

Denne fil er downloadet fra
Danmarks Tekniske Kulturarv
www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på
www.tekniskkulturarv.dk/about

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

A. Ostensfeldt

Graphische Behandlung von Gegenständen
 über verschiedene Aufzeichnungen und mit (in wasser-
 rechter Richtung) elastisch nachgebenden
 Unterstützungen.

1909.

624.042.11
 581.95

624.042.1.2
 517

517

624.043.11
:531.25

Graphische Behandlung von Bogenträgern über mehreren Oeffnungen und mit (in wagerechter Richtung) elastisch nachgiebigen Unterstützungen.

Von A. Ostenfeld, Professor an der Technischen Hochschule zu Kopenhagen.

Im folgenden sollen die in Abb. 1a—c schematisch dargestellten drei verschiedenen Bogenträger untersucht werden. Für alle drei Trägerformen gemeinschaftlich ist, daß die Zahl der Oeffnungen beliebig ist, und daß die Zwischenstützen von Säulen oder dergleichen gebildet werden, welche unten (im Fundament) eingespannt sind. Am oberen Ende einer Säule greift dann — außer dem lotrechten Druck — noch eine wagerechte Kraft an, gleich dem Unterschied zwischen den Horizontalschüben der beiden angrenzenden Bögen, und die Größe dieser Horizontalschübe wird daher zum Teil von dem elastischen Widerstand der Säulen gegen Ausbiegung bestimmt. Falls die Säule oben mit dem Träger starr verbunden ist, wird

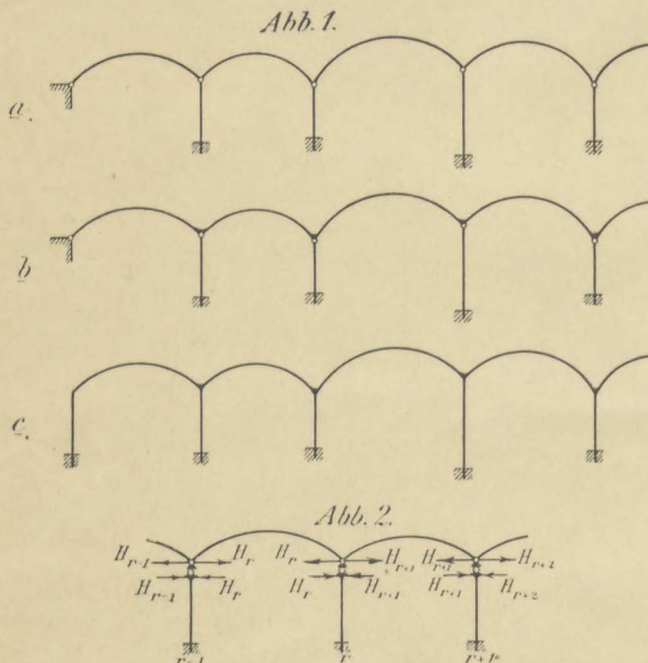
außerdem noch von einem elastischen Widerstand gegen Drehung die Rede sein. Dagegen soll die elastische Nachgiebigkeit der Säulen in lotrechter Richtung, welche im Verhältnis zu den übrigen Formänderungen von verschwindender Bedeutung ist, vernachlässigt werden.

Der Träger in Abb. 1a besteht aus einer Reihe einfacher Bögen, die sowohl unter sich wie mit den Säulen und Endpfeilern nur durch Gelenke verbunden sind; es sind nur die Horizontalschübe als überzählig vorhanden. Beim Träger in Abb. 1b sind die Bögen durchgehend, während ihre Verbindung mit den Säulen noch mittels Gelenke bewerkstelligt ist; außer den Horizontalschüben müssen hier noch die Stützenmomente als überzählig ein-

geführt werden. Endlich sind in Abb. 1c sämtliche Gelenke fortgelassen und so die Säulen und Träger miteinander starr verbunden. Wegen des Widerstandes der Säulen gegen Drehung werden hier die Schnittmomente unmittelbar rechts und links der Zwischenstützen verschieden, und es sind daher außer den Horizontalschüben zwei Kräftepaare an jeder Zwischenstütze und im Falle einer starren Verbindung an den Endpfeilern hier noch je eine solche als überzählig einzuführen.

Diese Bogenträger mit elastischen Pfeilern sind früher von Engesser (Zeitschr. f. Bauwesen, 1901, S. 311) rechnerisch, und speziell der Träger in Abb. 1c von Modesto Panetti (Reale Accademia delle Scienze di Torino, 1902) graphisch mit Hilfe der Culmann-Ritterschen Elastizitätseellipse behandelt worden.

An und für sich begegnet man keiner prinzipiellen Schwierigkeit bei der Berechnung dieser Trägerformen; die nötigen Elastizitätsgleichungen können nach dem gewöhnlichen Verfahren aufgestellt werden. Wenn indessen die Zahl der Oeffnungen nicht ganz gering ist, bekommt man so viele überzähligen Größen, daß die Ausführung der Berechnung sehr schwierig wird, und es erscheint



daher nicht unbegründet, in ähnlicher Weise wie für kontinuierliche Balken eine graphische Auflösung der Elastizitätsgleichungen zu versuchen; wie sich zeigen wird, kann eine solche Lösung durchgeführt werden entweder ausschließlich mittels derselben oder wenigstens mittels ganz ähnlicher Konstruktionen, wie der in meinen früheren beiden Arbeiten über kontinuierliche Balken (Z. 1905, Heft 1, und 1908, Heft 1) angewandten. Ueberhaupt sind diese graphischen Konstruktionen nur als graphische Lösungen der betreffenden Gleichungen aufzufassen, und sie können daher bei Behandlung ganz anderer Aufgaben wie derjenigen, für welche sie ursprünglich angegeben wurden, angewandt werden, wenn nur die Gleichungen dieselbe Form besitzen.

I. Der Bogenträger in Abb. 1a.

Hier sollen also alle Horizontalschübe als überzählig eingeführt werden, wodurch das in Abb. 2 gezeigte Hauptsystem erhalten wird. Der Horizontalschub im r -ten Felde — zwischen der $(r-1)$ -ten und der r -ten Säule — wird H_r genannt; in der Figur sind die Kräfte H für die Bögen und für die Säulen etwas verschoben gezeichnet, natürlich sollen sie aber als in derselben Linie wirkend

aufgefaßt werden. — Die Belastung $H_r = -1$ ist in Abb. 3 gezeigt; nur der r -te Bogen und die Säulen $(r-1)$ und r sind dadurch beansprucht; die Biegelinie mit den Ordinaten $\delta_{m,r}$, welche in bekannter Weise bestimmt werden können, ist unten in der Abbildung gezeigt.

Die Elastizitätsgleichungen haben die gewöhnliche Form:

$$1) 0 = \sum P_m \delta_{m,r} - H_1 \delta_{1,r} - H_2 \delta_{2,r} \dots - H_{r-1} \delta_{r-1,r} - H_r \delta_{r,r} - H_{r+1} \delta_{r+1,r} \dots + \delta_{r,t} + \delta_{r,u}.$$

Hierin bedeutet $\delta_{r,r}$ die Verschiebung des „Angriffspunktes“ von H_r in der Richtung $H_r = -1$ infolge von der Belastung $H_r = -1$; mit den Bezeichnungen:

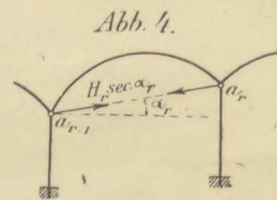
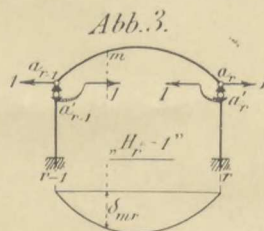
Δ_r^h = die gegenseitige Verschiebung der Punkte a_{r-1} , a_r in Abb. 3 voneinander weg, welche von der Belastung $H_r = -1$ hervorgerufen wird, und

k_{r-1}, k_r, \dots die wagerechten Ausbiegungen der obern Säulenden, die von einer wagerechten Kraft 1, im obern freien Endpunkt der unten eingespannten Säule angreifend, bewirkt werden, hat man:

$$2) \delta_{r,r} = k_{r-1} + \Delta_r^h + k_r.$$

Die Verschiebung $\delta_{k,r}$ des „Angriffspunktes“ von H_k , welche von der Belastung $H_r = -1$ bewirkt wird, läßt sich in ähnlicher Weise als eine Summe von drei Gliedern ausdrücken, wovon das eine vom Bogen, die beiden andern von den Säulen herrühren; da indessen, wie gesagt, von allen Bögen nur der r -te und von allen Säulen nur Nr. $(r-1)$ und r von der Belastung $H_r = -1$ beansprucht werden, muß sein:

$$3) \delta_{1,r} = 0, \delta_{2,r} = 0, \dots, \delta_{r-1,r} = -k_{r-1}, \delta_{r+1,r} = -k_r, \delta_{r+2,r} = 0, \dots,$$



und die Gleichung (1) vereinfacht sich daher zu:

$$4) -H_{r-1} k_{r-1} + H_r (k_{r-1} + \Delta_r^h + k_r) - H_{r+1} k_r = \sum P_m \delta_{m,r} + \delta_{r,t} + \delta_{r,u}.$$

Diese Gleichung hat genau dieselbe Form wie die gewöhnliche Clapeyronsche Gleichung für einen durchgehenden Balken mit festen Stützpunkten, und mithin muß es möglich sein, die unbekannten H hier mittels der bekannten, für den genannten durchgehenden Balken gültigen, graphischen Konstruktion zu bestimmen (Z. 1905, Heft 1). — Der Vollständigkeit halber sei bemerkt, daß die Stützpunkte der Bögen natürlich gar nicht in derselben Wagerechten zu liegen brauchen, wie anscheinend in Abb. 2–3 vorausgesetzt. Mit einer willkürlichen Höhenlage (Abb. 4) löst man wie gewöhnlich die Stützendrucke des Bogens nach der lotrechten und nach der Verbindungsgeraden $a_{r-1} a_r$ auf und führt die wagerechte Seitenkraft des letztgenannten Reaktionskomponenten als die überzählige ein; die Momente für die Belastung $H_r = -1$ werden dann als die lotrechten Ordinaten zwischen Bogen und Sehne gemessen, und hiermit wird die Biegelinie $\delta_{m,r}$ wie früher bestimmt.

Gleichung 4) hat, wie gesagt, die allgemeine Form:

$$5) a_r H_{r-1} + b_r H_r + c_r H_{r+1} = K_r,$$

und die graphische Lösung eines Systems solcher Gleichungen ist bekannt. Wenn die unbekannten H Stützmomente für einen durchgehenden Balken bedeuten, denkt man sich dieselben als Ordinaten in den Stützpunkten abgetragen, zieht die Verbindungsgeraden der

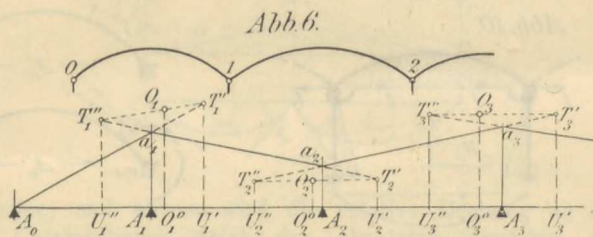
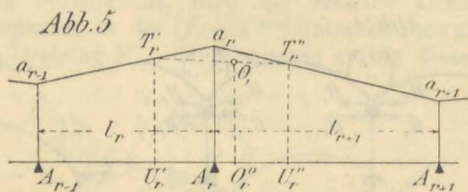
Endpunkte dieser Ordinaten und erhält somit einen Schlußlinienzug mit solchen Eigenschaften (die aufeinanderfolgenden Seiten sind zusammengehörige Linien einer gegebenen Homologie), daß derselbe konstruiert werden kann. — Das Verfahren ist kurz das folgende (Abb. 5, wo $\dots a_{r-1} a_r a_{r+1} \dots$ der gesuchte Schlußlinienzug ist). Man teilt den Koeffizienten b_r in zwei willkürliche Teile b'_r und b''_r , betrachtet a_r, b'_r, b''_r und c_r als lotrechte Kräfte, die in den Stützpunkten A_{r-1}, A_r, A_r und A_{r+1} angreifen, und bestimmt den Angriffspunkt U'_r für den Resultanten von a_r und b'_r , ebenso den Angriffspunkt U''_r für den Resultanten von b''_r und c_r und endlich den Angriffspunkt O_r für den Resultanten $a_r + b'_r + b''_r + c_r$ von allen vier Kräften. In dieser Weise ergibt sich:

$$6) \quad A_r U'_r = -\frac{a_r}{a_r + b'_r} l_r, \quad A_r U''_r = +\frac{c_r}{b''_r + c_r} l_{r+1},$$

$$A_r O_r = \frac{c_r l_{r+1} - a_r l_r}{a_r + b'_r + c_r},$$

wo die Abstände alle positiv nach rechts gerechnet wurden. Die Vertikalen in den U -Punkten schneiden dann den Schlußlinienzug in T'_r und T''_r (siehe Abb. 5), und endlich schneidet die Verbindungsgerade $T'_r T''_r$ auf der O -Vertikalen die bekannte Strecke

$$7) \quad O_r O_r = \frac{K_r}{a_r + b'_r + c_r}$$



ab. Hieraus folgt, wie genannt, daß die aufeinanderfolgenden Seiten $a_{r-1} a_r$ und $a_r a_{r+1}$ zusammengehörige Linien in einer Homologie sind, welche bestimmt ist durch O_r als Homologiezentrum, $A_r a_r$ als Achse und die U -Vertikalen als ein Paar homologer Linien. Indem nun die erste Seite des Schlußlinienzuges einen gegebenen Punkt (den ersten Stützpunkt) enthält, muß die zweite Seite durch den diesem entsprechenden Punkt gehen usw., und endlich muß die letzte Seite außer einem in dieser Weise konstruierten Punkte noch einen gegebenen Punkt (den letzten Stützpunkt) enthalten und kann also gezeichnet werden, wonach das ganze Polygon ohne weiteres rückwärts gezogen werden kann. — Beim praktischen Gebrauch wird die Konstruktion bekanntlich so geteilt, daß man zuerst mit Hilfe der festliegenden U - und O -Vertikalen eine Reihe ebenso von der Belastung unabhängiger J -Vertikalen (der ersten Stützenvertikalen entsprechend) herleitet und dann erst die spezielle Belastung (beim Auftragen der Strecken $O_r O_r$) einführt.

Wenn jetzt diese Konstruktion zur Lösung der Gleichungen 4) angewandt werden soll, muß man sich wie oben die gesuchten Größen als Ordinaten aufgetragen denken (Abb. 6, $A_1 a_1 = H_1, A_2 a_2 = H_2 \dots$) in einer Reihe von Punkten $A_1, A_2 \dots$, deren Abstände $A_0 A_1, A_1 A_2 \dots$ an und für sich beliebig gewählt werden können. Denkt man sich die Größen H als Stützenmomente eines durchgehenden Balkens, muß dieser Balken ebenso viele

Zwischenstützpunkte haben, wie der Bogenträger Öffnungen hat, und überdies eine Endstütze (A_0 und A_{n+1}) an jedem Ende. In Abb. 6 ist der Bogenträger oben angedeutet, der gedachte kontinuierliche Balken unten, und die Anordnung in der Figur ist so getroffen, daß man leicht sieht, zu welcher Öffnung des Bogenträgers ein unten in der Abbildung aufgetragenes H gehört. Die Konstruktion gestaltet sich am einfachsten, wenn die Feldweiten des gedachten kontinuierlichen Balkens gleich groß gewählt werden, $A_0 A_1 = A_1 A_2 = A_2 A_3 \dots = \lambda$, was daher im folgenden überall vorausgesetzt wurde. Dann findet sich nach 6):

$$8) \quad A_r O_r = \frac{k_{r-1} - k_r}{\Delta_r^h} \lambda \quad (\text{positiv nach rechts}).$$

Die Lage der U -Vertikalen wird verschieden, je nachdem man die Teilung des Koeffizienten $b_r = b'_r + b''_r$ in der einen oder der andern Weise vornimmt; recht einfache Verhältnisse ergeben sich, wenn gesetzt wird:

$$b'_r = k_{r-1} + \frac{k_{r-1}}{k_{r-1} + k_r} \Delta_r^h, \quad b''_r = k_r + \frac{k_r}{k_{r-1} + k_r} \Delta_r^h,$$

wodurch nämlich (nach 6):

$$9) \quad A_r U'_r = +\frac{k_{r-1} + k_r}{\Delta_r^h} \lambda = -A_r U''_r;$$

die beiden zu A_r gehörigen U -Punkte liegen hiernach gleich weit zu jeder Seite von A_r entfernt; man muß indessen besonders bemerken, daß im Gegensatz zu den Verhältnissen bei einem durchgehenden Balken U'_r rechts, U''_r links von A_r zu liegen kommt, während natürlich in der Homologie U'_r immerhin mit der Polygonseite $a_{r-1} a_r$ und U''_r mit $a_r a_{r+1}$ zusammenhängt. — Bei einigermaßen flachen Bögen und hohen Säulen*) werden die Größen k groß im Verhältnis zu Δ_r^h , und die durch 9) bestimmten U -Punkte liegen dann unbequem weit entfernt. In diesem Falle (und auch sonst oft) setzt man mehr praktisch:

$$9a) \quad \begin{cases} \text{entweder} & b'_r = k_{r-1}, & b''_r = \Delta_r^h + k_r, \\ \text{wodurch} & A_r U'_r = \infty, & A_r U''_r = -\frac{k_r}{\Delta_r^h} \lambda, \end{cases}$$

$$9b) \quad \begin{cases} \text{oder} & b'_r = k_{r-1} + \Delta_r^h, & b''_r = k_r, \\ \text{wodurch} & A_r U'_r = +\frac{k_{r-1}}{\Delta_r^h} \lambda, & A_r U''_r = \infty; \end{cases}$$

daß ein U -Punkt sich so ins Unendliche fernt, macht nämlich keine Schwierigkeiten hier, wo man nur die U -Vertikalen, nicht aber die darin liegenden charakteristischen Punkte (siehe Z. 1905, Heft 1) bei der Konstruktion braucht.

Endlich bekommt man nach 7):

$$10) \quad O_r O_r = \frac{1}{\Delta_r^h} (\Sigma P_m \delta_{mr} + \delta_{rl} + \delta_{ru});$$

das erste Glied ($\Sigma P_m \delta_{mr}$) ermittelt man mit Hilfe der Biegelinie (Abb. 3) oder, wenn es sich um eine einzelne gegebene Belastung dreht, vielleicht schneller durch:

$$\Sigma P_m \delta_{mr} = \int \frac{M_0 M_r}{EJ} ds + \int \frac{N_0 N_r}{EF} ds;$$

die Größen δ_{rl} und δ_{ru} setzen sich, ebenso wie oben (Gleichung 2) für δ_{rr} gezeigt, aus drei Gliedern zusammen und können dadurch in jedem einzelnen Falle leicht ermittelt werden.

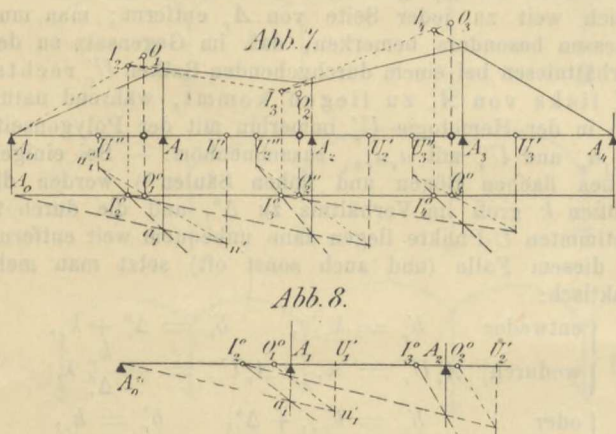
Die Ausführung der Konstruktion ist jetzt in Abb. 7 gezeigt. Die Punkte $A_0, A_1, A_2 \dots$ sind in konstantem Abstand λ voneinander gewählt, etwa gleich der mittlern Öffnungsweite, die O -Vertikalen werden nach 8), die

*) Allzuweit in dieser Richtung darf natürlich nicht gegangen werden, ohne die Aenderung der Spannweite und der Pfeilhöhe zu berücksichtigen (siehe die obengenannte Arbeit Engessers).

U -Vertikalen sind hier nach 9) eingelegt. Zuerst werden dann die J^0 -Punkte konstruiert; eine beliebige Gerade A_0a_1 schneidet die U_1 -Vertikale in u_1' , und mit dem Homologiezentrum in O_1^0 findet man den zu u_1' homologen Punkt u_1'' durch die Gerade $u_1'O_1^0u_1''$; die zu A_0a_1 homologe Linie ist dann a_1u_1'' und schneidet die Achse in J_2^0 ; durch Wiederholung dieser Konstruktion, mit einer beliebigen Geraden durch J_2^0 beginnend, findet man J_3^0 usw. — Nachdem jetzt die O -Ordinaten nach 10) aufgetragen sind, zieht man die Gerade A_0O_1 , welche die J_2 -Vertikale im Punkte J_2 der zweiten Seite schneidet, weiter führt J_2O_2 zum Punkte J_3 der dritten Seite usw., und wenn endlich der J -Punkt der letzten (in Abb. 7: der vierten) Seite gefunden ist, ist diese letzte Seite bestimmt, indem sie auch $A_{n+1}(A_4)$ enthalten muß, und das ganze Polygon kann dann rückwärts gezeichnet werden.

In Abb. 8 ist die Konstruktion der J -Vertikalen mit Hilfe der durch 9b) gegebenen U -Punkte ($AU'' = \infty$) gezeigt. Man hat hier nur die zu A_0a_1 homologe Linie zu $O_1^0u_1'$ parallel zu ziehen, sonst ist alles unverändert wie in Abb. 7.

Hiermit ist die Aufgabe für den in Abb. 1a gezeigten Träger gelöst; doch mögen hier noch einige Bemerkungen über die Anwendung der Konstruktion zur Bestimmung von Einflußlinien Platz finden. Diese



Bemerkungen gelten auch für die im folgenden behandelten Träger sowie für die verschiedenen Formen von durchgehenden Balken und überhaupt immer, wo diese graphische Auflösung der Elastizitätsgleichungen in Anwendung gebracht wird.

1. Man kann die einzelnen Einflußordinaten unmittelbar bestimmen, indem man als einzige Belastung eine Kraft 1 nach und nach in verschiedenen Punkten anbringt und die entsprechenden Schlußlinienzüge konstruiert; einer dieser Schlußlinienzüge liefert eine Ordinate jeder Einflußlinie.

2. Durch Auflösung der Elastizitätsgleichungen erhält man bekanntlich die Gleichungen der Einflußlinien in der Form:

$$11) \begin{cases} H_1 = \alpha_1 \delta_{m,1} + \alpha_2 \delta_{m,2} + \dots + \alpha_r \delta_{m,r} + \dots \\ H_r = \rho_1 \delta_{m,1} + \rho_2 \delta_{m,2} + \dots + \rho_r \delta_{m,r} + \dots \end{cases}$$

hier sind die Durchbiegungen $\delta_{m,1}, \delta_{m,2}, \dots, \delta_{m,r}, \dots$ bekannt oder können leicht ermittelt werden, die Größen $\alpha, \dots, \rho, \dots$ sind unveränderliche, die nur von den Koeffizienten der unbekannten in den Gleichungen 4) abhängen, und diese Größen können mittels der Konstruktion hier bestimmt werden. Setzt man nämlich in 11) $\delta_{m,1} = 1, \delta_{m,2} = \delta_{m,3} = \dots = \delta_{m,r} = 0$, sind die O -Punkte durch 7) gegeben, und wenn der diesen O -Punkten entsprechende Schlußlinienzug konstruiert wird, hat man die gefundenen Größen H :

$$H_1 = \alpha_1, H_2 = \beta_1, \dots, H_r = \rho_1, \dots$$

Nachdem man durch Wiederholung dieses Verfahrens alle die Unveränderlichen in 11) ermittelt hat, ist es eine rein mechanische Arbeit, die Einflußlinien durch Summation nach 11) zu bilden.

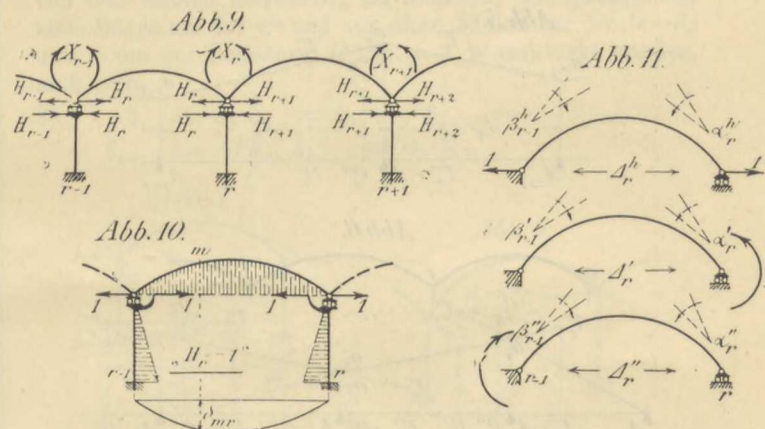
3. Endlich kann man ein statisch unbestimmtes Hauptsystem benutzen und vorläufig nur z. B. H_r als überzählig einführen. Die Gleichung der H_r -Linie ist

$$\text{dann bekanntlich } H_r = \frac{\delta_{m,r}}{\delta_{r,r}}, \text{ wo jetzt } \delta_{m,r} \text{ und } \delta_{r,r}$$

dem statisch unbestimmten Hauptsystem entsprechen. Man setzt $H_r = -1$ und bestimmt die dadurch hervorgebrachten Werte der übrigen Horizontalschübe, indem man die graphische Konstruktion hier auf jeden der beiden voneinander unabhängigen Bogenträger anwendet, von welchen das statisch unbestimmte Hauptsystem besteht. Wenn alle diese H -Größen bekannt sind, können die Biegelinie $\delta_{m,r}$ und die Verschiebung $\delta_{r,r}$ bestimmt werden. Dies letztere Verfahren paßt doch augenscheinlich weniger gut zu der übrigen Konstruktion und darf kaum vorgezogen werden, es sei denn, daß man nur eine einzige der H -Linien braucht.

II. Der Bogenträger in Abb. 1b.

Außer den Horizontalschüben sollen hier also die Stützenmomente als überzählig eingeführt werden, und das



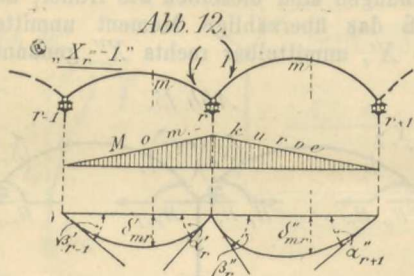
Hauptsystem (Abb. 9) wird dann dasselbe wie in der vorigen Untersuchung. Die Horizontalschübe werden wie oben mit H_1, H_2, \dots bezeichnet, die Stützenmomente wie in Abb. 9 angegeben mit X_0, X_1, X_2, \dots

Die Belastung $H_r = -1$ ist in Abb. 10 gezeigt; nur der r te Bogen und die Säulen $(r-1)$ und r sind dadurch beansprucht. Die Biegelinie $\delta_{m,r}$ ist dieselbe wie bei der vorigen Aufgabe, ebenso die Größen $\delta_{1,r}, \delta_{2,r}, \dots$, welche daher durch 2) und 3) gegeben sind; letztere Größen sind also alle Null außer $\delta_{r-1,r}, \delta_{r,r}$ und $\delta_{r+1,r}$. Die Glieder der H_r entsprechenden Elastizitätsgleichung, welche die Größen δ enthalten, sind dann genau dieselben wie in Gleichung 4). — Die Koeffizienten der Größen X in derselben Elastizitätsgleichung bedeuten die von der Belastung $H_r = -1$ bewirkten gegenseitigen Drehungen der Tangentenpaare (von den Tangenten in den Bogenstützpunkten gebildet), auf welche die Momente X wirken. Da, wie gesagt, nur der r te Bogen von $H_r = -1$ beansprucht wird, sind die Koeffizienten von X_{r-1} und X_r die einzigen, die nicht Null werden.

Um diese Drehungen (und ebenso die Koeffizienten der Ueberzähligen in der X_r entsprechenden Elastizitätsgleichung) in einfacher Weise ausdrücken zu können, wollen wir gleich einige Bezeichnungen einführen (Abb. 11). Für den r ten Bogen soll die Verlängerung der Sehne $(r-1)-r$ (doch immer in wagerechter Richtung) durch Δ_r bezeichnet werden, und speziell sollen die Bezeichnungen Δ_r^h, Δ_r^v oder

Δ_r'' gebraucht werden, je nachdem die Verlängerung durch die Belastung $H_r = -1$, durch ein Moment 1 im rechten Endpunkt des Bogens angreifend, oder durch ein Moment 1 im linken Endpunkt bewirkt wird. Ebenso für den r^{ten} Bogen soll die absolute Drehung der Tangente im Stützpunkte $(r-1)$ durch β_{r-1} und die Drehung der Tangente im Stützpunkte r durch α_r bezeichnet werden (β bedeutet also immer eine Drehung am linken, α am rechten Ende eines Bogens), und die Ursache der Drehung soll in derselben Weise wie oben angegeben werden; somit bezeichnen β_{r-1}^h und α_r^h die von $H_r = -1$, β_{r-1}' und α_r' die vom Moment 1 am rechten Ende, und β_{r-1}'' und α_r'' die vom Momente 1 am linken Ende hervorgerufenen Drehungen. Diese Bezeichnungen sollen auch bei Behandlung der Träger in Abb. 1c benutzt werden, und fallen dort vielleicht etwas natürlicher, indem der Ursprung des einzelnen oder doppelten obren Striches ($\alpha', \alpha'' \dots$) unmittelbar einleuchtet als der Belastung $X' = -1$ oder $X'' = -1$ entsprechend; die Bezeichnungen X_r' und X_r'' werden nämlich dort für die Schnittmomente unmittelbar links und rechts der r^{ten} Stütze gebraucht. — Die positive Richtung sämtlicher Verschiebungen ist wie gewöhnlich durch die Richtung der Belastung $H = -1$ oder $X = -1$ gegeben, welcher sie entsprechen. Infolge von der bekannten Gegenseitigkeit ist $1 \cdot \Delta_r' = 1 \cdot \alpha_r^h$ und $1 \cdot \Delta_r'' = 1 \cdot \beta_{r-1}^h$.

Indem jetzt die Belastung $H_r = -1$ nur den r^{ten} Bogen beansprucht, wird die relative Drehung des Tangentenpaares an der $(r-1)^{\text{ten}}$ Unterstüttung gleich der absoluten Drehung β_{r-1}^h der Tangente rechts dieser Unter-



stützung, und ebenso wird die relative Drehung an der r^{ten} Unterstüttung gleich der absoluten Drehung der Tangente links der r^{ten} Stütze. Die H_r entsprechende Elastizitätsgleichung lautet daher, indem der obere Index h auch den Größen $\delta_{m,r}$, $\delta_{r,t}$ und $\delta_{r,u}$ hinzugefügt wird:

$$12) \quad \begin{cases} -H_{r-1}k_{r-1} + H_r(k_{r-1} + \Delta_r^h + k_r) - H_{r+1}k_r \\ + X_{r-1}\beta_{r-1}^h + X_r\alpha_r^h = \Sigma P_m \delta_{m,r}^h + \delta_{r,t}^h + \delta_{r,u}^h. \end{cases}$$

Durch die Belastung $X_r = -1$, die in Abb. 12 gezeigt ist, werden nur der r^{te} und der $(r+1)^{\text{te}}$ Bogen, und die Säulen gar nicht, beansprucht. Die entsprechende Elastizitätsgleichung kann dann sofort aufgeschrieben werden und lautet (mittels der eingeführten Bezeichnungen):

$$13) \quad \begin{cases} X_{r-1}\beta_{r-1} + X_r(\alpha_r' + \beta_r') + X_{r+1}\alpha_{r+1}' + H_r\Delta_r' \\ + H_{r+1}\Delta_{r+1}' = \Sigma P_m \delta_{m,r}' + \Sigma P_m \delta_{m,r}' \\ + \delta_{r,t}' + \delta_{r,t}' + \delta_{r,u}' + \delta_{r,u}'. \end{cases}$$

Die Bedeutung der Größen $\delta_{m,r}'$ und $\delta_{m,r}''$ als Durchbiegungen im Felde links und rechts der r^{ten} Stütze geht aus Abb. 12 hervor; $\delta_{r,t}'$ und $\delta_{r,t}''$ bezeichnen die von einer Temperaturänderung hervorgerufenen absoluten Drehungen der Tangenten (im Hauptsystem) links und rechts der r^{ten} Stützen, und $\delta_{r,u}'$ und $\delta_{r,u}''$ haben analoge Bedeutungen.

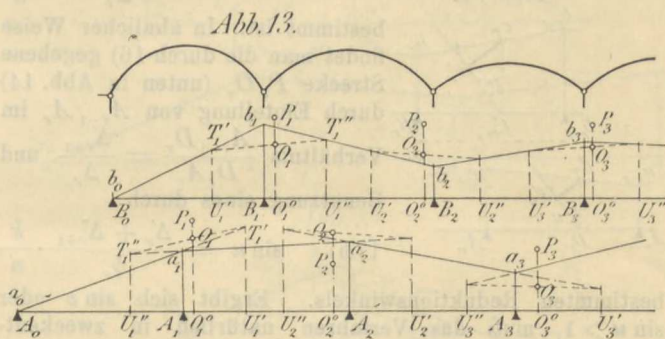
Von Elastizitätsgleichungen der Form 12) hat man eine für jede Öffnung und von Gleichungen der Form 13) eine für jede Zwischenstütze. Wenn die von lauter bekannten Gliedern bestehenden Ausdrücke der rechten Seiten mit K_r und L_r bezeichnet werden, können die Gleichungen geschrieben werden:

$$12a) \quad \begin{cases} -H_{r-1}k_{r-1} + H_r(k_{r-1} + \Delta_r^h + k_r) - H_{r+1}k_r \\ = K_r - X_{r-1}\beta_{r-1}^h - X_r\alpha_r^h, \\ 13a) \quad \begin{cases} X_{r-1}\beta_{r-1} + X_r(\alpha_r' + \beta_r') + X_{r+1}\alpha_{r+1}' \\ = L_r - H_r\Delta_r' - H_{r+1}\Delta_{r+1}', \end{cases} \end{cases}$$

und wir sollen jetzt zeigen, wie man zu einer graphischen Bestimmung aller unbekannten H und X hierin gelangen kann.

In Abb. 13 sind die unbekannten X als Ordinaten $B_1b_1 = X_1$, $B_2b_2 = X_2 \dots$ abgetragen, so daß die Bestimmung der X -Größen mit der Zeichnung des Schlußlinienzuges $b_0b_1b_2 \dots$ gleichbedeutend ist, und unten in derselben Abbildung ist $A_1a_1 = H_1$, $A_2a_2 = H_2 \dots$, so daß die H -Werte durch den Schlußlinienzug $a_0a_1a_2 \dots$ bestimmt sind. Falls die rechten Seiten der Gleichungen 12a) und 13a) nur bekannte Glieder enthalten hätten, wären die beiden Schlußlinienzüge voneinander unabhängig und könnten jeder für sich durch die einfache Konstruktion bestimmt werden, die für kontinuierliche Balken auf feste Stützen gilt, und die oben für den Bogenträger in Abb. 1a angewandt wurde; die linke Seite in 12a) ist wörtlich dieselbe wie in 4) oben, und die linke Seite in 13a) dieselbe wie in den Gleichungen für einen gewöhnlichen durchgehenden Balken.

Da nun die rechten Seiten der Gleichungen hier auch einige unbekannten Größen enthalten, wird die graphische Konstruktion nicht dermaßen einfach, was sich namentlich dadurch zeigt, daß die beiden Schlußlinienzüge voneinander



abhängig werden; nichtsdestoweniger kann man doch bei derselben Konstruktion prinzipiell festhalten. Durch die rechten Seiten der Gleichungen sind nämlich nur die Ordinaten der O -Punkte (siehe Gleichung 7) bestimmt und diese können also hier nicht als im voraus gegeben betrachtet werden; aber alle übrigen Glieder der Konstruktion, und namentlich die Lage der U - und O -Vertikalen, hängen nur von den Koeffizienten der linken Seiten ab. Für beide Schlußlinienzüge hat man daher dieselbe geometrische Abhängigkeit zwischen den aufeinander folgenden Seiten wie früher, nur sind die O -Ordinaten hier nicht bekannt, selbst wenn die Belastung gegeben ist.

Für das X -Polygon legt man die U - und O -Vertikalen ein mittels der folgenden von 6) abgeleiteten Ausdrücke:

$$14) \quad \begin{cases} B_r U_r' = -\frac{\beta_{r-1}'}{\beta_{r-1}' + \alpha_r'} l_r, & B_r U_r'' = +\frac{\alpha_{r+1}''}{\beta_r' + \alpha_{r+1}''} l_{r+1} \\ B_r O_r' = \frac{\alpha_{r+1}' l_{r+1} - \beta_{r-1}' l_r}{\beta_{r-1}' + \alpha_r' + \beta_r' + \alpha_{r+1}'}; \end{cases}$$

für das H -Polygon hat man hierzu die oben angegebenen Abstände 8) und 9) — 9b).

Die Ordinaten der O -Punkte können in zwei Teile $O_r^0 O_r = O_r^0 P_r + P_r O_r$ geteilt werden. Durch Anwendung von 7) auf 12a) und 13a) ergibt sich:

$$15) \quad \begin{cases} \text{für das } H\text{-Polygon:} \\ O_r^0 P_r = \frac{K_r}{\Delta_r^h}, & P_r O_r = -\frac{X_{r-1}\beta_{r-1}^h + X_r\alpha_r^h}{\Delta_r^h}, \end{cases}$$

für das X -Polygon:
 16)
$$O_r P_r = \frac{L_r}{\psi_r}, P_r O_r = -\frac{H_r \Delta_r + H_{r+1} \Delta_{r+1}}{\psi_r},$$
 indem $\beta'_{r-1} + \alpha'_r + \beta''_r + \alpha''_{r+1}$ der Kürze halber gleich ψ_r gesetzt wurde. Die P -Punkte sind nur von gegebenen Größen abhängig und können also sofort eingelegt werden; dagegen sind die Strecken $P_r O_r$ im H -Polygone von den unbekannten X , im X -Polygone von den unbekannten H abhängig.

In der folgenden Konstruktion hat man nötig, in einfacher Weise die Strecken PO bestimmen zu können, wenn die H - und X -Polygone bekannt sind, und diese Bestimmung sollte gern rein mechanisch ausgeführt werden können, ohne Ablesung auf einem Maßstabe. Am einfachsten ist es wohl, um die durch 15) gegebene Strecke PO zu konstruieren, wie in Abb. 14 die Feldweite $B_{r-1} B_r$ im Verhältnis $1 = \frac{\alpha_r^n B_{r-1} C_r}{\beta_r^n C_r B_r}$ zu teilen, wodurch $C_r c_r = \frac{\beta_{r-1}^n X_{r-1} + \alpha_r^n X_r}{\beta_{r-1}^n + \alpha_r^n}$, so daß nur übrig bleibt, mit $\frac{\beta_{r-1}^n + \alpha_r^n}{\Delta_r^h}$ zu multiplizieren.

Wenn man mit den Einheiten Tons und Meter rechnet, und wenn die Maßstäbe im H -Polygon $1^{\text{cm}} \sim k^t$, im X -Polygon $1^{\text{cm}} \sim n^{\text{mt}}$ sind, kann diese Multiplikation z. B. mit Hilfe eines Reduktionswinkels, wie in der Abb. 14 (oben) angedeutet, ausgeführt werden, und man findet dann $P_r O_r = c_r c'_r$, wenn die Gerade $C_r c'_r$ durch

Abb. 14. 17a)
$$\sin v = \frac{\beta_{r-1}^n + \alpha_r^n}{\Delta_r^h} \cdot \frac{n}{k}$$
 bestimmt ist. In ähnlicher Weise findet man die durch 16) gegebene Strecke $P_r O_r$ (unten in Abb. 14) durch Einteilung von $A_{r-1} A_r$ im Verhältnis $\frac{A_{r-1} D_r}{D_r A_r} = \frac{\Delta_{r+1}^h}{\Delta_r^h}$ und Benutzung eines durch
 17b)
$$\sin u = \frac{\Delta_r^h + \Delta_{r+1}^h}{\psi_r} \cdot \frac{k}{n}$$
 bestimmten Reduktionswinkels. Ergibt sich $\sin v$ oder $\sin u > 1$, muß das Verfahren natürlich in zweckentsprechender Weise abgeändert werden. — Anscheinend vielleicht umständlicher, in der Ausführung jedoch empfehlenswerter, weil zu weniger Ueberfüllung der Figuren Anlaß gebend, ist die unten (in Abb. 20–21) für den Träger in Abb. 1c angegebene analoge Konstruktion. Hauptsache ist, daß man die Strecken $P_r O_r$ in solcher Weise findet, daß man dieselbe ohne weiteres mit dem Zirkel vom X -Polygone zum H -Polygone und umgekehrt übertragen kann. — Noch sei bemerkt, daß die Hilfskonstruktion in Abb. 14 nur vom Verhältnis zwischen Kräften- und Momentenmaßstab abhängt, so daß eine Vergrößerung oder Verkleinerung der Ordinaten im H - und X -Polygone in demselben Verhältnis nichts ändert.

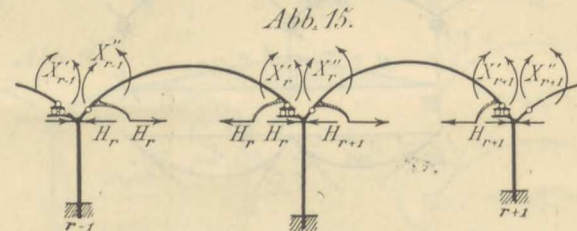
Indem wir uns jetzt zur Konstruktion der Schlußlinienzüge wenden, wird sich zeigen, daß diese sich in ganz ähnlicher Weise durchführen läßt wie bei kontinuierlichen Trägern mit elastisch senkbaren Stützen. Dies geht erstens daraus hervor, daß die beiden Schlußlinienzüge konstruiert werden können, falls man nur die beiden ersten Seiten ($a_0 a_1$ und $b_0 b_1$ in Abb. 13) kennt. Aus 15) sieht man nämlich, daß der O_1 -Punkt im H -Polygone nur von X_0 und X_1 abhängt und daher durch die Konstruktion in Abb. 14 aus der gegebenen Seite $b_0 b_1$ hergeleitet werden kann, und sobald dieser Punkt bekannt ist, kann die zweite Seite im H -Polygone $a_1 a_2$ gezogen werden (mittels der Geraden $T_1 O_1 T_1'$, Abb. 13). Darauf wird die Seite $b_1 b_2$ im X -Polygone konstruiert, indem der O_1 -Punkt hier nur von den jetzt bekannten H_1 und H_2 abhängt (siehe 16), und also aus $a_1 a_2$ hergeleitet werden kann.

Sodann geht man zum H -Polygone zurück und findet $a_2 a_3$, dann $b_2 b_3$ im X -Polygone usw.; in dieser Weise kann fortgesetzt werden bis zum rechten Ende.

Weiter geht noch die Uebereinstimmung zwischen der Konstruktion hier und derjenigen für kontinuierliche Balken mit elastisch senkbaren Stützen unmittelbar aus den Gleichungen hervor. Wenn man hier die Unbekannten in der Reihenfolge $\dots H_{r-1}, X_{r-1}, H_r, X_r, \dots$ nennt, sieht man, daß die Gleichungen 12a) und 13a) nur je fünf aufeinander folgende der Unbekannten enthalten, genau wie bei den genannten kontinuierlichen Trägern. Das nähere Ausformen der Konstruktion ist daher auch dem in meiner frühern Abhandlung (Z. 1908, Heft 1) angegebenen ganz analog, und was die Einzelheiten anbelangt, muß es daher genügen, um Wiederholungen zu vermeiden, zu der unten angegebenen Behandlung des Trägers in Abb. 1c zu verweisen; der Träger hier ist natürlich nur ein spezieller Fall desjenigen in Abb. 1c (alle Säulen-Momente $\Delta X = 0$).

III. Der Bogenträger in Abb. 1c.

Außer den Horizontaldrücken führt man hier, wie schon oben gesagt, zwei Stützenmomente bei jeder Zwischenstütze als überzählig ein, und das Hauptsystem besteht dann wie bei den beiden schon untersuchten Trägern aus einer Reihe unten eingespannter, sonst aber freistehender Säulen und einer Reihe voneinander unabhängiger, einfacher (krummer) Balken. Das Hauptsystem mit den Ueberzähligen als äußern Kräften ist in Abb. 15 gezeigt; die Bezeichnungen sind dieselben wie früher, nur mit dem Zusatz, daß das überzählige Moment unmittelbar links einer Säule X' , unmittelbar rechts X'' genannt wird.



Die Belastung $H_r = -1$ beansprucht wie früher (Abb. 10) nur den r^{ten} Bogen und die Säulen ($r-1$) und r ; im ganzen kann die genannte Abbildung unverändert auch hier benutzt werden. In der $H_r = -1$ entsprechenden Elastizitätsgleichung bleiben daher die Glieder, welche die Größen H enthalten, genau dieselben wie in Gleichung 12) für den Träger in Abb. 1b, und dasselbe gilt von dem von den äußern Kräften herrührenden Gliede $\sum P_m \delta_{m,r}$. Von Gliedern, welche die Größen X enthalten, bekommt man, indem die Winkel α und β , und im ganzen alle Bezeichnungen in Abb. 11, mit genau den frühern Bedeutungen gebraucht werden, $X'_{r-1} \beta_{r-1}^h + X_r \alpha_r^h$; die in den Endquerschnitten des beanspruchten (r^{ten}) Bogens angreifenden Momente heißen ja jetzt X'_{r-1} und X_r , während dieselben Größen beim vorigen Träger nur mit X_{r-1} und X_r bezeichnet wurden. Außer diesen Gliedern erhält man indessen hier auch einige Beiträge von den Momenten

18) $\Delta X_{r-1} = X'_{r-1} - X_{r-1}$ und $\Delta X_r = X'_r - X_r$, die auf die freien Säulenenden einwirken. Entsprechend den in Abb. 11 für die Bögen angegebenen sollen für die Formänderungen der Säulen die in Abb. 16 eingetragenen Bezeichnungen benutzt werden; eine im obern Endpunkt der Säule angreifende wagerechte Kraft 1 bewirkt eine wagerechte Ausbiegung k und eine Drehung der Endtangente ϑ , ein ebenda angreifendes Moment 1 eine wagerechte Ausbiegung q und eine Drehung der Tangente τ ; bekanntlich ist dann:

19)
$$1 \cdot q_r = 1 \cdot \vartheta_r.$$

Mit diesen Bezeichnungen lautet jetzt die $H_r = -1$ entsprechende Elastizitätsgleichung:

$$20) \quad \begin{cases} -H_{r-1}k_{r-1} + H_r(k_{r-1} + \Delta_r^h + k_r) - H_{r+1}k_r \\ = \Sigma P_m \delta_{m,r}^h - \Delta X_{r-1} \vartheta_{r-1} - X_{r-1}' \beta_{r-1}^h - X_r' \alpha_r^h \\ + \Delta X_r \vartheta_r + \delta_{r,t}^h + \delta_{r,u}^h. \end{cases}$$

Die Belastung $X_r' = -1$ ist in Abb. 17 gezeigt; der r te Bogen ist von einem Moment 1 im rechten Endquerschnitt, und die r te Säule von einem entgegengesetzt drehenden Kräftepaare 1 beansprucht; die Durchbiegungen $\delta_{m,r}$ (und die Tangentenwinkel α und β) sind dieselben wie in Abb. 12 für die Öffnung $(r-1) - r$. Mit den Bezeichnungen in Abb. 11 und 16 gelangt man zu der Elastizitätsgleichung:

$$21) \quad \begin{cases} X_{r-1}' \beta_{r-1}^h + X_r' \alpha_r^h + \Delta X_r \tau_r = \Sigma P_m \delta_{m,r}^h - H_r \Delta_r' \\ + (H_r - H_{r+1}) q_r + \delta_{r,t}^h + \delta_{r,u}^h, \end{cases}$$

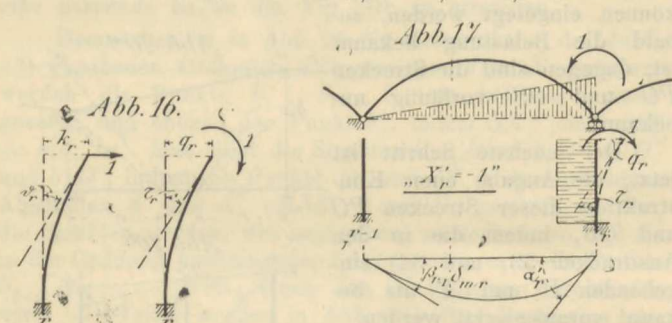
und ebenso erhält man für die Belastung $X_r'' = -1$ die Gleichung:

$$22) \quad \begin{cases} X_r'' \beta_r^h + X_{r+1}' \alpha_{r+1}^h - \Delta X_r \tau_r = \Sigma P_m \delta_{m,r}^h - H_{r+1} \Delta_{r+1}' \\ - (H_r - H_{r+1}) q_r + \delta_{r,t}^h + \delta_{r,u}^h, \end{cases}$$

wo die Durchbiegungen $\delta_{m,r}$ und die Tangentenwinkel α und β dieselben wie in Abb. 12 rechts sind.

Mit den Abkürzungen:

$$23) \quad \begin{cases} K_r = \Sigma P_m \delta_{m,r}^h + \delta_{r,t}^h + \delta_{r,u}^h \\ L_r = \Sigma P_m \delta_{m,r}^h + \delta_{r,t}^h + \delta_{r,u}^h \\ L_r' = \Sigma P_m \delta_{m,r}^h + \delta_{r,t}^h + \delta_{r,u}^h \end{cases}$$



lassen sich die drei gefundenen Gleichungen folgendermaßen schreiben:

$$20a) \quad \begin{cases} -H_{r-1}k_{r-1} + H_r(k_{r-1} + \Delta_r^h + k_r) - H_{r+1}k_r \\ = K_r - [\Delta X_{r-1} \vartheta_{r-1} + X_{r-1}' \beta_{r-1}^h + X_r' \alpha_r^h - \Delta X_r \vartheta_r], \end{cases}$$

$$21a) \quad \begin{cases} \Delta X_r \tau_r = (L_r - [H_r \Delta_r' - (H_r - H_{r+1}) q_r]) \\ - [X_{r-1}' \beta_{r-1}^h + X_r' \alpha_r^h], \end{cases}$$

$$22a) \quad \begin{cases} -\Delta X_r \tau_r = (L_r - [H_{r+1} \Delta_{r+1}' + (H_r - H_{r+1}) q_r]) \\ - [X_r'' \beta_r^h + X_{r+1}' \alpha_{r+1}^h]. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen hat dieselbe Form wie 12a) für den Träger in Abb. 1b; nur die beiden Glieder mit ΔX sind hier neu hinzugekommen. Durch Addition der beiden letztern Gleichungen ergibt sich:

$$24) \quad \begin{cases} X_{r-1}' \beta_{r-1}^h + X_r' \alpha_r^h + X_r'' \beta_r^h + X_{r+1}' \alpha_{r+1}^h \\ = L_r + L_r' - H_r \Delta_r' - H_{r+1} \Delta_{r+1}', \end{cases}$$

welche Gleichung sich nur dadurch von 13a) unterscheidet, daß X_r hier in zwei Teile, X_r' und X_r'' , zerlegt erscheint. Im ganzen gelangt man also zu den für den Träger in Abb. 1b geltenden Gleichungen, wenn alle ΔX gleich Null gesetzt werden.

Gelegentlich der graphischen Lösung denkt man sich wie früher die gesuchten Größen in Abb. 18 als Ordinaten aufgetragen: $B_0 b_0' = X_0'$, $B_1 b_1' = X_1'$, $B_1 b_1'' = X_1''$ usw., so daß die Bestimmung der Größen X mit der Festlegung des Schlußlinienzuges $b_0' b_1' b_2' b_3' \dots$ gleichbedeutend ist (die plötzlichen Sprünge $b_1' b_1''$, $b_2' b_2'' \dots$ geben die Werte von ΔX an); und $A_1 a_1 = H_1$, $A_2 a_2 = H_2 \dots$, so daß der Schlußlinienzug $a_0 a_1 a_2 \dots$ die Horizontalschübe bestimmt. Falls die X -Größen nicht in 20a) vorkämen,

könnte das H -Polygon $a_0 a_1 a_2 \dots$ für sich konstruiert werden (wie für den Träger in Abb. 1a), und falls die Horizontalschübe nicht in 21a)—22a) aufträten, würden diese Gleichungen genau identisch mit denjenigen sein, die für kontinuierliche Balken mit elastisch drehbaren Stützen gelten, und das X -Polygon würde sich dann mittels der früher (Z. 1905, Heft 1) für solche Balken angegebenen Konstruktion bestimmen lassen.

Da diese Konstruktion im folgenden benutzt werden soll, wird es am Platze sein, hier zuerst von deren Hauptzügen zu erinnern. Wir denken uns in 21a)—22a) die H enthaltenden Glieder mit L_r und L_r' zusammengezogen und schreiben dann diese Gleichungen:

$$25) \quad \begin{cases} \Delta X_r \tau_r = N_r' - [X_{r-1}' \beta_{r-1}^h + X_r' \alpha_r^h], \\ -\Delta X_r \tau_r = N_r'' - [X_r'' \beta_r^h + X_{r+1}' \alpha_{r+1}^h], \end{cases}$$

wo N_r' und N_r'' als bekannt aufgefaßt werden. In Abb. 19 ist ein Teil des Schlußlinienzuges $\dots b_{r-1}' b_r' b_r'' b_{r+1}' \dots$ gezeigt. Es sind dieselben U - und O -Vertikalen eingelegt, die für kontinuierliche Balken mit festen Stützpunkten benutzt werden (d. h. die durch 6) gegebenen), wenn hierin

Abb. 18.

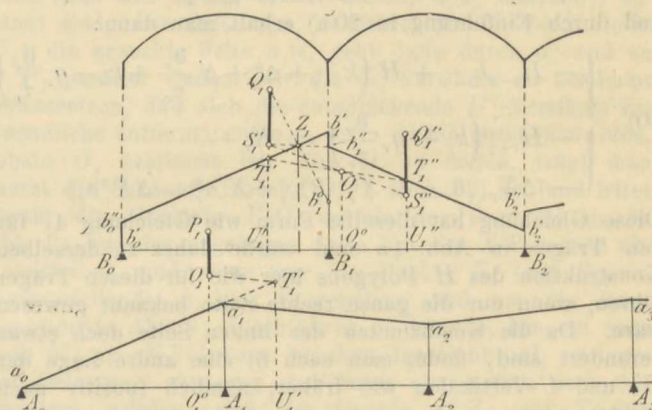
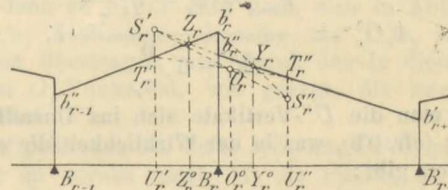


Abb. 19.



$\alpha_r = \beta_{r-1}'$, $b_r' = \alpha_r'$, $b_r'' = \beta_r''$, $c_r = \alpha_{r+1}'$ gesetzt wird), oder also mit den Bezeichnungen hier:

$$26) \quad \begin{cases} B_r U_r' = -\frac{\beta_{r-1}'}{\beta_{r-1}' + \alpha_r'} l_r, \\ B_r U_r'' = +\frac{\alpha_{r+1}'}{\beta_r'' + \alpha_{r+1}'} l_{r+1}, \\ B_r O_r = \frac{\alpha_{r+1}' l_{r+1} - \beta_{r-1}' l_r}{\beta_{r-1}' + \alpha_r' + \beta_r'' + \alpha_{r+1}'}, \end{cases}$$

wo die Abstände positiv nach rechts gerechnet sind. Weiter sind die charakteristischen Punkte S_r' und S_r'' und der O_r -Punkt durch:

$$27) \quad \begin{cases} U_r' S_r' = \frac{N_r'}{\beta_{r-1}' + \alpha_r'}, & U_r'' S_r'' = \frac{N_r''}{\beta_r'' + \alpha_{r+1}'}, \\ O_r O_r = \frac{N_r' + N_r''}{\beta_{r-1}' + \alpha_r' + \beta_r'' + \alpha_{r+1}'} \end{cases}$$

aufgetragen; anstatt den O -Punkt mittels der nach 27) berechneten Ordinate zu bestimmen, könnte man denselben auch als Schnittpunkt der Verbindungsgeraden $S_r' S_r''$ (siehe Abb. 19) mit der O -Vertikalen finden. Endlich sind die Z - und Y -Vertikalen mittels:

$$28) \quad \frac{B_r Z_r^0}{Z_r^0 U_r} = \frac{\beta_{r-1}' + \alpha_r'}{\tau_r}, \quad \frac{B_r Y_r^0}{Y_r^0 U_r} = \frac{\beta_r'' + \alpha_{r+1}'}{\tau_r}$$

eingelegt, und man hat dann mit den Bezeichnungen in Abb. 19, daß die Geraden $S'_r Z'_r$ und $S''_r Y_r$ die Stützenvertikale in den Punkten b'_r und b''_r treffen, und daß die Verbindungsgerade $T'_r T''_r$ durch O_r geht. Wenn eine willkürliche Seite des Schlußlinienzuges bekannt ist, kann mittels dieses geometrischen Zusammenhangs die folgende Seite konstruiert werden: $S'_r Z'_r$ führt zu b'_r und $T'_r O_r$ zu T''_r .

Indem wir jetzt zum Bogenträger zurückkehren, wird sich zeigen, daß wir hier einen ähnlichen Zusammenhang zwischen den H - und X -Polygonen wie beim Träger in Abb. 1 b erhalten, und namentlich, daß man beide Polygone konstruieren kann, sobald die beiden ersten Seiten ($a_0 a_1$ und $b'_0 b'_1$ in Abb. 18) bekannt sind. Um zu diesem Ergebnis zu gelangen, wird es praktisch sein — wenn auch nicht absolut notwendig*) — zuerst die Gleichung 20 a) so umzuformen, daß sie ΔX_r nicht enthält. Mit der abkürzenden Bezeichnung:

$$29) \quad \Delta X_r \tau_r = L'_r - [X''_{r-1} \beta_{r-1} + X'_r \alpha'_r]$$

läßt sich 21 a) schreiben:

$$\Delta X_r \tau_r = -H_r \Delta'_r + (H_r - H_{r+1}) q_r + \Delta X_r \tau_r,$$

und durch Einführung in 20 a) erhält man dann:

$$30) \quad \begin{cases} -H_{r-1} k_{r-1} + H_r (k_{r-1} + \Delta'_r + \Delta'_r \frac{\theta_r}{\tau_r} + k_r - q_r \frac{\theta_r}{\tau_r}) \\ -H_{r+1} (k_r - q_r \frac{\theta_r}{\tau_r}) = K_r - \\ -[\Delta X_{r-1} \theta_{r-1} + X''_{r-1} \beta_{r-1} + X'_r \alpha'_r - \Delta X_r \theta_r]. \end{cases}$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form wie Gleichung 4) für den Träger in Abb. 1 a und würde daher zu derselben Konstruktion des H -Polygons hier wie für diesen Träger führen, wenn nur die ganze rechte Seite bekannt gewesen wäre. Da die Koeffizienten der linken Seite doch etwas verändert sind, findet man nach 6) eine andre Lage der O - und U -Vertikalen wie früher, nämlich (positiv nach rechts):

$$31) \quad A_r O_r^0 = \frac{k_{r-1} - k_r + q_r \frac{\theta_r}{\tau_r}}{\Delta'_r + \Delta'_r \frac{\theta_r}{\tau_r}} \cdot \lambda,$$

und wenn man die U'' -Vertikale sich ins Unendliche entfernen läßt (cfr. 9 b), was in der Wirklichkeit die einfachste Konstruktion gibt:

$$32) \quad A_r U'_r = \frac{k_{r-1}}{\Delta'_r + \Delta'_r \frac{\theta_r}{\tau_r}} \cdot \lambda.$$

Im folgenden gehen wir jetzt von 30) samt 21 a)–22 a) aus. Nach 30) könnte das H -Polygon konstruiert werden, wenn die ganze rechte Seite, und damit die Ordinaten der O -Punkte, bekannt wäre, und nach 21 a)–22 a) könnte ebenso das X -Polygon gezeichnet werden, falls nur die Größen H auf der rechten Seite, und damit die charakteristischen Punkte (siehe 27), bekannt. Jetzt kennt man indessen nicht diese Größen im voraus, und wir beginnen daher wie früher damit, die Ordinaten der O -Punkte und der charakteristischen Punkte in zwei Teile, einen bekannten und einen unbekannten, zu teilen.

Für das H -Polygon braucht man nur die O -Punkte. Man setzt $O_r^0 O_r = O_r^0 P_r + P_r O_r$, wo [siehe 30), mit 5) und 7) verglichen]:

*) Man könnte zwar die Gleichung 20 a) unverändert benutzen und würde dadurch den Vorteil erreichen, dieselben U - und O -Vertikalen im H -Polygone zu behalten wie bei den Trägern in Abb. 1 a und 1 b; die Konstruktion einer neuen Polygonseite würde dann aber jedesmal die Bestimmung des gemeinsamen Punktes für zwei ähnliche Punktreihen auf derselben Geraden mit sich führen, und wenn auch diese Aufgabe an und für sich einfach genug ist, würde doch die Konstruktion als Ganzes dadurch zu umständlich gemacht werden.

$$33) \quad \begin{cases} O_r^0 P_r = \frac{K_r}{\Delta'_r + \Delta'_r \frac{\theta_r}{\tau_r}}, \\ P_r O_r = \frac{\Delta X_{r-1} \theta_{r-1} + X''_{r-1} \beta_{r-1} + X'_r \alpha'_r - \Delta X_r \theta_r}{\Delta'_r + \Delta'_r \frac{\theta_r}{\tau_r}}. \end{cases}$$

Für das X -Polygon muß man dagegen von den charakteristischen Punkten Gebrauch machen, und man setzt daher $US = UQ + QS$, wo [siehe 21 a)–22 a) in Verbindung mit 25) und 27)]:

$$34) \quad \begin{cases} U'_r Q'_r = \frac{L'_r}{\beta_{r-1} + \alpha'_r}, \quad U''_r Q''_r = \frac{L'_r}{\beta'_r + \alpha'_{r+1}}, \\ Q'_r S'_r = -\frac{H_r \Delta'_r - (H_r - H_{r+1}) q_r}{\beta_{r-1} + \alpha'_r}, \\ Q''_r S''_r = -\frac{H_{r+1} \Delta'_{r+1} + (H_r - H_{r+1}) q_r}{\beta'_r + \alpha'_{r+1}}; \end{cases}$$

wenn man, außer den O -Punkt mittels der Verbindungsgeraden $S'_r S''_r$ zu bestimmen, noch die O -Ordinate direkt zu finden wünscht, bekommt man hierzu: $O_r^0 O_r = O_r^0 P_r + P_r O_r$, wo (siehe 23):

$$35) \quad O_r^0 P_r = \frac{L'_r + L'_r}{\psi_r}, \quad P_r O_r = -\frac{H_r \Delta'_r + H_{r+1} \Delta'_{r+1}}{\psi_r},$$

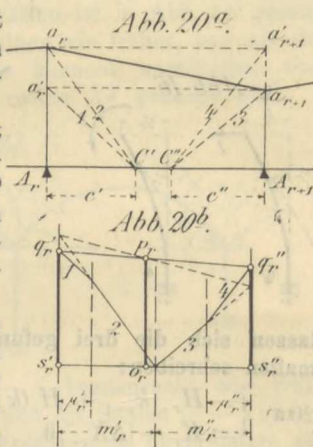
indem, wie früher, $\beta_{r-1} + \alpha'_r + \beta'_r + \alpha'_{r+1} = \psi_r$ gesetzt wurde. Die Ausdrücke 35) sind genau mit 16) für den Träger in Abb. 1 b identisch. — Die Punkte P und Q können eingelegt werden, sobald die Belastung bekannt ist, dagegen sind die Strecken PO und QS vorläufig unbekannt.

Der nächste Schritt ist jetzt, die Angabe einer Konstruktion dieser Strecken PO und QS , indem die in den Ausdrücken 33) und 34) eingehenden H und X als bekannt vorausgesetzt werden.

In Abb. 20 ist von den durch 34) gegebenen Strecken QS die Rede, und die Seite $a_r a_{r+1}$ des H -Polygons wird als bekannt betrachtet. Man zieht die Geraden $a_r a'_{r+1}$ und $a_{r+1} a'_r$ parallel der Achse, so daß $a_r a'_r = a'_{r+1} a_{r+1} = H_r - H_{r+1}$, und weiter die vier Strahlen $C' a'_r$, $C' a_r$, $C'' a_{r+1}$, $C'' a'_{r+1}$, indem die Punkte C' und C'' in den beliebig gewählten Abständen c' und c'' von A_r und A_{r+1} in der Achse liegen; die Strahlen werden, wie in der Abbildung, 1, 2, 3, 4 numeriert, so daß die mittlern Strahlen (2 und 3) von den Eckpunkten a_{r-1} und a_r im H -Polygone ausgehen. Indem wir annehmen, daß mit den Einheiten Tons und Meter gerechnet wird, und daß der Maßstab im H -Polygone $1 \text{ cm} \sim k^t$ und im X -Polygone $1 \text{ cm} \sim n^m$ ist, werden in Abb. 20 b fünf Vertikalen eingelegt, mit den gegenseitigen Abständen:

$$36) \quad \begin{cases} m'_r = \frac{\Delta'_r}{\beta_{r-1} + \alpha'_r} \cdot c' \cdot \frac{k}{n}, \quad m'_r = \frac{\Delta'_{r+1}}{\beta'_r + \alpha'_{r+1}} \cdot c'' \cdot \frac{k}{n}, \\ \mu'_r = \frac{q_r}{\beta_{r-1} + \alpha'_r} \cdot c' \cdot \frac{k}{n}, \quad \mu'_r = \frac{q_r}{\beta'_r + \alpha'_{r+1}} \cdot c'' \cdot \frac{k}{n}, \end{cases}$$

und man zeichnet ein Polygon 1–2–3–4, dessen Seiten den erwähnten Strahlen in Abb. 20 a parallel sind, sowie eine wagerechte $s'_r s''_r$ durch den Punkt der mittlsten Vertikale, wovon die Seiten 2 und 3 ausgehen. Die stark ausgezogenen Strecken $q'_r s'_r$ und $q'_r s''_r$ sind dann den gesuchten Größen QS gleich und können ohne weiteres mit dem Zirkel nach dem X -Polygone übertragen werden. Die Richtigkeit der Konstruktion folgt leicht bei Benutzung



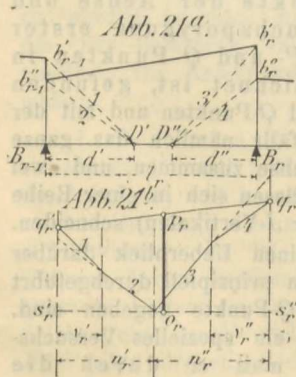
der Aehnlichkeit. Wenn die Buchstaben q und s wie in Abb. 20b angebracht werden (s' und s'' liegen in der Achse, q' und q'' sind Anfangs- und Endpunkt des Polygons 1—2—3—4), soll die Uebertragung nach dem X -Polygone rein mechanisch ausgeführt werden, so daß die Punkte Q und S über- oder untereinander zu liegen kommen, ganz wie q und s . — Uebrigens findet man auch die durch 35) gegebene Größe $P_r O_r$ in einfacher Weise in Abb. 20b. Wenn man nämlich die Strecke $s'_r s''_r$ durch

den Punkt o_r im Verhältnis $\frac{s'_r o_r}{o_r s''_r} = \frac{U_r O_r^0}{O_r^0 U_r}$ (es sind dies

die U - und O^0 -Punkte im X -Polygone) teilt, so wird $p_r o_r = P_r O_r$ als Ordinat der Verbindungsgeraden $q_r q'_r$ gemessen; infolge 35) würde man indessen den richtigen Wert von $P_r O_r$ finden, selbst wenn in 34) die von der Differenz ($H_r - H_{r+1}$) abhängigen Glieder nicht mitgenommen wurden, und mithin muß in Abb. 20b $p_r o_r$ auch als Ordinate zur Verbindungsgeraden zwischen den Punkten gemessen werden können, wo die Polygonseiten 2 und 3 die äußersten Vertikalen schneiden. Man braucht daher nicht die erwähnte Teilung der Strecke $s'_r s''_r$ auszuführen, sondern findet unmittelbar p_r als Schnittpunkt der beiden genannten Verbindungsgeraden. — In manchen Fällen wird es am einfachsten sein, die Punkte C' und C'' im Mittelpunkte zwischen A_r und A_{r+1} zusammenfallen zu lassen; doch kann es auch von Vorteil sein, beide Längen c' und c'' frei wählen zu können, um dadurch eine passende Größe der Fig. 20b zu erreichen.

Demnächst ist in Abb. 21 die Konstruktion der durch 33) gegebenen Ordinaten PO gezeigt. Vom X -Polygone werden die Punkte b_{r-1} , b'_r , b''_r als bekannt vorausgesetzt, und ebenso der Punkt b_r , indem ΔX_r^0 [siehe 29)] $= b'_r b''_r$ ist. Man zieht die Strahlen $b_{r-1} D'$, $b'_r D'$, $b''_r D'$ und $b_r D''$, indem die Punkte D' und D'' in den beliebigen Abständen d' und d'' von B_{r-1} und B_r gewählt werden; die Strahlen werden, wie angegeben, numeriert, so daß sie in der Ordnung nacheinander folgen, worin man die Punkte b_{r-1} , b'_r , b''_r , ... trifft, wenn das X -Polygon durchlaufen wird. — Weiter werden in Abb. 21b fünf Vertikalen eingelegt in den gegenseitigen Abständen:

$$37) \quad \left\{ \begin{aligned} n_r &= \frac{\beta_{r-1}^n}{\frac{1}{2} \left(\Delta_r^n + \Delta_r' \frac{\partial_r}{\tau_r} \right)} \cdot d' \cdot \frac{n}{k}, \\ v_r &= \frac{\partial_{r-1}}{\frac{1}{2} \left(\Delta_r^n + \Delta_r' \frac{\partial_r}{\tau_r} \right)} \cdot d' \cdot \frac{n}{k}, \\ n_r'' &= \frac{\alpha_r^n}{\frac{1}{2} \left(\Delta_r^n + \Delta_r' \frac{\partial_r}{\tau_r} \right)} \cdot d'' \cdot \frac{n}{k}, \\ v_r'' &= \frac{\partial_r}{\frac{1}{2} \left(\Delta_r^n + \Delta_r' \frac{\partial_r}{\tau_r} \right)} \cdot d'' \cdot \frac{n}{k}, \end{aligned} \right.$$



und ein Polygon 1—2—3—4 wird gezeichnet, dessen Seiten den Strahlen in Abb. 21a parallel sind, die Schlußlinie $q_r q'_r$ wird eingelegt, und ebenso die wagerechte $s'_r s''_r$ durch den Punkt der mittelsten Vertikalen, wovon die Polygonseiten 2 und 3 ausgehen. Die gesuchte Strecke $P_r O_r$ wird dann als $p_r o_r$ in der Mitte zwischen den äußersten Vertikalen gemessen ($s'_r o_r = o_r s''_r$). Wenn die Bezeichnungen p_r und o_r wie in der Abbildung (p_r in der

Schlußlinie $q_r q'_r$) angebracht werden, soll die Uebertragung nach dem H -Polygone rein mechanisch ausgeführt werden, so daß P_r über oder unter O_r zu liegen kommt, je nachdem p_r über oder unter o_r liegt. Die Richtigkeit der Konstruktion ergibt sich, wenn man $q'_r s'_r$ und $q''_r s''_r$ mittels der Aehnlichkeit berechnet, und daraus wieder $p_r o_r$. — Bisweilen wird es praktisch sein, die Längen d' und d'' willkürlich zu wählen, nur mit Rücksicht auf eine passende Größe der Abb. 21b; vielleicht kann man D' und D'' im Mittelpunkte zwischen B_{r-1} und B_r zusammenfallen lassen, wodurch $d' = d'' = \frac{1}{2} l_r$. Meistens wird man es vielleicht doch vorziehen, nur d' willkürlich anzunehmen und dann d'' mittels

$$37a) \quad d'' = \frac{\beta_{r-1}^n}{\alpha_r^n} d'$$

zu bestimmen, wodurch $n_r' = n_r''$, so daß $p_r o_r$ in Abb. 21b auf der mittelsten Vertikalen selbst abgeschnitten wird, und die Achse $s'_r s''_r$ nicht gezogen zu werden braucht.

Wir gehen jetzt dazu über zu zeigen, wie man in Abb. 18 die beiden Schlußlinienzüge konstruieren kann, wenn nur die beiden ersten Seiten, $a_0 a_1$ und $b'_0 b'_1$, bekannt sind. Die Seite $a_0 a_1$ schneidet die U_1 -Vertikale in T'_1 ; die gesuchte Seite $a_1 a_2$ geht dann durch a_1 und zu $O_1 T'_1$ parallel (indem wir die U_1 -Vertikale so bestimmt voraussetzen, daß sich die entsprechende U''_1 -Vertikale ins Unendliche entfernt), und $a_1 a_2$ kann mithin gezogen werden, sobald O_1 bestimmt ist. Um O_1 zu finden, trägt man zuerst die bekannte Strecke $O_1^0 P_1$ nach 33) ab, und leitet darauf die Ordinate $P_1 O_1$ mittels der Konstruktion in Abb. 21 aus der gegebenen Seite $b'_0 b'_1$ im X -Polygone ab. Unmittelbar sind zwar nur die Punkte b'_0 (mit B_0 zusammenfallend), b''_0 und b'_1 gegeben, und um die Konstruktion in Abb. 21 durchführen zu können, braucht man noch b''_1 ; im X -Polygone ist aber der Punkt Q'_1 nur von der Belastung abhängig und kann also sofort nach 34) eingelegt werden, und die Gerade $Q'_1 Z_1$, wo Z_1 der Schnittpunkt der gegebenen Seite $b'_0 b'_1$ mit der Z -Vertikalen ist, führt dann zu b''_1 . Man kann also in Abb. 21 die Strecke $p_1 o_1$ bestimmen, dieselbe als $P_1 O_1$ nach dem H -Polygone übertragen, und durch den in dieser Weise festgelegten O_1 -Punkt ist, wie gesagt, die zweite Seite $a_1 a_2$ bestimmt.

Darauf geht man zur Seite $b'_1 b'_2$ im X -Polygone. Hier kennt man im voraus (nach 34) die Punkte Q'_1 und Q'_2 , und mittels der Konstruktion in Abb. 20 leitet man die Ordinaten $Q'_1 S'_1$ und $Q'_2 S'_2$ aus der eben gefundenen Seite $a_1 a_2$ im H -Polygone ab. Die Gerade $S'_1 Z_1$ gibt dann den Punkt b'_2 , die Verbindungsgerade $S'_2 S'_1$ schneidet die O -Vertikale in O_1 , und mittels der Geraden $T'_1 O_1$ findet man endlich den Punkt T'_2 der gesuchten Seite $b'_1 b'_2$, die somit gezeichnet werden kann. — Jetzt geht man zum H -Polygone zurück und konstruiert hier die dritte Seite $a_2 a_3$, genau wie oben $a_1 a_2$, und so kann offenbar abwechselnd eine Seite in den zwei Polygonen gezeichnet werden; die beiden Polygone sind also wirklich vollständig bestimmt, wenn die beiden ersten Seiten bekannt sind, genau wie für einen kontinuierlichen Balken mit elastisch senkbaren Stützen.

Die Schwierigkeit ist jetzt nur die, daß man anfänglich nicht diese beiden ersten Seiten kennt. Außer der beschriebenen geometrischen Abhängigkeit zwischen den aufeinander folgenden Seiten kennt man von den zwei Polygonen:

*) Es ist nämlich:

$$T'_1 Q'_1 = U'_1 Q'_1 - U_1 T'_1 = \frac{L_1 - (X'_0 \beta'_0 + X'_1 \alpha'_1)}{\beta'_0 + \alpha'_1},$$

und mit Hilfe von 28):

$$\frac{b'_0 b'_1}{T'_1 Q'_1} = \frac{\beta'_0 + \alpha'_1}{\tau_1}, \text{ mithin } b'_0 b'_1 = \frac{1}{\tau_1} [L_1 - (X'_0 \beta'_0 + X'_1 \alpha'_1)]$$

oder nach 29): $b'_0 b'_1 = \Delta X_1^0$.

1. die Punkte a_0 und a_{n+1} (die Zahl der Oeffnungen gleich n) des H -Polygons, indem $A_0 a_0 = 0$ und $A_{n+1} a_{n+1} = 0$;
2. die Punkte b'_0 und b'_n des X -Polygons, $B_0 b'_0 = 0$ und $B_n b'_n = 0$.

Aus b'_0 kann sofort ein Punkt der Seite $b'_0 b'_1$ hergeleitet werden, falls die erste Seite $a_0 a_1$ im H -Polygone bekannt ist; auf der dem Stützpunkte B_0 entsprechenden U'' -Vertikalen (U''_0) trägt man nur den Q''_0 -Punkt ab, findet mit Hilfe der Konstruktion in Abb. 20 die Strecke $q''_0 s''_0$, und hat somit den charakteristischen Punkt S''_0 gefunden; die Gerade $S''_0 b'_0$ schneidet dann die Y_0 -Vertikale in einem Punkte der Seite $b'_0 b'_1$ (siehe Abb. 19). Wenn die Endunterstützung frei drehbar ist ($\tau_0 = \infty$), fällt die Y_0 -Vertikale mit der Stützenvertikalen zusammen und b'_0 also in b_0 ; hat man eine vollkommene Einspannung, fällt die Y_0 -Vertikale in die U''_0 -Vertikale, und die Polygonseite $b'_0 b'_1$ geht durch den charakteristischen Punkt S''_0 . — In ähnlicher Weise kann man aus b'_n einen Punkt der letzten Seite $b'_{n-1} b'_n$ herleiten, wenn die letzte Seite des H -Polygons, $a_n a_{n+1}$, bekannt ist; hierzu benutzt man die der Stütze n entsprechende Z -Vertikale und den charakteristischen Punkt S'_n .

Durch den erwähnten geometrischen Zusammenhang zwischen den aufeinander folgenden Seiten und durch die genannten vier Punkte sind die beiden Schlußlinienzüge vollständig bestimmt, können aber, wie gesagt, doch nicht unmittelbar konstruiert werden. Läßt man die Bedingung $B_n b'_n = 0$ am rechten Ende fort und nimmt zum Ersatz die erste Seite ($a_0 a_1$) als bekannt an, bekommt man ebenfalls ein vollständig bestimmtes Polygon, das ein „Versuchspolygon erster Ordnung“ genannt werden soll (im folgenden wird von einem einzigen Polygon gesprochen, dabei aber immer die beiden zusammengehörigen H - und X -Polygone verstanden); dieses ist einfacher zu konstruieren wie das gesuchte Polygon selbst, kann aber doch noch nicht unmittelbar konstruiert werden. Läßt man dagegen die beiden Bedingungen am rechten Ende, $A_{n+1} a_{n+1} = 0$ und $B_n b'_n = 0$, fort, und nimmt man zum Ersatz die beiden ersten Seiten, $a_0 a_1$ und $b'_0 b'_1$, als gegeben an, erhält man ein sogenanntes „Versuchspolygon zweiter Ordnung“, und dies kann, wie oben gezeigt, ohne weiteres gezeichnet werden. Einer bestimmten ersten Seite entsprechen also unendlich viele Versuchspolygone zweiter Ordnung, aber nur eins erster Ordnung; dieses letztere ist daher ein spezielles der Versuchspolygone zweiter Ordnung. Ebenso gibt es unendlich viele Versuchspolygone erster Ordnung, nämlich eins jeder neuen ersten Seite entsprechend; für eines einzigen dieser Polygone ist auch die Bedingung $A_{n+1} a_{n+1} = 0$ erfüllt, und der gesuchte Schlußlinienzug ist daher ein spezielles Versuchspolygon erster Ordnung.

Wenn der untersuchte Träger n Oeffnungen, $n - 1$ Zwischenstützen hat, treten im ganzen n Größen H und $2n$ Größen X auf (indem auch bei den Endstützen eine Einspannung vorausgesetzt wird), also $3n$ Unbekannte, zu deren Bestimmung man ebensoviel lineare Gleichungen 20 a)–22 a) hat. Setzt man $H_{n+1} = A_{n+1} a_{n+1} \leq 0$ und $X'_n = B_n b'_n \leq 0$ und betrachtet dagegen $H_1 = A_1 a_1$ als bekannt, bekommt man $3n + 2 - 1 = 3n + 1$ Unbekannte und $3n$ Gleichungen, und hiermit ist man zu der Sammlung von Versuchspolygonen zweiter Ordnung übergegangen, die einer gegebenen ersten Seite entsprechen. Eliminiert man zwischen den $3n$ Gleichungen alle die Unbekannten bis auf zwei, nämlich zwei aufeinander folgende H oder X , ergibt sich eine Gleichung der Form: 38) $C_1 X''_k + C_2 X'_{k+1} = D$ oder $E_1 H_r + E_2 H_{r+1} = F$, und hierdurch wird ausgedrückt, daß die Polygonseite $b_k b_{k+1}$ oder $a_r a_{r+1}$ durch einen festen Punkt mit der

Ordinate $\frac{D}{C_1 + C_2}$ oder $\frac{F}{E_1 + E_2}$ und mit der Abszisse $\frac{C_2}{C_1 + C_2} l_{k+1}$ (von B_k aus gerechnet) oder $\frac{E_2}{E_1 + E_2} \lambda_{r+1}$ (von A_r aus gerechnet) gehen muß. Die Koeffizienten C und E in 38), und damit die Abszissen der gefundenen Punkte, sind von den bekannten Gliedern der Gleichungen (K_r, L_r, L'_r), wozu hier auch H_1 gezählt werden soll, unabhängig; die Größen D und F , und somit die Ordinaten der erwähnten Punkte, hängen dagegen von diesen bekannten Gliedern ab. Es ist hiermit bewiesen, daß

1. in allen Versuchspolygonen zweiter Ordnung, die derselben ersten Seite $a_0 a_1$ und derselben Belastung (denselben P - und Q -Punkten) entsprechen, muß jede Seite einen festen Punkt (im folgenden „ F -Punkt“ genannt) enthalten;
2. für alle Versuchspolygone zweiter Ordnung liegen die F -Punkte in festen Vertikalen („ F -Vertikalen“), deren Lage sowohl von der ersten Seite wie von der Belastung (den P - und Q -Punkten) unabhängig ist.

Dem letztern Satz zufolge kann man, wenn nur von einer Bestimmung der F -Vertikalen die Rede ist, sowohl die P - und Q -Punkte wie die erste Seite $a_0 a_1$ in der Achse liegend annehmen. Wählt man auch die zweite Seite in der Achse, fällt das ganze Polygon mit der Achse zusammen; wählt man eine willkürliche zweite Seite außerhalb der Achse, wird man ein andres Versuchspolygon erhalten, und dieses muß dann die Achse in den F -Punkten schneiden, die der genannten Lage der P - und Q -Punkte und der ersten Seite entsprechen, also:

3. die F^0 -Punkte (Fußpunkte der F -Vertikalen) aller Versuchspolygone zweiter Ordnung können als Schnittpunkte der Achse und eines Versuchspolygons, das mit den P - und Q -Punkten und der ersten Seite ($a_0 a_1$) in der Achse, aber mit der zweiten Seite ($b'_0 b'_1$) außerhalb der Achse, konstruiert wird, gefunden werden.

Wir wenden uns jetzt zu den Versuchspolygonen erster Ordnung. Die ganze Sammlung dieser Polygone ist durch die genannten $3n$ Gleichungen bestimmt, wenn hierin H_{n+1} als unbekannter (nicht $= 0$) betrachtet wird. Man hat also, genau wie oben, $3n$ Gleichungen mit $3n + 1$ Unbekannten, mithin gelangt man durch dieselben Schlußfolgerungen wie oben zu den folgenden Sätzen:

1. In allen Versuchspolygonen erster Ordnung, die denselben P - und Q -Punkten (derselben Belastung) entsprechen, muß jede Seite einen festen Punkt („ J -Punkt“ genannt) enthalten;
2. für alle Versuchspolygone erster Ordnung müssen die J -Punkte in festen Vertikalen liegen, deren Lage von den P - und Q -Punkten unabhängig ist;
3. die J^0 -Punkte (Fußpunkte der J -Vertikalen) können als Schnittpunkte der Achse und eines beliebigen Versuchspolygons erster Ordnung, das mit den P - und Q -Punkten in der Achse liegend gezeichnet ist, gefunden werden; mit diesen P - und Q -Punkten und mit der ersten Seite in der Achse fällt nämlich das ganze Versuchspolygon mit der Achse zusammen, und zwei beliebige dieser Polygone müssen sich in einer Reihe von J -Punkten (Punkten der J -Vertikalen) schneiden.

Jetzt kann man schnell einen Ueberblick darüber geben, wie die ganze Konstruktion prinzipiell durchgeführt werden kann, wenn die P - und Q -Punkte gegeben sind. Da der gesuchte Schlußlinienzug ein spezielles Versuchspolygon erster Ordnung ist, muß er durch die J -Punkte gehen, und sobald diese Punkte

gefunden sind, kann der Schlußlinienzug gezeichnet werden. Von der letzten Seite des H -Polygons kennt man nämlich einen Punkt (a_{n+1}) außer dem J -Punkt, und hierdurch ist das ganze H -Polygon offenbar bestimmt, so daß es ohne weiteres rückwärts gezeichnet werden kann, ohne Rücksicht auf das X -Polygon. Und wenn das H -Polygon gezeichnet ist, findet man mittels der Konstruktion in Abb. 20 die charakteristischen Punkte und die O -Punkte im X -Polygone; mit Hilfe des zur letzten Unterstützung gehörigen charakteristischen Punktes S'_n und der Z -Vertikale hier leitet man aus b''_n einen Punkt der letzten Seite außer dem J -Punkt her, von der so bestimmten letzten Seite ausgehend wird dann das ganze Polygon rückwärts gezeichnet durch Benutzung der J -Punkte und der Geraden $T''OT'$ (siehe Abb. 19), und man hat endlich als Kontrolle, daß die Geraden S'_rZ_r und S'_rY_r (siehe Abb. 19) die Stützenvertikalen in den Punkten b'_r und b''_r treffen sollen. Die Konstruktion des X -Polygons kann auch vom linken Ende angefangen werden, indem man aus b'_0 einen Punkt der ersten Seite (in der Y_0 -Vertikale) herleitet.

Um die J -Punkte zu bestimmen, müssen zwei willkürliche Versuchspolygone erster Ordnung (jedes mit einer beliebig gewählten ersten Seite) gezeichnet werden; die Lösung der Aufgabe hängt daher jetzt davon ab, wie ein solches Polygon konstruiert werden kann. Hierzu benutzt man, daß das einer gewählten ersten Seite entsprechendes Versuchspolygon erster Ordnung ein spezielles derjenigen Polygone zweiter Ordnung ist, die mit derselben ersten Seite beginnen; das Polygon erster Ordnung muß daher durch die der gewählten ersten Seite entsprechenden F -Punkte gehen, und kann gezeichnet werden, sobald diese Punkte bekannt sind. Die letzte Seite des H -Polygons soll nämlich außer dem F -Punkte noch a_{n+1} enthalten und das ganze H -Polygon kann daher, wie oben, rückwärts gezeichnet werden, ohne Rücksicht auf das X -Polygon; jetzt können die S - und O -Punkte im X -Polygon ermittelt werden, aus b'_0 kann ein Punkt in der ersten Seite (in der Y_0 -Vertikale) hergeleitet werden, hieraus wieder ein Punkt der zweiten Seite usw. (mittels des geometrischen Zusammenhangs zwischen der ersten und zweiten Seite) und durch diese Punkte und die F -Punkte kann das X -Polygon gezeichnet werden.

Jetzt ist nur übrig, die einer gegebenen ersten Seite entsprechenden F -Punkte zu bestimmen; diese können indessen ohne weiteres als Schnittpunkte zweier Versuchspolygone zweiter Ordnung, beide mit derselben ersten Seite beginnend, konstruiert werden.

Bei der praktischen Ausführung der Konstruktion geht man doch besser in etwas abweichender Weise vor — genau wie früher für kontinuierliche Balken mit elastisch senkbaren Stützen angegeben —, indem man den Teil der Konstruktion (nämlich die Bestimmung der F - und J -Vertikalen) ausscheidet, der von der Belastung unabhängig ist und daher nur ein für allemal ausgeführt zu werden braucht, und erst nach Erledigung dieses die der Belastung entsprechenden P - und Q -Punkte einführt. Die Konstruktion gestaltet sich dann folgendermaßen:

I. Bestimmung der F -Vertikalen. Man nimmt sowohl die P - und Q -Punkte wie die erste Seite a_0a_1 in der Achse an, und konstruiert hiermit ein Versuchspolygon zweiter Ordnung; dieses schneidet dann die Achse in den F^0 -Punkten. Es ist nicht notwendig, mit demselben Polygon immer fortzusetzen, vielmehr kann man, um bequemere Linien zu erhalten, die beiden letztgefundenen Seiten (eine im H - und eine im X -Polygone) um deren F^0 -Punkte drehen, doch aber so, daß die Ordinaten im selben Verhältnis verkleinert werden.

II. Bestimmung der J -Vertikalen. Man wählt die P - und Q -Punkte in der Achse und die erste Seite a_0a_1 außerhalb der Achse, und zeichnet hiermit ein Versuchspolygon zweiter Ordnung; dieses schneidet die unter I gefundenen F -Vertikalen in den der gewählten ersten Seite a_0a_1 entsprechenden F -Punkten, und mit Hilfe dieser zeichnet man dann, wie oben erklärt, das Versuchspolygon erster Ordnung, das mit der Seite a_0a_1 beginnt; dieses Polygon erster Ordnung schneidet die Achse in den J^0 -Punkten. Auch hier wird sich oft als notwendig herausstellen, die Ordinaten der beiden letztgefundenen Seiten im selben Verhältnis zu verkleinern, um nicht zu allzu unbequemen Konstruktionslinien zu gelangen.

III. Bestimmung der J -Punkte. Jetzt erst soll die gegebene Belastung in die Konstruktion eingeführt werden. Man trägt die P - und Q -Punkte auf, und mit diesen Punkten und einer willkürlichen ersten Seite, die gewöhnlich praktisch in der Achse gewählt wird, konstruiert man ein Polygon zweiter Ordnung, das die unter I gefundenen F -Vertikalen in den der gewählten Seite a_0a_1 entsprechenden F -Punkte schneidet. Mittels diesen F -Punkten zeichnet man, wie unter II, das Versuchspolygon erster Ordnung, welches dann die unter II gefundenen J -Vertikalen in den J -Punkten schneidet, und hiermit ist endlich der gesuchte Schlußlinienzug bestimmt. — Auch hier wird man gewöhnlich nicht mit einem und demselben Polygon zweiter Ordnung bis zum rechten Ende fortsetzen können; man hilft sich dann wie oben durch eine Verkleinerung in demselben Verhältnis der Ordinaten der beiden letztgefundenen Seiten, muß aber hier erinnern, daß die Ordinaten der P - und Q -Punkte auch im selben Verhältnis verkleinert werden müssen.

Sollen mehrere verschiedene Belastungen behandelt werden, für welche doch die P - und Q -Punkte in einer Reihe von Feldern vom linken Ende unverändert sind, bleiben auch die F -Punkte dieser Felder unverändert, und man hat erst neue F -Punkte von dem ersten Felde ab, wo die Belastung verschieden ist, zu konstruieren. Ist z. B. eine Anzahl Felder am linken Ende unbelastet, und ist die erste Seite des Versuchspolygons zweiter Ordnung in der Achse gewählt, so liegen die F -Punkte aller unbelasteten Felder in der Achse und bleiben dort, solange die Felder unbelastet bleiben.

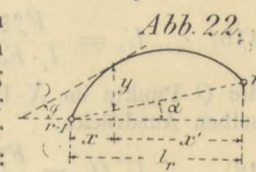
Zum Schluß sollen noch die Formeln für die verschiedenen Größen, welche man nach obenstehendem bei der Konstruktion braucht, angegeben werden.

Für eine Säule der Höhe h und mit dem Trägheitsmomente J^u hat man:

$$39) \quad k = \int_0^h \frac{y^2 dy}{EJ^u}, \quad q = \vartheta = \int_0^h \frac{y dy}{EJ^u}, \quad \tau = \int_0^h \frac{dy}{EJ^u},$$

und für einen willkürlichen Bogen (Abb. 22), indem nur die von den Momenten bewirkte Formänderung in Rechnung gestellt wird (allein für die Größe Δ_r^h ist auch die Wirkung der Normalkräfte in Betracht genommen):

$$40) \quad \begin{cases} \Delta_r^h = \int_{r-1}^r \frac{y^2 ds}{EJ} + \int_{r-1}^r \frac{\sec^2 \alpha \cos^2(\varphi - \alpha)}{EF} ds, \\ \Delta_r' = \int_{r-1}^r \frac{xy ds}{l_r \cdot EJ} = \alpha_r^h, \quad \Delta_r'' = \int_{r-1}^r \frac{x' y ds}{l_r \cdot EJ} = \beta_{r-1}^h, \\ \alpha_r' = \int_{r-1}^r \frac{x^2 ds}{l_r^2 \cdot EJ}, \quad \beta_{r-1}' = \int_{r-1}^r \frac{x'^2 ds}{l_r^2 \cdot EJ}, \\ \beta_{r-1}'' = \alpha_r'' = \int_{r-1}^r \frac{xx' ds}{l_r^2 \cdot EJ}. \end{cases}$$



Weiter sind die von der Belastung abhängigen Glieder, indem auch hier die Wirkung der Normalkräfte vernachlässigt wird:

$$41) \quad \begin{cases} K_r = \Sigma P_m \delta_{m,r} = \int_{r-1}^r \frac{M_0 y ds}{EJ}, \\ L_r = \Sigma P_m \delta'_{m,r} = \int_{r-1}^r \frac{M_0 x ds}{l_r \cdot EJ}, \\ L'_r = \Sigma P_m \delta''_{m,r} = \int_{r-1}^r \frac{M_0 x' ds}{l_{r+1} \cdot EJ}; \end{cases}$$

die von einer Temperaturänderung oder nachgebenden Stützen abhängigen Glieder werden ebenso nach den gewöhnlichen Formeln gerechnet.

Folgende besondere Fälle sind von Interesse.

1. Die Säule hat unveränderliches Trägheitsmoment J^u ; dann wird:

$$39a) \quad k = \frac{h^3}{3EJ^u}, \quad q = \vartheta = \frac{h^2}{2EJ^u}, \quad \tau = \frac{h}{EJ^u}.$$

2. Der Bogen ist ein symmetrischer Parabelbogen mit Pfeil f und unveränderlichem $J \cos \varphi = J_c$ (oder ein flacher Zirkel- oder Parabelbogen mit unveränderlichem $J = J_c$; doch soll nicht zu allzu flachen Bögen und schlanken Säulen gegangen werden, ohne die elastische Aenderung der Pfeilhöhe und Spannweite zu berücksichtigen, siehe hierüber die obengenannte Arbeit Engessers):

$$40a) \quad \begin{cases} \Delta_r = \frac{8}{15} \frac{f_r^2 l_r}{EJ_c} + \frac{l_r}{EF_c} = \frac{8}{15} \frac{f_r^2 l_r}{EJ_c} \left(1 + \frac{15}{8} \frac{J_c^2}{f_r^2}\right), \\ \Delta'_r = \Delta''_r = \alpha_r = \beta_{r-1} = \frac{f_r l_r}{3EJ_c}, \\ \alpha'_r = \beta'_{r-1} = \frac{l_r}{3EJ_c}, \quad \beta'_{r-1} = \alpha'_r = \frac{l_r}{6EJ_c}. \end{cases}$$

Im X -Polygone fallen somit [siehe 26)] die U -Vertikalen mit den Drittelsenkrechten zusammen, und die O_r -Vertikale liegt im Abstand $\frac{1}{3}(l_{r+1} - l_r)$ von B_r , alles wie bei gewöhnlichen kontinuierlichen Balken.

Die von der Belastung abhängigen Glieder werden:

$$41a) \quad \begin{cases} K_r = \frac{1}{EJ_c} \int_{r-1}^r M_0 y dx, \\ L_r = \frac{1}{l_r \cdot EJ_c} \int_{r-1}^r M_0 x dx, \quad L'_r = \frac{1}{l_{r+1} \cdot EJ_c} \int_{r-1}^r M_0 x' dx. \end{cases}$$

Nennt man den Inhalt der einfachen Momentenfläche F^0 und deren Schwerpunktsabstände vom linken und rechten Ende des Feldes ξ und ξ' , ergibt sich:

$$41b) \quad L_r = \frac{F_r^0 \xi_r}{l_r \cdot EJ_c}, \quad L'_r = \frac{F_{r+1}^0 \xi'_{r+1}}{l_{r+1} \cdot EJ_c};$$

die Q -Punkte im X -Polygone werden dann mittels derselben Ausdrücke:

$$42) \quad U_r Q_r = \frac{F_r^0 \xi_r}{\frac{1}{2} l_r^2}, \quad U'_r Q'_r = \frac{F_{r+1}^0 \xi'_{r+1}}{\frac{1}{2} l_{r+1}^2},$$

bestimmt, wie die charakteristischen Punkte für kontinuierliche Balken mit festen oder elastisch drehbaren Stützen, und dasselbe gilt mithin auch von den P -Punkten im X -Polygone; diese Punkte können dann auch leicht graphisch bestimmt werden, sowohl für gleichförmige Belastung als für eine Einzellast (siehe Z. 1908, Heft 1). — Für das H -Polygon hat man im Falle einer gleichförmigen Belastung über einem ganzen Felde:

$$43) \quad K_r = \frac{p_r l_r^3 f_r}{15 EJ},$$

und für eine Einzellast in den Abständen a und b vom linken und rechten Ende des Feldes:

$$43a) \quad K_r = \frac{l_r^2 + ab}{3 l_r} \cdot \frac{Pab}{l_r} \cdot f_r.$$

Wünscht man die Einflußlinien der Ueberzähligen zu bestimmen, und führt daher die Konstruktion für eine Einzellast 1 in verschiedenen Stellungen durch, kann auch benutzt werden, daß die Ordinate $O_r^0 P_r$ im H -Polygone nach 23) und 33) geschrieben werden kann:

$$O_r^0 P_r = \frac{\delta_{m,r}^h}{\Delta_r^h} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\Delta_r^h}{\Delta_r^h} \cdot \frac{\vartheta_r}{\tau_r}},$$

und der erste Faktor hier ($\delta_{m,r}^h : \Delta_r^h$) ist die Einflußordinate des Horizontalschubes in einem Zweigelenkbogen derselben Form und Abmessungen, wie des einzelnen Feldes des Bogenträgers.

Weiter ist nach 36), indem h_r die Höhe der r -ten Säule ist:

$$36a) \quad \begin{cases} m'_r = \frac{2}{3} f_r \cdot c' \cdot \frac{k}{n}, & m''_r = \frac{2}{3} f_{r+1} \cdot c'' \cdot \frac{k}{n}, \\ \mu'_r = \frac{h_r^2 J_c}{l_r J_r^u} \cdot c' \cdot \frac{k}{n}, & \mu''_r = \frac{h_{r+1}^2 J_c}{l_{r+1} J_r^u} \cdot c'' \cdot \frac{k}{n}; \end{cases}$$

und nach 37), indem der Ausdruck 40a) für Δ_r^h der Kürze halber als $\frac{8}{15} \frac{f_r^2 l_r}{EJ_c} (1 + x)$ geschrieben wird:

$$37a) \quad \begin{cases} n'_r = \frac{1}{\frac{4}{5} f_r (1+x) + \frac{1}{4} h_r} \cdot d' \cdot \frac{n}{k}, & n''_r = \frac{d''}{d'} \cdot n'_r, \\ v'_r = \frac{\vartheta_{r-1}}{\vartheta_r} \cdot \frac{d'}{d''} \cdot v''_r, \\ v''_r = \frac{1}{\frac{8}{15} \frac{f_r^2 l_r}{h_r^2} \cdot \frac{J_r^u}{J_c} (1+x + \frac{15}{8} \frac{h_r}{f_r})} \cdot d'' \cdot \frac{n}{k}. \end{cases}$$

3. Die Pfeilhöhe der Bögen nimmt bis Null ab, so daß der Träger ein geradliniger durchgehender Balken mit elastisch drehbaren Stützen wird. Wenn wir vorläufig nur die Wirkung der lotrechten Belastung betrachten, werden in 20a) die Größen K_r , β'_{r-1} und α'_r gleich Null, und wenn wir weiter noch die Längenänderung der Balkenachse vernachlässigen, wird auch $\Delta_r^h = 0$, so daß die Gleichung 20a) zu

$$= - (H_{r-1} - H_r) k_{r-1} + (H_r - H_{r+1}) k_r \\ = - \Delta X_{r-1} \vartheta_{r-1} + \Delta X_r \vartheta_r$$

reduziert wird, und da eine lotrechte Belastung (wenn $\Delta_r^h = 0$) keine wagerechte Verschiebung der oberen Säulenden herbeiführen kann, spaltet sich diese Gleichung wieder folgendermaßen:

$$44) \quad \begin{cases} (H_{r-1} - H_r) k_{r-1} = \Delta X_{r-1} \vartheta_{r-1}, \\ (H_r - H_{r+1}) k_r = \Delta X_r \vartheta_r; \end{cases}$$

wenn hierin ϑ mit der ebenso großen q ersetzt wird, drücken diese Gleichungen nämlich aus, daß die beiden Kräfte ΔH und ΔX , die die oben freie Säule beanspruchen, keine Ausbiegung des freien Säulendes bewirken. — In den Gleichungen 21a) und 22a) sind $\Delta'_r = 0$ und $\Delta'_{r+1} = 0$, und wenn das Glied $(H_r - H_{r+1}) q_r$ mittels 44) durch ΔX_r ausgedrückt und mit der linken Seite der Gleichung zusammengezogen wird, wird aus dieser linken

Seite: $\Delta X_r \left(\tau_r - \frac{\vartheta_r}{k_r} q_r \right)$, oder z. B. im Falle von unveränderlichem Trägheitsmoment der Säule [mittels 39a)]:

$\Delta X_r \cdot \frac{h_r}{4 EJ_r^u}$, was mit der Formel 30b) in meiner früheren Arbeit (Z. 1905, Heft 1) übereinstimmt. Somit fallen die Gleichungen 21a)–22a) mit denjenigen zusammen, auf welchen die in meiner genannten früheren Arbeit angegebene Konstruktion für kontinuierliche Balken mit elastisch drehbaren Stützen aufgebaut ist, und die graphische Konstruktion hier wird also zu dieser einfachen reduziert.

Zur Behandlung einer Temperaturänderung kann die Konstruktion dagegen nicht ohne weiteres angewandt werden, indem (mit $\Delta_r^h = 0$) die Ordinate $O_r^0 O_r$ im H -Polygone als Differenz der beiden Größen $O_r^0 P_r$ und $O_r P_r$ gefunden wird, und diese werden beide unendlich groß (letztere, weil v unendlich groß wird), ebenso wie sich auch die O -Vertikale ins unendliche entfernt. Die Gleichung 30) reduziert sich zu:

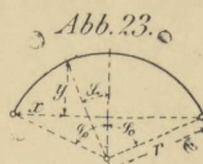
$$-(H_{r-1} - H_r)k_{r-1} + (H_r - H_{r+1})\left(k_r - q_r \frac{\vartheta_r}{\tau_r}\right) \\ = K_r - \Delta X_{r-1} \vartheta_{r-1} + \Delta X_r \vartheta_r,$$

wo $K_r = \vartheta_{r,t}^h = \varepsilon l_r$ (für gleichförmige Temperaturänderung), und auf Grund dieser Gleichung und der beiden Gleichungen 21a)–22a) des X -Polygons, welche gleichfalls ein wenig vereinfacht werden, indem $\Delta_r' = \Delta_{r+1}'' = 0$, kann leicht eine ganz ähnliche Konstruktion wie die obenstehende angegeben werden, was wir doch hier nicht weiter verfolgen wollen.

4. Der Bogen ist ein symmetrischer Zirkelbogen mit Halbmesser r und konstantem Trägheitsmoment J_c (Abb. 23):

$$40b) \left\{ \begin{aligned} \Delta_r^h &= \frac{r^3}{EJ_c} (\varphi_0 - 3 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + 2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0) + \frac{l_r}{EF_c}, \\ \Delta_r' &= \Delta_r'' = \alpha_r^h = \beta_{r-1}^h = \frac{r^2}{EJ_c} (\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0), \\ \alpha_r' &= \beta_{r-1}' = \frac{r}{4EJ_c \sin^2 \varphi_0} (\varphi_0 - \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + 2 \varphi_0 \sin^2 \varphi_0), \\ \beta_{r-1}'' &= \alpha_r'' = \frac{r}{4EJ_c \sin^2 \varphi_0} (-\varphi_0 + \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + 2 \varphi_0 \sin^2 \varphi_0). \end{aligned} \right.$$

Die von der Belastung abhängigen Glieder werden am einfachsten dadurch berechnet, daß man in jedem einzelnen Falle die Integrationen durch Summationen ersetzt.



Wie schon in der Einleitung bemerkt, sind die hier gezeigten graphischen Konstruktionen nur als graphische Lösungen der Elastizitätsgleichungen zu betrachten, und sie können daher ebensogut für andre Gleichungen derselben Form gebraucht werden. Im ganzen erscheinen diese Schlußlinienzüge als ein allgemein anwendbares Mittel zur Lösung derartiger Systeme von linearen Gleichungen, wo jede Gleichung nur eine begrenzte Zahl aufeinander folgender Unbekannten enthält. In den Anwendungen hier traten in jeder Gleichung drei bis fünf Unbekannte auf, für den Bogenträger in Abb. 1c sogar in jeder dritten Gleichung 7 Unbekannte; durch Anwendung von Versuchspolygonen dritter, vierter... Ordnung könnte man aber offenbar Gleichungen, die noch mehr Unbekannte enthält, behandeln (z. B. könnte man in dieser Weise auch noch eine elastische Senkbarkeit der Stützen für den Bogenträger in Abb. 1c berücksichtigen), wenn auch die Methode wohl kaum als praktisch brauchbar betrachtet werden kann, wenn sie weiter ausgedehnt wird, wie schon oben vorgeschlagen.

DTV Danmarks Tekniske
Videncenter
Teknologihistorisk Samling

TB
624.021.2 461278
05t

DTV



300184471



1909

