melde sig hos Styreren inden Begyndelsen af Handlingen; dog kan Styreren ogsaa give Tilladelse under selve Handlingen, men uden at betage dem, som tidligere har meldt sig, Forretten.

4. Der tilstaas ordentligvis Doktoranden $\frac{3}{4}$ Time til det indledende Foredrag samt hver af Censorerne 1 Time og hver af de anmeldte Opponenters $\frac{3}{4}$ Time, derunder den Tid, Doktoranden behøver til at give Svar; dog kan Styreren, for saa vidt som Antallet af de anmeldte Opponenters tillader det, tilstaa en længere Tid. Hele Handlingen maa ikke vare over 5 Timer.



FORANDERLIGE SYSTEMER

DANMARKS TEKNISKE BIBLIOTEK

m 007189877

300006517882



Denne Afhandling er af Den polytekniske Læreanstalts Lærerraad efter Indstilling af Censorerne Professor, Dr. A. Ostensfeld og Professor A. Engelund antaget til at forsvares for den tekniske Doktorgrad.

Forsvaret finder Sted den 25. April 1930 Kl. 14 i Den polytekniske Læreanstalts store Foredragssal.

Den polytekniske Læreanstalt

København, den 28. Februar 1930.

*P. O. PEDERSEN,
Direktør.*

*R. Jespersen,
Inspektør.*

Afhandlingen blev indsendt den 19. Juni 1929.

FORANDERLIGE SYSTEMER

MED

ANVENDELSE PAA BUER MED
SKRAATSTILLEDE HÆNGESTÆNGER

AF

OCTAVIUS F. NIELSEN

CAND. POLYT., M. ING. F.

OVERINGENIØR I FIRMAET CHRISTIANI OG NIELSEN

DANMARKS
TEKNISKE BIBLIOTEK

I KOMMISSION HOS G. E. C. GAD
KØBENHAVN 1930

Copyright, 1930, by O. F. Nielsen.

Ved Behandlingen af Emnet for den foreliggende Afhandling har jeg haft den Fordel at kunne udarbejde Tilrettelæggelsen for praktisk Udførelse af den i Bogens andet Afsnit angivne Ny-Konstruktion i Tilslutning til mit Arbejde i Ingeniørfirmaet Christiani & Nielsen, som har ført denne Konstruktion ud i Praxis.

For de gode Arbejdsvilkaar, jeg paa denne Maade har haft, bringer jeg Dr.-Ing. R. Christiani, Kapt., Ing. Aage Nielsen, og Direktør for Firmaets svenske Selskab, cand. polyt. E. Aaby min hjerteligste Tak.

Cand. polyt. Lykkeberg Nielsen takker jeg for Hjælp med Gennemsyn af Bogen.

Stockholm, Februar 1930.

O. F. Nielsen.

INDHOLDSFORTEGNELSE

	Side
Indledning	7

FØRSTE AFSNIT

FORANDERLIGE SYSTEMER

§ 1. Foranderlige Systemer	9
§ 2. Det virksomme System	12
§ 3. Beregning af det til en given Belastning svarende virksomme System	18
§ 4. Influenslinier for foranderlige Systemer	37
§ 5. Bestemmelse af største og mindste Paavirkninger i foranderlige Systemer	40
§ 6. Systemer, for hvilke de foranderlige Dele kun kan antage Værdier, der ligger mellem to endelige Grænser	43
§ 7. Systemer med foranderligt Hovedsystem	45
§ 8. Bestemmelse af Sikkerhedsgraden for foranderlige Systemer	46

ANDET AFSNIT

BUER MED SKRAATSTILLEDE HÆNGESTÆNGER

§ 9. Tre-Charniers-Buer med skraatstillede Hængestænger	48
§ 10. Systemets Elasticitetsligninger udtrykt ved Clapeyron'ske Ligninger	55
§ 11. Bestemmelse af Konstruktionens Paavirkninger	62
§ 12. Valg af andet Hovedsystem	71
§ 13. Byggemaadens Indflydelse paa Beregningerne	74
§ 14. Løsning af Elasticitetsligningerne	75
§ 15. Eksempel 1	78
— 2	100
§ 16. Forskellige Systemer for Buer med skraatstillede Hængestænger ..	103
§ 17. To-Charniers-Buen med Trækbaand og skraatstillede Hængestænger	106
§ 18. Et-Charniers-Buen med skraatstillede Hængestænger	108
§ 19. Eksempler paa udførte Konstruktioner	110
§ 20. Prøvebelastning af Bro over Klarelv ved Deje	113

INDLEDNING

Naar en bærende Konstruktion paavirkes af en Belastning, vil der i de enkelte Konstruktionsdele opstaa Spændinger, som kan beregnes ved Hjælp af de i den tekniske Statik angivne Metoder. Skal Konstruktionen da være i Stand til at bære den givne Belastning, maa man sørge for, at den enkelte Konstruktionsdel har en Styrke, der svarer til de Kræfter, af hvilke den kan blive paavirket. En Stang, der paavirkes af en Trykkraft, skal saaledes have et Tværsnitsareal og en Søjlestivhed, der er tilstrækkelig til at modstaa Kraften. Er Stangens Længde stor og Trykkraften lille, er det muligt, at Søjlestivheden kræver en saa stor Forøgelse af Arealet, at Konstruktionen bliver uøkonomisk. For at undgaa dette kan man tænke sig den Mulighed, at man undlader at give Stangen den nødvendige Søjlestivhed og udfører den som en Trækstang. Man har da en Konstruktion, i hvilken der findes en Stang, som vil være i Virksomhed for alle de Belastninger, der frembringer Træk i Stangen, men uvirksom for de Belastninger, der giver Tryk i denne, d. v. s. Konstruktionen er bleven foranderlig og siges at indeholde et foranderligt System.¹⁾ I ovennævnte Tilfælde indeholdt Konstruktionen to Systemer; men, findes der flere Stænger, der har den ovenfor angivne Egenskab, kan Antallet af Systemer forøges.

I Stedet for at frembringe Foranderlighed i en Konstruktion ved Stænger, der kun kan tage Trækspændinger, kan man indføre Trykstænger, der ved Enderne er forbundne med Konstruktionen paa en saadan Maade, at Forbindelserne kun kan overføre Trykkrafter, og vi har da en Konstruktion, i hvilken

¹⁾ Benævnelsen foranderlige Systemer er først meddelt mig af Professor A. Ostefeld, som iøvrigt har henledt min Opmærksomhed paa denne Gruppe af Konstruktioner.

der findes Stænger, der er i Virksomhed for alle de Belastninger, der giver Tryk i disse Stænger, men uvirksomme for de Belastninger, der giver Træk. En Bue eller Bjælke, der gennemskæres, hvorefter Oversiden af Snittet forbindes med et Hængsel, vil ligeledes være et foranderligt System, idet Konstruktionen vil virke paa sædvanlig Maade for de Belastninger, der giver Tryk i Undersiden af Snittet, medens de Belastninger, der her frembringer Træk, vil bringe Snittet til at aabne sig saaledes, at det virker som et Charnier.

Foruden de ovenfor angivne Eksempler kan man i Konstruktioner indføre Konstruktionsdele, der kun kan optage Kræfter af en bestemt Størrelse.

Medens det saaledes ikke volder nogen Vanskelighed at angive Maader, paa hvilke en Konstruktion kan gøres foranderlig, er det betydeligt vanskeligere at angive, hvorledes saadanne Konstruktioner virker, idet man ikke paa Forhaand kender det System, der er virksomt for en given Belastning, men først maa finde dette. I det foreliggende Arbejde er der derfor forsøgt at give en almindelig Teori for saadanne Konstruktioner og de Metoder, efter hvilke de kan beregnes.

FØRSTE AFSNIT

§ 1. **Foranderlige Systemer.** Selv om man i den tekniske Statik ikke i Almindelighed har skelnet mellem Konstruktioner med uforanderlige eller foranderlige Systemer, har disse sidste Konstruktioner dog fundet Anvendelse i specielle Tilfælde.

Vi skal her nævne *Drageren med krydsende slappe Diagonaler, Kontradiagonaler*. Denne Konstruktion indeholder et foranderligt System, idet Diagonalerne kun kan optage Trækspændinger, og sættes ud af Funktion for de Belastninger, der frembringer Tryk. Fjernes alle Diagonalerne, bliver der et bevægeligt System tilbage. At Konstruktionen alligevel er brugelig, beror paa, at begge Diagonaler i et Fag ikke samtidig kan være ude af Virksomhed for de Belastninger, der er Tale om. Beregningen af Konstruktionen er almindelig kendt og udføres ved, at kun den ene Diagonal regnes virksom.¹⁾ Dragere med krydsende slappe Diagonaler blev tidligere meget anvendt, men bruges næsten ikke mere i permanente Konstruktioner. Derimod finder de stadig rig Anvendelse i provisoriske Konstruktioner, Stilladser etc. Ulemperne ved Konstruktionen er, at idet Spændingen skifter fra en Diagonal i et Fag over til den anden, kan der fremkomme Stillingen, i hvilke ingen af Diagonalerne er virksomme, saafremt Konstruktionen ikke er rigtig udført. Konstruktionen kan derfor deformere sig i Ryk. Konstruktionen hører til den Gruppe af foranderlige Systemer, i hvilke der ikke bliver et ubevægeligt System tilbage, naar samtlige foranderlige Konstruktionsdele fjernes. Denne Egenskab er netop en Svaghed hos disse Systemer.

For at undgaa Bevægeligheden maa man ved »Forspændinger« eller lignende sikre sig, at der ved Belastningens Flytning

¹⁾ A. Ostenfeld: Teknisk Statik I (1920), Side 166. Müller Breslau: Graph. Statik d. Baukonstruktion I (4. Udg., 1905), Side 278—86.

fra et System til et andet, findes et Interval, i hvilket begge Systemer er virksomme, saaledes at Faren for Bevægelighed undgaas.

Til samme Gruppe som Drageren med krydsende slappe Diagonaler hører ogsaa *4-Charniers-Buen*.¹⁾ At denne Konstruktion er praktisk brugelig, beror paa, at de to af Charnierne er indrettede paa en saadan Maade, at de ikke samtidig kan være i Funktion, i hvilket Tilfælde Konstruktionen vilde blive bevægelig. Man maa her ligeledes sørge for, at der findes et tilstrækkeligt stort Interval, i hvilke begge Charnierer er uvirksomme, naar Belastningen skifter fra et Charnier til et andet.

Beregningen kan foretages paa den Maade, at begge de foranderlige Charnierer antages ude af Funktion. Konstruktionen er da 1 Gang statisk ubestemt. Viser det sig nu, at det ene Charnier er virksomt, kan man gentage Beregningen under denne Forudsætning.

For at formindske Bevægeligheden af *Hængebro-Dragere* kan man ved Hjælp af Kabler forbinde Punkter af Brobanen med faste Punkter af Pillerne. Konstruktionen bliver da et foranderligt System, idet Kablerne bliver spændingsløse for de Belastninger, der vilde give Trykspændinger i disse.

Konstruktioner, hvori man anvender *Barduner* til Afstivning, vil blive foranderlige Systemer, idet Bardunerne kun er i Virksomhed for Trækspændinger. I Flyvemaskiner og stive Luftskibe anvendes Barduner i særlig Grad for at formindske Vægten.

Pælekonstruktioner er i Reglen foranderlige Systemer, idet Pælene ikke kan optage Trækspændinger og derfor er uvirksomme for disse Belastninger.²⁾

Den Konstruktion med et foranderligt System, der finder størst Anvendelse, er dog *Hjulet med de slappe Eger*. I ethvert Cyklehjul og i talrige Automobilhjul ser man denne Konstruktion anvendt, og den er et smukt Eksempel paa, hvorledes en Konstruktion med et foranderligt System kan forene stor Styrke med smaa Dimensioner. Da Belastningen for et Hjul altid virker paa samme Maade, vil Beregningen ved Anvendelse af de Metoder, som senere angives, ikke volde Vanskelighed.

¹⁾ A. Ostenfeld: Teknisk Statik II (1925), Side 172.

²⁾ C. Nøkkentved: Beregning af Pæleværker, Side 59.

I de hidtil nævnte Konstruktioner har man med Hensigt anvendt et foranderligt System, men i Virkeligheden er de fleste Konstruktioner foranderlige. I ethvert *bevægeligt Leje* findes en Friktion; denne kan naa en vis Værdi, hvorefter Lejet bevæger sig. Lejet er paa denne Maade et foranderligt System, hvori der kan opstaa Kræfter af en vis Maksimumsværdi.

Ved Beregning af *Gitterkonstruktioner* antager man i Reglen friktionsløse Knudepunkter, medens man i Virkeligheden udfører Knudepunkterne med stive Knudeplader. Under Belastningen vil der da findes ganske store sekundære Spændinger i Knudepunktsforbindelserne, men, idet Belastningen forøges, vil efterhaanden Spændingerne i Knudepladerne naa op til Flydegrænsen, hvorefter Jernet flyder, og Konstruktionen nærmer sig de Forhold, for hvilke den er beregnet. Konstruktionen kan paa denne Maade opfattes som et foranderligt System, i hvilket Knudepunkterne kun kan optage Momenter af en vis Maksimumsværdi.

Paa samme Maade vil en *kontinuerlig Bjælke* af Jern, for hvilken Dimensionerne over Understøtningerne ikke er tilstrækkelige til at kunne optage de maksimale Understøtningsmomenter, være et foranderligt System. Vokser Belastningen, vil Momentet over Understøtningen til sidst bevirke, at Spændingerne her overskrider Flydegrænsen, hvorefter dette Moment i Hovedsagen beholder sin Værdi uforandret ved en yderlig Forøgelse af Belastningen. Bjælken er paa denne Maade et foranderligt System, i hvilket Momentet over Understøtningen kun kan antage en begrænset Værdi. I Jernbetonkonstruktioner anvendes dette Forhold særlig hyppigt, idet de forskellige Normer for kontinuerlige Bjælker tillader at gøre Dimensionerne over Understøtningen mindre end, hvad der svarer til det beregnede Understøtningsmoment. Til Gengæld forøges Momentstyrken midt i Faget tilsvarende.

Endelig skal vi til sidst nævne, at ved *Brudstadiet* vil enhver Konstruktion virke som et foranderligt System, idet der i samme Øjeblik, som en Konstruktionsdel svigter, opstaar et nyt System; og Konstruktionen vil under hele Bruddet følge Lovene for foranderlige Systemer.

Selv om saaledes foranderlige Systemer kan angives i mange Konstruktioner, har man ikke udarbejdet en almindelig Teori for saadanne Systemer. *K. Wieghardt* har i en Afhandling spe-

cielt behandlet Dragere med krydsende slappe Diagonaler. (*Über die Statik ebener Fackwerke mit schlaffen Stäben*, Diss. Göttingen 1903), og M. Geller har i en Afhandling: (*Beitrag zur Theorie der veränderlich gegliederten und gestützten Systeme*, Diss. Berlin 1921), forsøgt at angive de Betingelser, som det virksomme System for en given Belastning maa opfylde; men Betingelserne dækker ikke de virkelige Forhold, og til Bestemmelse af det virksomme System angives Forsøg som eneste Udvej.

I denne Afhandlings første Afsnit er der derfor angivet de Betingelser, som det virksomme System maa opfylde, og de Metoder, man kan anvende til Beregning af dette. Endvidere er angivet Anvendelse af Influenslinier for foranderlige Systemer, samt Beregning af største og mindste Paavirkninger m. m.

Endelig er der i andet Afsnit angivet en ny Konstruktion med et foranderligt System, nemlig *Buen med skraatstillede Hængestænger*. I de senere Aars rivende Udvikling paa Jernbetonkonstruktionernes Omraade er man efterhaanden naaet til at bygge Buebroer med meget store frie Spændvidder. For at naa dette Resultat har det dog været nødvendigt at udføre Buerne med særlige Tværsnitsformer, Spiralarmring etc., der viser, at man her er oppe paa Spændvidder, for hvilke Betonens naturlige Styrke ikke rækker til; Forf. har derfor forsøgt at udarbejde Konstruktioner, for hvilke Paavirkningerne blev nedsat. Disse Undersøgelser er resulteret i den ovenfor nævnte Konstruktion, i hvilken man kan reducere Momenterne i en saadan Grad, at Buens Normalkraft i Realiteten bliver bestemmende for Dimensionerne. Da den bærende Konstruktion saaledes i Hovedsagen kun er paavirket af Normalkræfter, er Formforandringerne meget smaa. Dette har ogsaa vist sig i Resultaterne fra en Prøvebelastning (§ 20) af en udført Konstruktion.

§ 2. Det virksomme System. For at et foranderligt System skal danne en brugelig Konstruktion for alle Belastninger, maa det, naar alle Delene er i Funktion, nødvendigvis danne et statisk ubestemt System; thi ellers vilde Konstruktionen blive statisk underbestemt for de Belastninger, der sætter een eller flere af Konstruktionsdelene ud af Funktion. Derimod er der selv-

følgelig intet i Vejen for, at den virksomme Del af Konstruktionen ved visse Belastninger kan blive statisk bestemt. I det følgende vil vi antage, at der bliver et *statisk bestemt* eller *statisk ubestemt* System tilbage, naar samtlige foranderlige Dele fjernes.

Da Totalsystemet saaledes vil danne et statisk ubestemt System, kan vi for en given Belastning opskrive de sædvanlige Elasticitetsligninger, idet vi et Øjeblik ser bort fra, at muligvis ikke alle Delene er i Funktion. Idet Systemet derefter antages at indeholde visse overtallige X_a, X_b, X_c o. s. v., lyder Elasticitetsligningerne saaledes:¹⁾

$$\begin{aligned}\delta_a^{oabc\dots} &= \delta_a^o - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} \dots - X_n \delta_{an} + \delta_{at} + \delta_{au} \\ \delta_b^{oabc\dots} &= \delta_b^o - X_a \delta_{ab} - X_b \delta_{bb} \dots - X_n \delta_{bn} + \delta_{bt} + \delta_{bu} \\ &\dots\dots\dots (1) \\ \delta_n^{oabc\dots} &= \delta_n^o - X_a \delta_{an} - X_b \delta_{bn} \dots - X_n \delta_{nn} + \delta_{nt} + \delta_{nu}\end{aligned}$$

Det valgte Hovedsystem har vi her betegnet med o , saaledes at:

$\delta_a^{oabc\dots}$ betyder Forskydningen i det statisk ubestemte System $oabc\dots$ af Angrebepunktet a for den ydre Belastning i Retningen $X_a = -1$.

δ_a^o betyder Forskydningen i Hovedsystemet o af Angrebepunktet a for den ydre Belastning i Retningen $X_a = -1$.

δ_{aa}, δ_{ab} o. s. v. Forskydningerne i Hovedsystemet o af Punkterne a i Retningerne $X_a = -1$ som Følge af Belastningen $X_a = -1, X_b = -1$ o. s. v.

δ_{at} og δ_{au} Forskydningerne i Hovedsystemet o af Punktet a i Retningen $X_a = -1$ som Følge af en Temperaturtilvækst paa t^o eller en Eftergiven af Understøtningerne.

For at være konsekvent skulde man egentlig tilføje Index o ogsaa i Leddene $\delta_{aa}, \delta_{ab} \dots$, men vi har undladt dette for at simplificere Nedskrivningen af Ligningerne, idet δ_{aa}, δ_{ab} o. s. v. i Ligningerne (1) altid refererer sig til det System o , i hvilket Forskydningerne $\delta_a^o, \delta_b^o \dots$ er beregnede, saaledes at det er tilstrækkeligt at angive Index o for disse Led. Hvor det imidlertid i det følgende bliver nødvendigt at angive det System, i hvilket

¹⁾ A. Ostenfeld: Teknisk Statik I (1920), Side 287.

Koefficienterne δ_{aa} , $\delta_{ab}\dots$ eller de overtallige X_a , $X_b\dots$ er beregnede, vil vi gøre dette ved Index foroven. Elasticitetsligningen med fuldstændige Systembetegnelser faar da den nedenfor angivne Form:

$$\delta_a^{oabc\dots} = \delta_a^o - X_a^{oabc\dots} \delta_{aa}^o - X_b^{oabc\dots} \delta_{ab}^o \dots - X_n^{oabc\dots} \delta_{an}^o + \delta_{at}^o + \delta_{au}^o$$

Ved den sædvanlige Nedskrivning af Ligningerne betegnes:

$$\delta_a^{oabc\dots} \text{ ved } \delta_a \text{ og } \delta_a^o \text{ ved } \Sigma P_m \delta_{am}.$$

Da imidlertid δ_a og $\Sigma P_m \delta_{ma}$ begge betyder Forskydninger af Angrebepunktet a i et eller andet System, har vi i dette Tilfælde valgt at betegne dem paa analog Maade.

Til Bestemmelse af Størrelserne i Elasticitetsligningerne har man med kendte Betegnelser:¹⁾

$$\begin{aligned} \delta_a^o &= \Sigma S^o S_a \frac{s}{EF} + \int \frac{N^o N_a}{EF} ds + \int \frac{M^o M_a}{EI} ds \\ \delta_{aa} &= \Sigma S_a^2 \frac{s}{EF} + \int \frac{N_a^2}{EF} ds + \int \frac{M_a^2}{EI} ds \\ \delta_{ab} &= \delta_{ba} = \Sigma S_a S_b \frac{s}{EF} + \int \frac{N_a N_b}{EF} ds + \int \frac{M_a M_b}{EI} ds \\ \delta_{at} &= \Sigma S_a \epsilon t s + \int N_a \epsilon t ds - \int M_a \epsilon \frac{\Delta t}{h} ds \\ \delta_{au} &= - \Sigma C_a \Delta c. \end{aligned} \quad (2)$$

I disse Formler angiver Index foroven for δ_a^o det System, hvori samtlige Paavirkninger er beregnede. S^o , M^o og N^o med Index o foroven betyder Paavirkninger af den ydre Last i System o , medens S_a , M_a , N_a og C_a med Index a forneden er Paavirkninger hidrørende fra en Kraft $X_a = -1$ i System o og analogt for S_b , M_b , N_b og C_b .

Saafermt Ligningerne (1) er opstillede for et uforanderligt System, bestemmer (1) Værdierne af de overtallige under de givne Forudsætninger. Er derimod Ligningerne anvendt paa et foranderligt System, er kun saadanne Værdier brugelige, som er i Overensstemmelse med den mulige Virkemaade.

¹⁾ A. Ostenfeld: Teknisk Statik I (1920), Side 447.

Vi antager nu, at for den givne Belastning er alle overtallige med Undtagelse af X_a , X_b og X_c ude af Funktion. Vi kan da opstille Elasticitetsligningerne uden Hensyn til X_d , X_e o. s. v., da disse ingen Betydning kan have, naar de er uvirk-somme. Ligningerne til Bestemmelse af X_a , X_b og X_c bliver da, idet man i dette Tilfælde har $\delta_a^{oabc} = 0$ o. s. v.

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_a^{oabc} = \delta_a^o - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} + \delta_{at} + \delta_{au} \\ 0 &= \delta_b^{oabc} = \delta_b^o - X_a \delta_{ab} - X_b \delta_{bb} - X_c \delta_{bc} + \delta_{bt} + \delta_{bu} \\ 0 &= \delta_c^{oabc} = \delta_c^o - X_a \delta_{ac} - X_b \delta_{bc} - X_c \delta_{cc} + \delta_{ct} + \delta_{cu} \end{aligned} \quad (3)$$

Man ser, at *Ligningerne for det virksomme System fremkommer af det samlede Ligningssystem ved i dette at slette samtlige uvirk-somme overtallige og deres Ligninger.*

Er Antagelsen om det virksomme System rigtig, skal Ligningerne (3) give lutter brugelige Værdier af de overtallige, og idet vi antager, at vi har bestemt den positive Retning for X Kræfterne i Overensstemmelse med de brugelige Værdier, maa (3) bestemme *positive Værdier af de overtallige.*

Indsætter vi disse Værdier i de Ligninger (1), som vi bortkaster, faar vi:

$$\begin{aligned} \delta_d^{oabc} &= \delta_d^o - X_a \delta_{ad} - X_b \delta_{bd} - X_c \delta_{cd} + \delta_{dt} + \delta_{du} \\ \delta_e^{oabc} &= \delta_e^o - X_a \delta_{ae} - X_b \delta_{be} - X_c \delta_{ce} + \delta_{et} + \delta_{eu} \\ &\dots\dots\dots \\ \delta_n^{oabc} &= \delta_n^o - X_a \delta_{an} - X_b \delta_{bn} - X_c \delta_{cn} + \delta_{nt} + \delta_{nu} \end{aligned} \quad (4)$$

Vi ser da, at disse Ligninger nu angiver Forskydningerne af Punkterne $d, e \dots n$ i System $oabc$, og er vor Antagelse om det virksomme System rigtig, maa Deformationerne δ_d^{oabc} o. s. v. være saadanne Deformationer, som giver ubrugelige Værdier af de overtallige. Disse *Deformationer maa derfor være negative*, naar vi har valgt den positive Retning af X Kræfterne i Overensstemmelse med deres mulige Virkemaade. Der er her forudsat, at de foranderlige Dele sættes ud af Funktion eller i Funktion ved, at deres Værdi passerer Nul.

Vi har herved funden en nødvendig Betingelse, som det virksomme System maa opfylde. Har vi omvendt et forander-

ligt System af en saadan Beskaffenhed, at de foranderlige Dele er *spændingsløse* og uden »Overlængde«, naar Konstruktionen er ubelastet, da vil enhver positiv Deformation sætte den tilsvarende Del i Funktion, medens enhver negativ Deformation vil gøre dem spændingsløs. Har vi derfor for en saadan Konstruktion fundet et System, for hvilket Ligningerne (3) er tilfredsstillede af positive Værdier af de overtallige, medens de tilsvarende Værdier i Ligningerne (4) giver negative Deformationer (eventuelt Nul), da er det umiddelbart indlysende, at dette System er en Ligevægtstilstand for den angivne Last, saaledes at Betingelsen baade er nødvendig og tilstrækkelig.

At det er muligt at finde Værdier, der tilfredsstiller Betingelserne (3) og (4), beror paa Elasticitetstiligningernes særlige Form. For et vilkaarligt System af første Grads Ligninger kan dette ikke lade sig gøre, selv om Ligningerne har en symmetrisk Determinant. Det er nødvendigt, at Koefficienterne tilfredsstiller visse Betingelser. Af Ligningen $\delta_{aa}^b = \delta_{aa}$ $-\frac{\delta_{ab}^2}{\delta_{bb}} > 0$ ser man, at $\delta_{aa} \delta_{bb} > \delta_{ab}^2$. Paa tilsvarende Maade kan man danne Betingelser for de øvrige Koefficienter.

Har derimod nogle af de foranderlige Dele visse *Begyndelsespaavirkninger*, f. Eks. X_{a_1} , X_{b_1} , vil disse først sættes ud af Funktion, naar de har faaet en Paavirkning $-X_{a_1}$ og $-X_{b_1}$. Vi kan imidlertid erstatte disse Begyndelsespaavirkninger med Begyndelsesdeformationer.

Indsættes nemlig X_{a_1} og X_{b_1} i Elasticitetstiligningerne, faar man:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_{a_1}^o - X_{a_1} \delta_{aa} - X_{b_1} \delta_{ab} \\ 0 &= \delta_{b_1}^o - X_{a_1} \delta_{ab} - X_{b_1} \delta_{bb} \\ &\dots\dots\dots \\ 0 &= \delta_{n_1}^o - X_{a_1} \delta_{an} - X_{b_1} \delta_{bn}. \end{aligned} \quad (5)$$

Disse Ligninger angiver de Begyndelsesdeformationer $\delta_{a_1}^o$, $\delta_{b_1}^o$ o. s. v., som vil frembringe Paavirkningerne X_{a_1} og X_{b_1} og anbringer man derfor Deformationerne:

$$\delta_a^o + \delta_{a_1}^o \quad \text{og} \quad \delta_b^o + \delta_{b_1}^o \quad \text{o. s. v.} \quad (6)$$

paa Systemet, bestemmes det virksomme System ved den samme Betingelse, som ovenfor omtalt.

Det samme kan ogsaa opnaas ved at vælge et Hovedsystem, der foruden af de ydre Kræfter tillige er paavirket af de *Forspændinger*, som den foranderlige Del af Systemet eventuelt er belastet med; og alle Deformationerne i Hovedsystemet beregnes da ved Hjælp af de Momenter og Normalkræfter, som frembringes af de ydre Kræfter plus disse Forspændinger.

Lignende Fremgangsmaade kan anvendes, saafremt en af de overtallige f. Eks. X_a , naar Konstruktionen er ubelastet, har en »Overlængde« $\delta_{a_2}^0$. Dette betyder, at denne Del først træder i Funktion, naar

$$\delta_a^{oxy} - \delta_{a_2}^0 \geq 0.$$

Vi anbringer da Deformationerne:

$$\delta_a^0 - \delta_{a_2}^0 \quad (7)$$

paa Systemet, hvorefter man igen ser, at denne Del er virksom for enhver positiv Deformation og uvirksom for enhver negativ, saaledes at det virksomme System kan bestemmes ved den ovenfor omtalte Betingelse.

Er δ_a^0 , δ_b^0 o. s. v. alle Nul, har et hvilket som helst System Løsningerne $X_a = 0$, $X_b = 0$ o. s. v., og man kan da paa en Maade kalde alle Systemer virksomme. Paa samme Maade forholder det sig, hvis Deformationerne δ_a^0 , δ_b^0 o. s. v. er Nul eller negative, idet da ethvert System dannet af de overtallige med Nul-Deformationerne ligeledes kan siges at være et virksomt System.

I ovenstaaende er angivet Sammenhængen mellem de overtallige, der for en given Belastning er i Funktion, og de, der er ude af Funktion. Man ser, at det virksomme System bestemmes af Hovedsystemsdeformationerne δ_a^0 , δ_b^0 for den ydre Last samt af Forskydningerne δ_{aa} , δ_{ab} mellem de overtallige indbyrdes. Skønt disse sidste Forskydninger er ganske uafhængige af Belastningen, er enhver Kombination af de overtallige i virksomme og uvirksomme Dele mulig. Vælger man nemlig en vilkaarlig Deling af et System med n overtallige, kan man af Ligningerne (3) og (4) bestemme de Hovedsystemsdeformationer, som netop vil frembringe denne Virkning. Anbringes derefter n Kræfter paa Systemet, kan man af Influenslinierne for Hovedsystemsdeformationerne bestemme Værdierne af de ydre Kræfter, naar de skal give de søgte Hovedsystemsdeformationer.

ner, idet man til disses Bestemmelse har n Ligninger med n Ubekendte. En anden Sag er, at de Kræfter, man derved faar bestemt, maaske ikke er mulige, saafremt man er begrænset i Valget af Belastning.

§ 3. **Beregning af det til en given Belastning svarende virksomme System.** For den givne Belastning bestemmer vi paa sædvanlig Maade Elasticitetsligningerne med et Hovedsystem o , som vi naturligt vil vælge saaledes, at det indeholder de overtallige, som kan antage alle Værdier, eventuelt suppleret med saadanne overtallige af de foranderlige Dele, om hvilke vi paa Forhaand ved, at de er virksomme for den givne Belastning. For de overtallige vælger vi den positive Retning i Overensstemmelse med deres mulige Virkemaade. Elasticitetsligningerne lyder da:

$$0 = \delta_a^o - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} \cdots - X_n \delta_{an}$$

$$0 = \delta_b^o - X_a \delta_{ab} - X_b \delta_{bb} - X_c \delta_{bc} \cdots - X_n \delta_{bn}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$0 = \delta_n^o - X_a \delta_{an} - X_b \delta_{bn} - X_c \delta_{cn} \cdots - X_n \delta_{nn}$$

I δ_a^o , δ_b^o o. s. v. vil vi her og i det følgende tænke os alle *Temperatur- og Understøtningsforskydninger* indeholdt, samt eventuelle *Begyndelsesspændinger* og »Overlængder« udtrykt paa den i § 2 Ligning (6) og (7) angivne Maade. Endvidere antager vi, at de brugelige Værdier af de overtallige kun er begrænsede i den ene Retning.

Er nu alle Deformationerne

$$\delta_a^o, \delta_b^o \text{ o. s. v.}$$

negative, ved vi fra § 2, at System o er det virksomme System; thi i dette System er alle virksomme overtallige o positive og Deformationerne for de uvirksomme X_a , X_b o. s. v. negative. Skal derfor nogle af disse blive virksomme, maa mindst een af Deformationerne i Hovedsystemet være positiv, og det virksomme System maa da altid indeholde denne ene overtallige.

Paa samme Maade maa, hvis flere af Deformationerne δ_a^o , δ_b^o o. s. v. er positive, det virksomme System altid indeholde mindst een af de tilsvarende overtallige.

Er endvidere $\delta_{ab}, \delta_{ac} \dots \delta_{an}$ alle negative og δ_a^0 positiv, maa X_a tilhøre det virksomme System, thi af den første Ligning ser man, at enhver positiv Værdi af de overtallige altid bevirker, at X_a er positiv.

Paa samme Maade kan X_a , naar $\delta_{ab}, \delta_{ac} \dots \delta_{an}$ alle er positive og δ_a^0 negativ, aldrig blive virksom, da enhver positiv Værdi af de øvrige overtallige bevirker, at X_a bliver negativ, og vi kan da uden videre slette Ligningen til Bestemmelse af X_a og Ledene med X_a i de øvrige Ligninger. Man vil af Ligningerne endvidere se, at saafremt δ_a^0 er negativ, kan X_a kun blive positiv, hvis nogle af de overtallige giver positive Bidrag; og tilhører X_a derfor det virksomme System, maa dette tillige indeholde mindst een af de overtallige, som giver positive Bidrag, d. v. s. for hvilke δ_{ax} er negativ.

For nu at bestemme det virksomme System kunde man prøve alle mulige Kombinationer af de overtallige, indtil man fandt et System, som tilfredsstillede Betingelsen (3) og (4) i § 2 for det virksomme System. Da man herved vilde komme til at undersøge unødvendigt mange Systemer, vil vi nedenfor angive en Metode, der fører til det virksomme System og Værdierne af de virksomme overtallige.

a. Fordeling af Hovedsystemets positive Deformationer.

For et foranderligt System, bestaaende af en uforanderlig Del o og de foranderlige Dele betegnet ved $X_a, X_b \dots X_n$, kan vi paa sædvanlig Maade opskrive Totalsystemets Elasticitetsligninger.

$$0 = \delta_a^0 - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} \dots - X_n \delta_{an}$$

$$0 = \delta_b^0 - X_a \delta_{ab} - X_b \delta_{bb} \dots - X_n \delta_{bn}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$0 = \delta_n^0 - X_a \delta_{an} - X_b \delta_{bn} \dots - X_n \delta_{nn}$$

Vi vil da søge det virksomme System for den Belastning, der frembringer Hovedsystemsdeformationerne $\delta_a^0, \delta_b^0 \dots \delta_n^0$. I ovenstaaende Ligninger vil vi antage, at $\delta_a^0 > \delta_b^0 > \delta_c^0$, og at de alle er positive, medens $\delta_d^0, \delta_e^0 \dots \delta_n^0$ alle er negative.

Anbringer man paa Systemet en *Tillægslast* af en saadan Beskaffenhed, at den frembringer Deformationerne $-\delta_a^0$ for

Er i disse Ligninger $\delta_{b_1}^{oa}$, $\delta_{c_1}^{oa} \dots \delta_{n_1}^{oa}$ alle negative for $k_1 = 1$, er System oa det virksomme System for den oprindelige Last, og ved at sætte $k_1 = 1$, finder vi da Værdien af X_a og Værdierne af Deformationerne for de øvrige overtallige. Er derimod en eller flere af Deformationerne i System oa positive for $k_1 = 1$, kan vi af ovenstaaende Ligninger finde den mindste Værdi af k_1 , der gør en af Deformationerne lig Nul (Nulpunktet for System oa). Vi antager, at den første, der bliver Nul, er $\delta_{b_1}^{oa}$, og at den bliver Nul for $k = k_1$. Bliver k da større end k_1 , vil X_b komme i Funktion, og under den første Del af Variationen vil System oab være det virksomme System. Da vi ovenfor har beregnet Værdien af X_a og Deformationerne for $k = k_1$, behøver vi kun at finde Ændringerne af disse Værdier, naar k bliver større end k_1 . Ændringen af X_a og Værdien af X_b kan findes af Ligningerne:

$$\begin{aligned} 0 &= k_2 \delta_a^o - X_{a_2} \delta_{aa} - X_{b_2} \delta_{ab} \\ 0 &= k_2 \delta_a^o - X_{a_2} \delta_{ab} - X_{b_2} \delta_{bb} \end{aligned} \quad (10)$$

hvoraf man finder

$$X_{a_2} = k_2 f_I(\delta_a^o), \quad X_{b_2} = k_2 f_{II}(\delta_a^o)$$

De endelige Værdier af de virksomme overtallige og Deformationerne for de uvirksomme under Variationen $0 - k_1 - k_2$ bestemmes da af Ligningerne:

$$\begin{aligned} X'_{a_2} &= X_{a_1} + X_{a_2} \\ X'_{b_2} &= 0 + X_{b_2} \\ \delta_{c_2}^{oab} &= \delta_{c_1}^{oa} + k_2 \delta_a^o - X_{a_2} \delta_{ac} - X_{b_2} \delta_{bc} \\ \delta_{d_2}^{oab} &= \delta_{d_1}^{oa} - X_{a_2} \delta_{ad} - X_{b_2} \delta_{bd} \\ &\dots \dots \dots \\ \delta_{n_2}^{oab} &= \delta_{n_1}^{oa} - X_{a_2} \delta_{an} - X_{b_2} \delta_{bn} \end{aligned} \quad (11)$$

Er i disse Ligninger X'_{a_2} positiv og $\delta_{c_2}^{oab} \dots \delta_{n_2}^{oab}$ alle negative for $k_2 = 1 - k_1$, er oab det virksomme System for den oprindelig givne Last; og ved i ovenstaaende Ligninger at sætte $k_2 = 1 - k_1$, finder man da de gældende Værdier for dette System. Er derimod Betingelsen ikke opfyldt, kan man af disse Ligninger finde den mindste Værdi af k_2 , der gør en af Defor-

mationerne lig Nul, og derefter danne et nyt System, der indeholder den tilsvarende overtallige. Men det er ogsaa muligt, at X'_{a_2} bliver Nul for en mindre Værdi af k_2 , i hvilket Tilfælde man skal danne det næste System ved at udskyde X_a . Ved den fortsatte Beregning af nye Systemer kan da X_a igen komme i Funktion, hvorfor man for hvert nyt System maa finde de nye Værdier af de i Funktion værende overtallige og Deformationerne for de uvirksomme, indtil man til sidst helt har fjernet Tillægslasten og derved fundet det virksomme System for den oprindelig givne Last og de tilhørende Værdier af de virksomme overtallige og Deformationerne for de uvirksomme.

I Stedet for som ovenfor angivet ved Indførelse af et nyt System at finde Ændringen af Værdierne for de overtallige, kan man straks finde de *endelige Værdier* ved i det ovenfor angivne Tilfælde at løse Ligningerne:

$$\begin{aligned} 0 &= k \delta_a^o - X'_{a_2} \delta_{aa} - X'_{b_2} \delta_{ab} \\ 0 &= \delta_b^o - \delta_a^o + k \delta_a^o - X'_{a_2} \delta_{ab} - X'_{b_2} \delta_{bb} \end{aligned} \quad (12)$$

Deformationerne bestemmes da af:

$$\begin{aligned} \delta_{c_2}^{oab} &= \delta_c^o - \delta_a^o + k \delta_a^o - X'_{a_2} \delta_{ac} - X'_{b_2} \delta_{bc} \\ &\dots\dots\dots \\ \delta_{n_2}^{oab} &= \delta_n^o - X'_{a_2} \delta_{an} - X'_{b_2} \delta_{bn} \end{aligned} \quad (13)$$

I dette Tilfælde er $k = k_1 + k_2$.

I det foregaaende dannede vi de nye Systemer ved at tilføje eller fjerne *een overtallig* ad Gangen; men det vil være lettere at danne de nye Systemer ved paa een Gang at tilføje *flere overtallige*. Er i det foregaaende Eksempel δ_{ab} negativ, er det umiddelbart indlysende, at System *oab* maa være et positivt System, og følgelig kunde man straks undersøge dette; er tillige δ_{ac} og δ_{bc} negative, vilde ogsaa *oabc* være et positivt System.

Paa samme Maade kan man, hvis flere af Deformationerne for de udenfor det virksomme System værende overtallige bliver positive for Værdier af k mindre end 1, paa een Gang tilføje disse i et nyt System, hvis blot de giver hinanden positive Tilvækster, d. v. s. hvis δ_{xy} er negativ. Endvidere vil man forstaa, at det er unødvendigt at opskrive de Deformationer, som Systemets overtallige giver negative Tilvækster (d. v. s. δ_{xy}

positiv). Saadanne Forskydninger behøver man først at danne, naar man indfører en overtallig, der bevirker en positiv Tilvækst (d. v. s. δ_{xy} negativ).

I det ovenfor angivne Eksempel valgte man en Tillægslast af en saadan Beskaffenhed, at den resulterende Last havde Hovedsystemet som det virksomme System; men man kan lige saa godt vælge en anden Tillægslast, naar blot man paa Forhaand kender *det virksomme System for den resulterende Last*. Beregningen vil da blive ganske analog med den ovenfor beskrevne, men kan blive mere kortfattet, saafremt det virksomme System for den resulterende Last ligger i Nærheden af det virksomme System for den oprindelig givne Last, d. v. s. hvis Tillægslastens Hovedsystemsdeformationer er smaa i Forhold til de givne. Man vil heraf forstaa, at man kan skønne det virksomme System og ved Hjælp af de givne Deformationer for de antagne virksomme overtallige bestemme Værdierne af de overtallige i dette System og derefter Værdierne af Deformationerne for de antagne uvirksomme. Er nu alle de antagne virksomme overtallige positive, men er Deformationen δ_a^{oxy} for en antaget uvirksom overtallig ogsaa positiv, tilføjer man en saadan Tillægslast, at Deformationen for Punkt a for Tillægslasten bliver $-\delta_a^{oxy}$, hvorefter Beregningen gennemføres som ovenfor angivet.

Søger man specielt det virksomme System for en Konstruktion, der er paavirket af en Last p , der har $oabc$ som det virksomme System, men derefter tillige paavirkes af en Last q , kan man anvende lignende Fremgangsmaade som ovenfor beskrevet. Vi antager, at Lasten p giver Værdierne X'_a , X'_b og X'_c for de virksomme overtallige og Deformationerne $\delta_d'^{oabc} \cdot \delta_n'^{oabc}$ for de uvirksomme. Man beregner derefter Værdierne X''_a , X''_b og X''_c for Lasten q alene i System $oabc$ og derefter Deformationerne $\delta_d''^{oabc} \cdot \delta_n''^{oabc}$ for de øvrige overtallige. Er nu X''_a , X''_b og X''_c alle positive og $\delta_d''^{oabc}$ o. s. v. alle negative, har Lasten q samme virksomme System som Lasten p , saaledes at Lasten $(p + q)$ ogsaa har $oabc$ som det virksomme System, hvorefter man kan addere Værdierne for p og q og derved finde Værdierne for Lasten $(p + q)$. Har derimod p og q ikke det samme virksomme System, kan man anvende lignende Betragtningmaade som tidligere, idet vi tænker os Lasten q jævnt voksende

fra Nul til Værdien q . Under den første Del af denne Variation bestemmes da de resulterende Værdier af de virksomme overtallige og Deformationerne for de uvirksomme ved de nedenfor angivne Ligninger:

$$\begin{aligned} X_a &= X'_a + k X''_a, \quad X_b = X'_b + k X''_b, \quad X_c = X'_c + k X''_c \\ \delta_d^{oabc} &= \delta_d'^{oabc} + k \delta_d''^{oabc} \\ \dots\dots\dots \\ \delta_n^{oabc} &= \delta_n'^{oabc} + k \delta_n''^{oabc} \end{aligned} \quad (14)$$

Ved i disse at lade k vokse fra Nul til 1, og derefter bestemme Nulpunkterne for de forskellige Systemer, man derved gennemløber, kan man paa ganske tilsvarende Maade som tidligere beskrevet, tilsidst finde det virksomme System for Lasten $(p + q)$.

Eksempel.

For et System $r = oabcde$ med de foranderlige Dele betegnet ved de overtallige $X_a, X_b \dots X_e$ skal man finde det virksomme System for en Belastning, der giver $\delta_a^o = -933$, $\delta_b^o = 578$ o. s. v.

Elasticitetsligningerne i System r lyder:

$$\begin{aligned} \delta_a^r &= -933 - X_a \cdot 288 + X_b \cdot 151 - X_c \cdot 96 - X_d \cdot 56 - X_e \cdot 38 \\ \delta_b^r &= +578 + X_a \cdot 151 - X_b \cdot 207 + X_c \cdot 96 + X_d \cdot 56 + X_e \cdot 38 \\ \delta_c^r &= -196 - X_a \cdot 96 + X_b \cdot 96 - X_c \cdot 149 - X_d \cdot 56 - X_e \cdot 38 \\ \delta_d^r &= -410 - X_a \cdot 56 + X_b \cdot 56 - X_c \cdot 56 - X_d \cdot 103 - X_e \cdot 38 \\ \delta_e^r &= 0 - X_a \cdot 38 + X_b \cdot 38 - X_c \cdot 38 - X_d \cdot 38 - X_e \cdot 76 \end{aligned}$$

Hvis man her i Ligningerne for X_b tilføjer

$$\delta_b^o = -578,$$

vil ingen af de overtallige kunne komme i Virksomhed for den dertil svarende resulterende Belastning, da alle Deformationerne i Hovedsystemet er Nul eller negative. Tilføjer vi derefter i Ligningen for X_b

$$\delta_b^o = 578 \cdot k$$

og lader k vokse, vil de overtallige efterhaanden sættes i Funktion. Da

$$\delta_e^o \text{ er lig Nul og } \delta_{be}^o \text{ er negativ,}$$

vil System obe ved den første Variation være det virksomme System.

Vi løser derfor Ligningerne:

$$0 = 578 k - X_b \cdot 207 + X_e \cdot 38$$

$$0 = + X_b \cdot 38 - X_e \cdot 76$$

der giver

$$X_b = 3,07 k, \quad X_e = 1,54 k,$$

og de øvrige Deformationer bliver da:

$$\delta_a^{obe} = -933 + 464 k - 58,5 k = -933 + 405,5 k.$$

$$\delta_c^{obe} = -196 + 295 k - 58,5 k = -196 + 236,5 k.$$

$$\delta_d^{obe} = -410 + 172 k - 58,5 k = -410 + 113,5 k$$

Heraf ser man, at

$$\delta_c^{obe} \text{ bliver Nul}$$

for den mindste Værdi af k , nemlig $k = 0,829$, og Værdien af de overtallige og Deformationerne bliver da:

$$k = 0,829 \quad \delta_a^{obe} = -597$$

$$X_b = 2,54$$

$$\delta_c^{obe} = 0$$

$$\delta_d^{obe} = -316$$

$$X_e = 1,27$$

Ved den fortsatte Variation af k vil System *obce* være det virksomme System, og vi danner derefter Ligningerne:

$$0 = 578 k - X_b \cdot 207 + X_c \cdot 96 + X_e \cdot 38$$

$$0 = 0 \quad + X_b \cdot 96 - X_c \cdot 149 - X_e \cdot 38$$

$$0 = 0 \quad + X_b \cdot 38 - X_c \cdot 38 - X_e \cdot 76$$

der har Løsningerne:

$$X_b = 4,06 k, \quad X_c = 2,40 k, \quad X_e = 0,83 k.$$

Deformationerne for de udestaaende overtallige bliver da:

$$\delta_a^{obce} = -597 + 614 k - 230 k - 32 k = -597 + 352 k$$

$$\delta_d^{obce} = -316 + 227 k - 134 k - 32 k = -316 + 61 k$$

For $k = 1 - 0,829 = 0,171$ bliver ingen af disse Deformationer positive, hvorfor den endelige Løsning af det oprindelig givne System bliver:

$$\delta_a^{obce} = -597 + 352 \cdot 0,171 = -537$$

$$X_b^{obce} = 2,54 + 4,06 \cdot 0,171 = 3,24$$

$$X_c^{obce} = 2,40 \cdot 0,171 = 0,41$$

$$\delta_d^{obce} = -316 + 61 \cdot 0,171 = -305$$

$$X_e^{obce} = 1,27 + 0,83 \cdot 0,171 = 1,41.$$

I det foregaaende har vi forsøgt at finde det virksomme System ved at betragte Systemets statiske Virkemaade. Ganske lignende Beregninger kommer man til at udføre, om man betragter den matematiske Løsning af Ligningerne.

Vi antager Elasticitetsligningerne:

$$0 = \delta_a^o - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} - X_d \delta_{ad}$$

$$0 = \delta_b^o - X_a \delta_{ab} - X_b \delta_{bb} - X_c \delta_{bc} - X_d \delta_{bd}$$

$$0 = \delta_c^o - X_a \delta_{ac} - X_b \delta_{bc} - X_c \delta_{cc} - X_d \delta_{cd}$$

$$0 = \delta_d^o - X_a \delta_{ad} - X_b \delta_{bd} - X_c \delta_{cd} - X_d \delta_{dd}$$

Er her δ_a^o den største positive Deformation, begynder man med at eliminere X_a . Dette udføres ved at multiplicere den øverste Ligning med $\delta_{ab} : \delta_{aa}$ og subtrahere den fra Ligning 2. Derefter multipliceres den øverste Ligning med $\delta_{ac} : \delta_{aa}$ og subtraheres fra Ligning 3 o. s. v. Idet vi herefter sætter

$$\frac{\delta_a^o}{\delta_{aa}} = X_a^{oa}$$

d. v. s. Værdien af X_a , naar denne er alene virkende, finder man:

$$0 = X_a^{oa} \delta_{aa} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} - X_d \delta_{ad}$$

$$0 = \delta_b^o - X_a^{oa} \delta_{ab} - X_b \left(\delta_{bb} - \frac{\delta_{ab}^2}{\delta_{aa}} \right) - X_c \left(\delta_{bc} - \frac{\delta_{ac} \delta_{ab}}{\delta_{aa}} \right) - X_d \left(\delta_{bd} - \frac{\delta_{ad} \delta_{ab}}{\delta_{aa}} \right)$$

$$0 = \delta_c^o - X_a^{oa} \delta_{ac} - X_b \left(\delta_{bc} - \frac{\delta_{ab} \delta_{ac}}{\delta_{aa}} \right) - X_c \left(\delta_{cc} - \frac{\delta_{ac}^2}{\delta_{aa}} \right) - X_d \left(\delta_{cd} - \frac{\delta_{ad} \delta_{ac}}{\delta_{aa}} \right)$$

$$0 = \delta_d^o - X_a^{oa} \delta_{ad} - X_b \left(\delta_{bd} - \frac{\delta_{ab} \delta_{ad}}{\delta_{aa}} \right) - X_c \left(\delta_{cd} - \frac{\delta_{ac} \delta_{ad}}{\delta_{aa}} \right) - X_d \left(\delta_{dd} - \frac{\delta_{ad}^2}{\delta_{aa}} \right)$$

I de 3 nederste Ligninger er X_a elimineret. Løses disse Ligninger, findes den tilsvarende Værdi af X_a af den første Ligning. Man vil nu se, at

$$\begin{aligned}\delta_b^o - X_a^{oa} \delta_{ab} &= \delta_b^{oa} \\ \delta_c^o - X_a^{oa} \delta_{ac} &= \delta_c^{oa} \\ \delta_d^o - X_a^{oa} \delta_{ad} &= \delta_d^{oa} \\ \delta_{bb} - \frac{\delta_{ab}^2}{\delta_{aa}} &= \delta_{bb}^{oa} \\ \delta_{bc} - \frac{\delta_{ac} \delta_{ab}}{\delta_{aa}} &= \delta_{bc}^{oa} \quad \text{o. s. v.}\end{aligned}$$

De nye Ligninger er derfor Elasticitetsligningerne for X_b , X_c og X_d i et Hovedsystem oa . Indsættes Værdien for X_a^{oa} fra den øverste Ligning i de 3 nederste Ligninger, kommer man tilbage til de oprindelige Ligninger. Er nu δ_b^{oa} , δ_c^{oa} og δ_d^{oa} alle negative, er X_a den eneste virksomme overtallige for den angivne Last. Er derimod dette ikke Tilfældet, men er f. Eks. δ_b^{oa} den største positive Deformation i System oa , kan man eliminere X_b af den 1', 3' og 4' Ligning. Ligningen for X_b multipliceres da efterhaanden med $\delta_{ab} : \delta_{bb}^{oa}$, $\delta_{bc}^{oa} : \delta_{bb}^{oa}$ og $\delta_{bd}^{oa} : \delta_{bb}^{oa}$ og subtraheres derefter fra Ligning 1, 3 og 4. Man faar da som før:

$$\begin{aligned}0 &= X_a^{oa} \delta_{aa} - \delta_b^{oa} \frac{\delta_{ab}}{\delta_{bb}^{oa}} - X_a \delta_{aa} - X_c \left(\delta_{ac} - \frac{\delta_{bc}^{oa} \delta_{ab}}{\delta_{bb}^{oa}} \right) - X_d \left(\delta_{ad} - \frac{\delta_{bd}^{oa} \delta_{ab}}{\delta_{bb}^{oa}} \right) \\ 0 &= \delta_b^o - X_a^{oa} \delta_{ab} - X_b \delta_{bb}^{oa} - X_c \delta_{bc}^{oa} - X_d \delta_{bd}^{oa} \\ 0 &= \delta_c^{oab} - X_c \delta_{cc}^{oab} - X_d \delta_{cd}^{oab} \\ 0 &= \delta_d^{oab} - X_c \delta_{cd}^{oab} - X_d \delta_{dd}^{oab}\end{aligned}$$

I disse Ligninger er δ uden Index foroven en Deformation i Hovedsystemet o . I den første Ligning er

$$X_a^{oa} \delta_{aa} - \delta_b^{oa} \frac{\delta_{ab}}{\delta_{bb}^{oa}} = X_a^{oab} \delta_{aa}$$

og i den anden Ligning er

$$\delta_b^o - X_a^{oa} \delta_{ab} = X_b^{oab} \delta_{bb}^{oa}$$

Ved efterhaanden at eliminere de overtallige paa den angivne Maade faar man bestemt Værdierne i de forskellige Systemer. Er derfor X_a^{oab} , X_b^{oab} begge positive og δ_c^{oab} og δ_d^{oab} begge negative, er System *oab* det virksomme System. I modsat Fald maa man fortsætte Beregningen. Det kan da ske, at en overtallig, der er indført i Hovedsystemet, igen bliver negativ, og den maa da fjernes fra dette System.

I Stedet for at benytte Elasticitetsligningerne til Bestemmelse af Værdierne i de forskellige Systemer, kan man direkte nedskrive Værdien af en overtallig og en Deformation i et vilkaarligt System. I et statisk ubestemt System med en overtallig X_a finder man Spændingen i en Stang *S* efter følgende Formel¹⁾:

$$S = S^o - S_a X_a.$$

Her er S^o Værdien af Stangspændingen i Hovedsystemet *o* som Følge af Belastningen, medens S_a er den tilsvarende Værdi fra Kraften $X_a = -1$. Denne Formel angiver Sammenhængen mellem Virkningen i Hovedsystemet og Virkningen i det statisk ubestemte System og kan benyttes overfor enhver Størrelse.

Ved Anvendelse af denne Formel kan man finde de nye Værdier, naar et System *oa* forøges med en ny overtallig X_b .

$$X_a^{oab} = X_a^{oa} - X'_a X_b^{oab} = X_a^{oa} - \frac{\delta_{ab}^o}{\delta_{aa}^o} X_b^{oab} \quad (15)$$

Her er X'_a Værdien af X_a i System *oa* som Følge af Kraften $X_b = -1$ d. v. s. $X'_a = \frac{\delta_{ab}^o}{\delta_{aa}^o}$.

$$X_b^{oab} = \frac{\delta_b^{oa}}{\delta_{bb}^{oa}} = \frac{\delta_b^o - \frac{\delta_a^o}{\delta_{aa}^o} \delta_{ab}^o}{\delta_{bb}^o - \frac{\delta_{ab}^o}{\delta_{aa}^o}} \quad (16)$$

Deformationen for en overtallig X_c bliver:

$$\delta_c^{oab} = \delta_c^{oa} - X_b^{oab} \delta_{bc}^{oa} \quad \text{Her er} \quad (17)$$

¹⁾ A. Ostenfeld: Teknisk Statik, I (1920), Side 261.

$$\delta_{bc}^{oa} = \delta_{bc}^o - \frac{\delta_{ab}^o \delta_{ac}^o}{\delta_{aa}^o} \quad (18)$$

Ved en fortsat Udvikling af disse Formler kan man direkte nedskrive Deformationen for et Punkt i et vilkaarligt System. For Eksempel finder man:

$$\begin{aligned} \delta_c^{oab} &= \delta_c^{oa} - \frac{\delta_b^{oa}}{\delta_{bb}^{oa}} \delta_{bc}^{oa} = \\ &= \delta_c^o - \frac{\delta_a^o}{\delta_{aa}^o} \delta_{ac}^o - \frac{\delta_b^o - \frac{\delta_a^o}{\delta_{aa}^o} \delta_{ab}^o}{\delta_{bb}^o - \frac{\delta_{ab}^o \delta_{ba}^o}{\delta_{aa}^o}} \left(\delta_{bc}^o - \frac{\delta_{ac}^o \delta_{ab}^o}{\delta_{aa}^o} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Man har her udtrykt δ_c^{oab} alene ved Deformationerne i System o . Er δ_c^{oab} positiv, er X_c virksom i System oab . For at undersøge dette, er det derfor tilstrækkeligt at danne Værdien for δ_c^{oab} , medens det er unødvendigt at beregne selve Værdien for X_c . Ønsker man at finde denne, kan man paa samme Maade som ovenfor bestemme δ_{cc}^{oab} og derefter $X_c^{oab} = \delta_c^{oab} : \delta_{cc}^{oab}$.

Fjernes X_b fra Systemet oab , kan man ligeledes af ovennævnte Formler bestemme de nye Værdier i System oa , idet man blot løser Ligningerne med Hensyn til Virkningen i System oa . Man finder f. Eks.

$$X_a^{oa} = X_a^{oab} + \frac{\delta_{ab}^o}{\delta_{aa}^o} X_b^{oab} \quad (20)$$

b. Fordeling af Totalsystemets negative overtallige.

Paa samme Maade, som vi fandt det virksomme System ved Fordeling af Hovedsystemets positive Deformationer, kan vi finde det virksomme System ved Fordeling af Totalsystemets negative overtallige.

Elasticitetsligningerne for Totalsystemet lyder:

$$o = \delta_a^o - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} \cdot \cdot - X_n \delta_{an}$$

$$o = \delta_b^o - X_a \delta_{ab} - X_b \delta_{bb} \dots - X_n \delta_{bn}$$

$$o = \delta_n^o - X_a \delta_{an} - X_b \delta_{bn} \dots - X_n \delta_{nn}$$

Vi antager, at disse Ligninger er tilfredsstillede af Værdierne $-X_{a_1}$, $-X_{b_1}$, $-X_{c_1}$, $X_{a_1} \dots X_{n_1}$, saaledes at X_a , X_b og X_c er negative, medens alle de øvrige er positive.

Vi vil endvidere antage:

$$/X_{a_1}/ > /X_{b_1}/ > /X_{c_1}/$$

Ved den tidligere angivne Metode anbragte vi paa Konstruktionen en *Tillægslast* af en saadan Beskaffenhed, at den resulterende Last havde Hovedsystemet som det virksomme System. I dette Tilfælde ønsker vi, at *Totalsystemet skal være det virksomme System for den resulterende Last*. Dette kan opnaas ved at vælge en *Tillægslast*, der frembringer Værdierne $+X_{a_1}$ for de overtallige X_a , X_b og X_c og Nul Værdier for alle de øvrige. Tillægslastens Hovedsystemsdeformationer $\delta_{a_1}^o$, $\delta_{b_1}^o \dots \delta_{n_1}^o$ bestemmes da af Ligningerne

$$\begin{aligned} o &= \delta_{a_1}^o - X_{a_1} (\delta_{aa} + \delta_{ab} + \delta_{ac}) \\ o &= \delta_{b_1}^o - X_{a_1} (\delta_{ab} + \delta_{bb} + \delta_{bc}) \\ &\dots \dots \dots \\ o &= \delta_{n_1}^o - X_{a_1} (\delta_{an} + \delta_{bn} + \delta_{cn}) \end{aligned} \quad (21)$$

Fjernes derefter Tillægslasten ved at lade den kontinuerlig aftage mod Nul, vil de overtallige efterhaanden sættes ud af Funktion en efter en. For at udføre denne Beregning kan man skrive Elasticitetsligningerne saaledes som nedenfor angivet:

$$\begin{aligned} o &= \delta_a^o + \delta_{a_1}^o - k \delta_{a_1}^o - X_a \delta_{aa} \dots - X_n \delta_{an} \\ o &= \delta_b^o + \delta_{b_1}^o - k \delta_{b_1}^o - X_a \delta_{ab} \dots - X_n \delta_{bn} \\ &\dots \dots \dots \\ o &= \delta_n^o + \delta_{n_1}^o - k \delta_{n_1}^o - X_a \delta_{an} \dots - X_n \delta_{nn} \end{aligned} \quad (22)$$

k er her en variabel Faktor. Lader man Værdien af denne i ovenstaaende Ligninger variere fra Nul til 1 og findes de virk-

somme Systemer under denne Variation, har man tilsidst for $k = 1$ helt fjernet Tillægslasten og derved fundet det virksomme System for den oprindelig givne Last.

For $k = 0$ er Totalsystemet det virksomme System for den resulterende Last, og Værdierne af de overtallige er i dette Tilfælde:

$$X_a = 0, \quad X_b = X_{a_1} - X_{b_1}, \quad X_c = X_{a_1} - X_{c_1}, \quad X_d = X_{d_1} \cdot \cdot X_n = X_{n_1}$$

Disse Værdier er ifølge det antagne alle positive. Bliver k større end Nul, vil X_a sættes ud af Funktion (i Totalsystemet har X_a Værdien $-k X_{a_1}$, d. v. s. $\delta_a^{ob \cdot \cdot n}$ negativ), og Ændringen af Værdierne for de øvrige overtallige kan da findes af Ligningerne:

$$\begin{aligned} 0 &= -k \delta_{b_1}^o - X_b \delta_{bb} \cdot \cdot - X_n \delta_{bn} \\ 0 &= -k \delta_{c_1}^o - X_b \delta_{bc} \cdot \cdot - X_n \delta_{cn} \\ &\dots\dots\dots \\ 0 &= -k \delta_{n_1}^o - X_b \delta_{bn} \cdot \cdot - X_n \delta_{nn} \end{aligned} \quad (23)$$

der giver Værdierne $X_{b_2} = k_2 f_I(\delta_{b_1}^o \cdot \cdot \delta_{n_1}^o)$

$$X_{c_2} = k_2 f_{II}(\delta_{b_1}^o \cdot \cdot \delta_{n_1}^o) \text{ o. s. v.}$$

De endelige Værdier af de virksomme overtallige og Deformationen for X_a bliver da:

$$\begin{aligned} \delta_{a_2}^{obc \cdot \cdot n} &= 0 - k_2 \delta_{a_1}^o - X_{b_2} \delta_{ab} \cdot \cdot - X_{n_2} \delta_{an} \\ X'_{b_2} &= X_{a_1} - X_{b_1} + X_{b_2} \\ X'_{c_2} &= X_{a_1} - X_{c_1} + X_{c_2} \\ X'_{d_2} &= X_{d_1} + X_{d_2} \\ &\dots\dots\dots \\ X'_{n_2} &= X_{n_1} + X_{n_2} \end{aligned} \quad (24)$$

Er her for $k_2 = 1$ alle Værdierne $X'_{b_2} \cdot \cdot X'_{n_2}$ positive, er $o b c \cdot \cdot n$ det virksomme System for den oprindelig givne Last. Er Betingelsen derimod ikke opfyldt, kan man af ovenstaaende Ligninger finde den mindste Værdi af k_2 , der gør en af de overtallige lig Nul, (Nulpunktet for System $obc \cdot \cdot n$). Vi antager, at X'_{b_2} først bliver Nul, og at dette finder Sted for $k = k_2$. Bliver k da større end k_2 , vil System $ocd \cdot \cdot n$ under den første Del af

den næste Variation være det virksomme System, og Ændringen af de overtallige kan da findes af Ligningerne:

$$\begin{aligned} 0 &= -k \delta_{c_1}^o - X_c \delta_{cc} \dots - X_n \delta_{cn} \\ &\dots\dots\dots \\ 0 &= -k \delta_{n_1}^o - X_c \delta_{cn} \dots - X_n \delta_{nn} \end{aligned} \quad (25)$$

der har Løsningerne $X_{c_3}, X_{d_3} \dots X_{n_3}$.

De endelige Værdier af de virksomme overtallige og af Deformationerne for de uvirksomme under Variationen $0 - k_2 - k_3$ bliver da:

$$\begin{aligned} \delta'_{a_3}{}^{ocd \dots n} &= \delta'_{a_2}{}^{obc \dots n} - k_3 \delta_{a_1}^o - X_{c_3} \delta_{ac} \dots - X_{n_3} \delta_{an} \\ \delta'_{b_3}{}^{ocd \dots n} &= 0 - k_3 \delta_{b_1}^o - X_{c_3} \delta_{bc} \dots - X_{n_3} \delta_{bn} \\ X'_{c_3} &= X'_{c_2} + X_{c_3} \\ &\dots\dots\dots \\ X'_{n_3} &= X'_{n_2} + X_{n_3}. \end{aligned} \quad (26)$$

Er i disse Ligninger $\delta'_{a_3}{}^{ocd \dots n}$ negativ og $X'_{c_3} \dots X'_{n_3}$ alle positive for $k_3 = 1 - k_2$, er $ocd \dots n$ det virksomme System for den oprindelig givne Last, og Værdierne i dette System findes da af ovenstaaende Ligninger ved at sætte $k_3 = 1 - k_2$. Er Betingelsen derimod ikke opfyldt, kan man af Ligningerne finde Nulpunktet for System $ocd \dots n$ og derved det virksomme System under den næste Variation, indtil vi tilsidst helt har fjernet Tillægslasten og derved fundet det virksomme System for den oprindelige Last.

Paa tilsvarende Maade som angivet ved Fordelingen af de positive Hovedsystemsdeformationer kan man, naar flere af de overtallige bliver negative for Værdien af k mindre end 1, paa een Gang fjerne disse fra det gamle System, hvis de blot giver hinanden positive Tilvækster (d. v. s. hvis δ_{xy} er positiv). Er specielt δ_{xy} positiv for alle de negative overtallige X og Y i Totalsystemet, kan man paa een Gang fjerne de negative overtallige fra Totalsystemet. Deformationerne for de tidligere negative overtallige vil da altid blive negative i det nye System, saa længe det virksomme System bestaar af de oprindelige positive overtallige. I dette Tilfælde kan man vælge Tillægslasten saa-

ledes, at den frembringer Værdierne $+|X|$ og $+|Y|$ for de negative overtallige X og Y (se efterfølgende Eksempel).

Metoden for Fordelingen af de negative Værdier for de overtallige kan selvfølgelig ogsaa anvendes, om man har *skønnet det virksomme System*, men ved Beregningen fundet nogle af de overtallige negative. Disse Værdier kan da fordeles paa de øvrige overtallige efter ovenstaaende Regler. Viser det sig tillige, at nogle af de Deformationer, man antog var negative, bliver positive, fordeles disse paa den tidligere angivne Maade, saaledes at begge Metoder kombineres. Ved alle disse Beregninger kan man ogsaa bruge de tidligere angivne Formler for overtallige og Deformationer i et vilkaarligt System.

Eksempel som i forrige Afsnit.

$$o = -933 - X_a \cdot 288 + X_b \cdot 151 - X_c \cdot 96 - X_d \cdot 56 - X_e \cdot 38$$

$$o = 578 + X_a \cdot 151 - X_b \cdot 207 + X_c \cdot 96 + X_d \cdot 56 + X_e \cdot 38$$

$$o = -196 - X_a \cdot 96 + X_b \cdot 96 - X_c \cdot 149 - X_d \cdot 56 - X_e \cdot 38$$

$$o = -410 - X_a \cdot 56 + X_b \cdot 56 - X_c \cdot 56 - X_d \cdot 103 - X_e \cdot 38$$

$$o = 0 - X_a \cdot 38 + X_b \cdot 38 - X_c \cdot 38 - X_d \cdot 38 - X_e \cdot 76$$

Disse Ligninger tilfredsstilles af:

$$X_a = -3, \quad X_b = 1, \quad X_c = 2, \quad X_d = -4, \quad X_e = 3.$$

Da $\mathcal{J}_{ad}$ er positiv, kan man paa een Gang fjerne X_a og X_d fra Total-systemet.

Vi danner da Ligningerne:

$$0 = \mathcal{J}_{a_1}^o - 3 \cdot 288 - 4 \cdot 56 \quad \mathcal{J}_{a_1}^o = 1088$$

$$0 = \mathcal{J}_{b_1}^o + 3 \cdot 151 + 4 \cdot 56 \quad \mathcal{J}_{b_1}^o = -677$$

$$0 = \mathcal{J}_{c_1}^o - 3 \cdot 96 - 4 \cdot 56 \quad \mathcal{J}_{c_1}^o = 512$$

$$0 = \mathcal{J}_{d_1}^o - 3 \cdot 56 - 4 \cdot 103 \quad \mathcal{J}_{d_1}^o = 580$$

$$0 = \mathcal{J}_{e_1}^o - 3 \cdot 38 - 4 \cdot 38 \quad \mathcal{J}_{e_1}^o = 266.$$

Lasten svarende til

$$-k \mathcal{J}_{a_1}^o, \quad -k \mathcal{J}_{b_1}^o \text{ o. s. v.}$$

vil da virke paa System $o b c e$, og Værdierne findes af:

$$0 = 677k - X_b \cdot 207 + X_c \cdot 96 + X_e \cdot 38$$

$$0 = -512k + X_b \cdot 96 - X_c \cdot 149 - X_e \cdot 38$$

$$0 = -266k + X_b \cdot 38 - X_c \cdot 38 - X_e \cdot 76,$$

heraf finder man:

lige Deformationer og deres Ligninger. Er Antagelsen om det virksomme System rigtig, maa $\zeta_d, \zeta_e \dots \zeta_n$ være *negative*, naar vi har valgt den positive Retning i Overensstemmelse med den mulige Virkemaade.

Indsætter man de ovenfor bestemte Deformationer i de Ligninger, man bortkastede, faar man:

$$\begin{aligned} Z_a^v &= Z_a^r - Z_{ad} \zeta_d \dots - Z_{an} \zeta_n \\ &\dots\dots\dots \\ Z_c^v &= Z_c^r - Z_{cd} \zeta_d \dots - Z_{cn} \zeta_n \end{aligned} \quad (30)$$

Man ser, at højre Side af disse Ligninger nu angiver *Værdierne af Spændingerne* Z_a, Z_b og Z_c i System v , d. v. s. de virkelige Spændinger i det virksomme System, og disse Spændinger maa derfor være *positive*. Ovenstaaende er de nødvendige og tilstrækkelige Betingelser, som det virksomme System for en given Last maa opfylde.

Vi kan nu beregne det *virksomme System* for en given Last paa ganske samme Maade, som vi har beregnet det ved Spændings-Elasticitetsligningerne. Er alle $Z_a^r \dots Z_n^r$ positive, er Totalsystemet det virksomme System. Er derimod Z_a^r, Z_b^r og Z_c^r *negative*, og $|Z_a^r| > |Z_b^r| > |Z_c^r|$ anbringer man paa Systemet en *Tillægslast*, der frembringer Spændingen $|Z_a^r|$ for a, b og c . Totalsystemet er da det virksomme System for denne Last og den oprindelige Last. Fjernes derefter denne Tillægslast ved at lade den kontinuerligt aftage mod Nul, og bestemmes de forskellige virksomme Systemer under denne Variation, kan man derved finde det virksomme System for den oprindelige Last. Beregningen udføres paa analog Maade som angivet ved Fordeling af de positive Deformationer i Hovedsystemet. F. Eks. skriver man Elasticitetsligningen for ζ_b :

$$Z_b^0 = 0 = Z_b^r + |Z_a^r| - k |Z_a^r| - Z_{ab} \zeta_a \dots$$

k lader man derefter variere fra Nul til Værdien 1.

Anvendelsen af Deformationsmetoden er fordelagtig for saadanne Systemer, som har det virksomme System liggende i Nærheden af Totalsystemet, idet man derved kommer til at bestemme færre Systemer med færre overtallige.

§ 4. **Influenslinier for foranderlige Systemer.** For et System bestaaende af et uforanderligt Hovedsystem o og de foranderlige overtallige $X_a, X_b \dots X_n$ vil vi søge *Influenslinierne for de overtallige i det virksomme System $o a b c \dots g$* . Elasticitetsligningerne for de virksomme overtallige i dette System er:

$$0 = \delta_a^o - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} \dots - X_g \delta_{ag}$$

$$0 = \delta_b^o - X_a \delta_{ab} - X_b \delta_{bb} \dots - X_g \delta_{bg}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$0 = \delta_g^o - X_a \delta_{ag} - X_b \delta_{bg} \dots - X_g \delta_{gg},$$

og Deformationerne for de uvirksomme overtallige:

$$\delta_h^{oa \dots g} = \delta_h^o - X_a \delta_{ah} - X_b \delta_{bh} \dots - X_g \delta_{gh}$$

$$\delta_i^{oa \dots g} = \delta_i^o - X_a \delta_{ai} - X_b \delta_{bi} \dots - X_g \delta_{gi}$$

$$\delta_n^{oa \dots g} = \delta_n^o - X_a \delta_{an} - X_b \delta_{bn} \dots - X_g \delta_{gn}$$

I ovenstaaende Ligninger kan vi beregne Influenslinierne for

$$\delta_a^o, \delta_b^o \dots \delta_n^o,$$

idet disse Størrelser er uafhængige af Foranderligheden af Systemet. For derefter ud fra disse Influenslinier at beregne Influenslinien for en af de overtallige, f. Eks. X_a , vil vi multiplicere Ligningen for X_a med k_a , Ligningen for X_b med k_b o. s. v. op til Ligningen for X_g med k_g . Adderer vi derefter Ligningerne fra X_a til X_g , faar man:

$$\begin{aligned} 0 &= k_a \delta_a^o + k_b \delta_b^o \dots + k_g \delta_g^o \\ &- X_a [k_a \delta_{aa} + k_b \delta_{ab} \dots + k_g \delta_{ag}] \\ &- X_b [k_a \delta_{ab} + k_b \delta_{bb} \dots + k_g \delta_{bg}] \\ &\dots \dots \dots \\ &- X_g [k_a \delta_{ag} + k_b \delta_{bg} \dots + k_g \delta_{gg}] \end{aligned} \quad (30 a)$$

Bestemmes derefter $k_a, k_b \dots k_g$ saaledes at:

$$\begin{aligned} k_a \delta_{aa} + k_b \delta_{ab} \dots + k_g \delta_{ag} &= 1 \\ k_a \delta_{ab} + k_b \delta_{bb} \dots + k_g \delta_{bg} &= 0 \\ \dots \dots \dots \\ k_a \delta_{ag} + k_b \delta_{bg} \dots + k_g \delta_{gg} &= 0, \end{aligned} \quad (31)$$

Paa ganske lignende Maade kan man bestemme Influenzlinierne for:

$$N_r^{oa...g}, S_r^{oa...g} \text{ o. s. v.}$$

Som ovenfor angivet var vi ved Hjælp af Influenzlinierne for de virksomme overtallige og Influenzlinierne for Deformationerne for de uvirkosomme overtallige i Stand til at angive de Laststillinger, for hvilke det antagne System var gældende. Anbringes disse Laststillinger paa de ovenfor bestemte Influenzlinier for Moment, Normalkraft o. s. v., bestemmes derved de Paavirkninger, som er mulige, naar dette System er virkende.

§ 5. Bestemmelse af største og mindste Paavirkninger i foranderlige Systemer. I et statisk ubestemt System med overtallige X_a, X_b o. s. v. kan Momentet i et Punkt r udtrykkes ved:

$$M_r = M_r^o - X_a M_a - X_b M_b \dots - X_n M_n$$

Her er M_r^o Momentet i Pkt. r i Hovedsystemet. $X_a, X_b \dots X_n$ er Værdierne af de forskellige overtallige, M_a Værdien af Momentet i Punkt r for Kraften $X_a = -1$ og analogt for $M_b \dots M_n$. Er Systemet uforanderligt, kan man bestemme Influenzlinien for M_r og derved den farligste Laststilling for Momentet. Er derimod Systemet foranderligt, er Opgaven vanskeligere, idet man ikke ved, i hvilket System det største Moment optræder. For at finde det største Moment skulde man derfor danne alle de forskellige Systemer og Influenzlinien for M_r i hvert System. Denne Influenzlinie i Forbindelse med Influenzlinierne for de virksomme overtallige og for Deformationerne for de uvirkosomme bestemmer det størst mulige Moment i Systemet. Man faar derved bestemt alle de størst mulige Momenter i de forskellige Systemer og derved ogsaa det absolut største.

For at undgaa denne Undersøgelse vil vi forsøge at angive de Metoder, man kan følge for at finde det største Moment. Da det er Deformationerne i Hovedsystemet, der er bestemmende for det virksomme System og for Værdien af de virksomme overtallige, vil det være naturligt at begynde med den Laststilling, der giver størst mulige Moment i Hovedsystemet. Denne Laststilling er bestemt ved Influenzlinien for M_r^o . Vi belastar da denne paa farligste Maade og finder for denne Last-

stilling det virksomme System. Dette er maaske selve Hovedsystemet, og vi har da fundet et muligt Maksimum-Moment. Er derimod dette ikke Tilfældet, maa man for det nye System bestemme Influenslinien for Momentet i Punkt r og derved den farligste Laststilling i dette System, idet man bagefter kontrollerer, om det virksomme System er det samme som det antagne. Paa denne Maade kan man prøve sig frem, indtil man tilsidst finder et System, for hvilket alle Betingelserne er opfyldte.

Paa ganske samme Maade kan man derefter danne Influenslinien for *Momentet i Totalsystemet*, belaste denne paa farligste Maade og undersøge, om denne Laststilling har Totalsystemet som det virksomme System, i hvilket Tilfælde vi har fundet et muligt Maksimum-Moment. I modsat Fald fortsætter vi paa samme Maade som ovenfor beskrevet, indtil vi tilsidst finder et System, for hvilket alle Betingelserne for det virksomme System stemmer med den farligste Laststilling. Er man derved kommen til det samme System som ved den første Undersøgelse, kan der næppe være Tvivl om, at dette er det System, der bestemmer det største Moment. Er derimod Systemerne ikke de samme, kan man vælge det System, der bestemmer det største Moment, og lade dette være bestemmende for Maksimum-Momentet. Da det kan tænkes, at der mellem de to Systemer findes andre, der kan give større Moment, maa man undersøge disse; men denne Opgave vil i Regelen ikke være saa vanskelig, da Mulighederne ikke længere kan være ret mange.

Af de positive Strækninger af Influenslinierne for Momentet i Hovedsystemet og i Totalsystemet ser man, hvorledes Laststillingerne varierer, naar man gaar fra det ene System til det andet. De to Influenslinier vil være sammenfaldende paa en Del af Strækningen, og man faar herigennem et godt Begreb om de Muligheder, der foreligger.

I uforanderlige Systemer kan Virkningen af forskellige Belastninger findes ved at addere Virkningen af de enkelte Belastninger. I foranderlige Systemer er dette kun muligt, om de *forskellige Belastninger har det samme virksomme System*. Søger man derfor det største Moment hidrørende fra en Nyttelast p for en Konstruktion, der tillige er paavirket af en Egenvægt g ,

maa man i Beregningen lade Konstruktionen paavirke af begge Belastninger samtidigt. Da Virkningen af en Nyttelast ikke er den samme i de forskellige Systemer, foreligger der i foranderlige Systemer tillige den Mulighed, at man skal belaste en Del af den negative Strækning, eller kun belaste en Del af den positive Strækning af Influenslinien, idet man derved muligvis kan bibeholde et System, der er særlig farligt for den søgte Virkning.

Paa Forhaand vil man være tilbøjelig til at tro, at det maksimale Moment i et foranderligt System altid blev større end det maksimale Moment i Totalsystemet, idet dette regnes som et uforanderligt System, men dette er ikke Tilfældet. Momentet i Punkt r kan udtrykkes ved:

$$M_r = M_r^o + \sum |M_x| X - \sum M_y Y$$

her har vi i $\sum |M_x| X$ sammenfattet alle de Led, for hvilke M_x (Momentet for Kraften -1) er negativ, og i $\sum M_y Y$ alle de Led, for hvilke M_y er positiv. Er nu den positive Retning for de overtallige valgt saaledes, at den stemmer med den mulige Virkemaade, vil Momentet forøges, jo flere X Kræfter der kommer i Funktion, og formindskes, jo flere Y Kræfter der sættes i Funktion. Det foranderlige System har da den Mulighed fremfor det uforanderlige System, at det kan virke paa en saadan Maade, at det søger at bibeholde Y Kræfterne og bortkaste X Kræfterne, saaledes at Momentet formindskes. Momentet i det foranderlige System kan derved blive mindre end i det uforanderlige.

I det foregaaende har vi hele Tiden talt om det maksimale Moment, men Forholdene er ganske de samme, om vi søger det minimale Moment, eller vi i Stedet for Moment søger største og mindste Normalkraft, Stangspænding etc.

Søger man specielt den maksimale Værdi for en af de foranderlige Dele, f. Eks. X_a , begynder man med at anbringe Lasten paa den farligste Maade paa Influenslinien for δ_a^o . Denne Laststilling bestemmer et bestemt virksomt System og derved eventuelt en ny Stilling af Lasten o. s. v. paa samme Maade som ovenfor.

Man kan derefter finde Influenslinien for $\delta_a^{obe...n}$ og undersøge dette System paa nøjagtig samme Maade.

§ 6. Systemer, for hvilke de foranderlige Dele kun kan antage Værdier, der ligger mellem to endelige Grænser. I det foregaaende (§ 2) er det vist, at det altid er muligt at opstille Elasticitetsligningerne paa en saadan Maade, at kun positive Værdier er brugelige, og vi har her forudsat, at enhver positiv Værdi var brugelig. Imidlertid kan man danne Systemer, for hvilke den positive Værdi, som de overtallige kan antage, ikke kan blive større end en vis Værdi, saaledes at man f. Eks. for en overtallig X_r har, at de mulige Værdier bestemmes af:

$$0 \leq X_r \leq R.$$

Naar et saadant System paavirkes af en Last, der gør X_r positiv, vil X_r , naar Lasten vokser, tilsidst naa Værdien $X_r = R$, og vokser Lasten herudover, vil X_r beholde Værdien R , og man finder da:

$$\delta_1^{oab \dots r} = \delta_r^o - X_a \delta_{ar} - X_b \delta_{br} \dots - R \delta_{rr} \geq 0$$

saaledes at man i dette Tilfælde har:

$$\delta_r^{oab \dots r} \geq 0$$

For en given Last kan man for et saadant System dele de overtallige i 3 Grupper:

1. Overtallige, som er ude af Funktion.
2. Overtallige, som har antaget den maksimale Værdi.
3. Overtallige, som har Værdier mellem Nul og den maksimale.

Lad os antage, at et System med de overtallige $X_a, X_b \dots X_i$ for en given Last har deformeret sig saaledes, at:

X_a, X_b, X_c hører til Gruppe 1.

X_d, X_e, X_f hører til Gruppe 2.

og har antaget de maksimale Værdier D, E og F , medens X_g, X_h og X_i hører til Gruppe 3.

Man har da, idet vi, som tidligere angivet, har opstillet Elasticitetsligningerne paa en saadan Maade, at negative Værdier er ubrugelige:

$$\delta_a^{od \dots i} = \delta_a^o - D \delta_{ad} - E \delta_{ae} - F \delta_{af} - X_g \delta_{ag} - X_h \delta_{ah} - X_i \delta_{ai} \leq 0$$

og analogt $\delta_b^{od \dots i} \leq 0, \delta_c^{od \dots i} \leq 0.$

Endvidere:

$$\delta_d^{od..i} = \delta_d^o - D \delta_{dd} - E \delta_{de} - F \delta_{df} - X_g \delta_{dg} - X_h \delta_{dh} - X_i \delta_{di} \geq 0$$

og analogt $\delta_e^{od..i} \geq 0$, $\delta_f^{od..i} \geq 0$ og:

$$\delta_g^{od..i} = \delta_g^o - D \delta_{dg} - E \delta_{eg} - F \delta_{fg} - X_g \delta_{gg} - X_h \delta_{gh} - X_i \delta_{gi} = 0$$

og analogt $\delta_h^{od..i} = 0$ og $\delta_i^{od..i} = 0$

Ovenstaaende er den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse, som det *virksomme System for en given Last maa opfylde*, idet denne Tilstand maa være en Ligevægtstilstand for Systemet under de givne Forhold. Det virksomme System skal altsaa være et saadant System, at Deformationerne for de virksomme overtallige, der ikke har naaet den maksimale Værdi, skal være lig Nul. Deformationerne for de uvirksomme overtallige skal være negative, og Deformationerne for en overtallig X_r , der har naaet den maksimale Værdi R , skal være større end Nul.

For at bestemme det virksomme System for en given Last, kan man gaa frem som omtalt i § 3 a (*Fordeling af Hovedsystemets positive Deformationer*), idet man paa samme Maade, som omtalt paa dette Sted, tilføjer saadanne Deformationer, at alle Hovedsystemets Deformationer bliver negative. For den oprindelige Last og den *Tillægslast*, der giver de tilføjede Deformationer, vil Hovedsystemet derfor være det virksomme System. Derefter kan man lade den tilføjede Last proportionalt aftage mod Nul; ved denne Variation vil de overtallige efterhaanden sættes i Funktion, og ved Hjælp af Elasticitetsligningerne kan man følge Værdierne af de virksomme overtallige og saaledes til sidst, naar den tilføjede Last helt er borttaget, finde det virksomme System. Paa samme Maade, som angivet i § 3 a, kan man, naar f. Eks. den tilføjede Deformation kaldes $-\delta_a$, lade denne Deformation aftage mod Nul ved at tilføje Lasten $+k\delta_a$ og lade k vokse fra Nul til Værdien 1. Det bliver da nødvendigt, for enhver Værdi af k , at bestemme Værdierne af de virksomme overtallige og Deformationerne for de uvirksomme overtallige; tillige maa man danne Deformationerne for de overtallige X_r , der har naaet deres Maksimums Værdi R , idet disse Deformationer under Variationen kan blive mindre

end Nul, hvorefter man danner det nye System ved at optage X_r som variabel overtallig.

Paa lignende Maade kan man bruge den i § 3 b angivne Metode: Fordeling af de *negative Spændinger i Totalsystemet*. Man begynder da med at give de overtallige, som er negative, en tilsvarende positiv Spænding, og de overtallige, som har Værdier større end de maksimale, saadanne negative Spændinger, at den resulterende Værdi bliver lig den maksimale; man kan derefter af disse Spændinger ved Hjælp af Elasticitetsligningerne bestemme de Deformationer i Hovedsystemet, som netop vil bevirke de ovenfor angivne Tillægsspændinger. Disse sidste Deformationer i Forbindelse med de oprindelig givne Deformationer vil da have Totalsystemet som det virksomme System, idet Elasticitetsligningerne vil være tilfredsstillede af Nul Værdier for de overtallige, for hvilke vi i de oprindelige Ligninger fandt negative Værdier og positive Værdier for de øvrige overtallige, og disse Værdier er alle mindre eller lig de brugelige. Man borttager derefter denne Tillægslast som angivet i § 3 b, idet man som ovenfor stadig maa danne Værdierne af Deformationerne for de uvirksomme overtallige og for de overtallige, som har naaet deres Maksimums Værdi, samt Værdierne af de i Funktion værende overtallige.

Angaaende *Influenslinier* for disse Systemer, samt Bestemmelsen af de maksimale og minimale Paavirkninger i et givet Punkt, gælder det tidligere nævnte, idet man tager Hensyn til, at de overtallige kun kan antage begrænsede Værdier.

§ 7. **Systemer med foranderligt Hovedsystem.** I det foregaaende har vi undersøgt foranderlige Systemer, idet vi har antaget, at der blev et *statisk ubestemt* eller *statisk bestemt* System tilbage, naar samtlige foranderlige Dele blev fjernede. Er dette ikke Tilfældet, bliver et saadant System kun brugeligt, naar Foranderligheden er indrettet paa en saadan Maade, at de mulige Laststillinger bevirker, at de Dele af det foranderlige System, der er i Funktion, altid sammen med den uforanderlige Del danner et brugeligt System. Da disse Systemer har en Mulighed for at gøre sig statisk underbestemte, d. v. s. bevægelige, maa man sørge for, at der findes en passende Sikkerhed herimod. Er et saadant System paavirket af

en jævnt voksende Last, hvorved de virksomme Systemer skifter, maa man sikre sig, at, inden en Konstruktionsdel sættes ud af Funktion, maa den Del, der skal erstatte denne og derved bibeholde et ubevægeligt System, allerede have naaet en vis Spænding.

Kan man for disse Systemer for en given Last umiddelbart angive et statisk bestemt System, der nødvendigvis maa være i Funktion, kan Beregningen gennemføres som tidligere omtalt. I modsat Fald maa man i Hovedsystemet medtage saa mange af de foranderlige Dele, at dette bliver statisk bestemt, og derefter gennemføre Beregningen, som tidligere angivet, idet man samtidig kontrollerer, om de foranderlige Dele i Hovedsystemet er i Funktion for den angivne Last. Er dette sidste ikke Tilfældet, maa man i det virkende System bagefter borttage de foranderlige Dele, vi i Hovedsystemet fejlagtig har medtaget, idet vi hertil kan benytte den i § 3 b angivne Metode. Man kan ogsaa straks løse Totalsystemets Elasticitetsligninger og bagefter fjerne de uvirksomme overtallige, saaledes som omtalt i § 3 b.

§ 8. Bestemmelse af Sikkerhedsgraden for foranderlige Systemer. Da man i Reglen har angivet de tilladelige Spændinger, der maa findes i en Konstruktion, naar denne er paavirket af sin Egenvægt og en nærmere fastsat Nyttelast, maa man opfatte Sikkerhedsgraden som det Tal n , hvormed man kan multiplicere hele Lasten (Egenvægt og Nyttelast), uden at Spændingerne bringes op paa Brudspændingerne. Efter denne Definition af Sikkerhedsgraden vil der ikke være nogen Forskel mellem en Konstruktion med uforanderligt System og en Konstruktion med foranderligt System under Forudsætning af, at denne sidste ikke har »Forspændinger« eller »Overlængder«, naar den er ubelastet.

Forstaar man derimod ved Sikkerhedsgraden det Tal n , hvormed man kan multiplicere Nyttelasten, uden at Spændingerne bringes op paa Brud, vil en Konstruktion med et foranderligt System virke paa en noget anden Maade end en Konstruktion med et uforanderligt System, idet Spændingerne hidrørende fra Nyttelasten kun er proportionale med denne, saa længe man har det samme virksomme System. Ønsker man at

bestemme Sikkerhedsgraden under denne Forudsætning, maa man gennemføre Beregningen med en Nyttelast, der er n Gange den normale. For Dragere med krydsende slappe Diagonaler er angivet, at Diagonalerne i de Fag, hvor der ikke findes Kontradagonaler, først maa sættes ud af Funktion for en Nyttelast, der er 1,5 Gange den normale, d. v. s. at Sikkerhedsgraden for Nyttelasten for denne Konstruktion fastsættes til 1,5.

ANDET AFSNIT

Buer med skraatstillede Hængestænger.

§ 9. Tre-Charniers-Buer med skraatstillede Hængestænger. I Fig. 1 er vist et Eksempel paa en saadan Konstruktion. Den bestaar af en sædvanlig Tre-Charniers-Bue med Vederlags-Charniererne *A* og *B* samt Top-Charnier *C*. I Buen er Foden

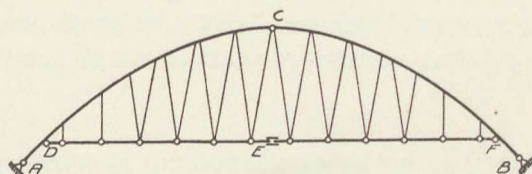


Fig. 1.

D — E — F ophængt ved Hængestænger, hvoraf de midterste er skraatstillede paa en saadan Maade, at de parvis udgaar fra samme Punkt i Foden. Ved Hængestænger forstaar vi her Stænger, der kun beregnes at kunne tage Trækspændinger, saaledes at de sættes ud af Funktion, naar de udsættes for Trykpaavirkning. Foden *D — E — F* regnes at have Led i alle Hængestængernes Knudepunkter samt ved Forbindelserne *D* og *F* med Buen. I Faget under Top-Charnieret er Foden gennemskaaret og forsynet med et Led, der tillader Længdeforskydninger, men ikke vertikale Bevægelser.

Som Konstruktionen her er beskrevet, kan den opfattes som en Tre-Charniers-Bue bestaaende af de to Buehalvdele *A C E* og *B C E*, hvorved man indser, at den er *udvendig statisk bestemt*, saaledes at Vederlags-Reaktionerne og Trykket i Top-Charnieret kan bestemmes ved de statiske Ligevægtsbetingelser alene. Hvis derimod Foden er befæstet til et Punkt udenfor Buen, er dette ikke Tilfældet. For at gøre Konstruktionen *indvendig statisk bestemt*, vil vi skære Foden over paa hver Side

af Knudepunkterne for de skraatstillede Hængestænger og indføre Fodens Reaktionen $X_a, X_b \dots$ paa Knudepunkterne som over-tallige. Fig. 2. Man ser derved, at hver Buehalvdel er lige saa mange Gange statisk ubestemt som An-tallet af Knudepunkter for skraatstillede Hængestænger. Kalder vi Knudepunkts-

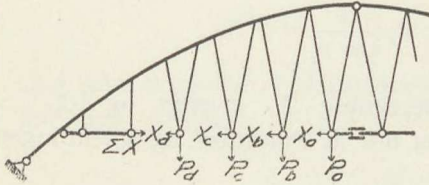


Fig. 2.

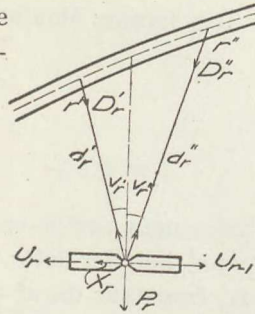


Fig. 3.

lasten P_r for Punkt r og Fodens Reaktion paa Hængestænger-nes Knudepunkt X_r , faar man, idet Hængestængerne antages at danne Vinklerne v'_r og v''_r med en vertikal Linje, følgende Ud-tryk for Hængestængernes Spændinger, Fig. 3.

$$\begin{aligned} D'_r &= P_r \frac{\sin v''_r}{\sin (v'_r + v''_r)} - X_r \frac{\cos v''_r}{\sin (v'_r + v''_r)} \\ D''_r &= P_r \frac{\sin v'_r}{\sin (v'_r + v''_r)} + X_r \frac{\cos v'_r}{\sin (v'_r + v''_r)} \end{aligned} \quad (38)$$

Heraf ser man følgende: Er $P_r = 0$, maa $D'_r = D''_r = 0$, idet en af Hængestængerne da altid vil faa Trykspænding, hvilket vil sætte den ud af Funktion, og derved ogsaa bevirke, at den anden bliver spændingsløs. Er derfor P_r den eneste Last, vil Systemet kun være een Gang statisk ubestemt, idet alle øvrige skraatstillede Hængestænger maa være spændingsløse. Er derimod alle Knudepunkterne belastede, vil Hængestængernes Spændinger kunne beregnes efter (38), saalænge disse er positive. Er dette ikke Tilfældet, vil den tilsvarende Hængestang sættes ud af Funktion. Antager vi i (38) X_r positiv, finder man ved at sætte $D'_r = 0$:

$$\begin{aligned} X_r &= P_r \operatorname{tg} v''_r \quad \text{og} \\ D''_r &= P_r \frac{1}{\cos v''_r} \end{aligned} \quad (39)$$

X_r vil derfor aldrig kunne blive større end $P_r \operatorname{tg} v_r''$, og finder man derfor ved en Beregning større Værdi af X_r , betyder dette, at D_r' er ude af Funktion, hvorefter Spændingen i D_r'' findes af (39).

Paa samme Maade finder man ved at sætte $D_r'' = 0$

$$X_r = -P_r \operatorname{tg} v_r' \quad \text{og} \quad (40)$$

$$D_r' = P_r \frac{1}{\cos v_r'}.$$

Finder man derfor ved en Beregning X_r negativ og $|X_r| > P_r \operatorname{tg} v_r'$, betyder dette, at D_r'' er ude af Funktion, og Spændingen i D_r' fremgaar da af (40).

Man vil heraf forstaa, at den angivne Konstruktion har et foranderligt System.

Vi har tidligere gjort opmærksom paa, at de skraatstillede Hængestænger var spændingsløse, saafremt Knudepunktslasten var lig Nul. I det efterfølgende vil vi dog altid forudsætte, at Foden har en bestemt Egenvægt, der belaster Knudepunkterne for de skraatstillede Hængestænger med Kræfterne $g_a, g_b \dots$, saaledes at Hængestængerne, naar Konstruktionen ikke paa-virkes af nogen Nyttelast, alle har en Trækspænding, der bestemmes af Knudepunktslasterne $g_a, g_b \dots$. Som vi senere skal se, vil Fodens Egenvægt bevirke en Reduktion af Buemomenterne, en Reduktion, der er større, jo større Fodens Egenvægt er i Forhold til Nyttelasten.

Vi vil nu opstille *Elasticitetsligningerne for det angivne System*. Da vi af (39) og (40) har set, at

$$-P_r \operatorname{tg} v_r' \leq X_r \leq P_r \operatorname{tg} v_r'', \quad (41)$$

vil vi vælge et Hovedsystem, hvor X -Kræfternes brugelige Værdier kun kan være positive. Dette kan gøres ved Anvendelse af den i Slutningen af § 2 angivne Metode; men vi vil her foretrække at vælge et Hovedsystem som angivet i Fig. 4 og 4a. I Hovedsystemet er Konstruktionen paa-virket af de lodrette Kræfter $P_a, P_b \dots$ og de vandrette $T_a = P_a \operatorname{tg} v_a'', T_b = P_b \operatorname{tg} v_b''$ o. s. v. I Hovedsystemet har derfor de punkterede Hængestænger Nul-Spændinger. Som overtallige vælges Kræfterne $X_a, X_b \dots$, der har modsat Retning af $T_a, T_b \dots$. Man vil se, at disse overtallige nu kan antage positive Værdier, saafremt de

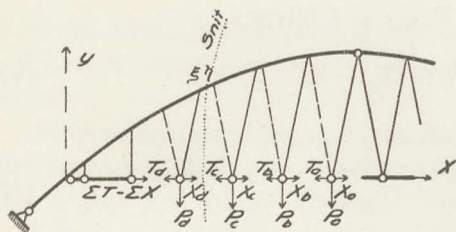


Fig. 4.

skal være brugelige. I Hovedsystemet o har man: (Fig. 4a)

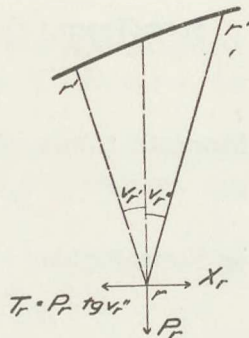


Fig. 4 a.

$$D_r' = 0 \quad D_r'' = P_r \frac{1}{\cos v_r''} \quad (42)$$

og for Spændingen i Foden i Fag c—d: (Fig. 4)

$$U_c^0 = P_a \operatorname{tg} v_{a''} + P_b \operatorname{tg} v_{b''} + P_c \operatorname{tg} v_{c''}. \quad (43)$$

og for Momentet i Punkt ξ, η : (Vi regner Momenterne af de ydre Kræfter til venstre for et Snit positive med Uret).

$$M_{\xi\eta}^0 = M' - U_c^0 \eta = M' - (P_a \operatorname{tg} v_{a''} + P_b \operatorname{tg} v_{b''} + P_c \operatorname{tg} v_{c''}) \eta \quad (44)$$

Her er M' Momentet af den ydre Last $P_a, P_b \dots$, altsaa det samme Moment, som man vilde finde i en Tre-Charniers-Bue, hvor Lasten var ophængt ved Hjælp af lodrette Hængestænger.

For Normaltrykket i Buen i Punkt ξ, η finder man ved at lægge det paa Figuren viste Snit og derefter projicere paa Buetangenten:

$$N_{\xi\eta}^0 = H \sec \varphi + U_c^0 \cos \varphi = H \sec \varphi + (P_a \operatorname{tg} v_{a''} + P_b \operatorname{tg} v_{b''} + P_c \operatorname{tg} v_{c''}) \cos \varphi \quad (45)$$

Her betyder H Horisontaltrykket i Vederlaget hidrørende fra Knudepunktslasterne $P_a, P_b \dots$ og φ Buetangentens Vinkel med en vandret Linie.

I det statisk ubestemte System finder man derefter Spændingerne i Hængestængerne:

$$D_r' = 0 + X_r \frac{\cos v_r''}{\sin (v_r' + v_r'')} \quad (46)$$

$$D_r'' = D_r^{0''} - X_r \frac{\cos v_r'}{\sin (v_r' + v_r'')}$$

af denne Kraft, medens alle de øvrige forbliver spændingsløse. I Fig. 5 er endvidere angivet Momenterne M_a , M_b o. s. v. for Buen.

Af ovenstaaende Udtryk for Paavirkningerne i Hovedsystemet kan man nu danne Koefficienterne til de overtallige, idet man f. Eks. for δ_{aa} og δ_{ab} har

$$\delta_{aa} = \int \frac{M_a^2}{EI} ds + \sum \frac{N_a^2}{EF} \Delta s$$

$$\delta_{ab} = \int \frac{M_a M_b}{EI} ds + \sum \frac{N_a N_b}{EF} \Delta s$$

Her er δ_{aa} altid positiv; men af Formlerne til Bestemmelse af M_a , M_b , N_a og N_b og iøvrigt af Fig. 5 ser man, at disse Størrelser altid har samme Fortegn, saaledes at δ_{ab} med de valgte positive Retninger for X_a og X_b er positiv. Dette kan paa samme Maade vises for enhver af Koefficienterne til de øvrige overtallige.

Endvidere er:

$$\begin{aligned} \delta_{ac} &= \delta_{bc} \\ \delta_{ad} &= \delta_{bd} = \delta_{cd} \\ \delta_{ae} &= \delta_{be} = \delta_{ce} = \delta_{de} \end{aligned} \quad (50)$$

Dette kan man kontrollere ved efter de foregaaende Formler at beregne disse Værdier; men iøvrigt vil det umiddelbart fremgaa af Fig. 5, idet man ser, at

$$\begin{aligned} M_a M_c &= M_b M_c \\ N_a N_c &= N_b N_c \end{aligned}$$

Til Bestemmelse af Deformationerne i Hovedsystemet $\delta_a^o \dots$ har man

$$\delta_a^o = \int \frac{M^o M_a}{EI} ds + \sum \frac{N^o N_a}{EF} \Delta s$$

Ved Indsætning af ovenstaaende Værdier (50) for Koefficienterne til de overtallige kan Elasticitetsligningerne skrives:

$$\begin{aligned} X_a \delta_{aa} &= \delta_a^o - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} - X_d \delta_{ad} - X_e \delta_{ae} \\ X_b \delta_{bb} &= \delta_b^o - X_a \delta_{ab} - X_c \delta_{bc} - X_d \delta_{bd} - X_e \delta_{be} \\ X_c \delta_{cc} &= \delta_c^o - X_a \delta_{ac} - X_b \delta_{bc} - X_d \delta_{cd} - X_e \delta_{ce} \\ X_d \delta_{dd} &= \delta_d^o - X_a \delta_{ad} - X_b \delta_{bd} - X_c \delta_{cd} - X_e \delta_{de} \\ X_e \delta_{ee} &= \delta_e^o - X_a \delta_{ae} - X_b \delta_{be} - X_c \delta_{ce} - X_d \delta_{de} \end{aligned}$$

I disse Ligninger ved vi, at alle Koefficienterne til de overtallige er positive. Paa Grund af det valgte Hovedsystem ved vi endvidere, at kun positive Værdier af de overtallige er brugelige; men tillige findes der en øvre Grænse for de brugelige Værdier, saaledes som angivet i (41). Heraf finder man:

$$\begin{aligned} -P_r \operatorname{tg} v_r'' &\leq -P_r \operatorname{tg} v_r' + X_r \leq P_r \operatorname{tg} v_r' \quad \text{d. v. s.} \\ 0 &\leq X_r \leq P_r \operatorname{tg} v_r' + P_r \operatorname{tg} v_r'' \end{aligned} \quad (51)$$

Det virksomme System for en given Last kan findes paa den i § 6 angivne Maade. Paa Grund af Elasticitetsligningernes særlige Form kan man imidlertid alene ved Betragtning af Deformationerne i Hovedsystemet δ_a^o, δ_b^o o. s. v. sige en Del om det virksomme System. For det første kan en overtallig X_r ikke være i Funktion, hvis δ_r^o er negativ, thi da Koefficienterne til de overtallige altid er positive, vil højre Side af Ligningerne altid blive negativ for positive Værdier af de overtallige. Antager vi dernæst X_b og X_d begge virksomme for en given Last, finder man ved at subtrahere Elasticitetsligningen for X_d fra Elasticitetsligningen for X_b :

$$X_b(\delta_{bb} - \delta_{ad}) + \delta_d^o - \delta_b^o = -X_a(\delta_{ab} - \delta_{ad}) - X_c(\delta_{ac} - \delta_{ad}) + X_d(\delta_{dd} - \delta_{ad})$$

Denne Ligning er gældende, saa længe alle de overtallige i Ligningen er i Funktion; er derimod enten X_a eller X_c ude af Funktion, skal man i Ligningen sætte disse overtallige lig Nul. Af Formlerne til Bestemmelse af δ_{bb}, δ_{ad} o. s. v. og af Fig. 5 vil man se, at $\delta_{bb} > \delta_{ad}, \delta_{ab} > \delta_{ad}$ og $\delta_{ac} > \delta_{ad}$. Endvidere vil vi antage $\delta_{dd} > \delta_{ad}$, hvilket i Reglen vil være rigtigt ved de i Praksis forekommende Tilfælde. Vi skal senere danne et Udtryk for denne Differens (65).

I ovennævnte Ligning vil derfor Koefficienterne til de overtallige alle være positive, saaledes at man har

$$X_b(\delta_{bb} - \delta_{ad}) + \delta_d^o - \delta_b^o \leq X_d(\delta_{dd} - \delta_{ad}). \quad (52)$$

Af denne Ulighed fremgaar følgende: Er

$$\delta_d^o > \delta_b^o,$$

vil X_d være positiv, saafremt X_b er det, d. v. s., saafremt X_b er

i Funktion, maa X_d ogsaa være det, og omvendt: er X_d ude af Funktion, maa X ogsaa være det.

Ovenstaaende Ulighed kan skrives:

$$X_b(\delta_{bb} - \delta_{ad}) \leq X_d(\delta_{dd} - \delta_{ad}) - (\delta_d^o - \delta_b^o).$$

Indsætter vi i denne Ulighed for X_d en Værdi, der er større eller lig den virkelige, og man alligevel finder højre Side negativ, kan X_b ikke være i Funktion. Af Elasticitetsligningen for X_d ser man, at

$$X_d \leq \frac{\delta_d^o}{\delta_{dd}} \text{ d. v. s.}$$

$$X_b(\delta_{bb} - \delta_{ad}) \leq \frac{\delta_d^o}{\delta_{dd}}(\delta_{dd} - \delta_{ad}) - (\delta_d^o - \delta_b^o) = \delta_b^o - \delta_d^o \frac{\delta_{ad}}{\delta_{dd}}$$

Er derfor $\delta_b^o - \delta_d^o \frac{\delta_{ad}}{\delta_{dd}}$ negativ, kan X_b ikke være i Funktion.

For at kunne opstille denne Ulighed, maa X_d være i Funktion; men er dette ikke Tilfældet, kan X_b ifølge ovenstaaende heller ikke være det, d. v. s. Betingelsen er tilstrækkelig, selv om man ikke ved, om X_d er i Funktion.

Den ovenfor beregnede Differens $\delta_b^o - \delta_d^o \frac{\delta_{ad}}{\delta_{dd}}$ er Deformationen δ_b^{od} for Punkt b i System (od) . Er denne negativ, er det umiddelbart indlysende, at X_b ikke er virksom i System

(od) . Vi bestemte overfor en maksimal Værdi af $X_d = \frac{\delta_d^o}{\delta_{dd}}$. X_d kan imidlertid ikke blive større end $P_d(tg v_{d'} + tg v_{d''}) = X'_d$.

Er derfor $\frac{\delta_d^o}{\delta_{dd}} > X'_d$, skal man i Stedet for $\frac{\delta_d^o}{\delta_{dd}}$ indsætte X'_d .

Som vi senere skal vise, er Løsningen af Elasticitetsligningerne for dette System saa enkel, at det i Reglen vil være lettere straks at løse Ligningerne og derved finde det virksomme System.

§ 10. Systemets Elasticitetsligninger udtrykt ved Clapeyronske Ligninger. Elasticitetsligningerne for et System med de overtallige X_a, X_b, X_c og X_d kan udtrykkes ved

$$0 = \delta_a^o - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} - X_d \delta_{ad}$$

$$0 = \delta_b^o - X_a \delta_{ab} - X_b \delta_{bb} - X_c \delta_{bc} - X_d \delta_{bd}$$

$$0 = \delta_c^o - X_a \delta_{ac} - X_b \delta_{bc} - X_c \delta_{cc} - X_d \delta_{cd}$$

$$0 = \delta_d^o - X_a \delta_{ad} - X_b \delta_{bd} - X_c \delta_{cd} - X_d \delta_{dd}$$

Subtraheres Ligningen for X_b fra Ligningen for X_a , Ligningen for X_c fra Ligningen for X_b o. s. v. finder man

$$0 = \delta_a^o - \delta_b^o - X_a(\delta_{aa} - \delta_{ab}) - X_b(\delta_{ab} - \delta_{bb})$$

$$0 = \delta_b^o - \delta_c^o - X_a(\delta_{ab} - \delta_{ac}) - X_b(\delta_{bb} - \delta_{bc}) - X_c(\delta_{ac} - \delta_{cc})$$

$$0 = \delta_c^o - \delta_d^o - X_a(\delta_{ac} - \delta_{ad}) - X_b(\delta_{bc} - \delta_{bd}) - X_c(\delta_{cc} - \delta_{cd}) - X_d(\delta_{ad} - \delta_{dd})$$

$$0 = \delta_d^o - X_a \delta_{ad} - X_b \delta_{bd} - X_c \delta_{cd} - X_d \delta_{dd}$$

Sætter vi herefter $X_a = U_a$, $X_a + X_b = U_b$, $X_a + X_b + X_c = U_c$ og $X_a + X_b + X_c + X_d = U_d$, betyder U Spændingen i Underflangen frembragt af de overtallige. Ligningerne kan da skrives:

$$0 = \delta_a^o - \delta_b^o - U_a(\delta_{aa} - \delta_{ab}) - (U_b - U_a)(\delta_{ab} - \delta_{bb})$$

$$0 = \delta_b^o - \delta_c^o - U_a(\delta_{ab} - \delta_{ac}) - (U_b - U_a)(\delta_{bb} - \delta_{bc}) - (U_c - U_b)(\delta_{ac} - \delta_{cc})$$

$$0 = \delta_c^o - \delta_d^o - U_b(\delta_{ac} - \delta_{ad}) - (U_c - U_b)(\delta_{bc} - \delta_{bd}) - (U_d - U_c)(\delta_{ad} - \delta_{dd})$$

$$0 = \delta_d^o - U_c \delta_{ad} - (U_d - U_c) \delta_{dd}$$

Hver af disse Ligninger indeholder derefter kun 3 overtallige og har den for Clapeyronske Ligninger karakteristiske Form.¹⁾

I det efterfølgende skal vi direkte angive Bestemmelsen af disse Ligninger efter lignende Metode, som f. Eks. finder Anvendelse for Vierendeelbjælker.

I Fig. 6 er Knudepunkterne r og $r-1$ angivne. Hængestængerne antages parvis at have samme Vinkel ν med Vertikalen. Med de i Figuren angivne Betegnelser finder man:

$$\Delta U_r = U_{r+1} - U_r, \quad \Delta U_{r-1} = U_r - U_{r-1}$$

¹⁾ Beregningen af Elasticitetsligningerne som Clapeyronske Ligninger er først udført af Professor A. Ostfeld for denne Konstruktion.

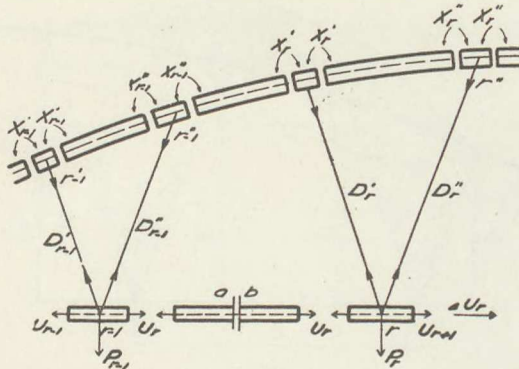


Fig. 6.

$$D_r' = \frac{P_r}{2 \cos v_r} + \frac{\Delta U_r}{2 \sin v_r}, \quad D_r'' = \frac{P_r}{2 \cos v_r} - \frac{\Delta U_r}{2 \sin v_r}$$

$$D_{r-1}' = \frac{P_{r-1}}{2 \cos v_{r-1}} + \frac{\Delta U_{r-1}}{2 \sin v_{r-1}}, \quad D_{r-1}'' = \frac{P_{r-1}}{2 \cos v_{r-1}} - \frac{\Delta U_{r-1}}{2 \sin v_{r-1}}$$

For $U_r = 1$ d. v. s. $\Delta U_r = -1$ og $\Delta U_{r-1} = 1$, faar man da

$$D_r' = -\frac{1}{2 \sin v_r}, \quad D_r'' = \frac{1}{2 \sin v_r}, \quad D_{r-1}' = \frac{1}{2 \sin v_{r-1}}$$

$$\text{og } D_{r-1}'' = -\frac{1}{2 \sin v_{r-1}}.$$

De ydre Momenter (M^o) regnes positive med Uret for Kræfter til venstre for Snittet. De indre Momenter i Buen (X) regnes positive, som angivet i Figuren, d. v. s. naar de giver Tryk i Oversiden. Normalkræfterne regnes positive, naar de frembringer Trækspændinger. Man finder da:

$$X_r' = M_{r'}^o - U_r h_{r'}, \quad X_r'' = M_{r''}^o - U_{r+1} h_{r''}$$

$$X_{r-1}' = M_{r'-1}^o - U_{r-1} h_{r'-1}, \quad X_{r-1}'' = M_{r''-1}^o - U_r h_{r''-1}$$

For Bevægelsen af de konsekutive Punkter ab faar man da

$$1. \quad \delta = \Delta(a b) = \sum \frac{S_1 S}{EF} s + \int \frac{M_1 M}{EI} ds = 0,$$

hvor S_1 og M_1 er Spændinger og Momenter i Hovedsystemet hidrørende fra Kraften $U_r = 1$, se Fig. 7.

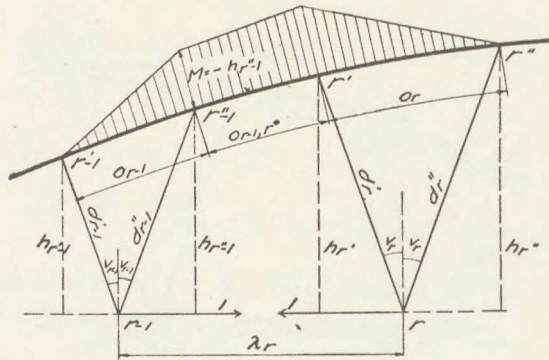


Fig. 7.

For Udtrykket $\sum \frac{S_1 S}{EF} s$ for Buen fra Punkt $r'-1$ til r'' finder man, idet man sætter $N^0 = H^0 \sec \varphi$, hvor H^0 er Horizontalreaktionen i Vederlaget (positiv svarende til Træk i Buen):

$$H^0 \left[\sec \varphi \left(\frac{\cot v_{r-1} \sin \varphi}{2} - \frac{\cos \varphi}{2} \right) \frac{o_{r-1}}{EF_b} - \frac{o_{r-1,r}}{EF_b} + \sec \varphi \left(-\frac{\cot v_r \sin \varphi}{2} - \frac{\cos \varphi}{2} \right) \frac{o_r}{EF_b} \right]$$

Dette Led kan tilstrækkelig nøjagtigt sættes lig

$$- \frac{H^0}{EF_b} \left(\frac{o_{r-1} + o_r}{2} + o_{r-1,r} \right).$$

For Underflangen fra Punkt $r-1$ til r finder man:

$$\sum \frac{S_1 S}{EF_u} s = \frac{U_r \lambda_r}{EF_u}$$

For Hængestangen $r-r''$ finder man:

$$\sum \frac{S_1 S}{EF} s = \frac{d_r''}{EF_{d_r}} \left[\frac{P_r}{4 \cos v_r \sin v_r} - \frac{\Delta U_r}{4 \sin^2 v_r} \right]$$

og analogt for de øvrige Hængestænger. Det samlede Bidrag fra Normalkræfterne bliver da:

$$\begin{aligned} & - \frac{H^0}{EF_b} \left[\frac{o_{r-1} + o_r}{2} + o_{r-1,r} \right] + \frac{U_r \lambda_r}{EF_u} + \frac{P_r}{EF_{d_r} 4 \cos v_r \sin v_r} [d_r'' - d_r'] \\ & + \frac{P_{r-1}}{EF_{d_{r-1}} 4 \cos v_{r-1} \sin v_{r-1}} [d_{r-1}' - d_{r-1}''] - \frac{\Delta U_r}{EF_{d_r} 4 \sin^2 v_r} [d_r' + d_r''] \\ & + \frac{\Delta U_{r-1}}{EF_{d_{r-1}} 4 \sin^2 v_{r-1}} [d_{r-1}' + d_{r-1}'']. \end{aligned}$$

For det samlede Momentbidrag finder man, idet Kraften $U_r = 1$ giver den paa Fig. 7 viste Momentflade.

$$-\frac{h_{r''-1}}{6EI_b} [o_{r-1}(X'_{r-1} + 2X''_{r-1}) + o_{r-1,r}(2X''_{r-1} + X'_r)] \\ - \frac{h_{r'}}{6EI_b} [o_r(2X'_r + X''_r) + o_{r-1,r}(X''_{r-1} + 2X'_r)]$$

Sættes her

$$\alpha = 1 + \frac{o_{r-1,r}}{o_{r-1}} + \frac{1}{2} \frac{h_{r'} o_{r-1,r}}{h_{r''-1} o_{r-1}} \quad (53) \\ \beta = 1 + \frac{o_{r-1,r}}{o_r} + \frac{1}{2} \frac{h_{r''-1} o_{r-1,r}}{h_{r'} o_r}$$

og indføres Værdierne for X Momenterne samt Værdierne $\Delta U_r = U_{r+1} - U_r$ og $\Delta U_{r-1} = U_r - U_{r-1}$ finder man:

$$\frac{1}{6EI_b} [h_{r''-1} o_{r-1} (M_{r-1}^o + 2\alpha M_{r''-1}^o) + h_{r'} o_r (M_{r'}^o + 2\beta M_{r'}^o)] \\ + \frac{H^o}{EF_b} \left[\frac{o_{r-1} + o_r}{2} + o_{r-1,r} \right] - \frac{P_r (d'_r - d''_r)}{EF_{d_r} 4 \cos v_r \sin v_r} \\ - \frac{P_{r-1} (d'_{r-1} - d''_{r-1})}{EF_{d_{r-1}} 4 \cos v_{r-1} \sin v_{r-1}} = \\ U_{r-1} \left[\frac{h_{r''-1} o_{r-1} h_{r'-1}}{6EI_b} - \frac{d'_{r-1} + d''_{r-1}}{EF_{d_{r-1}} 4 \sin^2 v_{r-1}} \right] \\ + U_r \left[\frac{h_{r''-1}^2 o_{r-1} \alpha}{3EI_b} + \frac{h_{r'}^2 o_r \beta}{3EI_b} + \frac{d'_r + d''_r}{EF_{d_r} 4 \sin^2 v_r} + \frac{d'_{r-1} + d''_{r-1}}{EF_{d_{r-1}} 4 \sin^2 v_{r-1}} + \frac{\lambda_r}{EF_u} \right] \\ + U_{r+1} \left[\frac{h_{r'} o_r h_{r''}}{6EI_b} - \frac{d'_r + d''_r}{EF_{d_r} 4 \sin^2 v_r} \right] \quad (54)$$

I denne Ligning er H^o Horisontaltrækket for Buen (Vederslagsreaktionen), saaledes at H^o i Reglen er negativ. E svarer til Elasticitetskoefficienten for den betragtede Konstruktionsdel. Saaledes er E i Leddet EI_b Buens Elasticitetskoefficient, og i Leddet EF_d Hængestængernes Elasticitetskoefficient. Af Ligningerne ser man, at man kan bestemme Vinklerne v saaledes, at hver af Ligningerne kun kommer til at indeholde een Ubekendt. Denne Vinkel bestemmes af

$$\sin v_r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{d'_r + d''_r}{h_{r'} o_r h_{r''}} \cdot \frac{6 I_b E_b}{E_d F_{d_r}}} \quad (55)$$

og analogt for $\sin v_{r-1}$.

For Knudepunktet nærmest Vederlagscharnieret faar man paa samme Maade som tidligere (se Fig. 8 og 9).

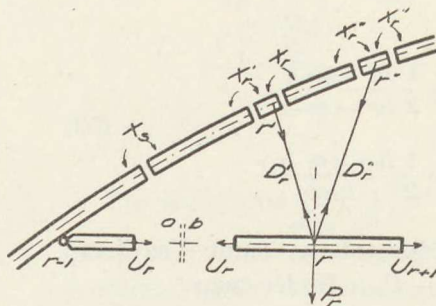


Fig. 8.

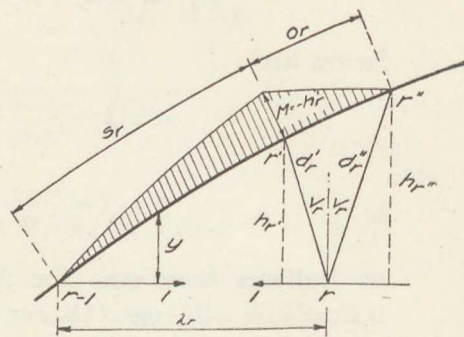


Fig. 9.

$$\Delta U_r = U_{r+1} - U_r$$

$$D'_r = \frac{P_r}{2 \cos v_r} + \frac{\Delta U_r}{2 \sin v_r} \quad D''_r = \frac{P_r}{2 \cos v_r} - \frac{\Delta U_r}{2 \sin v_r}$$

For $U_r = 1$ d. v. s. $\Delta U_r = -1$ finder man:

$$D'_r = \frac{-1}{2 \sin v_r}, \quad D''_r = \frac{1}{2 \sin v_r}$$

For Momenterne i Buen finder man:

$$X'_r = M_{r'}^0 - U_r h_{r'}, \quad X''_r = M_{r''}^0 - U_{r+1} h_{r''}, \quad X_s = M_s^0 - U_r y$$

Beregnes Normalkræfternes Bidrag paa samme Maade som tidligere, finder man:

$$\sum \frac{S_1 S}{E F} s = -\frac{H^0}{E F_b} \left(\frac{o_r}{2} + s_r \right) + \frac{U_r \lambda_r}{E F_u} + \frac{P_r (d''_r - d'_r)}{E F_d 4 \cos v_r \sin v_r} - \frac{\Delta U_r (d'_r + d''_r)}{E F_d 4 \sin^2 v_r}$$

For Momentbidragene finder man:

$$\int \frac{M_1 M}{E I_b} ds = -\int_0^{s_r} \frac{X_s y}{E I_b} ds - \frac{1}{6} h_{r'} o_r (2 X'_r + X''_r) \frac{1}{E I_b}$$

Ved Indsættelse af Værdierne for X'_r , X''_r , og X_s samt $\Delta U_r = U_{r+1} - U_r$ finder man:

$$\begin{aligned} & \int_0^{s_r} \frac{M_s^0 y}{E I_b} ds + \frac{h_r \cdot o_r}{6 E I_b} (2 M_{r'}^0 + M_{r''}^0) + \frac{H^0}{E F_b} \left(\frac{o_r}{2} + s_r \right) \\ & - \frac{P_r (d_r'' - d_r')}{E F_d 4 \cos v_r \sin v_r} = U_r \left[\frac{\lambda_r}{E F_u} + \int_0^{s_r} \frac{y^2}{E I_b} ds + \frac{h_r^2 \cdot o_r}{3 E I_b} \right. \\ & \left. + \frac{d_r' + d_r''}{E F_d 4 \sin^2 v_r} \right] + U_{r+1} \left[\frac{h_r \cdot h_{r''} \cdot o_r}{6 E I_b} - \frac{d_r' + d_r''}{E F_d 4 \sin^2 v_r} \right] \quad (56) \end{aligned}$$

Man ser, at, for

$$\sin v_r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{d_r' + d_r''}{h_r \cdot o_r} \frac{6 I_b E_b}{h_{r''} E_d F_d}}, \quad (56 a)$$

kommer Ligningen kun til at indeholde een Ubekendt. Ser man bort fra Buens Krumning paa Strækningen s_r , kan man i Formel (56) sætte

$$\int_0^{s_r} \frac{M_s^0 y}{E I_b} ds = \frac{h_r \cdot s_r}{6 E I_b} (M_{r-1}^0 + 2 M_{r'}^0) \text{ og } \int_0^{s_r} \frac{y^2}{E I_b} ds = \frac{1}{3} \frac{h_r^2 \cdot s_r}{E I_b} \quad (56 b)$$

Formlerne (54) og (56) er ret besværlige at benytte. Man kan i Reglen, uden at begaa nogen Fejl af Betydning, slette Leddene, der indeholder Differenserne mellem Hængestængerens Længde ($d_r'' - d_r'$) o. s. v. og Leddet hidrørende fra Underflangen $\left(\frac{\lambda_r}{E F_u} \right)$.

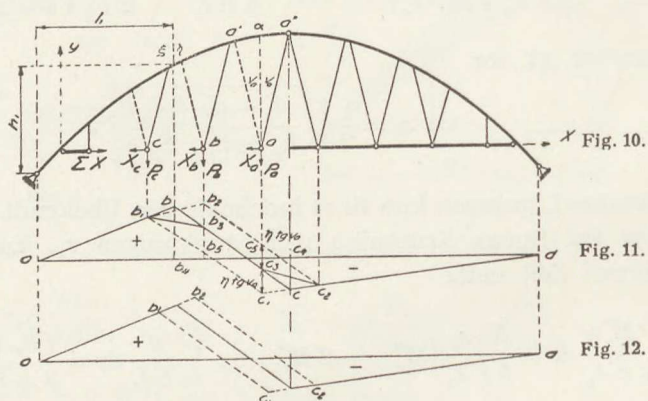
Formlerne kan forenkles ved at erstatte Hængestængerne med en stiv Stang, der halverer Vinklen mellem Hængestængerne. Denne Stang regnes stift forbunden med Buen. Kaldes Stangens Inertimoment I_r for Knudepunktet r , kan dette Inertimoment beregnes saaledes, at Stangens Udbøjning for Kraften ΔU_r bliver lig Hængestængerens.

$$\begin{aligned} \Delta U_r \frac{d_r' + d_r''}{E F_d 4 \sin^2 v_r} &= \Delta U_r \frac{h_r^2}{3 E I_r} \\ I_r &= \frac{F_d h_r^2 4 \sin^2 v_r}{3 (d_r' + d_r'')} \quad (57) \end{aligned}$$

Her er h_r Ordinaten ved Stangens Forbindelse med Buen. Momentbidragene for Buen kommer herved kun til at indeholde et Led svarende til Leddet for $o_{r-1,r}$ i Formlen (54). $o_{r-1,r}$ betyder da Buelængden mellem de stive Stængers Forbindelse med Buen.

§ 11. Bestemmelse af Konstruktionens Paavirkninger. Bestemmelse af Buens Momenter. Momentet i et Punkt ($\xi \eta$) Fig. 10, er

$$M = M^o - (X_a + X_b) \eta$$



M^o er her Momentet i Hovedsystemet, medens X_a og X_b er Underflangens Reaktionen paa Hængestængernes Knudepunkter. Momentet M^o i Punkt $\xi \eta$ er det samme, man vilde finde, hvis Lasten var direkte ophængt i Buen, og Influenslinien for dette Moment er derfor den sædvanlige for Momentet i en Tre-Charniers-Bue. I Fig. 11 er denne Influenslinie angivet ved $a-b-c-d$, Influenslinien er bestemt ved Ordinaterne

$$c - c_4 = \frac{l_1}{2} - \frac{l}{4f} h_1 \quad (58)$$

$$b - b_4 = l_1 - \frac{l_1^2}{l} - \frac{l_1 h_1}{2f}.$$

Her er l og f Buens Spændvidde og Pilhøjde; l_1 og h_1 fremgaar af Fig. 10. Idet Lasten overføres indirekte til Knudepunkterne, bliver den virkelige Influenslinie for M^o ($a-b_1-b_3-c_3-c_2-d$). Er nu de punkterede Hængestænger ude af Funktion, er

$$X_a = P_a \operatorname{tg} v_a \quad \text{og} \quad X_b = P_b \operatorname{tg} v_b,$$

saaledes at det virkelige Moment i Punkt $\xi \eta$ er

$$M = M^o - (P_a \operatorname{tg} v_a + P_b \operatorname{tg} v_b) \eta$$

(Momenterne er her regnet positive med Uret for Kræfter til venstre for Snittet). Afsætter man derfor $c_1 - c_3 = \eta \operatorname{tg} v_a$ og analogt $b_3 - b_5 = \eta \operatorname{tg} v_b$, er Linien $(a-b_1-b_5-c_1-c_2-d)$ Influenslinien for Momentet i Punkt $\xi \eta$, saafremt kun de fuldt optrukne Hængestænger er virksomme. Man ser, at ovenstaaende Moment er rigtigt, om blot Hængestængerne mellem Punkt $\xi \eta$ og Topcharnieret er ude af Funktion. Hængestængerne paa den anden Side af Punktet kan godt begge være i Funktion, uden at dette har Indflydelse paa Influenslinien.

Antager man, at de fuldt optrukne Hængestænger er ude af Funktion, faar man for Momentet i Punkt $\xi \eta$.

$$M = M^o + (P_a \operatorname{tg} v_a + P_b \operatorname{tg} v_b) \eta$$

Influenslinien for dette Moment findes paa lignende Maade som ovenfor ved at afsætte Ordinaterne $\eta \operatorname{tg} v_a$ og $\eta \operatorname{tg} v_b$ over Linien $b-c$. Influenslinien for Momentet i Punkt $\xi \eta$ bliver i dette Tilfælde $(a-b_1-b_2-c_3-c_2-d)$.

Danner alle Hængestængerne samme Vinkel v med Vertikalen, kan man tilstrækkelig nøjagtig angive Influenslinien for Momenterne i Buen under Forudsætning af, at kun det ene Sæt Hængestænger er i Funktion, saaledes som vist i Fig. 12. Vi har her tegnet en Skraalinie i Afstanden $\eta \operatorname{tg} v$ paa hver Side af Midterlinien.

Belaster vi nu det positive Influensareal for Linien $(a-b_1-c_1-d)$ med en Nyttelast p , og antager vi, at denne Belastning vil frembringe saadanne Deformationer, at de punkterede Hængestænger sættes ud af Funktion, bliver Momentet i Punkt $\xi \eta$ for denne Last og en ensformig fordelt Egenvægt g

$$M_{\xi \eta} = p N_1 - g (N_2 - N_1).$$

Her er N_1 Influensliniens positive Areal og N_2 det negative. Er Buen parabelformig, maa $N_2 > N_1$, og ovenstaaende Ligning viser da, at Momentet er blevet reduceret med Størrelsen $g (N_2 - N_1)$. Desuden er N_1 mindre end det positive Areal for M^o Influenslinien.

For at $M_{\xi \eta}$ skal være det virkelige Moment i Buen, maa man efterwise, at de punkterede Hængestænger er ude af Funktion.

For at undersøge dette, vil vi skelne mellem de to Tilfælde: Positive og negative Momenter i Buen.

1. **Positive Momenter i Buen.** Vi antager, at vi som ovenfor nævnt har belastet det positive Areal for Influenslinien ($a-b_1-c_1-d$) (Fig. 11) paa farligste Maade med Nyttelasten.

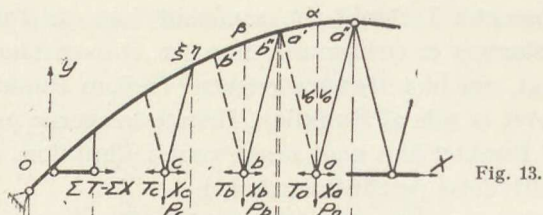


Fig. 13.

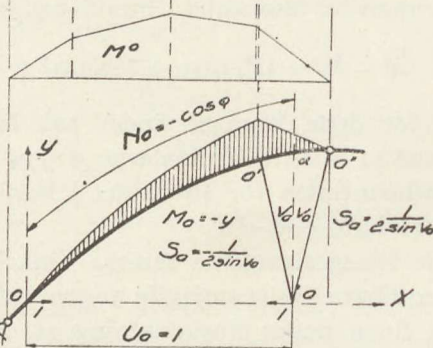


Fig. 14.

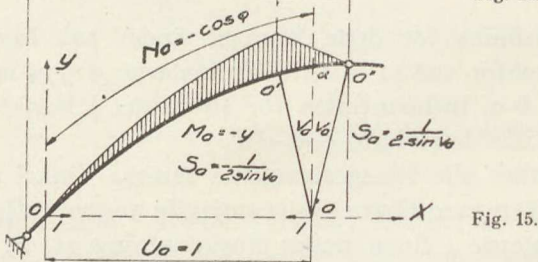


Fig. 15.

Vi kan da bestemme Knudepunktslasterne P_a, P_b o. s. v., og vi vil derefter vælge et Hovedsystem, som angivet i Fig. 13, hvor Fodens Knudepunkter tillige er paavirkede af Kræfterne

$$T_a = P_a \operatorname{tg} v_a, \quad T_b = P_b \operatorname{tg} v_b, \dots$$

medens de overtallige er $X_a, X_b \dots$. $X_a, X_b \dots$ kan da kun være positive, om disse Værdier skal være brugelige.

Vi kan nu ved Hjælp af Influenslinierne for Momenterne i Hovedsystemet bestemme M^0 Momenterne for den angivne Laststilling i Buens forskellige Punkter¹⁾. Momentkurven er vist i Fig. 14. Til Bestemmelse af de overtallige har vi da Elasticitetsligningerne

$$0 = \delta_a^0 - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac}$$

¹⁾ Influenslinierne for Momenterne i Hovedsystemet skal da belastes med Brobanens Egenvægt og Nyttelasten.

og de analoge for X_b og X_c . Her er

$$\delta_a^o = \int \frac{M^o M_a}{EI} ds + \sum \frac{N^o N_a}{EF} \Delta s$$

Paavirkningerne for Kraften $X_a = -1$ er vist i Fig. 15. For de forskellige Bidrag kan man da regne

$$\text{Buen: } \int \frac{M^o M_a}{E_b I_b} ds = - \int_0^\alpha \frac{M^o y}{E_b I_b} ds$$

$$\text{Buen: } \sum \frac{N^o N_a}{E_b F_b} \Delta s = \frac{(H + U_m)}{E_b F_b} s_{o\alpha}$$

$$\text{Hængestængerne: } \sum \frac{S^o S_a}{E_d F_d} s = \frac{P_a d_a'' \sec v_a}{E_d F_d 2 \sin v_a} = \frac{P_a d_a''}{E_d F_d \sin 2 v_a}$$

$$\text{Underflangen: } \sum \frac{N^o N_a}{E_u F_u} \Delta s = \int \frac{U^o 1}{E_u F_u} ds = \frac{U_m}{E_u F_u} s_{oa}$$

dette sidste Bidrag er forsvindende i Forhold til de øvrige, saaledes at man kan sætte

$$\delta_a^o = - \int_0^\alpha \frac{M^o y}{E_b I_b} ds + \frac{H + U_m}{E_b F_b} s_{o\alpha} + \frac{P_a d_a''}{E_d F_d \sin 2 v_a} \quad (59)$$

I dette Udtryk er:

M^o , Momentet i Hovedsystemet i et vilkaarligt Punkt (positivt med Uret for Kræfter tilvenstre for Snittet).

H , Horisontaltrykket i Buen for den angivne Last.

U_m , Middelværdien paa Strækningen oa af Trækspændingen i Hovedsystemet i Underflangen.

P_a , Knudepunktlasten i Punkt a .

y Buens Ordinat over Underflangen. (Linien gennem Hængestængerne Knudepunkter).

$s_{o\alpha}$, Buelængden fra Punkt o til α .

d_a'' , Længden af den antagne virksomme Hængestang.

E , I og F , Elasticitetskoefficient, Inertimoment og Tværsnitsareal af den betragtede Konstruktionsdel.

I ovenstaaende Udtryk er Momentbidragene og Normalkraftbidragene for Buen Tilnærmelsesværdier. For Normalkraftbidragene er denne Tilnærmelse dog uden Betydning, kun

maa man, om Tværsnittet er varierende, tage Hensyn hertil og i Stedet regne med $\frac{H + U_m}{E_b} \sum_o^{\alpha} \frac{\Delta s}{F_b}$ eller, hvis Buen er stærkt krummet, $\frac{H + U_m \cos^2 \varphi}{E_b} \sum_o^{\alpha} \frac{\Delta s}{F_b}$, hvor φ er Middelværdien af

Tangentvinklen paa Strækningen oa .

Momentbidragene kan nøjagtigere udtrykkes ved:

$$\int_o^{a''} \frac{M^o M_a}{E_b I_b} ds = - \int_o^{a'} \frac{M^o y}{E_b I_b} ds - \frac{y_{a'} s_{a' a''}}{6 E_b I_b} (2 M_{a'}^o + M_{a''}^o) \quad (60)$$

Paa samme Maade finder man for δ_b^o :

$$\delta_b^o = - \int_o^{\beta} \frac{M^o y}{E_b I_b} ds + \frac{H + U_m}{E_b F_b} s_{o\beta} + \frac{P_b d_b''}{E_d F_d \sin 2 v_b}$$

Har man nu ved Hjælp af ovenstaaende Formler beregnet δ_a^o , δ_b^o , og er begge disse negative, ved vi ifølge det foregaaende, at de punkterede Hængestænger i Fig. 13 er ude af Funktion, saaledes at Momentet i Punkt $\xi\eta$ er lig Momentet i Hovedsystemet. Er derimod δ_a^o og δ_b^o ikke negative, maa man beregne Elasticitetsligningerne. Til Bestemmelse af de deri indgaaende Konstanter har man

$$\delta_{aa} = \int \frac{M_a^2}{EI} ds + \int \frac{N_a^2}{EF} ds \quad \text{og} \quad \delta_{ab} = \int \frac{M_a M_b}{EI} ds + \int \frac{N_a N_b}{EF} ds$$

Paa samme Maade som angivet for δ_a^o finder man

$$\delta_{aa} = \int_o^{\alpha} \frac{y^2}{E_b I_b} ds + \frac{d_a' + d_a''}{E_d F_d 4 \sin^2 v_a} \quad (61)$$

Vi har her udeladt Normalkraftbidragene for Buen og Underflangen. For Buen er dette Bidrag

$$\frac{1}{E_b} \int_o^{\alpha} \frac{\cos^2 \varphi}{F_b} ds = \frac{1}{E_b} \int_o^{\alpha} \frac{\cos \varphi}{F_b} dx \approx \frac{1}{E_b} \sum \frac{\Delta x}{F_b} \approx \frac{s_{oa}}{E_b F_b} \quad (61 a)$$

For Underflangen er Normalkraftbidragene

$$\frac{s_{oa}}{E_u F_u} \quad (61 b)$$

Begge disse Bidrag er dog forsvindende i Forhold til Momentbidraget. I Stedet for

$$\int_0^\alpha \frac{y^2}{E_b I_b} ds$$

kan man nøjagtigere regne Momentbidraget lig

$$\int_0^{a'} \frac{y^2}{E_b I_b} ds + \frac{y_{a'}^2}{3 E_b I_b} s_{a' a''} \quad (62)$$

For δ_{ab} finder man:

$$\delta_{ab} = \int_0^\beta \frac{y^2}{E_b I_b} ds \quad (63)$$

eller nøjagtigere

$$\delta_{ab} = \int_0^{b'} \frac{y^2}{E_b I_b} ds + \frac{y_{b'} s_{b' b''}}{6 E_b I_b} (2 y_{b'} + y_{b''}) \quad (64)$$

Vi har for δ_{ab} ligeledes udeladt Normalkraftbidragene for Buen og Underflangen, idet disse Bidrag er forsvindende i Forhold til Momentbidraget.

Er nu $\delta_b^o > \delta_a^o$ kan man benytte den i Slutningen af § 9 angivne Undersøgelse af, om X_a er i Funktion. Man finder ved Benyttelse af de nøjagtigere Udtryk for Momentbidraget:

$$\delta_{bb} - \delta_{ab} = \frac{d_b' + d_b''}{E_d F_d 4 \sin^2 v_b} - \frac{y_{b'} y_{b''} s_{b' b''}}{6 E_b I_b}, \quad (65)$$

der i Reglen er positiv ($\delta_{bb} - \delta_{ab} = 0$ bestemmer den samme Værdi af Vinkel v , for hvilken de Clapeyronske Ligninger i § 10 kun indeholder een Ubekendt).

Er derfor

$$\delta_a^o - \delta_b^o \frac{\delta_{ab}}{\delta_{bb}} < 0,$$

kan X_a ikke være i Funktion. Paa samme Maade kan man ved Hjælp af δ_c^o og δ_b^o undersøge, om X_b er i Funktion. Er imidlertid Betingelserne for, at man kan benytte disse Undersøgelser ikke til Stede, eller er Differencerne positive, maa man beregne Vær-

dierne af de overtallige ved Hjælp af Elasticitetsligningerne og derved finde det virkelige Moment

$$M_{\xi\eta} = M_{\xi\eta}^o + (X_a + X_b) \eta$$

Er de punkterede Hængestænger i Punkterne a og b ude af Funktion, er det beregnede $M_{\xi\eta}^o$ det maksimale Moment i det angivne System. Om det er det største Moment i Punkt $\xi\eta$, er afhængig af, om det mulige Moment i et System, der ogsaa indeholder X_a og X_b , bliver større. Influenslinierne for Momentet i Punkt $\xi\eta$ i Hovedsystemet o og i System oab er ikke sammenfaldende; som Følge heraf er det forskellige Laststillinger, der bestemmer de største Momenter i disse Systemer. Man maa derfor undersøge, om det mulige Moment i System oab eller ob , eventuelt oa , kan blive større. Naar vi i det foregaaende har beregnet Maksimal-Momenterne i et Hovedsystem, der er valgt saaledes, at Hængestængerne i den ene Retning er ude af Funktion i Hovedsystemet, er dette Valg foretaget under den Forudsætning, at Nyttelasten er saa stor i Forhold til Egenvægten, at Systemet vil virke paa denne Maade. De beregnede Værdier for Momenterne M^o er da de virkelige maksimale Momenter i Buen. Er derimod Nyttelasten ikke saa stor i Forhold til Egenvægten, at Hængestængerne sættes ud af Funktion, er det angivne Valg af Hovedsystem ikke berettiget. Man maa da hellere vælge et Hovedsystem, som vist i Fig. 10, hvor man som overtallige indfører den virkelige vandrette Reaktion paa Hængestængernes Knudepunkter. Man beregner derefter Influenslinierne for Momenterne i Totalsystemet og lader de derved angivne Laststillinger være bestemmende for Momenterne. Vi skal senere angive de Formler, der er bestemmende for Deformationerne i dette Hovedsystem. Der kan selvfølgelig være Tilfælde, hvor Nyttelasten har en saadan Værdi i Forhold til Egenvægten, at man ikke kan henføre Konstruktionen til et af de ovenfor nævnte Tilfælde. Man maa da, saafremt man ønsker at finde de exakte Værdier af Maksimal-Momenterne, undersøge begge Muligheder. Vi skal dog gøre opmærksom paa, at for disse Tilfælde er de beregnede Momenter saa smaa, at man for en Dimensionsbestemmelse ikke er videre interesseret i deres nøjagtige Værdier, men kan nøjes med at bestemme Værdierne ved Laststillinger, der fremgaar af Influenslinierne i Hovedsystemet o .

Har vi valgt Hovedsystemet saaledes, at Hængestængerne i den ene Retning er ude af Funktion, og man da finder $M_{\xi\eta}^o$ negativ, skønt vi søger et positivt Moment, er det umiddelbart indlysende, at Hængestængerne ikke er ude af Funktion som antaget, idet Systemet ikke kan virke paa en saadan Maade, at Momentet skifter Fortegn. Vi forudsætter her, at det er Nytte-lasten, der er bestemmende for Momentets Størrelse, saaledes at Egenvægtsmomenterne er af underordnet Betydning.

2. Negative Momenter i Buen. Belaster vi i Fig. 11 det negative Influensareal for Linien $a-b_1-b_2-c_2-d$ med Nyttelasten og Egenvægten, finder vi for Momentet i Punkt $\xi\eta$ en Værdi, der vil være Momentet i dette Punkt, saafremt de punkterede Hængestænger alene er virksomme. For at undersøge, om dette er Tilfældet, danner vi igen Elasticitetsligningerne. I Fig. 13 skal i dette System Kræfterne $T_a, T_b \dots, X_a, X_b$ o. s. v. have modsat Retning. I dette Tilfælde finder man:

$$\delta_a^o = \int_0^a \frac{M^o y}{E_b I_b} ds - \frac{H + U_m}{E_b F_b} s_{o\alpha} + \frac{P_a d'_a}{E_d F_d \sin 2v_a} \quad (66)$$

Momentbidraget kan nøjagtigere regnes lig

$$\int_0^{a'} \frac{M^o y}{E_b I_b} ds + \frac{y_{a'} s_{a'a''}}{6 E_b I_b} (2 M_{a'}^o + M_{a''}^o) \quad (67)$$

Betegnelserne er de samme som for det positive Moment (Formel 59), idet d'_a er Længden af den nu antagne virkende Hængestang. Man maa endvidere huske, at U_m nu er negativ. Man ser, at Momentbidraget og Normalkraftbidraget for Buen har skiftet Fortegn. Koefficienterne δ_{aa}, δ_{ab} o. s. v. i dette System er de samme som tidligere beregnede for det positive Moment. Man kan nu foretage de analoge Undersøgelser som angivet for det positive Moment. Vi skal dog bemærke, at, da Nyttelasten i dette Tilfælde ikke belaster de betragtede Knudepunkter, er Sandsynligheden for, at Hængestængerne i den ene Retning er ude af Funktion, større. Tillige formindsker nu Normalkræfterne i Buen δ_a^o, δ_b^o o. s. v.

3. Normalkraften i Buen. Med det i Fig. 13 viste Hovedsystem finder man for Normaltrykket i Buen i Punkt $\xi\eta$, idet

$$U_{bc}^o = T_a + T_b = P_a \operatorname{tg} v_a + P_b \operatorname{tg} v_b,$$

$$N = H \sec \varphi + (U_{bc}^0 - X_a - X_b) \cos \varphi < H \sec \varphi + U_{bc}^0 \cos \varphi. \quad (68)$$

Her er H Buens Horisontaltryk i Vederlagscharnieret.

Den største Værdi for Normaltrykket findes naturligvis ved Totalbelastning og kan i Reglen tilstrækkelig nøjagtig sættes lig $H_{max} \sec \varphi$.

4. Normalkraften i Underflangen. Med det i Fig. 13 viste Hovedsystem finder man for Spændingen i Underflangen i Fag b—c:

$$U_{bc} = P_a \operatorname{tg} v_a + P_b \operatorname{tg} v_b - X_a - X_b < P_a \operatorname{tg} v_a + P_b \operatorname{tg} v_b \quad (69)$$

5. Trækket i Hængestængerne. Med det i Fig. 13 viste Hovedsystem finder man:

$$D_a'' = P_a \sec v_a - X_a \frac{1}{2 \sin v_a} < P_a \sec v_a \quad (70)$$

$$D_a' = X_a \frac{1}{2 \sin v_a} \quad (71)$$

Trækket i Hængestængerne kan altsaa aldrig blive større end den største Knudepunktslast multipliceret med $\sec v$.

6. Temperaturpaavirkninger. Da Systemet er udvendig statisk bestemt, vil en ensformig Temperaturpaavirkning ikke bevirke Spændinger i Systemet. Derimod vil en Temperatur-differens mellem Buen, Hængestænger og Brobanestangen bevirke Spændinger. Paa samme Maade vil et Svind i Buen eller Brobanestangen ligeledes bevirke Ekstraspændinger. Svindet kan behandles paa samme Maade som en Temperaturdifferens bestemt saaledes, at $\varepsilon t = \mathcal{A}_s$, hvor $\mathcal{A}_s$ er Svindet pr. Længdeenhed.

For en Temperaturdifferens t mellem Buen og de øvrige Konstruktionsdele faar man (Buen t^0 varmere)

$$\delta_{at}^0 = \int S_a \varepsilon t \, ds. \quad (72)$$

Med det i Fig. 13 viste Hovedsystem faar man, idet

$$S_a = -\cos \varphi$$

$$\delta_{at}^o = \int_0^\alpha -\cos \varphi \varepsilon t ds. \quad (73)$$

For en Temperaturdifferens t mellem Brobanestangen og de øvrige Konstruktionsdele faar man paa samme Maade (Brobanestangen t^o varmere).

$$\delta_{at}^o = \int_0^\alpha 1 \varepsilon t ds = s_{oa} \varepsilon t. \quad (74)$$

For en Temperaturdifferens t mellem Hængestængerne og de øvrige Konstruktionsdele (Hængestængerne t^o varmere) faar man.

$$\delta_{at}^o = \frac{d_a'' - d_a'}{2 \sin v_a} \varepsilon t. \quad (75)$$

Da Differencen $d_a'' - d_a'$ i Reglen vil være ringe, vil en saadan Temperaturdifferens ikke faa nogen videre Indflydelse.

Ved Indsætning af δ_{at}^o , δ_{bt}^o o. s. v. i Elasticitetsligningerne finder man Værdierne af de overtallige og derefter (Trækkræfter positive)

$$\begin{aligned} M_{\xi\eta} &= (X_a + X_b) \eta \\ N_{\xi\eta} &= (X_a + X_b) \cos \varphi \\ U_{bc} &= -(X_a + X_b). \end{aligned} \quad (76)$$

§ 12. **Valg af andet Hovedsystem.** I det foregaaende har vi valgt Hovedsystemet saaledes, at Hængestængerne i den ene Retning er ude af Funktion i Hovedsystemet. For Systemer, i hvilke Hængestængerne ikke sættes ud af Funktion, vil det være naturligare at vælge den virkelige Værdi af *den vandrette Reaktion paa Hængestængernes Knudepunkter som overtallig*, saaledes som angivet i Fig. 10. I dette System er Størrelserne δ_{aa} , δ_{ab} o. s. v. de samme som beregnet for Hovedsystemet i Fig. 13. (Formel (61), (63)). For Deformationerne δ_a^o , δ_b^o finder man med den i Fig. 10 viste positive Retning af de overtallige:

$$\delta_a^o = \int_0^\alpha \frac{M^o y}{E_b I_b} ds - \frac{H}{E_b F_b} s_{oa} + \frac{P_a (d_a' - d_a'')}{2 E_d F_d \sin 2 v_a} \quad (77)$$

Betegnelserne er de samme som angivet for Formel (59). Dog betyder nu M^o Momentet, saafremt Kræfterne overføres til Buen ved Hjælp af lodrette Hængestænger. For Punkter af Buen, beliggende mellem et Par Hængestænger, maa man ved Bestemmelse af Momentet M^o tage Hensyn til den indirekte Overførelse af Kræfterne til Buen.

Momentbidraget kan som tidligere nøjagtigere udtrykkes ved

$$\int_0^{a'} \frac{M^o y}{E_b I_b} ds + \frac{y_{a'} s_{a' a''}}{6 E_b I_b} (2 M_{a'}^o + M_{a''}^o) \quad (78)$$

I Stedet for at vælge den vandrette Kraft i Hængestængerne Knudepunkter som overtallig, kan man indføre *Spændin-*

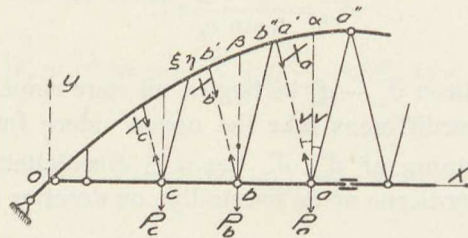


Fig. 16.

gerne i det ene System af Hængestænger som overtallige. Dette System er angivet i Fig. 16. Hovedsystemet bliver da et System, i hvilket kun det ene Sæt Hængestænger er virksomme, altsaa det samme som angivet i Fig. 13. Influenslinien for Momentet i Buen er derfor som angivet i Fig. 11 og 12 Linien ($a-b_1-c_1-d$).

Spændingen i en Hængestang med det i Fig. 13 viste Hovedsystem er:

$$D_r' = X_r \frac{1}{2 \sin v_r}$$

Multipliseres derfor Formlerne gældende for det i Fig. 13 viste Hovedsystem med $2 \sin v_r$, finder man de tilsvarende Formler for det i Fig. 16 viste Hovedsystem, der svarer til positive Momenter i Buen. Er specielt alle Vinklerne v ligestore, faar man:

$$\delta_a^o = -2 \sin v \int_0^{\alpha} \frac{M^o y}{E_b I_b} ds + 2 \sin v \frac{H + U_m}{E_b F_b} s_{o\alpha} + \frac{P_a d_a'' \sec v}{E_d F_d} \quad (79)$$

$$\delta_a^o = 2 \sin v \int_0^a \frac{M_o}{E_b I_b} ds - 2 \sin v \frac{H + U_m}{E_b I_b} s_{o\alpha} + \frac{P_a d_a' \sec v}{E_d F_d} \quad (86)$$

I dette Tilfælde er U_m negativ. Betegnelserne er iøvrigt de samme som angivet for Formel (59).

For Paavirkningerne i det statisk ubestemte System finder man for det i Fig. 17 angivne Hovedsystem.

$$M_{\xi\eta} = M_{\xi\eta}^o - (X_a + X_b) \eta \cdot 2 \sin v \quad (87)$$

$$N_{\xi\eta} = H \sec \varphi + [-(P_a + P_b) \operatorname{tg} v + (X_a + X_b) 2 \sin v] \cos \varphi \quad (88)$$

$$U_{bc} = -(P_a + P_b) \operatorname{tg} v + (X_a + X_b) 2 \sin v \quad (89)$$

§ 13. **Byggemaadens Indflydelse paa Beregningerne.** Udføres Konstruktionen saaledes, at den fuldstændig færdigbygges, inden Stilladserne fjernes, vil Egenvægten af hele Konstruktionen bevirke Spændinger, der kan beregnes ved at anbringe Egenvægten paa det statisk ubestemte System. Vi forudsætter da, at alle Konstruktionsdelene samtidig har Nulspændinger, naar Stilladserne fjernes. Bygges Konstruktionen derimod saaledes, at Buen først udføres, hvorefter Resten monteres i Stilladser hængende i Buen, vil Buens Egenvægt ikke bevirke Spændinger i Hængestængerne; og ved Beregningen af Normalkraftbidragene for Buen skal disse ikke indeholde Bidrag fra Buens Egenvægt (Momenterne fra Buens Egenvægt skal da beregnes særskilt). Endelig kan Konstruktionen udføres saaledes, at Brobanestangen først sammenføjes mellem de enkelte Knudepunkter, efter at hele Egenvægten er overført til Buen. I dette Tilfælde er Spændingerne i de to fra samme Punkt udgaaende Hængestænger lige store, saafremt Vinklerne med Vertikalen er de samme. Da Egenvægten under disse Forhold ikke virker paa det statisk ubestemte System, skal Egenvægtens Bidrag ikke medtages ved Bestemmelse af δ_a^o o. s. v.

Ønsker man at forme Buen saaledes, at Egenvægtsmomenter undgaas, kan man i det først angivne Tilfælde bestemme Bueformen som Tryklinie for hele Egenvægten. Anbringes derefter Egenvægten paa det statisk ubestemte System, medens

man til overtallige vælger Horizontalkomponenten af Hængestængernes Spænding (Fig. 2), finder man Egenvægtsmomenterne

$$M_{\xi\eta} = M_{\xi\eta}^0 - (X_a + X_b) \eta = - (X_a + X_b) \eta,$$

idet $M_{\xi\eta}^0 = 0$, og X_a og X_b er de overtallige mellem Punktet og Topcharnieret. Ændres nu Tryklinien saaledes, at $M_{\xi\eta}^0 = (X_a + X_b) \eta$, vil denne Bueform meget nær have Egenvægtsmomenterne lig Nul. Anbringes nemlig Egenvægten paa det dertil svarende System, er Normalkræfternes Bidrag uforandrede. Det nye Egenvægtsmoment er da

$$M_{\xi\eta} = (X_a + X_b) \eta - (X_a + X'_a + X_b + X'_b) \eta = - (X'_a + X'_b) \eta,$$

hvor X'_a og X'_b nu er de overtallige, man finder ved i Udtrykkene for δ_a^0 , δ_b^0 o. s. v. kun at medregne Momentbidragene i Buen, og disse vil selvfølgelig i dette Tilfælde være ubetydelige i Forhold til Normalkraftbidragene. Ønsker man at reducere Egenvægtsmomenterne endnu yderligere, kan den ovennævnte Beregning udføres en Gang til, idet man denne Gang ændrer den sidst fundne Tryklinie saaledes, at

$$\Delta M_{\xi\eta}^0 = (X'_a + X'_b) \eta \text{ o. s. v.}$$

Ved den anden beskrevne Udførelsesform for Konstruktionen, hvor Buen udføres først, hvorefter Resten bygges paa Stiladser hængende i Buen, vil det være rigtigere at forme Buen som Tryklinie til Buens Egenvægt, idet de Momenter, som opstaar, naar hele Systemet medvirker, er ubetydelige. Ønsker man at eliminere disse sidste Momenter, kan man udføre lignende Beregninger som ovenfor, idet man blot undlader at medregne Normalkraftbidragene for Buens Egenvægt. Buens Egenvægtsmomenter skal da være lig Momenterne fra Brobanens Egenvægt med modsat Fortegn.

For den sidst nævnte Udførelsesform er det umiddelbart indlysende, at Buen skal formes som Tryklinie til hele Egenvægten.

§ 14. **Løsning af Elasticitetsligningerne.** Paa Grund af Elasticitetsligningerne særlige Form bliver Løsningen af disse ret enkel.

$$0 = \delta_a^o - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} - X_d \delta_{ad}$$

$$0 = \delta_b^o - X_a \delta_{ab} - X_b \delta_{bb} - X_c \delta_{bc} - X_d \delta_{bd}$$

$$0 = \delta_c^o - X_a \delta_{ac} - X_b \delta_{bc} - X_c \delta_{cc} - X_d \delta_{cd}$$

$$0 = \delta_d^o - X_a \delta_{ad} - X_b \delta_{bd} - X_c \delta_{cd} - X_d \delta_{dd}$$

Ovenstaaende Elasticitetsligninger er opstillede saaledes, at X_a er den overtallige nærmest Topcharnieret, X_b den næste o. s. v. Vi antager endvidere $\delta_a^o, \delta_b^o \dots$ større end Nul, da man ellers straks kan udskyde den tilsvarende overtallige og Elasticitetsligning, saaledes som tidligere angivet.

Vi multiplicerer den nederste Ligning med

$$\frac{\delta_{ad}}{\delta_{dd}}$$

og man kan da ved at subtrahere denne Ligning fra de øvrige eliminere X_d . Man faar:

$$0 = \delta_a^o - \delta_d^o \frac{\delta_{ad}}{\delta_{dd}} - X_a \left(\delta_{aa} - \frac{\delta_{ad}^2}{\delta_{dd}} \right) - X_b \left(\delta_{ab} - \frac{\delta_{ad}^2}{\delta_{dd}} \right) - X_c \left(\delta_{ac} - \frac{\delta_{ad}^2}{\delta_{dd}} \right)$$

.....

Det Ligningssystem, man derved har fundet, er Elasticitetsligningerne for et System od ; thi i dette System finder man f. Eks.

$$\delta_a^{od} = \delta_a^o - \delta_d^o \frac{\delta_{ad}}{\delta_{dd}}, \quad \delta_{aa}^{od} = \delta_{aa} - \frac{\delta_{ad}^2}{\delta_{dd}} \quad \text{o. s. v.}$$

I dette System er ogsaa $\delta_{ac}^{od} = \delta_{bc}^{od}$.

Er i System od alle Koefficienterne positive, saaledes som det i Almindelighed vil være Tilfældet, maa man, om X_a, X_b og X_c skal være i Funktion, som tidligere have

$$\delta_a^{od}, \delta_b^{od}, \delta_c^{od}$$

positive. Er dette ikke Tilfældet, men er f. Eks. δ_b^{od} negativ, saa er det umiddelbart indlysende, at X_b ikke kan være virksom i et System, der indeholder X_d . Antager man derfor, at det virksomme System indeholder X_d , kan man i dette Tilfælde

straks udskyde X_b , d. v. s. slette dennes Elasticitetsligning og Leddene, hvori den findes. Antager vi imidlertid, at Deformationerne i System *od* er positive, kan man eliminere X_c af Ligningerne ved at multiplicere Ligningen for X_c^{od} med

$$\left(\delta_{ac} - \frac{\delta_{ad}^2}{\delta_{dd'}}\right) : \left(\delta_{cc} - \frac{\delta_{cd}^2}{\delta_{dd'}}\right) = \frac{\delta_{ac}^{od}}{\delta_{cc}^{od}}$$

og subtrahere denne Ligning fra de øvrige. De derved fremkomne Ligninger er Elasticitetsligningerne for X_a og X_b i et Hovedsystem *odc*. Ligningerne kan derfor skrives:

$$0 = \delta_a^{odc} - X_a \delta_{aa}^{odc} - X_b \delta_{ab}^{odc}$$

$$0 = \delta_b^{odc} - X_a \delta_{ab}^{odc} - X_b \delta_{bb}^{odc}$$

Er her Koefficienten δ_{ab}^{odc} positiv, men δ_b^{odc} er negativ, kan X_b ikke være virksom i et System, der indeholder X_a og X_c . Er derimod δ_a^{odc} og δ_b^{odc} begge positive, kan man multiplicere Elasticitetsligningen for X_b med $\delta_{ab}^{odc} : \delta_{bb}^{odc}$ og subtrahere den fra Ligningen for X_a , hvorved man finder:

$$0 = \delta_a^{odcb} - X_a \delta_{aa}^{odcb}$$

Er her δ_a^{odcb} positiv, er X_a virksom i System *odbc*.

Denne Værdi for X_a indsætter man derefter i Elasticitetsligningen for X_b i System *odc*, hvoraf man finder X_b . X_a og X_b indsætter man derefter i Elasticitetsligningen for X_c i System *od*. I denne Ligning har X_a og X_b samme Koefficient, saaledes at man kun behøver at indsætte $X_a + X_b$. Ved paa denne Maade at fortsætte, kan man efterhaanden finde alle de overtallige, idet man hver Gang kun behøver at indsætte ΣX i en ny Ligning for at finde en ny overtallig.

I Almindelighed vil det være de overtallige nærmest Topcharnieret, der sættes ud af Funktion, naar man bestemmer Maks. og Min. Momenterne. Man vil derfor forstaa, at den angivne Løsning af Ligningerne i Reglen direkte vil angive, hvilke der er virksomme.

Ved den praktiske Løsning vil det være lettest en Gang for alle at udregne de Konstanter, med hvilke de forskellige Lig-

ninger skal multipliceres. Har man derefter bestemt δ_a^0 , δ_b^0 o. s. v., vil disse Konstanter nogenlunde simpelt føre til Værdierne af de overtallige, saaledes som vises i Eksempel 1.

Saaframt man ved Løsning af Ligningerne har fundet nogle af de overtallige negative, kan man i Stedet for at slette de tilsvarende Ligninger og overtallige finde Ændringen af de øvrige overtallige, naar de negative fjernes.

Lad os antage, at Ligningerne giver X_a og X_b negative. Man kan da finde Ændringen af de øvrige overtallige, naar X_a og X_b fjernes, ved at beregne Ligningerne

$$-X_c \delta_{cc} - X_d \delta_{ad} = -(X_a + X_b) \delta_{ac}$$

$$-X_c \delta_{ad} - X_d \delta_{dd} = -(X_a + X_b) \delta_{ad}.$$

Ved Løsningen af disse Ligninger kan man bruge den ovenfor beskrevne Metode, og nederste Ligning skal da multipliceres med $\frac{\delta_{ad}}{\delta_{dd}}$, altsaa den samme Konstant, som man benyttede ved den første Løsning. Man ser heraf, at de allerede fundne Konstanter direkte giver X_d som Funktion af $X_a + X_b$ og derefter ved Indsættelse af denne i de øvrige Ligninger efterhaanden de øvrige overtallige. Man kan paa denne Maade undersøge Variationen af de overtallige, naar en eller flere af disse fjernes.

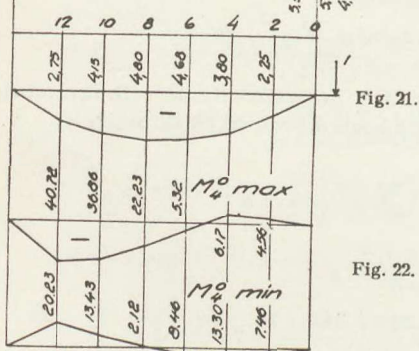
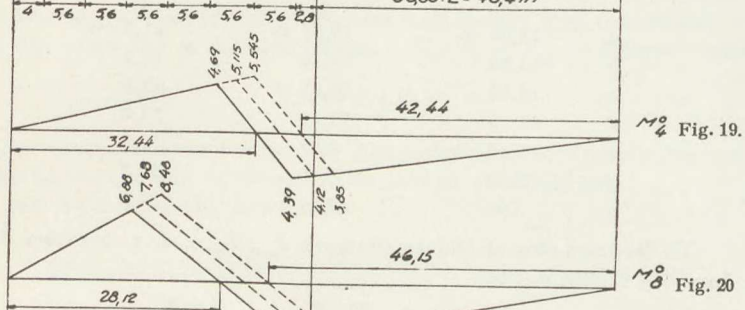
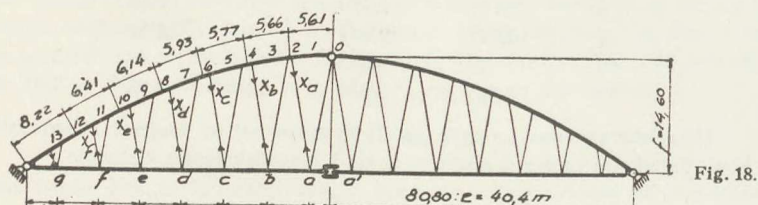
§ 15. **Eksempel 1.** I Fig. 18 er vist en Tre-Charniers-Bue med skraatstillede Hængestænger. Afstanden mellem Vederlagscharniererne er 80,80 m og Pilhøjden 14,6 m.

Alle Hængestængerne danner samme Vinkel v med Vertikalen. Buen inddeles i Bueelementer ved Hjælp af en Række Punkter beliggende med samme horizontale Afstand 5,6/2 m. Som overtallige vælges Trækkene i det ene Sæt Hængestænger, og da der er 7 Par Skraastænger paa hver Side af Topcharnieret, er hver Buehalvdel 7 Gange indvendig statisk ubestemt. Med det angivne Valg af overtallige kan Konstruktionen behandles efter de i § 12 angivne Metoder.

Vi vil nu først bestemme Influenzlinierne for Spændingerne i Hængestængerne under Forudsætning af, at de alle er i Funktion. Disse Influenzlinier kan bestemmes ved efterhaanden at anbringe Kraften 1 i de forskellige Knudepunkter, derefter beregne og løse Elasticitetsligningerne, og saaledes bestemme Værdierne af Spændingerne for de forskellige Stillinger af Kraften 1. Vinklen v sættes lig $9^\circ 48'$, og man har da

$$\operatorname{tg} v = 0,172, \quad \sec v = 1,015, \quad 2 \sin v = 0,34, \quad 4 \sin^2 v = 0,116.$$

Vi bestemmer først Influenzlinierne for Momenterne i Hovedsystemet i Punkterne 2—4—6—8—10 og 12. Disse Influenzlinier beregnes ved at bestemme Influenzlinien for Momentet under Forudsætning af, at Lasten overføres til Buen gennem lodrette Hængestænger, hvorefter man ind-



lægger en Skraalinie i Afstanden y $tg\ v$ under Midterlinien, Fig. 19—20. Afsættes Linjen i Afstanden y $tg\ v$ over Midterlinien som angivet punkteret, faar man Influenzlinien, saafremt det andet Sæt Hængestænger er virksomme.

Til Bestemmelse af Influenzlinierne angives nedenfor Ordinatorne y og h (Punktets Afstand over Linien gennem Vederlagscharniererne). Disse Ordinator er bestemte saaledes, at Buen bliver Tryklinie til hele Egenvægten. (Hængestængernes Skæringspunkter er beliggende paa en Linie 61,9 cm under Linien gennem Vederlagscharniererne).

Punkt	h m	y m	Punkt	y m
0	14,600		1	15,12
2	14,335	14,954	3	14,59
4	13,531	14,150	5	13,50
6	12,171	12,790	7	11,86
8	10,242	10,861	9	9,64
10	7,729	8,348	11	6,82
12	4,617	5,236	13	2,98

Hængestængernes Længde og Tværsnitsareal er angivet i nedenstaaende Tabel. De under d angivne er de i Hovedsystemet virkende.

	d	d'	F
a	15,05 m	14,85 m	21,3 cm ²
b	14,80	14,10	21,3
c	14,00	12,85	21,3
d	12,55	11,10	21,3
e	10,45	8,85	21,3
f	7,60	6,10	21,3
g	3,95	2,90	21,3

Til Bestemmelse af Deformationerne δ_{aa} , δ_{ab} o. s. v. benyttes Formlerne i § 12 (80) og (81).

$$\delta_{aa} = 4 \sin^2 v \sum \frac{y^2}{E_b I_b} \Delta s + \frac{d + d'}{E_d F_d}$$

$$\delta_{ab} = 4 \sin^2 v \sum \frac{y^2}{E_b I_b} \Delta s$$

Vi har her udeladt Bidragene fra Normalkræfterne i Brobanestang og Bue, idet disse Bidrag er forsvindende i Forhold til de øvrige.

Man beregner først

$$10^5 \sum \frac{y}{E_b I_b} \Delta s = K$$

Δs m	$E I$ t m ² 10 ⁻⁵	y m	K 1/t	$K y$ m/t								
8,225	2,94	2,98	8,33	24	24	24	24	24	24	24	24	12
6,409	2,93	6,82	14,92	102	102	102	102	102	102	102	51	75
6,142	2,86	9,64	20,65	199	199	199	199	199	100	226		
5,928	2,74	11,86	25,65	304	304	304	304	152	477			
5,765	2,56	13,50	30,45	411	411	411	206	51	835	426		
5,660	2,35	14,59	35,10	511	511	256	69		1296	766		
5,610	2,12	15,12	40,00	604	302	85			1853	1211		
					101							
					1752							

Ved Bestemmelse af Momentbidraget i Deformationerne δ_{ab} , δ_{ac} .. δ_{ag} er der for den sidste Del regnet

$$\Sigma \Delta s y^2 = \frac{1}{2} \Delta s y^2,$$

idet denne Del af Momentbidraget tilnærmelsesvis bestaar af en Multiplikation mellem Ordinaterne i et Rektangel (med Højden y og Siden Δs) og en retvinklet Trekant (med Højden y og Grundlinjen Δs). For den sidste Del af Momentbidraget i δ_{aa} , δ_{bb} , δ_{cc} og δ_{dd} er der regnet

$$\Sigma \Delta s y^2 = \frac{1}{3} \Delta s y^2,$$

idet denne Del af Momentbidraget tilnærmelsesvis bestaar af Kvadratet paa Ordinaterne i en retvinklet Trekant med Højden y og Grundlinjen Δs . For den sidste Del af Momentbidraget i δ_{ee} , δ_{ff} og δ_{gg} er derimod regnet

$$\Sigma \Delta s y^2 = \frac{1}{2} \Delta s y^2,$$

idet Afstanden mellem samme Par Hængestængers Skæringspunkter med Buen her er saa lille, at ovenstaaende Udtryk er nøjagtigere.

Idet $4 \sin^2 \nu = 0,116$ finder man

$$10^5 \delta_{aa} = 0,116 \cdot 1752 + \frac{15,05 + 14,85}{210 \cdot 0,00213} = 203 + 67 = 270 \text{ (m/t)}$$

$$10^5 \delta_{bb} = 0,116 \cdot 1211 + \frac{14,80 + 14,10}{210 \cdot 0,00213} = 140,2 + 64,8 = 205$$

$$10^5 \delta_{cc} = 0,116 \cdot 766 + \frac{14,00 + 12,85}{210 \cdot 0,00213} = 88,8 + 60,2 = 149$$

$$10^5 \delta_{dd} = 0,116 \cdot 426 + \frac{12,55 + 11,10}{210 \cdot 0,00213} = 49,5 + 53 = 102,5$$

$$10^5 \delta_{ee} = 0,116 \cdot 226 + \frac{10,45 + 8,85}{210 \cdot 0,00213} = 26,1 + 43,3 = 69,4$$

$$10^5 \delta_{ff} = 0,116 \cdot 75 + \frac{7,60 + 6,10}{210 \cdot 0,00213} = 8,7 + 30,7 = 39,4$$

$$10^5 \delta_{gg} = 0,116 \cdot 12 + \frac{3,95 + 2,90}{210 \cdot 0,00213} = 1,4 + 15,3 = 16,7$$

$$10^5 \delta_{ab} = 0,116 \cdot 1296 = 150 \text{ (m/t)}$$

$$10^5 \delta_{ac} = 0,116 \cdot 835 = 96,5$$

$$10^5 \delta_{ad} = 0,116 \cdot 477 = 55,2$$

$$10^5 \delta_{ae} = 0,116 \cdot 226 = 26,1$$

$$10^5 \delta_{af} = 0,116 \cdot 75 = 8,7$$

$$10^5 \delta_{ag} = 0,116 \cdot 12 = 1,4$$

Ved at belaste Influenslinierne for Momentet i de forskellige Punkter med Kraften 1 efterhaanden angribende i de forskellige Knudepunkter, har man bestemt den i Fig. 21 viste M^0 Kurve. Momentet er her regnet positivt med Uret for Kræfter til venstre for Snittet. (Tryk foroven i Buen). Til Bestemmelse af Deformationerne δ_a^0 o. s. v. har man (79).

$$\delta_a^0 = -2 \sin v \sum \frac{M^0 y}{E_b I_b} \Delta s + \frac{d \sec v}{E_d F_d} = -2 \sin v \sum 10^{-5} K M^0 + \frac{d \sec v}{E_d F_d}$$

Vi har her bortkastet Leddene hidrørende fra Normalkræfterne i Bue og Brobanestang, idet disse Led i denne Forbindelse er uden Betydning i Forhold til Buens Momentbidrag og Hængestængernes Spændingsbidrag.

Horizontaltrykket hidrørende fra Nyttelasten vil i Reglen være meget lille i Forhold til Horizontaltrykket fra Egenvægten, og under Forudsætning af, at Egenvægtsmomenterne bestemmes for sig, saaledes at Influenslinierne kun benyttes for Nyttelasten, kan man udelade Normalkræfterne for Buen.

For Momentbidraget finder man:

Kraften 1 i Punkt a' .

Δs m	K $1/t$	$-M^0$ $1 \cdot m$	$-M^0 K$ m/t								
8,225	8,33	1,37	11,4	11,4	11,4	11,4	11,4	11,4	11,4	11,4	5,7
6,409	14,92	3,45	51,5	51,5	51,5	51,5	51,5	51,5	51,5	25,7	
										37,1	
6,142	20,65	4,47	92,4	92,4	92,4	92,4	92,4	92,4	46,2		
									109,1		
5,928	25,65	4,74	121,2	121,2	121,2	121,2	121,2	60,6			
								215,9			
5,765	30,45	4,24	129,0	129,0	129,0	64,5					
						341,0					
5,660	35,10	3,02	106,0	106,0	53,0						
					458,5						
5,610	40,00	1,12	44,8	30,0							
				541,5							

For Værdien af Momentet M^0 er angivet Middeltallet af Værdierne ved begge Endepunkterne af det tilsvarende Δs . For det sidste Bidrag i Ledet δ_a^0 er regnet $\sum K M^0 = \frac{1}{3} K 2 M_m^0$, idet dette Led som tidligere angivet tilnærmelsesvis er en Multiplikation af Ordinaterne i 2 Trekante. For δ_b^0 er denne sidste Del af Momentbidraget regnet lig $\sum K M^0 = \frac{1}{3} K M^0$, idet dette Led tilnærmelsesvis er en Multiplikation af Ordinaterne i en Trekant og et Rektangel.

Man finder derefter, idet man for Kraften 1 i Punkt a' intet Bidrag faar fra Hængestængerne, følgende:

$$10^5 \delta_a^0 = 0,34 \cdot 541,5 = 184,0 \text{ m/t}$$

$$10^5 \delta_b^0 = 0,34 \cdot 458,5 = 155,0$$

$$10^5 \delta_c^0 = 0,34 \cdot 341,0 = 116,0$$

$$10^5 \delta_d^0 = 0,34 \cdot 215,9 = 73,2$$

$$10^5 \delta_e^0 = 0,34 \cdot 109,1 = 37,1$$

$$10^5 \delta_f^0 = 0,34 \cdot 37,1 = 12,6$$

$$10^5 \delta_g^0 = 0,34 \cdot 5,7 = 1,9.$$

Vi kan nu opstille Elasticitetsligningerne for dette Belastningstilfælde, idet man som tidligere angivet har $\delta_{bc} = \delta_{ac}$ o. s. v.

$$X_a 270 + X_b 150 + X_c 96,5 + X_d 55,2 + X_e 26,1 + X_f 8,7 + X_g 1,4 = \delta_a^0 10^5$$

$$X_a 150 + X_b 205 + X_c 96,5 + X_d 55,2 + X_e 26,1 + X_f 8,7 + X_g 1,4 = \delta_b^0 10^5$$

$$X_a 96,5 + X_b 96,5 + X_c 149 + X_d 55,2 + X_e 26,1 + X_f 8,7 + X_g 1,4 = \delta_c^0 10^5$$

$$X_a 55,2 + X_b 55,2 + X_c 55,2 + X_d 102,5 + X_e 26,1 + X_f 8,7 + X_g 1,4 = \delta_d^0 10^5$$

$$X_a 26,1 + X_b 26,1 + X_c 26,1 + X_d 26,1 + X_e 69,4 + X_f 8,7 + X_g 1,4 = \delta_e^0 10^5$$

$$X_a 8,7 + X_b 8,7 + X_c 8,7 + X_d 8,7 + X_e 8,7 + X_f 39,4 + X_g 1,4 = \delta_f^0 10^5$$

$$X_a 1,4 + X_b 1,4 + X_c 1,4 + X_d 1,4 + X_e 1,4 + X_f 1,4 + X_g 16,7 = \delta_g^0 10^5.$$

Disse Ligninger vil vi først løse uden Hensyn til δ_a^0, δ_b^0 o. s. v., saaledes at man kan benytte Løsningen for alle mulige andre Værdier af disse. Ved at multiplicere den nederste Ligning med

$$\frac{1,4}{16,7} = 0,08383,$$

og derefter subtrahere denne Ligning fra de øvrige, eliminerer man X_g . Man finder:

$$X_a 269,88 + X_b 149,88 + X_c 96,38 + X_d 55,08 + X_e 25,98 + X_f 8,58 = \delta_a^{og} 10^5$$

$$X_a 149,88 + X_b 204,88 + X_c 96,38 + X_d 55,08 + X_e 25,98 + X_f 8,58 = \delta_b^{og} 10^5$$

$$X_a 96,38 + X_b 96,38 + X_c 148,88 + X_d 55,08 + X_e 25,98 + X_f 8,58 = \delta_c^{og} 10^5$$

$$X_a 55,08 + X_b 55,08 + X_c 55,08 + X_d 102,38 + X_e 25,98 + X_f 8,58 = d_a^{og} 10^5$$

$$X_a 25,98 + X_b 25,98 + X_c 25,98 + X_d 25,98 + X_e 69,28 + X_f 8,58 = d_e^{og} 10^5$$

$$X_a 8,58 + X_b 8,58 + X_c 8,58 + X_d 8,58 + X_e 8,58 + X_f 39,28 = d_f^{og} 10^5$$

Ved at multiplicere den nederste Ligning med $8,58/39,28 = 0,2187$ og subtrahere denne fra de øvrige, finder man:

$$X_a 268 + X_b 148 + X_c 94,50 + X_d 53,20 + X_e 24,10 = d_a^{ogf} 10^5$$

$$X_a 148 + X_b 203 + X_c 94,50 + X_d 52,20 + X_e 24,10 = d_b^{ogf} 10^5$$

$$X_a 94,50 + X_b 94,50 + X_c 147,00 + X_d 53,20 + X_e 24,10 = d_c^{ogf} 10^5$$

$$X_a 53,20 + X_b 53,20 + X_c 53,20 + X_d 100,50 + X_e 24,10 = d_d^{ogf} 10^5$$

$$X_a 24,10 + X_b 24,10 + X_c 24,10 + X_d 24,10 + X_e 67,40 = d_e^{ogf} 10^5$$

$$\text{Faktor } 24,10/67,40 = 0,3578$$

$$X_a 259,38 + X_b 139,38 + X_c 85,88 + X_d 44,58 = d_a^{ogfe} 10^5$$

$$X_a 139,38 + X_b 194,38 + X_c 85,88 + X_d 44,58 = d_b^{ogfe} 10^5$$

$$X_a 85,88 + X_b 85,88 + X_c 138,38 + X_d 44,58 = d_c^{ogfe} 10^5$$

$$X_a 44,58 + X_b 44,58 + X_c 44,58 + X_d 91,88 = d_d^{ogfe} 10^5$$

$$\text{Faktor } 44,58/91,88 = 0,4851$$

$$X_a 237,75 + X_b 117,75 + X_c 64,25 = d_a^{ogfed} 10^5$$

$$X_a 117,75 + X_b 172,75 + X_c 64,25 = d_b^{ogfed} 10^5$$

$$X_a 64,25 + X_b 64,25 + X_c 116,75 = d_c^{ogfed} 10^5$$

$$\text{Faktor } 64,25/116,75 = 0,5505$$

$$X_a 202,38 + X_b 82,38 = d_a^{ogfedc} 10^5$$

$$X_a 82,38 + X_b 137,38 = d_b^{ogfedc} 10^5$$

$$\text{Faktor } 82,38/137,38 = 0,600$$

$$X_a 153,01 = d_a^{ogfedcb} 10^5$$

I det angivne Tilfælde, Kraften 1 i Punkt a' , kan man nu beregne X Kræfterne ved at multiplicere Deformationerne med de ovenfor nævnte Faktorer, og udføre de samme Subtraktioner som ovenfor. Regningerne kan opstilles som nedenfor

$$\begin{array}{rcccccc}
 & -0,2 & -2,7 & -12,2 & -28,2 & -40,1 & -43 \\
 10^5 \delta_a^o = 184 & 183,8 & 181,1 & 168,9 & 140,7 & 100,6 & 57,6 = \delta_a^{ogfedcb} 10^5 \\
 10^5 \delta_b^o = 155 & 154,8 & 152,1 & 139,9 & 111,7 & 71,6 = \delta_b^{ogfedc} 10^5 \\
 10^5 \delta_c^o = 116 & 115,8 & 113,1 & 100,9 & 72,7 = \delta_c^{ogfed} 10^5 \\
 10^5 \delta_d^o = 73,2 & 73,0 & 70,3 & 58,1 = \delta_d^{ogfe} 10^5 \\
 10^5 \delta_e^o = 37,1 & 36,9 & 34,2 = \delta_e^{ogf} 10^5 \\
 10^5 \delta_f^o = 12,6 & 12,4 = \delta_f^{og} 10^5 \\
 10^5 \delta_g^o = 1,9
 \end{array}$$

Her er benyttet:

$$\begin{array}{rcl}
 1,9 \cdot 0,08383 & = & 0,2 \\
 12,4 \cdot 0,2187 & = & 2,7 \\
 34,2 \cdot 0,3578 & = & 12,2 \\
 58,1 \cdot 0,4851 & = & 28,2 \\
 72,7 \cdot 0,5505 & = & 40,1 \\
 71,6 \cdot 0,600 & = & 43,0
 \end{array}$$

Man finder da først X_a og ved Indsætning i de øvrige Ligninger efterhaanden de øvrige overtallige. Regningerne kan opstilles som nedenfor vist.

$$\begin{array}{rcl}
 X_a = 57,6 : 153,01 & & = 0,376 \\
 X_b = (71,6 - 0,376 \cdot 82,38) : 137,38 = 40,6 : 137,38 & = & 0,295 \\
 & & 0,671 \\
 X_c = (72,7 - 0,671 \cdot 64,25) : 116,75 = 29,6 : 116,75 & = & 0,252 \\
 & & 0,923 \\
 X_d = (58,1 - 0,923 \cdot 44,58) : 91,88 = 17,0 : 91,88 & = & 0,185 \\
 & & 1,108 \\
 X_e = (34,2 - 1,108 \cdot 24,10) : 67,40 = 7,5 : 67,40 & = & 0,111 \\
 & & 1,219 \\
 X_f = (12,4 - 1,219 \cdot 8,58) : 39,28 = 2,0 : 39,28 & = & 0,051 \\
 & & 1,270 \\
 X_g = (1,9 - 1,270 \cdot 1,4) : 16,7 = 0,1 : 16,7 & = & 0,006
 \end{array}$$

Vi har herved fundet Værdierne af X Kræfterne for Kraften 1 i Punkt a' .

Paa ganske samme Maade kan man derefter beregne Værdierne af de overtallige, naar Kraften 1 anbringes i Punkt a , men man maa her huske at medtage Bidraget for Hængestængerne i dette Punkt. Idet

$$\frac{\sec v}{E_d F_d} = \frac{1,015}{21 \cdot 10^6 \cdot 0,00213} = 2,27 \cdot 10^{-5} \text{ 1/t},$$

bliver dette Bidrag:

$$\Delta d_a^0 = d \cdot 2,27 \cdot 10^{-5} = 15,05 \cdot 2,27 \cdot 10^{-5} = 34,2 \cdot 10^{-5} \text{ m/t}.$$

Da Værdierne af de overtallige for Belastning paa højre Buehalvdel er proportionale med Trykket i Top-Charnieret, er det for denne Belastning tilstrækkeligt at beregne Værdien for Kraften 1 i Punkt a' , idet Influenslinierne maa være retlinede fra Punkt a' til højre Vederlagscharnier.

Influenslinierne for de overtallige: Fig. 23.

	a'	a	b	c	d	e	f	g
X_a	0,376	0,640	-0,250	-0,376	-0,358	-0,290	-0,187	-0,081
X_b	0,295	0,218	0,424	-0,287	-0,362	-0,306	-0,212	-0,096
ΣX	0,671	0,858	0,174	-0,663	-0,720	-0,596	-0,399	-0,177
X_c	0,252	0,233	0,111	0,365	-0,333	-0,365	-0,275	-0,128
ΣX	0,923	1,091	0,285	-0,298	-1,053	-0,961	-0,674	-0,305
X_d	0,185	0,190	0,167	0,042	+0,314	-0,356	-0,337	-0,165
ΣX	1,108	1,281	0,452	-0,256	-0,739	-1,317	-1,011	-0,470
X_e	0,111	0,122	0,127	0,091	-0,013	+0,269	-0,311	-0,180
ΣX	1,219	1,403	0,579	-0,165	-0,752	-1,048	-1,322	-0,650
X_f	0,051	0,061	0,075	0,062	0,036	-0,069	+0,308	-0,160
ΣX	1,270	1,464	0,654	-0,103	-0,716	-1,117	-1,014	-0,810
X_g	0,006	0,015	0,023	0,035	0,024	0,000	-0,066	+0,470

Har man beregnet Influenslinierne for Spændingerne X i det ene System af Hængestænger, kan man derved beregne Spændingerne X' i det andet System efter (85), der giver $X'_r = -X_r$ undtagen for Ordinaten i Punkt r , for hvilken man har $X'_r = 1 \sec v - X_r$.

Influenslinien for Spændingen X'_b er angivet i Fig. 24.

Bestemmelse af Influenslinier for Momenterne. For Momentet i et vilkaarligt Punkt xy har man (82).

$$M = M^0 + 2y \sin v \Sigma X$$

I ΣX skal medtages alle de overtallige, der findes mellem Punktet og Topcharnieret.

Man finder:

Punkt 2	$y \cdot 2 \sin v = 14,954 \cdot 0,34 = 5,09$
4	$14,150 \cdot 0,34 = 4,81$
6	$12,790 \cdot 0,34 = 4,34$
8	$10,861 \cdot 0,34 = 3,68$
10	$8,348 \cdot 0,34 = 2,83$
12	$5,236 \cdot 0,34 = 1,78$

Beregningen kan skrives som vist i nedenstaaende Tabel. De i Tabellen angivne ΣX er i Forvejen beregnede, idet man har benyttet deres Værdi ved Bestemmelsen af de forskellige overtallige, saaledes som vist i det foregaaende.

Influenslinierne for Momenterne i Buen: Fig. 25.

a'	a	b	c	d	e	f	g	
-2,25	-2,51	2,50	2,08	1,62	1,20	0,70	0,30	M_2^0
1,91	3,25	-1,27	-1,91	-1,82	-1,47	-0,95	-0,41	$\Sigma X_a \cdot 2 y \sin v$
-0,34	+0,74	+1,23	+0,17	-0,20	-0,27	-0,25	-0,11	M_2
-3,80	-4,25	0,45	4,65	3,65	2,70	1,70	0,75	M_4^0
3,23	4,14	+0,84	-3,19	-3,46	-2,87	-1,92	-0,85	$\Sigma X \cdot 2 y \sin v$
-0,57	-0,11	+1,29	+1,46	+0,19	-0,17	-0,22	-0,10	M_4
-4,68	-5,30	-1,30	2,61	6,05	4,40	2,80	1,20	M_6^0
4,00	4,74	1,23	-1,29	-4,56	-4,16	-2,92	-1,32	$\Sigma X \cdot 2 y \sin v$
-0,68	-0,56	-0,07	+1,32	+1,49	+0,24	-0,12	-0,12	M_6
-4,80	-5,40	-2,15	1,00	4,20	6,50	4,08	1,75	M_8^0
4,07	4,72	1,66	-0,94	-2,72	-4,85	-3,72	-1,73	$\Sigma X \cdot 2 y \sin v$
-0,73	-0,68	-0,49	+0,06	+1,48	+1,65	+0,36	+0,02	M_8
-4,15	-4,75	-2,38	-0,06	2,35	4,60	5,58	2,35	M_{10}^0
3,44	3,97	1,64	-0,46	-2,13	-2,96	-3,75	-1,84	$\Sigma X \cdot 2 y \sin v$
-0,71	-0,78	-0,74	-0,52	+0,22	+1,64	+1,83	+0,51	M_{10}
-2,75	-3,20	-1,85	-0,50	0,85	2,20	3,55	3,10	M_{12}^0
2,26	2,60	1,16	-0,18	-1,27	-1,99	-1,80	-1,44	$\Sigma X \cdot 2 y \sin v$
-0,49	-0,60	-0,69	-0,68	-0,42	+0,21	+1,75	+1,66	M_{12}

Influensliniernes Ændring, naar X_a og X_b er ude af Funktion. Har man bestemt Influenslinierne under Forudsætning af, at samtlige overtallige er i Funktion, kan man ved Hjælp af disse Værdier bestemme Ændringen af de øvrige overtallige, naar f. Eks. X_a og X_b er ude af Funk-

tion, saaledes som omtalt i Slutningen af § 14. Man løser da Elasticitetsligningerne for det resterende System, idet man sætter $\delta_c^0 = -(X_a + X_b)\delta_{ac}$ o. s. v.

Ligningerne til Bestemmelse af Ændringerne bliver da:

$$X_c 149 + X_d 55,2 + X_e 26,1 + X_f 8,7 + X_g 1,4 = (X_a + X_b) 96,5$$

$$X_c 55,2 + X_d 102,5 + X_e 26,1 + X_f 8,7 + X_g 1,4 = (X_a + X_b) 55,2$$

$$X_c 26,1 + X_d 26,1 + X_e 69,4 + X_f 8,7 + X_g 1,4 = (X_a + X_b) 26,1$$

$$X_c 8,7 + X_d 8,7 + X_e 8,7 + X_f 39,4 + X_g 1,4 = (X_a + X_b) 8,7$$

$$X_c 1,4 + X_d 1,4 + X_e 1,4 + X_f 1,4 + X_g 16,7 = (X_a + X_b) 1,4$$

De Faktorer, som skal benyttes ved Elimination af de forskellige overtallige, er tidligere bestemt ved Løsningen af Totalsystemets Elasticitetsligninger. Efter at have elimineret X_g , X_f , X_e og X_d fandt man Ligningen:

$$(X_a + X_b) 64,25 + X_c 116,75 = \delta_c^{og fed} 10^5$$

Sættes i denne Ligning $-(X_a + X_b)$ i Stedet for $(X_a + X_b)$ faar man:

$$X_c = (X_a + X_b) \frac{64,25}{116,75} = 0,55 (X_a + X_b).$$

Ved Indsættelse i de foregaaende Ligninger faar man:

$$X_d 91,88 = (X_a + X_b) 44,58 - 44,58 (X_a + X_b) 0,55$$

$$X_d = 0,218 (X_a + X_b)$$

Paa samme Maade finder man:

$$X_e 67,40 = 24,10 (X_a + X_b) - 24,10 (0,55 + 0,218) (X_a + X_b)$$

$$X_e = 0,083 (X_a + X_b)$$

$$X_f 39,28 = 8,58 (X_a + X_b) - 8,58 (0,55 + 0,218 + 0,083) (X_a + X_b)$$

$$X_f = 0,0326 (X_a + X_b)$$

$$X_g 16,7 = 1,4 (X_a + X_b) - 1,4 (0,55 + 0,218 + 0,083 + 0,0326) (X_a + X_b)$$

$$X_g = 0,0097 (X_a + X_b)$$

Af ovenstaaende vil man se, at Forøgelsen særlig falder paa den nærmest følgende overtallige X_c , medens de sidste overtallige X_e , X_f og X_g ændres meget lidt.

Ved Hjælp af Formlerne ovenfor kan man finde de nye Værdier af Influensoordinaterne for de overtallige, saaledes som vist i nedenstaaende Tabel. Da man i Forvejen har bestemt $X_a + X_b$, findes de nye Ordinate ved blot at multiplicere denne Sum med ovenstaaende Konstanter.

Influenslinierne for de overtallige, naar X_a og X_b fjernes:

a'	a	b	c	d	e	f	g	
0,376	0,640	— 0,250	— 0,376	— 0,358	— 0,290	— 0,187	— 0,081	X_a
0,295	0,218	0,424	— 0,287	— 0,362	— 0,306	— 0,212	— 0,096	X_b
+ 0,671	+ 0,858	+ 0,174	— 0,663	— 0,720	— 0,596	— 0,399	— 0,177	ΣX
0,252	0,233	0,111	0,365	— 0,333	— 0,365	— 0,275	— 0,128	X_c
0,369	0,472	0,096	— 0,362	— 0,396	— 0,328	— 0,219	— 0,097	$0,55 (X_a + X_b)$
+ 0,621	+ 0,705	+ 0,207	+ 0,003	— 0,729	— 0,693	— 0,494	— 0,225	
0,185	0,190	0,167	0,042	0,314	— 0,356	— 0,337	— 0,165	X_d
0,146	0,187	0,038	— 0,144	— 0,158	— 0,130	— 0,087	— 0,039	$0,218 (X_a + X_b)$
+ 0,331	+ 0,377	+ 0,205	— 0,102	+ 0,156	— 0,486	— 0,424	— 0,204	
0,111	0,122	0,127	0,091	— 0,013	+ 0,269	— 0,311	— 0,180	X_e
0,056	0,071	0,014	— 0,055	— 0,060	— 0,050	— 0,033	— 0,015	$0,083 (X_a + X_b)$
+ 0,167	+ 0,193	+ 0,141	+ 0,036	— 0,073	+ 0,219	— 0,344	— 0,195	
0,051	0,061	0,075	0,062	0,036	— 0,069	+ 0,308	— 0,160	X_f
0,022	0,028	0,006	— 0,022	— 0,023	— 0,019	— 0,013	— 0,006	$0,0326 (X_a + X_b)$
+ 0,073	+ 0,089	+ 0,081	+ 0,040	+ 0,013	— 0,088	+ 0,295	— 0,166	
0,006	0,015	0,023	0,035	0,024	0,000	— 0,066	+ 0,470	X_g
0,007	0,008	0,002	— 0,006	— 0,007	— 0,006	— 0,004	— 0,002	$0,0097 (X_a + X_b)$
+ 0,013	+ 0,023	+ 0,025	+ 0,029	+ 0,017	— 0,006	— 0,070	+ 0,468	

Paa lignende Maade kan man beregne Ændringen af Influensoordinaterne for Momenterne. Fjernes X_a og X_b , bliver Influensoordinaterne for Punkt 2 og 4 lig Influensoordinaterne for Momenterne i disse Punkter i Hovedsystemet. For Ændringerne af Momenterne i de øvrige Punkter finder man:

$$AM_6 = (1 - 0,55) (X_a + X_b) 2 y_6 \sin v = 0,450 (X_a + X_b) 2 y_6 \sin v$$

$$AM_8 = (0,45 - 0,218) (X_a + X_b) 2 y_8 \sin v = 0,232 (X_a + X_b) 2 y_8 \sin v$$

$$AM_{10} = (0,232 - 0,083) (X_a + X_b) 2 y_{10} \sin v = 0,149 (X_a + X_b) 2 y_{10} \sin v$$

$$AM_{12} = (0,149 - 0,0326) (X_a + X_b) 2 y_{12} \sin v = 0,116 (X_a + X_b) 2 y_{12} \sin v$$

Influenslinierne for Momenterne, naar X_a og X_b fjernes:

a'	a	b	c	d	e	f	g	
-0,68	-0,56	-0,07	+1,32	+1,49	+0,24	-0,12	-0,12	M_6^r
-1,31	-1,67	-0,34	+1,29	+1,40	+1,16	+0,78	+0,35	$0,450 \cdot 4,34 (X_a + X_b)$
-1,99	-2,23	-0,41	+2,61	+2,89	+1,40	+0,66	+0,23	M_6^{r-ab}
-0,73	-0,68	-0,49	+0,06	+1,48	+1,65	+0,36	+0,02	M_8^r
-0,57	-0,73	-0,15	+0,57	+0,61	+0,51	+0,34	+0,15	$0,232 \cdot 3,68 (X_a + X_b)$
-1,30	-1,41	-0,64	+0,63	+2,09	+2,16	+0,70	+0,17	M_8^{r-ab}
-0,71	-0,78	-0,74	-0,52	+0,22	+1,64	+1,83	+0,51	M_{10}^r
-0,28	-0,36	-0,07	+0,28	+0,30	+0,25	+0,17	+0,07	$0,149 \cdot 2,83 (X_a + X_b)$
-0,99	-1,14	-0,81	-0,24	+0,52	+1,89	+2,00	+0,58	M_{10}^{r-ab}
-0,49	-0,60	-0,69	-0,68	-0,42	+0,21	+1,75	+1,66	M_{12}^r
-0,14	-0,18	-0,04	+0,14	+0,15	+0,12	+0,08	+0,04	$0,116 \cdot 1,78 (X_a + X_b)$
-0,63	-0,78	-0,73	-0,54	-0,27	+0,33	+1,83	+1,70	M_{12}^{r-ab}

I Fig. 25 er ved Hjælp af en punkteret Linie angivet Nulpunkterne for de nye Moment-Influenslinier. Disse Nulpunkter forskydes, som ses, meget lidt. Har man derfor bestemt Momentet ud fra den farligste Laststilling for Momentet i Totalsystemet, vil denne Laststilling meget nær være den farligste, selv om det viser sig, at nogle af de overtallige er ude af Funktion, saaledes at Lasten egentlig skulde forskydes, for at den farligste Virkning kunde opnaas.

Bestemmelse af Max- og Minimum Momenter fra en bevægelig Belastning. Da man i det foregaaende har bestemt Influenslinierne for Momenterne i de forskellige Punkter, kan denne Opgave løses ved at belaste disse Influenslinier med Nyttelasten, idet man samtidig ved Hjælp af Influenslinierne for de overtallige undersøger, om disse er i Funktion for den givne Laststilling; er dette ikke Tilfældet, maa man finde Influenslinien for Momentet i det nye System, igen belaste denne og samtidig undersøge, om det antagne System er i Funktion for denne Laststilling. Saaledes kan man prøve sig frem, indtil man finder det største Moment.

Nedenfor vil vi imidlertid bestemme Momenterne ved at belaste Influenslinierne for Momenterne i Hovedsystemet, idet vi derved samtidig viser Beregningen af de overtallige for en given Laststilling.

Punkt 4. Vi belaster Influenslinien Fig. 19 for Momentet i Hovedsystemet med Nyttelasten. I dette Tilfælde regnes

$$\begin{aligned} \text{Brobanens Egenvægt} &= 3,25 \text{ t/m (pr. Bue)} \\ \text{Nyttelasten} &= 1,25 \text{ t/m (pr. Bue)} \end{aligned}$$

Til Bestemmelse af Deformationerne i Hovedsystemet har man Formlerne (79) og (86).

$$\delta_a^0 = \mp 2 \sin v \sum \frac{M^0 y}{E_b I_b} \Delta s \pm 2 \sin v \frac{H + U_m}{E_b F_b} s_{oa} + \frac{P_a d_a \sec v}{E_d F_d}$$

hvor det øverste Fortegn gælder, saafremt man vælger X_a, X_b o. s. v. som overtallige, medens det nederste Fortegn gælder, saafremt man vælger Spændingerne X'_a, X'_b o. s. v. i det andet Sæt Hængestænger som overtallige. I ovenstaaende Formler er udeladt Bidragene fra Brobanestangen, idet disse er forsvindende i Forhold til de øvrige.

Laststilling, der giver M_4^0 max. Som overtallige vælges Kræfterne X_a, X_b o. s. v., svarende til de i Fig. 19—20 viste fuldt optrukne Influenslinier for Momenterne i Hovedsystemet, idet det vil være de til X_a, X_b o. s. v. svarende Stænger, der om muligt sættes ud af Funktion for dette Belastningstilfælde.

Vi anbringer derefter Nyttelasten i den farligste Stilling for Moment M_4^0 max. og beregner ved Hjælp af de øvrige Influenslinier Momenterne i de forskellige af Buens Punkter. Endvidere beregnes Momenterne af Egenvægten i Hovedsystemet. Summen af Egenvægtsmomenterne og Nyttelastmomenterne er vist i Fig. 22. Af denne Kurve ses, at Momenterne for største Delen er negative, hvilket betyder, at de fleste af Hængestængerne er i Funktion. Vi beregner Momentbidragene paa lignende Maade, som anvendt ved Bestemmelse af Influenslinierne for de overtallige, idet vi benytter den tidligere bestemte Faktor:

$$10^5 \sum \frac{y}{E_b I_b} \Delta s = K$$

Δs^* m	K 1:t	M^0 tm	$K M^0$ m							
8,225	8,33	-20,36	-169	-169	-169	-169	-169	-169	-169	-85
6,409	14,92	-38,79	-579	-579	-579	-579	-579	-579	-579	-290
										-459
6,142	20,65	-29,55	-610	-610	-610	-610	-610	-610	-305	
									-1053	
5,928	25,65	-13,78	-354	-354	-354	-354	-177			
									-1535	
5,765	30,45	0,43	13	13	13	7				
									-1705	
5,660	35,10	5,37	188	188	94					
									-1605	
5,610	40,00	2,28	92	61						
									-1450	

Momentbidragene er da:

$$-10^{-5} \cdot 2 \sin v \sum K M^0 = -10^{-5} \cdot 0,34 \cdot \sum K M^0 \text{ (Enhed m)}$$

For at tage Hensyn til Buens Tværsnitsvariation ved Bestemmelsen af Normalkraftbidragene, beregner man $\sum \frac{\Delta s}{F_b}$ som nedenfor angivet:

Δs	F_b	$\frac{\Delta s}{F_b}$							
m	m^2	m^{-1}							
8,225	0,933	8,82	8,82	8,82	8,82	8,82	8,82	8,82	4,41
6,409	0,925	6,94	6,94	6,94	6,94	6,94	6,94	3,47	
6,142	0,910	6,74	6,74	6,74	6,74	6,74	6,74	3,37	
5,928	0,884	6,72	6,72	6,72	6,72	3,36			
5,765	0,852	6,76	6,76	6,76	3,38				
5,660	0,812	6,98	6,98	3,49					
5,610	0,765	7,36	3,68						
			46,64						

Brobanens Egenvægt og Nyttelasten giver $H + U_m = 204,25$ t. At vi medtager Bidraget for Brobanens Egenvægt betyder, at vi regner med den i § 13 som Nr. 2 angivne Byggemaade. Bidragene fra Normalkraften bestemmes da af:

$$\frac{H + U_m}{E_b} 2 \sin v \sum \frac{\Delta s}{F_b} = \frac{204,25}{21 \cdot 10^5} \cdot 0,34 \sum \frac{\Delta s}{F_b} = 10^{-5} \cdot 3,31 \sum \frac{\Delta s}{F_b} \text{ (Enhed } m)$$

Knudepunkterne for den angivne Last er:

$$P_a = 18,2 \text{ t}, \quad P_b = 22,3 \text{ t}, \quad P_c = 25,2 \text{ t} = P_d = P_e = P_f = P_g$$

Bidragene fra Hængestængerne er:

$$\frac{P d \sec v}{E_d F_d} = \frac{P d 1,015}{21 \cdot 10^6 \cdot 0,00213} = 10^{-5} \cdot 2,27 P d \text{ (Enhed } m)$$

Deformationerne i Hovedsystemet bliver da:

$$10^5 \delta_a^0 = 0,34 \cdot 1450 + 3,31 \cdot 46,64 + 2,27 \cdot 18,2 \cdot 15,05 = 495 + 154 + 625 = 1274$$

$$10^5 \delta_b^0 = 0,34 \cdot 1605 + 3,31 \cdot 39,47 + 2,27 \cdot 22,3 \cdot 14,80 = 543 + 131 + 750 = 1424$$

$$10^5 \delta_c^0 = 0,34 \cdot 1705 + 3,31 \cdot 32,60 + 2,27 \cdot 25,2 \cdot 14,0 = 579 + 108 + 801 = 1488$$

$$10^5 \delta_d^0 = 0,34 \cdot 1535 + 3,31 \cdot 25,86 + 2,27 \cdot 25,2 \cdot 12,55 = 521 + 86 + 717 = 1324$$

$$10^5 \delta_e^0 = 0,34 \cdot 1053 + 3,31 \cdot 19,13 + 2,27 \cdot 25,2 \cdot 10,45 = 358 + 63 + 599 = 1020$$

$$10^5 \delta_f^o = 0,34 \cdot 459 + 3,31 \cdot 12,29 + 2,27 \cdot 25,2 \cdot 7,60 = 156 + 40 + 435 = 631$$

$$10^5 \delta_g^o = 0,34 \cdot 85 + 3,31 \cdot 4,41 + 2,27 \cdot 25,2 \cdot 3,95 = 29 + 15 + 227 = 271$$

Man kan nu opstille Elasticitetsligningerne for dette Belastningstilfælde, idet man benytter de tidligere bestemte Værdier for δ_{aa} , δ_{ab} o. s. v. Benytter man den tidligere angivne Løsning af disse Ligninger (Kraften 1 i Punkt a') finder man:

	—23 —133 —309 —417—334—125	
$10^5 \delta_a^o$	1274 1251 1118 809 392 58 — 67	$= \delta_a^{ogfedcb} 10^5$
$10^5 \delta_b^o$	1424 1401 1268 959 542 208	$= \delta_b^{ogfedc} 10^5$
$10^5 \delta_c^o$	1488 1465 1332 1023 606	
$10^5 \delta_d^o$	1324 1301 1168 859	
$10^5 \delta_e^o$	1020 997 864	
$10^5 \delta_f^o$	631 608	
$10^5 \delta_g^o$	271	

Her er benyttet:

$$\begin{aligned} 271 \cdot 0,08383 &= 23 \\ 608 \cdot 0,2187 &= 133 \\ 864 \cdot 0,3578 &= 309 \\ 859 \cdot 0,4851 &= 417 \\ 606 \cdot 0,5505 &= 334 \\ 208 \cdot 0,600 &= 125 \end{aligned}$$

Man ser, at X_a er ude af Funktion for dette Belastningstilfælde, idet Deformationen for dette Punkt er negativ. For X_b finder man Værdien

$$X_b = \frac{208}{137,38} = 1,51 \text{ t,}$$

og Momentet i Punkt 4 bliver da:

$$M_4 = 6,17 + 4,81 \cdot 1,51 = 13,43 \text{ tm.}$$

Det angivne Moment 13,43 tm er Momentet i Punkt 4 i System *obcdefg*. Da X_b ikke er ude af Funktion, er den antagne Laststilling ikke den, der giver størst Moment i det virksomme System. Man burde derfor beregne Influenzlinien for Momentet i System *obcdefg*, og deraf finde den far-

ligste Laststilling, og derefter gentage Beregningerne som ovenfor. Vi vil i Stedet for paa den farligste Maade direkte belaste Influenslinien for M_4 i Totalsystemet¹⁾. Man finder da, idet der regnes med fulde Knudepunkts-tryk P :

$$P \text{ fra Egenvægt } 5,6 \cdot 3,25 = 18,2 \text{ t.}$$

$$P \text{ fra Nyttelast } 5,6 \cdot 1,25 = 7,0 \text{ t.}$$

$$M_4 \text{ Egenvægt } 0,13 \cdot 18,2 = 2,4 \text{ tm}$$

$$\begin{array}{r} \text{Nyttelast } 2,94 \cdot 7,0 = 20,6 \\ \hline 23,0 \text{ tm} \end{array}$$

Af Influenslinierne for X_a og X_b kan man da undersøge, om det er rigtigt, at disse er i Funktion for denne Laststilling:

$$X_a \text{ Egenvægt } 0,558 \cdot 18,2 = 10,2 \text{ t}$$

$$\begin{array}{r} \text{Nyttelast } - 0,984 \cdot 7,0 = - 6,9 \\ \hline 3,3 \text{ t} \end{array}$$

$$X'_a = 18,2 \cdot 1,015 - 3,3 = 15,2 \text{ t}$$

$$X_b \text{ Egenvægt } 0,521 \cdot 18,2 = 9,5 \text{ t}$$

$$\begin{array}{r} \text{Nyttelast } - 0,225 \cdot 7,0 = - 1,6 \\ \hline 7,9 \text{ t} \end{array}$$

$$X'_b = 25,2 \cdot 1,015 - 7,9 = 17,6 \text{ t}$$

For den angivne Laststilling er derfor alle Hængestængerne i Funktion som antaget, saaledes at:

$$M_4 = 23,0 \text{ tm}$$

er et virkeligt Maximum Moment. At de øvrige overtallige er i Funktion, ses umiddelbart af Influenslinierne for X_a og X_b , sammenliget med Influenslinierne for de øvrige overtallige.

Laststilling, der giver M_4^0 min. Vi benytter her Spændingerne i Stængerne X'_a , X'_b o. s. v., som overtallige (Fig. 18). I dette System er Influenslinien for Momenterne angivet i Fig. 19—20, idet vi benytter den yderste punkterede Linie. I dette Hovedsystem skal man benytte det nederste

¹⁾ Da man ved den ovenfor angivne Bestemmelse af Momenterne har medregnet Normalkræfterne i Buen, medens man ved Bestemmelsen af Influenslinierne har udeladt disse, kan Resultaterne ikke direkte sammenlignes (se Side 80 og 98).

Fortegn i Formlen til Bestemmelse af $\delta_{a'}^0$. Vi belaster da Influenslinien for M_4^0 min paa farligste Maade. Momentkurven er angivet i Fig. 22.

Momentbidragene.

As m	K $1:t$	M^0 $t \cdot m$	KM^0 m							
8,225	8,33	10,12	84	84	84	84	84	84	84	42
6,409	14,92	16,83	252	252	252	252	252	252	252	$\frac{126}{210}$
6,142	20,65	7,78	161	161	161	161	161	161	$\frac{81}{417}$	
5,928	25,65	— 3,17	— 81	— 81	— 81	— 81	— 81	— 41	$\frac{41}{456}$	
5,765	30,45	—10,88	—331	—331	—331	—166		$\frac{250}{250}$		
5,660	35,10	—10,38	—364	—364	—182			$\frac{97}{97}$		
5,610	40,00	— 3,73	—150	—100						
				—379						

Knudepunktslasterne er:

$$P_a = 20,8 t, P_b = P_c = P_d = P_e = P_f = P_g = 18,2 t.$$

Ved Bestemmelse af $H + U_m$ maa man huske, at U_m nu er negativ:

$$H + U_m = 220,1 t, \frac{H + U_m}{E_b} 2 \sin v = \frac{220,1}{21 \cdot 10^5} 0,34 = 3,56 \cdot 10^{-5}$$

$$10^5 \delta_{a'}^0 = -0,34 \cdot 379 - 3,56 \cdot 46,64 + 20,8 \cdot 14,85 \cdot 2,27 = -130 - 166 + 704 = 408 m$$

$$10^5 \delta_{b'}^0 = -0,34 \cdot 97 - 3,56 \cdot 39,47 + 18,2 \cdot 14,10 \cdot 2,27 = -31 - 141 + 584 = 412$$

$$10^5 \delta_{c'}^0 = +0,34 \cdot 250 - 3,56 \cdot 32,60 + 18,2 \cdot 12,85 \cdot 2,27 = 85 - 116 + 531 = 500$$

$$10^5 \delta_{d'}^0 = +0,34 \cdot 456 - 3,56 \cdot 25,86 + 18,2 \cdot 11,10 \cdot 2,27 = 155 - 92 + 459 = 522$$

$$10^5 \delta_{e'}^0 = +0,34 \cdot 417 - 3,56 \cdot 19,13 + 18,2 \cdot 8,85 \cdot 2,27 = 142 - 68 + 366 = 440$$

$$10^5 \delta_{f'}^0 = +0,34 \cdot 210 - 3,56 \cdot 12,29 + 18,2 \cdot 6,10 \cdot 2,27 = 71 - 44 + 252 = 279$$

$$10^5 \delta_{g'}^0 = +0,34 \cdot 42 - 3,56 \cdot 4,41 + 18,2 \cdot 2,90 \cdot 2,27 = 14 - 16 + 120 = 118$$

Ved den tidligere angivne Løsning af Ligningerne finder man:

$$\begin{array}{rcccccc}
 -10 & -59 & -133 & -155 & -79 & & \\
 408 & 398 & 339 & 206 & 51 & -28 = \delta_{a'}^{ogfedc} 10^5 & \\
 412 & 402 & 343 & 210 & 55 & -24 = \delta_{b'}^{ogfedc} 10^5 & \\
 500 & 490 & 431 & 298 & 143 & & \\
 522 & 512 & 453 & 320 & & & \\
 440 & 430 & 371 & & & & \\
 279 & 269 & & & & & \\
 118 & & & & & &
 \end{array}$$

her er benyttet

$$\begin{array}{lcl}
 118 \cdot 0,08383 & = & 10 \\
 269 \cdot 0,2187 & = & 59 \\
 371 \cdot 0,3578 & = & 133 \\
 320 \cdot 0,4851 & = & 155 \\
 143 \cdot 0,5505 & = & 79 \\
 24 \cdot 0,600 & = & 14
 \end{array}$$

Da $\delta_{a'}^{ogfedc}$ og $\delta_{b'}^{ogfedc}$ begge er negative, er X'_a og X'_b ude af Funktion, saaledes at $M_4 = -13,30 \text{ tm}$ er et muligt Minimum-Moment.

Ved Belastning af den negative Influenslinie for M_4 i Totalsystemet finder man:

$$\begin{array}{lcl}
 M_4 \text{ Egenvægt} & = & 0,13 \cdot 18,2 = 2,4 \text{ tm} \\
 \text{Nyttelast} & = & -2,81 \cdot 7,0 = -19,7 \\
 \hline
 M & = & -17,3 \text{ tm}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 X_a \text{ Egenvægt} & = & 0,558 \cdot 18,2 = 10,2 \text{ t} \\
 \text{Nyttelast} & = & 1,542 \cdot 7,0 = 10,8 \\
 \hline
 & & 21,0 \text{ t}
 \end{array}$$

$$X'_a = 25,2 \cdot 1,015 - 21 = 4,6 \text{ t}$$

$$\begin{array}{lcl}
 X_b \text{ Egenvægt} & = & 0,521 \cdot 18,2 = 9,5 \text{ t} \\
 \text{Nyttelast} & = & 0,746 \cdot 7,0 = 5,2 \\
 \hline
 & & 14,7 \text{ t}
 \end{array}$$

$$X'_b = 18,2 \cdot 1,015 - 14,7 = 3,8 \text{ t}$$

begge de overtallige er derfor i Funktion for den angivne Laststilling, saaledes at $M_4 = -17,3 \text{ tm}$ er et muligt Minimumsmoment.

Beregnes Momenterne for Nyttelasten alene, faar man de nedenfor angivne Værdier i de forskellige Punkter af Buen:

	$M \text{ Max.}$	$M \text{ Min.}$
Punkt 2	15,0 tm	— 15,0 tm
4	20,6	— 19,7
6	21,3	— 24,6
8	25,0	— 28,0
10	29,4	— 34,0
12	25,3	— 32,0

For en parabolisk Bue med lodrette Hængestænger bliver de maximale Momenter under de samme Forhold:

$$\pm \frac{1}{53} 1,25 \cdot 80,8^2 = \pm 155 \text{ tm}$$

Egenvægtsmomenterne i Buen kan som tidligere nævnt fjernes ved at forme Buen paa passende Maade. Ønsker man at beregne Egenvægtsmomenterne, kan dette ikke udføres nøjagtigt ved Hjælp af Influenzlinierne for Momenterne. Man maa direkte belaste Systemet med Egenvægten, idet man som overtallige vælger Underflangens Reaktion paa Hængestængernes Knudepunkter. I dette System bliver Momenterne i Hovedsystemet meget smaa, saafremt Bueformen er nogenlunde sammenfaldende med Tryklinien for Egenvægten. Deformationerne i Hovedsystemet bestemmes derfor af Normalkraften i Buen og Hængestængernes Spændinger, hvilke Bidrag netop under de angivne Forhold er bestemmende for Egenvægtsmomenterne.

Temperaturpaavirkninger og Svindspændinger. Som tidligere angivet, vil en ensformig Temperaturændring ingen Spændinger bevirke. Antages derimod en Temperaturforskell af 30° mellem Buen og de øvrige Konstruktionsdele, finder man som tidligere angivet: (Formel (73) multipliceret med $2 \sin v$ paa Grund af det valgte Hovedsystem)

$$\phi_{at}^0 = 2 \varepsilon t \sin v \sum \Delta s \cos \varphi \quad (\text{Buen } t^0 \text{ koldere})$$

φ er Buetangentens Vinkel med en horizontal Linie. Beregningen opstilles som nedenfor vist.

Δs m	$\Delta s \cos \varphi$							
8,225	6,80	6,80	6,80	6,80	6,80	6,80	6,80	3,40
6,409	5,60	5,60	5,60	5,60	5,60	5,60	2,80	
							9,60	
6,142	5,60	5,60	5,60	5,60	5,60	2,80		
						15,20		
5,928	5,60	5,60	5,60	5,60	2,80			
					20,80			
5,765	5,60	5,60	5,60	2,80				
				26,40				
5,660	5,60	5,60	2,80					
			32,00					
5,610	5,60	2,80						
		37,60						

$$2 \cdot s \cdot t \sin v = 2 \cdot 0,00001 \cdot 30 \cdot 0,17 = 10,2 \cdot 10^{-5}$$

$$10^5 \delta_{at}^0 = 37,60 \cdot 10,2 = 384 \text{ m}$$

$$10^5 \delta_{bt}^0 = 32,00 \cdot 10,2 = 326$$

$$10^5 \delta_{ct}^0 = 26,40 \cdot 10,2 = 270$$

$$10^5 \delta_{dt}^0 = 20,80 \cdot 10,2 = 213$$

$$10^5 \delta_{et}^0 = 15,20 \cdot 10,2 = 155$$

$$10^5 \delta_{ft}^0 = 9,60 \cdot 10,2 = 99$$

$$10^5 \delta_{gt}^0 = 3,40 \cdot 10,2 = 35$$

Ved Løsning af Elasticitetsligningerne paa samme Maade som tidligere finder man:

$$X_a = 0,67 t, \quad X_b = 0,43 t, \quad X_c = 0,51 t, \quad X_d = 0,76 t,$$

$$X_e = 1,10 t, \quad X_f = 1,68 t, \quad X_g = 1,68 t$$

Idet vi antager alle Hængestængerne i Funktion, bestemmes Momenterne af Formlen:

$$M = 2 y \sin v \sum X$$

$$M_2 = 5,09 \cdot 0,67 = 3,42 \text{ tm}$$

$$M_4 = 4,81 \cdot 1,10 = 5,30$$

$$M_6 = 4,34 \cdot 1,61 = 7,00$$

Nyttelastens Normalkraftbidrag for Buen er forsvindende i Forhold til Momentbidragene, vil vi i dette Tilfælde se bort fra disse.

Beregningerne kan da udføres som nedenfor vist, idet man benytter Middelværdien af M^0 og y for det betragtede Δs .

Δs m	$E I_b$ $10^{-5} \cdot tm^2$	$-M^0$ tm	$M_a = y$ m	$M_b = y$ m	$M_c = y$ m	$M_d = y$ m
3,39	1,43	14	0,90	0,90	0,90	0,90
3,24	1,38	40	2,90	2,90	2,90	2,90
3,10	1,33	59	4,75	4,75	4,75	4,10
2,98	1,28	72	6,35	6,35	6,35	0,60
2,87	1,24	78	7,65	7,65	6,40	0,00
2,78	1,20	77	8,75	8,75	1,30	
2,71	1,16	70	9,70	7,70	0,00	
2,66	1,12	58	10,30	2,10		
2,62	1,08	39	8,30	0,00		
2,60	1,03	14	2,50	0,00		

Momentbidragene er beregnede i nedenstaaende Tabel

Δs	$10^5 \delta_{aa}$	$10^5 \delta_{ab}$	$10^5 \delta_{ac}$	$10^5 \delta_{ad}$	$10^5 \delta_{bb}$	$10^5 \delta_{cc}$	$10^5 \delta_{dd}$
3,39	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9
3,24	19,8	19,8	19,8	19,8	19,8	19,8	19,8
3,10	52,6	52,6	52,6	45,4	52,6	52,6	39,2
2,98	93,8	93,8	93,8	8,9	93,8	93,8	0,8
2,87	135,4	135,4	113,3		135,4	94,8	
2,78	177,5	177,5	26,4		177,5	3,9	
2,71	220,0	174,5			138,7		
2,66	252,5	51,5			10,4		
2,62	167,2						
2,60	15,8						
	1136,5	707,0	307,8	76,0	630,1	266,8	61,7

Idet $E_d F_d 4 \sin^2 v = 21 \cdot 10^6 \cdot 0,00362 \cdot 0,1872 = 0,142 \cdot 10^5$, faar man:

$$10^5 \delta_{aa} = 1136,5 + \frac{22,1 \cdot 10^5}{0,142} = 1136,5 + 155,2 = 1291,7 \text{ (m:t)}$$

$$10^5 \delta_{bb} = 630,1 + \frac{20,4 \cdot 10^5}{0,142} = 630,1 + 143,4 = 773,5$$

$$10^5 \delta_{cc} = 266,8 + \frac{17,0 \cdot 10^5}{0,142} = 266,8 + 119,3 = 386,1$$

$$10^5 \delta_{dd} = 61,7 + \frac{11,6 \cdot 10^5}{0,142} = 61,7 + 81,5 = 143,2$$

For Momentbidragene hidrørende fra den ydre Belastning faar man:

As	$10^3 d_a^0$	$10^3 d_b^0$	$10^3 d_c^0$	$10^3 d_d^0$
3,39	0,30	0,30	0,30	0,30
3,24	2,72	2,72	2,72	2,72
3,10	6,53	6,53	6,53	5,64
2,98	10,68	10,68	10,68	1,01
2,87	13,81	13,81	11,55	0,00
2,78	15,62	15,62	2,32	
2,71	15,85	12,59	0,00	
2,66	14,20	2,89		
2,62	7,85	0,00		
2,60	0,88			
	88,44	65,14	34,10	9,67

Elasticitetsligningerne for dette Belastningstilfælde bliver da:

$$12,92 \cdot X_a + 7,07 \cdot X_b + 3,08 \cdot X_c + 0,76 \cdot X_d = 88,44$$

$$7,07 \cdot X_a + 7,74 \cdot X_b + 3,08 \cdot X_c + 0,76 \cdot X_d = 65,14$$

$$3,08 \cdot X_a + 3,08 \cdot X_b + 3,86 \cdot X_c + 0,76 \cdot X_d = 34,10$$

$$0,76 \cdot X_a + 0,76 \cdot X_b + 0,76 \cdot X_c + 1,43 \cdot X_d = 9,67$$

Af disse Ligninger finder man

$$X_a = 4,35 t, \quad X_b = 3,37 t, \quad X_c = 2,42 t, \quad X_d = 1,37 t$$

Skal alle Hængestængerne være i Funktion, maa

$$X_a = 4,35 \leq P_a \cdot tg v, \quad P_a \geq \frac{4,35}{0,2216} = 19,6 t$$

Til Bestemmelse af Momenterne har man:

Pkt.	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0
— M^0	0,0	27,0	50,0	65,0	75,0	79,0	77,0	67,0	51,5	29,0	0
$M_a X_a$	0,0	23,2	45,3	42,9	39,7	35,4	30,2	23,8	16,8	8,6	0
$M_b X_b$	0,0			16,8	31,2	27,8	23,8	18,7	13,2	6,7	0
$M_c X_c$	0,0					9,7	16,5	13,0	9,1	4,7	0
$M_d X_d$	0,0							4,0	5,7	2,9	0
$M t \cdot m$	0,0	— 3,8	— 4,7	— 5,3	— 4,1	— 6,1	— 6,5	— 7,5	— 6,7	— 6,1	00

Den øverste Kolonne viser Momenterne, saafremt Buen havde lodrette Hængestænger. Den nederste Kolonne viser Momenterne i Systemet med de skraatstillede Hængestænger, og disse Momenter er kun c. $\frac{1}{10}$ af de første.

§ 16. **Forskellige Systemer for Konstruktioner med skraat-stillede Hængestænger.** I det foregaaende har vi stadig angivet Hængestængernes Retning saaledes, at de ikke krydsede hinanden. Da et Knudepunkt a med en Belastning P_a kan optage en Horisontalkraft $P_a \operatorname{tg} v_a$ i begge Retninger, saafremt begge Hængestængerne danner samme Vinkel v_a med Vertikalen, vil de Horisontalkræfter, Knudepunktet kan optage, forøges, naar Vinklen v_a forøges. Ønsker man, at ingen af Hængestængerne ved Punktet skal sættes ud af Funktion, kan dette opnaas ved at vælge Vinklen v_a tilstrækkelig stor. Hængestængerne kan derved komme til at *krydse* hinanden saaledes som angivet i

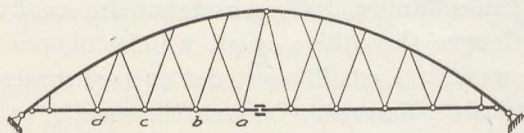


Fig. 27.

Fig. 27. Dette System kan behandles paa samme Maade som de tidligere angivne, men δ_{ac} er her ikke lig δ_{bc} , idet Stængerne krydser hinanden, saaledes at Momentbidraget for Deformationerne ændres. Elasticitetsligningerne kan derfor heller ikke udtrykkes ved Clapeyronske Ligninger. Skærer Stængerne hinanden i et Punkt, der ligger nogenlunde nær ved Buen, er det dog umiddelbart indlysende, at den Fejl, man begaar ved at regne med de tidligere angivne Formler, er saaa ringe, at der i Almindelighed ikke er nogen Grund til at ændre disse Beregninger. Man kan selvfølgelig uden større Besvær finde de exakte Værdier af Deformationerne mellem de overtallige og gennemføre Beregningerne med disse Værdier.

Ved de Konstruktioner, vi hidtil har omtalt, er Momenterne blevet optaget i Buen; men man kan i Stedet udføre denne som en »slap« Bue og optage Momenterne i en *Afstivningsdrager*, saaledes som angivet i Fig. 28. Vælges Spændingerne i det ene System af Hængestænger som overtallige, kan Beregningerne gennemføres paa samme Maade som tidligere angivet.

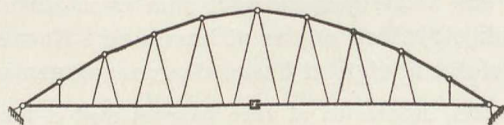


Fig. 28.

Denne Konstruktion er imidlertid ikke særlig motiveret, idet de Momenter, som findes i Konstruktionen i Reglen er saa smaa, at der kun kræves en lille Forøgelse af Buen for, at den alene skal være i Stand til at optage Momenterne. Da man (i hvert Fald for Jernbeton-Konstruktioner) aldrig udfører Konstruktionen som en virkelig slap Bue (med Led i Knudepunkterne), er det af denne Grund ogsaa rigtigst at udføre Beregningerne med de virkelige Forhold for Øje og regne med Stivheden i Buerne. Imidlertid udføres heller ikke Underflangen (Brobanestangen) med Led i Knudepunkterne, saaledes som hidtil antaget, og man kan derfor fordele Momenterne mellem Buerne og Underflangen, i Overensstemmelse med deres Stivhed. Underflangen skal tillige overføre Belastningen til Knudepunkterne; men de Laststillinger, der er bestemmende for de største og mindste Momenter i denne Henseende, er ikke sammenfaldende med de Laststillinger, der frembringer største og mindste Momentpaavirkninger for hele Konstruktionen. Bestemmes derfor Dimensionerne af Underflangen ud fra den sekundære Virkning (Bjælke mellem Knudepunkterne) vil den i Reglen faa saadanne Dimensioner, at den uden yderligere Forøgelse er i Stand til at optage sin Del af hele Systemets Momenter sammen med de i dette Tilfælde mindre sekundære Momenter.

Af ovenstaaende vil man forstaa, at den almindelige Konstruktion for en Tre-Charniers-Bue med skraatstillede Hængestænger bliver en stiv Tre-Charniers-Bue og en stiv Underflange forbundne med to Systemer af Hængestænger med Hældning i modsatte Retninger. Den nøjagtige Beregning af en saadan Konstruktion bliver dog en Del vanskeligere end hidtil angivet, idet man for denne Konstruktion kun kan bibeholde een Hængestang i Hovedsystemet, hvis dette skal være statisk bestemt, saaledes at man maa indføre alle de øvrige Spændinger i Hængestængerne som overtallige¹⁾. Imidlertid vil man dog i Reglen kunne udføre Beregningen for en saadan Konstruktion tilstrækkelig nøjagtig ved at indføre Spændingerne i det ene Sæt Hængestænger som overtallige, idet Buen eller Afstivningsbjælken regnes at have Led i Knudepunkterne. Man vil selvfølgelig rigtigst lægge disse regningsmæssige Led i

¹⁾ Kanthjælken antages da at være forsynet med et forskydeligt Led under Topcharnieret.

den Del, der har mindst Stivhed. Denne Tilnærmelse er ikke større end den, man foretager ved en sædvanlig Beregning af en stiv Bue med Afstivningsbjælke.

Medens den i Fig. 28 viste Konstruktion ikke var særlig motiveret, bliver Forholdet et andet, om man udfører Buen som *Hængeflange* (Kabel, Øjestænger etc.). Denne Konstruktion er vist i Fig. 29. Ved at udføre de sædvanlige Hængebro-

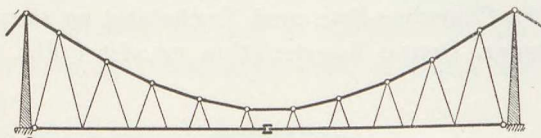


Fig. 29.

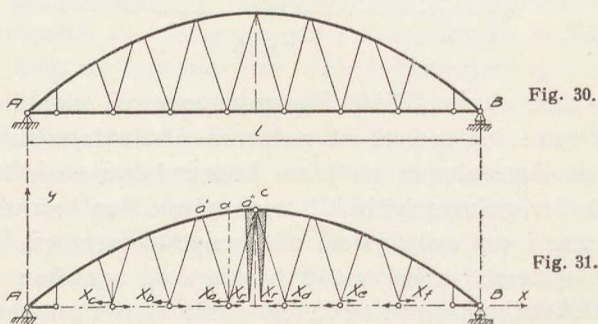
typer med skraatstillede Hængestænger, vil man i meget høj Grad være i Stand til at reducere Afstivningsdragerens Momenter. Beregningen af denne Konstruktion adskiller sig ikke fra de Beregninger, vi hidtil har angivet. Man kan vælge Spændingerne i det ene System af Hængestænger som overtallige, Hovedsystemet er da statisk bestemt, og man kan nu opstille Elasticitetsligningerne og beregne alle Paavirkninger paa samme Maade som tidligere bestemt.

Paa samme Maade som tidligere angivet kan man for denne Konstruktion lade Stængerne krydse hinanden eller lægge Stivheden i Buen og udføre Underflangen med Led i Knudepunkterne eller udføre begge Dele stive.

Ovenfor har vi angivet de forskellige Udførelsesmaader, man kan tænke sig for en Tre-Charniers-Bue med skraatstillede Hængestænger. Paa samme Maade kan man udføre *To-, Et- eller Nul-Charniers-Buer* med skraatstillede Hængestænger. Disse Udførelsesmaader er dog ikke saa berettigede, idet man ved Hjælp af de skraatstillede Hængestænger har et Middel til at reducere Momenterne efter Ønske og saaledes ikke af denne Grund behøver at gøre Konstruktionen udvendig statisk ubestemt, hvorved man udsætter den for alle de Ekstraspændinger, som en ensformig Temperaturvariation og en Forskydning af Understøtningerne vil bevirke. Da disse Forskydningers Størrelse maa bestemmes efter et Skøn, er Virkningen heraf vanskelig at beregne. Imidlertid kan Forholdene være saaledes, at Understøtningerne ikke kan tage Horisontaltryk, hvorfor man

er nødt til at udføre Konstruktionen med et Trækbaand til Optagelse af dette. I dette Tilfælde vil den naturlige Udførelsesform være To-Charniers-Buen med Trækstang. Endvidere kan Funderingsforholdene være saa gunstige (f. Eks. fast Bjerg), at man vil drage Fordel heraf og undgaa Vederlagscharniererne. Konstruktionen bliver da en Et-Charniers-Bue. Vi skal derfor noget nærmere behandle disse Konstruktioner.

§ 17. **To-Charniers-Bue med Trækstang og skraatstillede Hængestænger.** Denne Konstruktion er vist i Fig. 30. Da vi



tidligere har behandlet Tre-Charniers-Buen, vil det være lettest at vælge denne til Hovedsystem. I Fig. 31 er som overtallig angivet Kraften X_r angribende for Enden af stive Arme, der udgaar fra Midtercharnieret. (I Figuren er af Tegnehensyn Kræfterne vist virkende ovenover Trækbaandet, medens de i Virkeligheden virker i Linien for Trækbaandet).

Til Bestemmelse af Deformationen δ_r^0 har man

$$\delta_r^0 = \int_A^B \frac{M^0 y}{E_b I_b} ds - \frac{H}{E_b F_b} s_{AB} - \frac{H}{E_u F_u} l \quad (90)$$

Her er M^0 Momentet i Tre-Charniers-Buen svarende til lodrette Hængestænger, idet man dog maa tage Hensyn til den indirekte Overførelse af Lasten til Buen. Momentet regnes positivt med Uret for Kræfter til venstre for Snittet. H er Trækket i Trækbaandet i Hovedsystemet; s_{AB} Buelængden og l Spændvidden.

Index for E , I og F svarer selvfølgelig til den betragtede Konstruktionsdel.

For δ_a^o finder man samme Udtryk som tidligere angivet for Tre-Charniers-Buen, idet man dog nu maa medtage Bidraget fra Trækbaandet, d. v. s.

$$-\frac{H}{E_u F_u} s_{Aa} \quad (91)$$

Størrelserne δ_{aa} , δ_{ab} o. s. v. er de samme som angivet for Tre-Charniers-Buen, og man kan for disse Størrelser paa samme Maade som tidligere undlade at medtage Normalkræfternes Bidrag for Bue og Trækbaand, uden at begaa nogen Fejl af Betydning.

For Størrelsen δ_{rr} finder man

$$\delta_{rr} = \int_A^B \frac{y^2}{E_b I_b} ds, \quad (92)$$

idet man ogsaa her kan se bort fra Normalkræfternes Bidrag i Bue og Trækstang. Paa Grund af den valgte overtallige X_r vil man tillige se, at

$$\delta_{ab} = \delta_{br}, \quad \delta_{ac} = \delta_{cr} \text{ o. s. v. } \text{ og } \delta_{df} = \delta_{fr} \text{ o. s. v.}$$

$$\text{Medens } \delta_{ad} = \delta_{ae} \cdot \cdot = \delta_{bd} = \delta_{be} = 0.$$

For δ_{ar} finder man:

$$\delta_{ar} = \int_A^{a'} \frac{y^2}{E_b I_b} ds + \frac{y_{a'} s_{a'a''}}{6 E_b I_b} (2y_{a'} + y_{a''}) \approx \int_A^a \frac{y^2}{E_b I_b} ds \quad (93)$$

Elasticitetsligningerne bliver nu:

$$0 = \delta_r^o - X_r \delta_{rr} - X_a \delta_{ar} - X_b \delta_{ab} \cdot \cdot - X_d \delta_{dr} - X_e \delta_{de} - X_f \delta_{df}$$

$$0 = \delta_a^o - X_r \delta_{ar} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$0 = \delta_d^o - X_r \delta_{dr} - X_d \delta_{dd} - X_e \delta_{de} - X_f \delta_{df}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$0 = \delta_f^o - X_r \delta_{fr} - X_d \delta_{df} - X_e \delta_{ef} - X_f \delta_{ff}$$

Ved at indsætte Værdien for X_r fra den øverste Ligning i Ligningen for X_a finder man:

$$0 = \delta_a^o - \frac{\delta_r^o}{\delta_{rr}} \delta_{ar} - X_a \left(\delta_{aa} - \frac{\delta_{ar}^2}{\delta_{rr}} \right) - X_b \left(\delta_{ab} - \frac{\delta_{ab} \delta_{ar}}{\delta_{rr}} \right) \dots + X_d \frac{\delta_{dr} \delta_{ar}}{\delta_{rr}} \dots + X_f \frac{\delta_{df} \delta_{ar}}{\delta_{rr}}$$

Ligningssystemet kommer nu til at indeholde samtlige overtallige og ikke som for Tre-Charniers-Buen kun de overtallige for den ene Buehalvdel. I ovenstaaende Udtryk er alle Koefficienterne til de overtallige X_a , X_b og X_c positive, idet

$$\delta_{aa} - \frac{\delta_{ar}^2}{\delta_{rr}} = \delta_{aa}^{or} \text{ og } \frac{\delta_{ar}}{\delta_{rr}} < 1 \text{ o. s. v.}$$

Paa samme Maade som tidligere angivet for Tre-Charniers-Buen kan man lade Knudepunkterne i Hovedsystemet paavirke af en vandret Kraft, saaledes at kun Hængestængerne i den ene Retning er virksomme i Hovedsystemet. De overtallige kan da vælges saaledes, at kun positive Værdier er brugelige. I dette System ændres kun Deformationerne δ_r^o , δ_a^o o. s. v., medens alle Koefficienterne til de overtallige forbliver uforandrede. Man kan da gennemføre Beregningerne som tidligere angivet. Vi skal dog gøre opmærksomme paa, at, da

$$\delta_{ad}^{or}, \delta_{ae}^{or} \text{ og } \delta_{af}^{or}$$

alle er negative, er det ikke tilstrækkeligt, at δ_a^{or} er negativ, for at X_a skal være ude af Funktion.

§ 18. Et-Charniers-Buen med skraatstillede Hængestænger. Denne Konstruktion er angivet i Fig. 32. Ved A og B er Buen

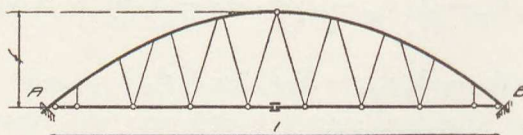


Fig. 32.

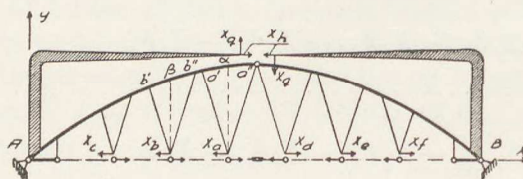


Fig. 33.

indspændt i Vederlagene. For denne Konstruktion vil vi vælge en Tre-Charniers-Bue som Hovedsystem. Som overtallige i de indskudte Vederlagscharnierer vælges Kræfterne X_h og X_q virkende paa stive Arme udgaaende fra Vederlagscharniererne. (Det er selvfølgelig Meningen, at Kræfterne X_h og X_q skal angribe ved Punkt C , men af Tegnehensyn kan dette ikke vises i Figuren). Er Konstruktionen symmetrisk om Midtercharniet C , opnaar man ved dette Valg af de overtallige, at $\delta_{hq} = 0$, saaledes at Elasticitetst ligningerne for disse overtallige kun kommer til at indeholde den ene af disse.

Man finder for en Konstruktion symmetrisk om Midtercharniet:

$$\delta_h^o = - \int_A^B \frac{M^o (f - y)}{E_b I_b} ds - \frac{H}{E_b F_b} s_{ACB} \quad (94)$$

$$\delta_q^o = \int_A^C \frac{M^o (\frac{l}{2} - x)}{E_b I_b} ds - \int_C^B \frac{M^o (x - \frac{l}{2})}{E_b I_b} ds \quad (95)$$

her er M^o Momenterne i Buen svarende til lodrette Hængestænger, idet man dog maa tage Hensyn til den indirekte Overførelse til Buen. Momentet er regnet positivt med Uret for Kræfter til venstre for Snittet. H er Horisontaltrykket i Vederlagscharniet. Vi har for δ_q^o udeladt Normalkræfternes Bidrag for Buen svarende til sædvanlig Tilnærmelse.

Man finder endvidere

$$\delta_{hh} = \int_A^B \frac{(f - y)^2}{E_b I_b} ds \quad (96) \quad \delta_{qq} = 2 \int_A^C \frac{(\frac{l}{2} - x)^2}{E_b I_b} ds \quad (97)$$

$$\delta_{bh} = - \int_A^{b'} \frac{y (f - y)}{E_b I_b} ds - \frac{y_{b'} (3f - 2y_{b'} - y_{b''})}{6 E_b I_b} s_{b'b''} \sim - \int_A^{\beta} \frac{y (f - y)}{E_b I_b} ds \quad (98)$$

og analogt for δ_{ah} , δ_{ch} o. s. v.

$$\delta_{bq} = \int_A^{b'} \frac{y (\frac{l}{2} - x)}{E_b I_b} ds + \frac{y_{b'} (\frac{3}{2}l - 2x_{b'} - x_{b''})}{6 E_b I_b} s_{b'b''} \sim \int_A^{\beta} \frac{y (\frac{l}{2} - x)}{E_b I_b} ds \quad (99)$$

og analogt for δ_{aq} , δ_{cq} o. s. v.

I disse Udtryk har vi i Lighed med tidligere udeladt Normalkræfternes Bidrag.

Formlerne til Bestemmelse af δ_a^o , δ_b^o , δ_{aa} , δ_{ab} o. s. v. er de samme som angivet for Tre-Charniers-Buen.

Man kan nu opstille Elasticitetsligningerne.

$$0 = \delta_h^o - X_h \delta_{hh} - X_a \delta_{ah} - X_b \delta_{bh} \dots - X_f \delta_{fh}$$

$$0 = \delta_q^o - X_q \delta_{qq} - X_a \delta_{aq} - X_b \delta_{bq} \dots - X_f \delta_{fq}$$

$$0 = \delta_a^o - X_h \delta_{ah} - X_q \delta_{aq} - X_a \delta_{aa} \dots - X_c \delta_{ac}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$0 = \delta_f^o - X_h \delta_{fh} - X_q \delta_{fq} - X_d \delta_{df} \dots - X_f \delta_{ff}$$

Ved Indsættelse af Værdierne for X_h og X_q fra de to øverste Ligninger finder man for Ligningen for X_a :

$$0 = \delta_a^o - \frac{\delta_h^o}{\delta_{hh}} \delta_{ah} - \frac{\delta_q^o}{\delta_{qq}} \delta_{aq} - X_a \left(\delta_{aa} - \frac{\delta_{ah}^2}{\delta_{hh}} - \frac{\delta_{aq}^2}{\delta_{qq}} \right) - X_b \left(\delta_{ab} - \frac{\delta_{ah} \delta_{bh}}{\delta_{hh}} - \frac{\delta_{aq} \delta_{bq}}{\delta_{qq}} \right) \\ \dots + X_d \left(\frac{\delta_{ah} \delta_{dh}}{\delta_{hh}} + \frac{\delta_{aq} \delta_{dq}}{\delta_{qq}} \right) \dots + X_f \left(\frac{\delta_{ah} \delta_{fh}}{\delta_{hh}} + \frac{\delta_{aq} \delta_{fq}}{\delta_{qq}} \right)$$

Man kan for dette System lade Hovedsystemets Knudepunkter paavirke af en saadan Last, at kun Hængestængerne i den ene Retning er i Funktion i Hovedsystemet. De overtallige kan da indføres i Systemet med en saadan Retning, at kun positive Værdier er brugelige, og man kan da foretage de samme Undersøgelser som tidligere angivet.

§ 19. **Eksempler paa udførte Konstruktioner.** Nedenfor skal ganske kort omtales nogle Konstruktioner, der er udførte af »Svenska Aktiebolaget Christiani & Nielsen«. De efternævnte Konstruktioner er alle færdige og i Brug. Foruden disse er en Del andre Broer med denne Konstruktion for Tiden under Bygning. Blandt disse findes Buer med Trækbaand og skraatstillede Hængestænger.

1. Jernbetonbro over Klarelv ved Deje.¹⁾ Fig. 34. Denne Bro er udført som en 5 m bred Vejbro i 3 Spand med 70 m fri

¹⁾ Denne Bro er den første, der er udført som Bue med skraatstillede Hængestænger.

Spændevide for hvert Fag. Paa den ene Side af Broen er der ved Hjælp af Konsoller udkragede fra Tværbjælkerne anbragt et Spor for en Tømmervogn. Paa Grund af Strømforholdene kunde Pillerne ikke udføres vinkelret paa Broelinien, hvorfor Broen maatte udføres som skæv Bro, saaledes at tilsvarende

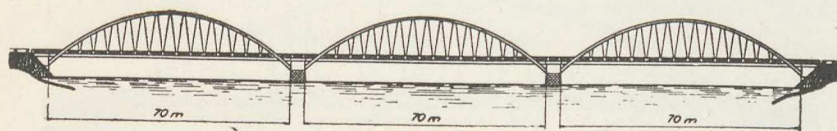


Fig. 34.

Punkter af Buemidttlinien er forskudt 2 m for hinanden i Broens Længdeled. Dette Forhold har i høj Grad besværliggjort Broens Konstruktion og Udførelse. Den bærende Konstruktion er udført som Tre-Charniers-Buer med skraatstillede Hængestænger. Afstanden mellem Vederlagscharniererne er 63,573 m, og Pilhøjden er 12,16 m.

Denne og de følgende Broer er beregnede for nedenstaaende Nyttelast:

En ensformig Nyttelast af 500 kg/m^2 ,
2 mødende 9 t Automobiler og
 125 kg/m^2 Vindtryk paa lodret Flade.

Desuden er denne Bro beregnet for en 4 t Tømmervogn paa Konsolsporet.

Det ene Landfæste er funderet paa fast Bund, medens Mellem pillerne og det andet Landfæste er funderet paa Pæle.

Bygningen af Broen blev besværliggjort derved, at Stilladserne maatte beregnes fritbærende, da der er stærk Tømmerflaadning i Elven. Fig. 39 viser et Fotografi af den færdige Bro. Man var oprindelig noget ængstelig for, at de skraatstillede Hængestænger skulde virke mindre smukt, men denne Ængstelse har vist sig at være ubegrundet.

2. Jernbetonbro over Øster-Dalelven. Fig. 35. Denne Bro er udført som en 5 m bred Vejbro i et Spænd med en fri Spændvidde af 86 m. Afstanden mellem Landfæsternes Forkanter er 89 m. Den bærende Hovedkonstruktion er udført

som Tre-Charniers-Buer med skraatstillede Hængestænger. Afstanden mellem Vederlagscharniererne er 80,80 m, og Pilhøjden er 14,60 m. Buerne er forbundne med Tværafstivninger af Jernbeton saaledes, at Buerne i Forbindelse med disse Tvær-

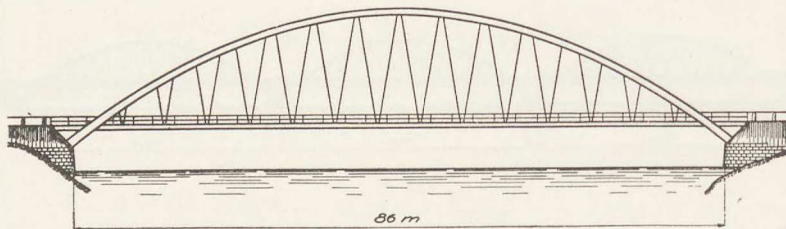


Fig. 35.

bjælker danner en Vierendeelbjælke, for hvilken Sikkerheden mod Knækning er lig 10. Sikkerheden mod Knækning i Vertikalplanet er ligeledes 10. Broen er iøvrigt beregnet for samme Nyttelast som Broen over Klarelven ved Deje. Det ene Landfæste er funderet paa fast Bjerg, medens det andet Landfæste er funderet paa fastlejret Sand. Fig. 40 viser et Fotografi af den færdige Bro.

3. Jernbetonbro over Jösseelven. Fig. 36. Denne Bro er udført som en 5 m bred Vejbro i eet Spand. Afstanden mellem Landfæsternes Forkanter er 79 m. Den bærende Hovedkonstruktion er udført som Tre-Charniers-Buer med skraatstillede

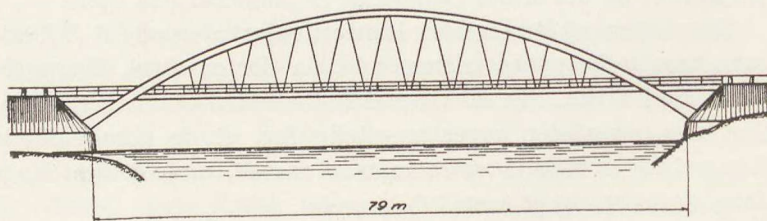


Fig. 36.

Hængestænger. Afstanden mellem Vederlagscharnierene er 71,40 m, og Pilhøjden er 11,30 m. Buerne er forbundne med Tværafstivninger af Jernbeton saaledes, at der dannes en Vierendeelbjælke. Begge Landfæster er funderet paa fast Bjerg.

4. Jernbetonbro over Faxelven ved Stamsele. Fig. 37.

Denne Bro er udført i 3 Spand med 53 m fri Spændvidde for hvert Spand. Den bærende Hovedkonstruktion er udført som Tre-Charniers-Buer med skraatstillede Hængestænger. Afstanden mellem Vederlagscharnieren er 52 m, og Pilhøjden er 11,2 m. Samtlige Piller er funderet paa den saakaldte Pinmo med et tilladeligt Bundtryk paa 5 kg/m².



Fig. 37.

§ 20. **Prøvebelastning af Bro over Klarelven ved Deje.** Ifølge de svenske Normalbestemmelser for Broer skal enhver Buebro med over 15 Meter fri Spændvidde prøvebelastes. Nedbøjningerne maa da ikke være større end $\frac{1}{1000}$ af Spændvidden og de blivende Deformationer kun 20 pCt. heraf. Endvidere undersøges, om der sker Revnedannelse under Prøvebelastningen. For ovennævnte Bro supplerede Firmaet *Christiani & Nielsen* disse Undersøgelser med forskellige Maalinger af Hængestængernes Virkemaade, saaledes at nedenstaaende Undersøgelser blev foretaget.

1. Undersøgelse af Nedbøjningerne for forskellige Laster, bestaaende af tungtlastede Lastautomobiler eller af en ensformig fordelt Gruslast, der blev anbragt i forskellige Stillingen.
2. Maalinger af Hængestængernes Spændinger for ovennævnte Laster samt for et enkelt Lastautomobil, der efterhaanden blev anbragt ud for de forskellige Knudepunkter.

For at bestemme Nedbøjningerne blev der i Punkterne (1—2—3—4 og 5) (Fig. 38) for samtlige Fag paa Opstrømssiden indstøbt Nitter med afrundede Hoveder, saaledes at Maalepunktet blev skarpt fixeret. For Fagene paa Nedstrømssiden var disse Punkter (1—2—3¹—4 og 5). Til Bestemmelse af Nedbøjningerne blev anvendt et Zeiss Præcisions Nivellerinstrument, med hvilket man var i Stand til at aflæse Brøkdeler af Millimetre. Stadiet var inddelt i Millimeter, og samme Punkt af dette blev hver

Gang anbragt paa Nittehovedet. For hver Maaling gik man ud fra samme Fixpunkt, og Nivellerinstrumentet havde stadig

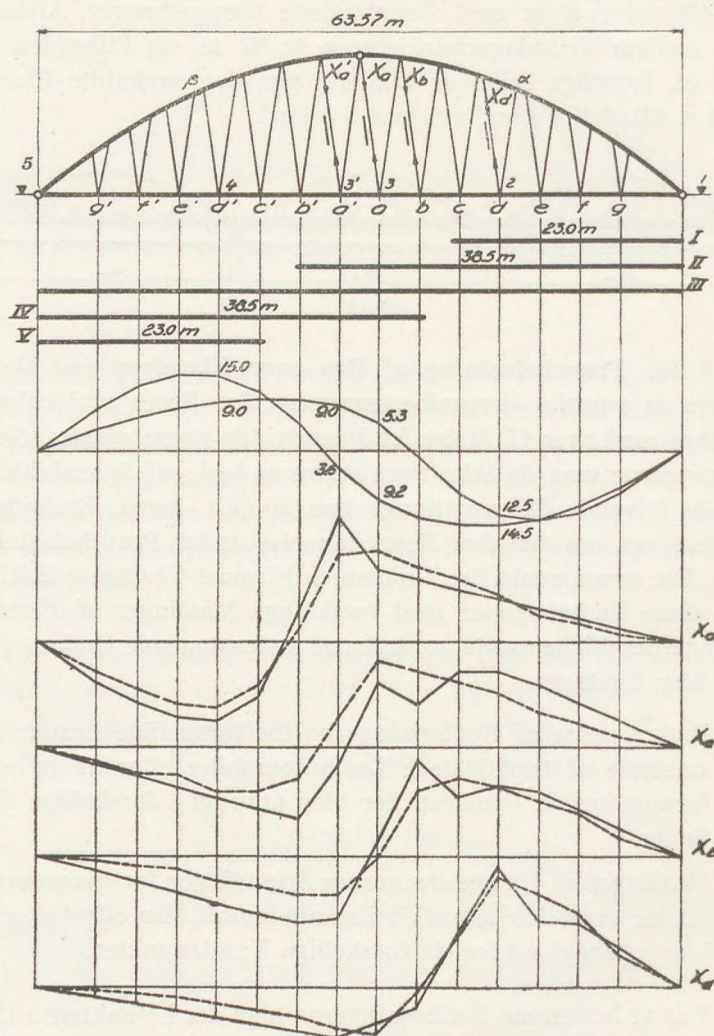


Fig. 38.

samme Opstilling i de forskellige Fag, idet Opstillingen var markeret ved tre Træpløkke, nedhuggede i Kørebanen.

For at bestemme Spændingerne i Hængestængerne blev der paa Stængerne svarende til X_a' , X_a , X_b og X_d (Fig. 38) fastboltet en »Zeiss Klokke«, der var inddelt saaledes, at hver Inddeling

svarede til en Afstandsændring af $\frac{1}{100}$ mm. Til »Zeiss Klokken« blev fastspændt en 150 cm lang 12 mm Rundjernsstang, hvis andet Endepunkt blev fastspændt paa Hængestangen. Da Hængestangens Areal var $16,62 \text{ cm}^2$, kom derved hver Delestreg til at svare til en Kraft P :

$$P = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 16,62}{1000 \cdot 150} = 234 \text{ kg.}$$

Vejrforholdene under Maalingerne var ret ugunstige. I de Dage, Maalingerne blev udført, var det meget stærkt Solskin, og Temperaturen af Hængestængerne svingede mellem 20° og 25° . I Tiden før Maalingerne havde det derimod i længere Tid været ret koldt, saaledes at Betonbuen under Maalingerne stadig blev højere, idet denne først efterhaanden (paa Grund af sin store Varmekapacitet) blev opvarmet. Denne Hævning af Buerne blev ikke modvirket i væsentlig Grad af Forlængelsen af Hængestængerne, idet disse straks fik den større Temperatur.

Som første Prøve blev et Tog af Lastautomobiler kørt over Broen i Midtlinien, saaledes at det første Hjultryk blev stillet 23 m fra Vederlagscharnieret (Laststilling I), derefter kørte Toget frem i Laststilling II, hvor første Hjultryk blev stillet 38,5 m fra Vederlagscharnieret, og endelig blev til sidst hele Spandet belastet (Laststilling III). Laststillingen I svarer til Maksimummomentet i Punkt α og Laststilling II til Minimummoment i Punkt β .

Nedbøjningerne i de forskellige Brofag for disse Belastningstilfælde blev saa ringe, at Bevægelserne paa Grund af Temperaturændringerne og Pillernes Forskydninger blev overvejende.

Derefter blev Yderspandet belastet med en ensformig fordelt Gruslast (35 cm Højde), der efterhaanden anbragtes i Laststillingerne V—IV—III—II—I. (Fig. 38). Nedbøjningerne blev maalt i Punkterne 1—2—3—4—5—6 og 7 for Opstrømsbuen og i Punkterne 1—2—3¹—4—5—6 og 7 for Nedstrømsbuen. Punkt 1 ligger paa et Landfæste, funderet paa fast Bund. Punkt 6 er det til Punkt 5 svarende Punkt paa den anden Side af Mellempillen. Punkt 7 er Fjerdedelspunktet d i Midterspandet. Nedbøjningerne er angivet i nedenstaaende Tabel (Nedbøjninger negative).

Opstrømsbuen	Pkt. 1	2	3	4	5	6	7
Laststilling V	0,9	7,9	7,7	—8,8	1,2	1,6	2,4 mm
—	IV 1,2	9,2	0,2	—9,8	1,3	1,9	2,9 -
—	III 0,4	—2,2	—0,8	—3,3	0,5	0,4	2,5 -
—	II 0,7	—8,5	—2,3	10,8	2,9	1,5	3,9 -
—	I 1,1	—6,3	4,2	8,5	2,6	3,0	4,9 -
Efter Lasten	0,4	2,8	4,6	3,1	1,4	0,8	4,5 -
Nedstrømsbuen	Pkt. 1	2	3 ¹	4	5	6	7
Laststilling V	0,9	6,2	3,1	—7,1	1,4	1,9	1,5 mm
—	IV 1,2	7,9	—5,7	—9,8	1,3	1,7	2,4 -
—	III 0,4	—2,3	—1,9	—2,3	0,2	0,1	3,3 -
—	II 0,7	—8,3	—0,3	9,7	2,6	1,5	3,2 -
—	I 1,1	—6,6	7,0	10,1	2,6	1,8	4,4 -
Efter Lasten	0,4	2,0	4,4	3,3	1,6	1,1	3,7 -

Før Prøvebelastningen blev Nedbøjningerne beregnede for en Last af 640 kg/m^2 . Herved blev Buen og Kantbjælken regnet samvirkende, og Elasticitetskoefficienten for Buen blev regnet til $270,000 \text{ kg/cm}^2$ og for Kantbjælken til $210,000 \text{ kg/cm}^2$. Egenvægten blev regnet at fordele sig ligeligt over alle Hængestængerne. Ved Beregningen blev der taget Hensyn til Normalkraftbidragene i Hængestængerne, men derimod ikke til Normalkraftbidragene for Buen og Kantbjælken. Resultatet er angivet i Fig. 38¹). For Laststilling 5 er Stængerne svarende til X_a , X_b og X_c ude af Funktion. For Laststilling 4 er Stængerne svarende til X_a , X_b , X_c og X_d ude af Funktion. Ved Prøvebelastningen viste dette Forhold sig ved, at et Automobil, der i stærk Fart kørte over Broen, medens denne var belastet med Gruslasten (Broen var ikke afspærret under Prøven), bevirkede Rystelser, og de spændingsløse Hængestænger svingede da frem og tilbage med Udsving, der var proportionale med den opnaaede »Overlængde«.

Af Tabellen over Nedbøjningerne ser man, at Pillerne har bevæget sig i vertikal Retning. Pillerne har tillige bevæget sig i horisontal Retning paa Grund af Horisontaltrykket. Efter Aflastningen ses Broen at have faaet en Ophøjning, der tilnærmelsesvis er fordelt efter en Trekant med Toppunkt under Topcharnieret. Dette skyldes Temperaturens Indflydelse, idet Buen under hele Maaletiden stadig hævede sig, da den paa Grund af

¹) De viste Kurver er de beregnede Nedbøjninger for Laststillingerne I og II.

sin store Varmekapacitet først efterhaanden fik sin Temperaturforøgelse. Topcharnieret er gaaet 4,5 mm i Vejret, svarende til en Temperaturforøgelse af t° , der kan beregnes af:

$$\delta_t = \varepsilon t \left(f + \frac{l^2}{4f} \right)$$

$$0,45 = 0,00001 \cdot t \left(1216 + \frac{6357^2}{4 \cdot 1216} \right) \text{ d. v. s. } t = 4,7^\circ$$

Da man ikke kender den horisontale Bevægelse af Pillerne, er der ikke forsøgt at korrigere Resultaterne for Pillebevægelser eller Temperaturvariationer, men i Tabellen er direkte angivet de maalte Nedbøjninger. (Mærker ved Midterfugen viste, at denne ændrede sig mellem 2 og 3 mm, men efter Forsøget omtrent fik sin oprindelige Størrelse). For at sammenligne Resultaterne af Maalingerne med de beregnede, kan man addere de numeriske Værdier af Nedbøjningerne i Fjerdedelspunkterne. Herved eliminerer man for største Del Forskydningen af Understøtningerne og Temperaturen's Indflydelse. Man finder da:

Opstrømsbue	maalt $y^2 + y^4$	beregnet $y^2 + y^4$	Forholdet
Laststilling V	7,9 + 8,8 = 16,7	12,5 + 9,0 = 21,5	0,78
— IV	9,2 + 9,8 = 19,0	14,5 + 15,0 = 29,5	0,64
— II	8,5 + 10,8 = 19,3	15,0 + 14,5 = 29,5	0,65
— I	6,3 + 8,5 = 14,8	9,0 + 12,5 = 21,5	0,69

Nedstrømsbue	maalt $y^2 + y^4$	beregnet $y^2 + y^4$	Forholdet
Laststilling V	6,2 + 7,1 = 13,3	12,5 + 9,0 = 21,5	0,62
— IV	7,9 + 9,8 = 17,7	14,5 + 15,0 = 29,5	0,60
— II	8,3 + 9,7 = 18,0	15,0 + 14,5 = 29,5	0,61
— I	6,6 + 10,1 = 16,7	9,0 + 12,5 = 21,5	0,77

Man ser heraf, at Gruset antagelig ikke er blevet pakket saa tæt, som beregnet, saaledes at Vægten af dette ikke svarer til den Last af 640 kg/m², for hvilken Beregningerne blev udført. Endvidere er det muligt, at Elasticitetskoefficienten for Betonen er endnu højere end antaget, og at Kantbjælkens Kontinuitet over Knudepunkterne fordeler Belastningen, saaledes at Nedbøjningerne kendelig reduceres.

Samtidig med Maalingerne af Nedbøjningerne blev Spændingsmaalerne aflæste for hver Laststilling. Da imidlertid Spændingsmaalerne Udsving kunde variere 2 à 3 Delestreger i Løbet af 5—10 Minutter, uden at Lasten blev ændret, maa man ved Bedømmelsen tage Hensyn hertil, idet der altid gik flere Timer, inden et nyt Belastningstilfælde blev etableret.

Vi skal nedenfor angive de maalte og beregnede Værdier af Spændingsmaalerne Udslag (v):

Laststilling V	$X_{a'}$	X_a	X_b	X_d	
$v =$	—33	—21	—15	—10,5	maalte Værdier.
$v =$	—29	—21	—18	—13	beregnete Værdier.
		1,00	0,83	0,81	Forholdet.

For denne Laststilling var $X_{a'}$ beregningsmæssig ude af Funktion, dette ses ogsaa af Maalingene, idet dens Værdi overskrider den beregnede, der angiver Variationen indtil Nulspændingen. Da Hængestangen selvfølgelig ikke kan tage Trykspændinger, er det angivne Maaleresultat et Udtryk for Stangens Udbøjning, hvilken dog var saa ringe, at man ikke var i Stand til at se det med det blotte Øje.

Mellem Laststilling V og IV gik der en Nat, hvorfor disse Resultater kan være en Del forrykkede.

Laststilling IV	$X_{a'}$	X_a	X_b	X_d	
$v =$	—10	—36,5	—29	—30	maalte Værdier.
$v =$	—13	—29	—29	—29	beregnete Værdier.
		0,77			Forholdet.

For denne Belastning er $X_{a'}$, X_b og X_d ude af Funktion, hvilket ogsaa ses af Maalingerne.

Laststilling II	$X_{a'}$	X_a	X_b	X_d	
$v =$	33,5	31	26	21	maalte Værdier.
$v =$	54	40	38	29	beregnete Værdier.
	0,62	0,77	0,68	0,72	Forholdet.

Laststilling I	$X_{a'}$	X_a	X_b	X_d	
$v =$	16	18	24	28	maalte Værdier.
$v =$	21	29	29	48	beregnete Værdier.
	0,76	0,62	0,83	0,58	Forholdet.

Som sidste Prøve blev en 6 Tons Lastbil kørt over Broen, idet Bagakslen efterhaanden blev stillet ud for de forskellige Knudepunkter. Regnes Reaktionen paa den betragtede Bue til $\frac{6 \cdot 4}{5,6} = 4,27$ t, kan Virkningen beregnes, idet Bagakslens Tryk regnes til 2,85 t og Forakslens Tryk til 1,42 t, d. v. s. Halvdelen af Bagakslens. Afstanden mellem Akslerne var 4 m, d. v. s. lig Afstanden mellem Knudepunkterne. Af Influenslinierne for de overtallige kan Spændingen i Hængestangen beregnes og derved det beregnede Udslag.

Kaldes Influensordinaten i Punkt d for y_d og i Punkt e for y_e , bliver Udslaget paa Spændingsmaalerne, naar Bagakslen staar over Punkt d :

$$v = \left(y_d + \frac{y_e}{2} \right) \cdot \frac{2850}{234}$$

Resultatet er angivet i nedenstaaende Tabel:

	g'	f'	e'	d'	c'	b'	a'
$X_{a'}$	-0,140	-0,223	-0,297	-0,357	-0,310	-0,132	+0,659
$\frac{1}{2} X_{a'}$	-0,112	-0,148	-0,178	-0,155	-0,066	+0,329	+0,175
	-0,252	-0,371	-0,475	-0,512	-0,376	+0,197	+0,834
	g'	f'	e'	d'	c'	b'	a'
$v =$	-3,1	-4,5	-5,8	-6,2	-4,5	+2,4	+10,2 beregnet
$v =$	-2,0	-3,5	-4,6	-5,0	-3,8	+1,0	+ 7,0 maalt

Paa samme Maade finder man for de øvrige Punkter.

$X_{a'}$	a	b	c	d	e	f	g
$v =$	5,9	5,1	4,2	3,4	2,6	1,8	1,3 beregnet
$v =$	7,5	6,2	5,1	3,9	2,2	1,7	0,5 maalt
X_a	g'	f'	e'	d'	c'	b'	a'
$v =$	-1,5	-2,3	-3,1	-4,0	-4,9	-5,6	-2,0 beregnet
$v =$	-1,2	-2,1	-2,4	-3,4	-3,5	-2,5	+1,8 maalt
X_a	a	b	c	d	e	f	g
$v =$	5,0	3,5	5,9	6,1	5,0	3,6	2,2 beregnet
$v =$	7,0	6,3	5,4	4,4	2,8	2,0	0,8 maalt

X_b	g'	f'	e'	d'	c'	b'	a'	
$v = -1,3$		-2,1	-2,8	-3,5	-4,3	-5,1	-4,9	beregnet
$v = -0,3$		-0,6	-0,9	-1,8	-2,1	-3,0	-2,9	maalt

X_b	a	b	c	d	e	f	g	
$v = 0,8$		8,0	5,0	5,8	5,3	4,0	2,4	beregnet
$v = 0,0$		5,5	6,5	6,0	4,6	3,6	1,9	maalt

X_d	g'	f'	e'	d'	c'	b'	a'	
$v = -0,8$		-1,3	-1,8	-2,3	-2,8	-3,2	-3,4	beregnet
$v = -0,2$		-0,4	-0,5	-1,0	-1,5	-2,0	-3,0	maalt

X_d	a	b	c	d	e	f	g	
$v = -3,0$		-1,5	3,8	9,8	5,4	5,1	3,3	beregnet
$v = -3,3$		-0,5	4,0	9,0	7,8	6,2	5,2	maalt

Lastbilen blev kun kørt een Gang over Broen, saaledes at de angivne Værdier er Resultatet af een Maaling. I Fig. 38 er Resultatet angivet, idet den fuldt optrukne Kurve er det beregnede Udslag og den punkterede Kurve det maalte Udslag. Af Figuren ses tydeligt, at Kantbjælken fordeler Trykket ud over de forskellige Knudepunkter. Da der ikke var Mulighed for at faa Lastbilens Vægt nøjagtig bestemt, maa ovenstaaende Værdier kun betragtes som relative.

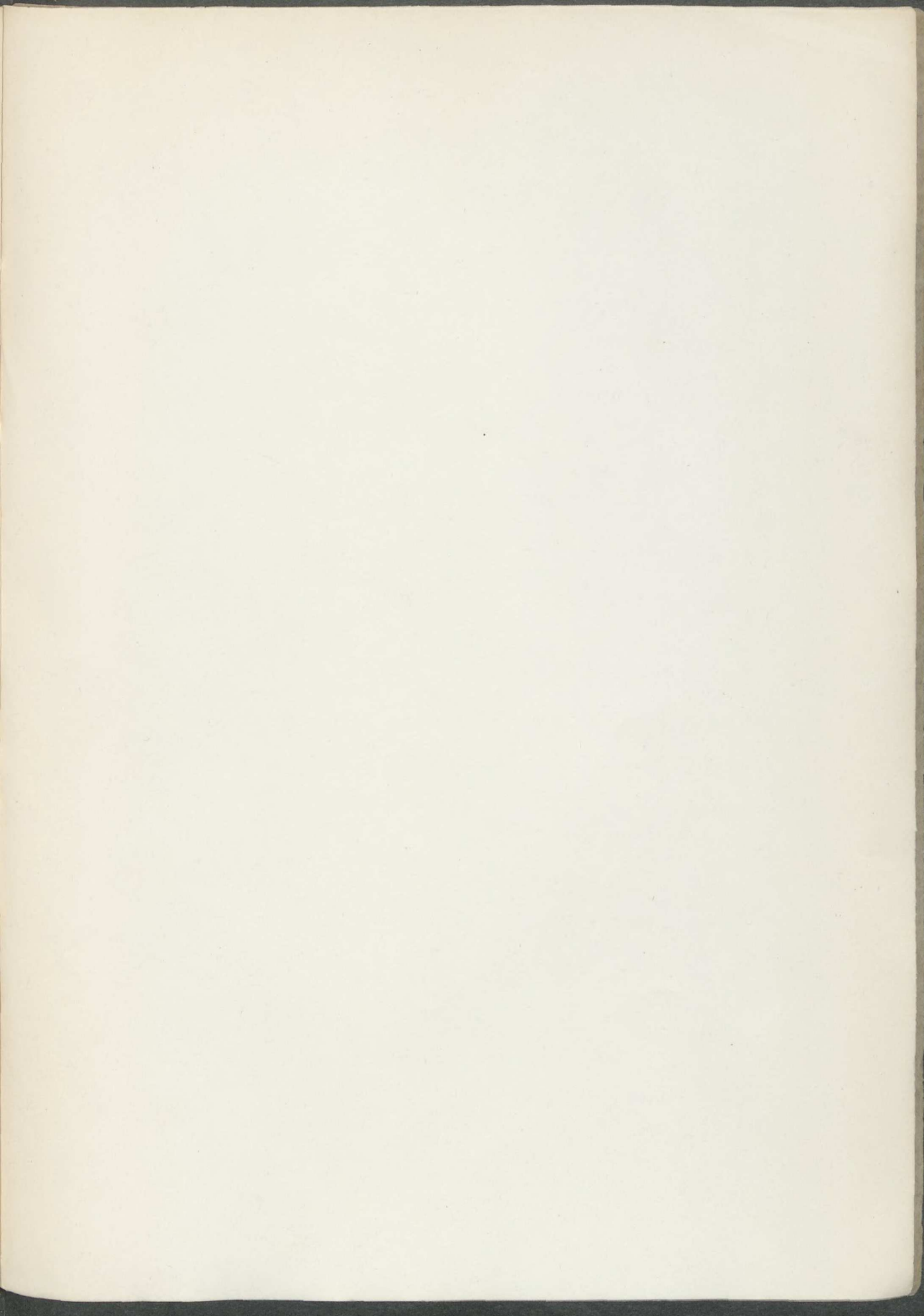
Som Resultat af hele Prøvebelastningen kan man sige, at det viste sig, at Konstruktionen virkede saaledes, som antaget, og at Stivheden var større end beregnet. Den største Nedbøjning var saaledes ikke mere end $\frac{1}{6500}$ af den fri Spændvidde, skønt Buens Dimensioner var beregnede efter en tilladelig Paa-virkning af 60 kg/cm², og Kantbjælkens Stivhed var medregnet ved Bestemmelse af Momenterne. Da Deformationerne var saa smaa, viste der sig selvfølgelig ingen Revnedannelse i Betonen.

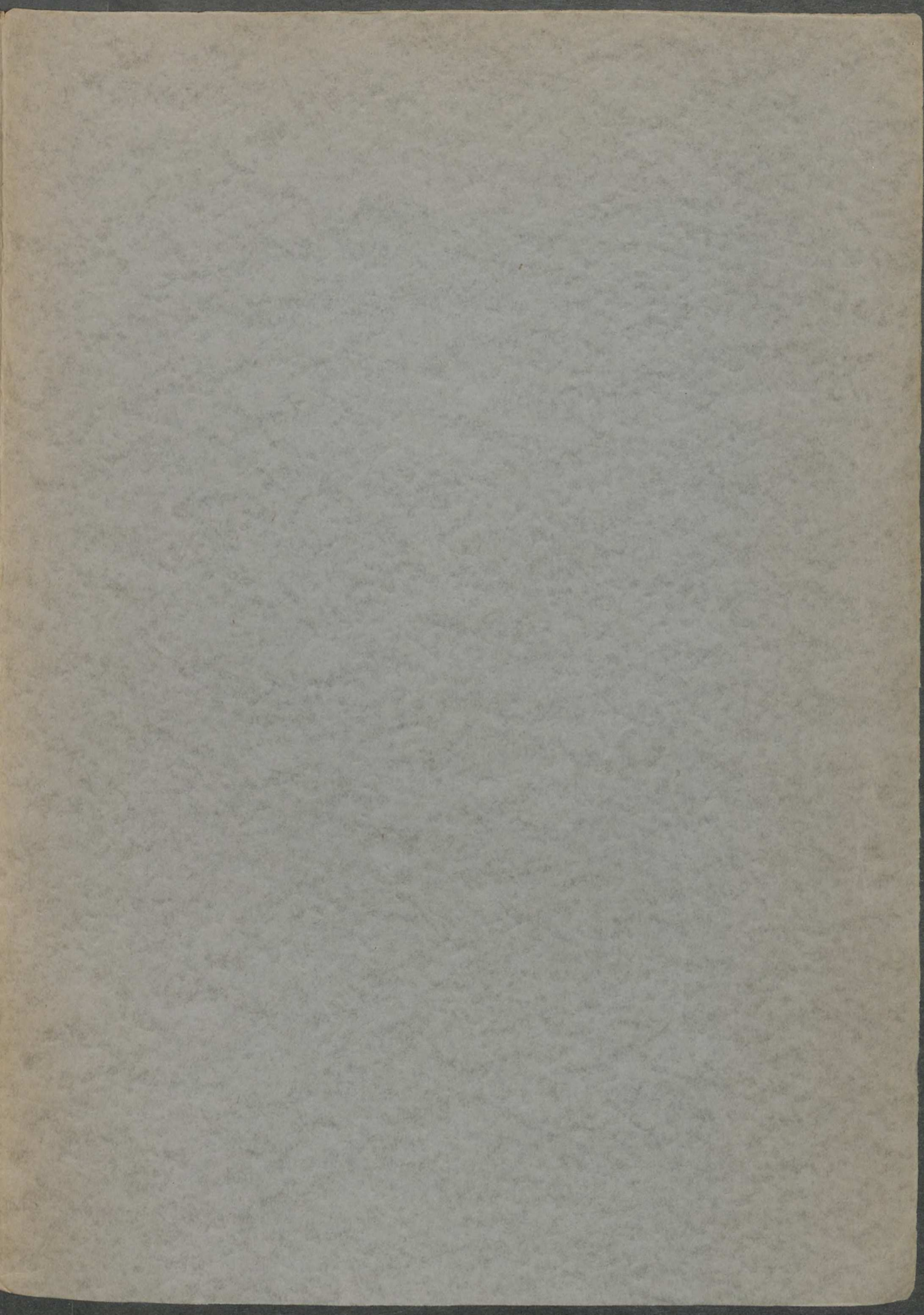


Fig. 39. Bro over Klarelvn ved Deje.



Fig. 40. Bro over Øster Dalelven ved Aasen.





KRONH. BOOTRYKKERI
HARALD JENSENS BOOTRYKKERI