

Denne fil er downloadet fra
Danmarks Tekniske Kulturarv
www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på *www.tekniskkulturarv.dk/about*

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

LB

LB K. Monrad:

Ligeveagts- og
Sløjkelære.

3 Udg. 1909

(med Tabeller)

53/9:539.

72

5319:539.

5319:539

~~72~~

LIGEVÆGTSLÆRE

OG

STYRKELÆRE.

TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN

I

DET TEKNISKE SELSKABS SKOLER
FOR BYGNINGSHAANDVÆRKERE, MASKINKONSTRUKTØRER
OG ELEKTROTEKNIKERE.

UDARBEJDET AF

K. MONRAD.

TREDIE UDGAVE.

~~~~~  
TRYKT SOM MANUSKRIFT.  
~~~~~

KØBENHAVN.

TRYKT HOS A/S PEDER ANDERSEN.

1909.

72

72



72

5319:539

72

LIGEVÆGTSLÆRE

OG

STYRKELÆRE.

TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN

I

DET TEKNISKE SELSKABS SKOLER
FOR BYGNINGSHAANDVÆRKERE, MASKINKONSTRUKTØRER
OG ELEKTROTEKNIKERE.

UDARBEJDET AF

K. MONRAD.

TREDIE UDGAVE.

~~~~~  
TRYKT SOM MANUSKRIFT.  
~~~~~

KØBENHAVN.

TRYKT HOS A/S PEDER ANDERSEN.

1909.

TABELLER

TIL

LIGEVÆGTSLÆRE OG STYRKELÆRE.

TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN

I

DET TEKNISKE SELSKABS SKOLER FOR BYGNINGSHAANDVÆRKERE,
MASKINKONSTRUKTØRER OG ELEKTROTEKNIKERE.

UDARBEJDET

AF

K. MONRAD.

~~~~~  
TREDIE UDGAVE.  
~~~~~

KØBENHAVN.

TRYKT HOS A/S P. ANDERSEN.
1909.



5319:539

72

LIGEVÆGTSLÆRE

OG

STYRKELÆRE.

TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN

I

DET TEKNISKE SELSKABS SKOLER
FOR BYGNINGSHAANDVÆRKERE, MASKINKONSTRUKTØRER
OG ELEKTROTEKNIKERE.

UDARBEJDET AF

K. MONRAD.

TREDIE UDGAVE.

~~~~~  
TRYKT SOM MANUSKRIFT.  
~~~~~

KØBENHAVN.

TRYKT HOS A/S PEDER ANDERSEN.

1909.

INDHOLD.

	Side.
Maal og Vægt	5
Omsætning af dansk Maal til Metermaal	5
Tabel I. Cirklers Omkredse og Arealer: Diametrene ere angivne i Decimalbrøk	6
— II. Elasticitetskoefficienter og Brudgrænser i kg/mm ² for flere Materialer	12
— III. Tilladelige Paavirkninger i kg/mm ² for flere Materialer (anvendes ved Maskonstruktioner)	14
— IV. Tilladelige Paavirkninger i kg/mm ² for flere Materialer (anvendes i Bygningskonstruktioner)	16
— V. Cirklers Inertimomenter og Modstandsmomenter for Diametre fra 1 til 100	17
— VI. Nogle Tværsnitsformers Inertimomenter, Modstandsmomenter, Arealer m. m.	18
— VII. Tyske Normalprofiler for valset Jærn.	
A. L-Jærn med ligestore Grene	20
B. L-Jærn med uligestore Grene	22
C. I-Jærn	23
D. I-Jærn	24
E. L-Jærn	25
F. Z-Jærn	26
G. Kvadrant-Jærn	27
H. Differdinger I-Jærn	28
— VIII. Beløbet af Jærn	29
— IX. Vægten af nogle Materialer	30
— X. Etageadskillelsers Vægt og Belastning	30
— XI. Tagkonstruktioners Vægt og Belastning	
A. Egenvægte	31
B. Totalbelastning	31

72

LIGEVÆGTSLÆRE

OG

STYRKELÆRE

TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN

I

DET TEKNISKE SELSKABS SKOLER
FOR BYGNINGSHAANDVÆRKERE, MASKINKONSTRUKTØRER
OG ELEKTROTEKNIKERE.

UDARBEJDET AF

K. MONRAD.

TREDIE UDGAVE.

~~~~~  
TRYKT SOM MANUSKRIFT.  
~~~~~

KØBENHAVN.

TRYKT HOS A/S PEDER ANDERSEN.

1909.



72

5319:539

Maal og Vægt.

1 kg = 2 \bar{a} ; 1 Ton = 1000 kg = 2000 \bar{a} ;
 1 m = 3,1862'; 1 m² = 10,1519 □'; 1 m³ = 32,3459 Kub.'
 1 mm = 0,038823"; 1 mm² = 0,001462 □"; 1 mm³ = 0,000056 Kub."
 1' = 0,3139 m; 1 □' = 0,0985 m²; 1 Kub.' = 0,0309 m³.
 1" = 26,15 mm; 1 □" = 684,1 mm²; 1 Kub." = 17891 mm³.

Omsætning af dansk Maal til Metermaal.

Fod Kvadratfod Kubikfod	m	m ²	m ³	Tommer Kvadrat- tommer Kubik- tommer	cm	cm ²	cm ³
1	0,31385	0,0985	0,03092	1	2,615	6,841	17,891
2	0,6277	0,1970	0,06183	2	5,231	13,68	35,782
3	0,9416	0,2955	0,09275	3	7,846	20,52	53,673
4	1,2554	0,3940	0,12366	4	10,462	27,36	71,564
5	1,5693	0,4925	0,15458	5	13,077	34,20	89,456
6	1,8831	0,5910	0,18549	6	15,693	41,04	107,35
7	2,1970	0,6895	0,21641	7	18,308	47,88	125,24
8	2,5108	0,7880	0,24733	8	20,924	54,72	143,13
9	2,8247	0,8865	0,27824	9	23,539	61,57	161,02

72



72

LIGEVÆGTSLÆRE

OG

STYRKELÆRE.

TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN

I

DET TEKNISKE SELSKABS SKOLER
 FOR BYGNINGSHAANDVÆRKERE, MASKINKONSTRUKTØRER
 OG ELEKTROTEKNIKERE.

UDARBEJDET AF

K. MONRAD.

TREDIE UDGAVE.

~~~~~  
 TRYKT SOM MANUSKRIFT.  
 ~~~~~

KØBENHAVN.

TRYKT HOS A/S PEDER ANDERSEN.

1909.

5319:539

Tabel I.

Cirklers Omkredse og Arealer, naar Cirklerne's Diametre
ere udtrykte i Decimalbrøk fra 10,0—99,9.

d	πd	$\frac{1}{4} \pi d^2$	d	πd	$\frac{1}{4} \pi d^2$	d	πd	$\frac{1}{4} \pi d^2$
10,0	31,42	78,540	14,5	45,55	165,130	19,0	59,69	283,53
1	31,73	80,119	6	45,87	167,415	1	60,00	286,52
2	32,04	81,713	7	46,18	169,717	2	60,32	289,53
3	32,36	83,323	8	46,50	172,034	3	60,63	292,55
4	32,67	84,949	9	46,81	174,367	4	60,95	295,59
5	32,99	86,590	15,0	47,12	176,715	5	61,26	298,65
6	33,30	88,247	1	47,44	179,079	6	61,58	301,72
7	33,62	89,920	2	47,75	181,459	7	61,89	304,81
8	33,93	91,609	3	48,07	183,854	8	62,20	307,91
9	34,24	93,313	4	48,38	186,265	9	62,52	311,03
11,0	34,56	95,033	5	48,69	188,692	20,0	62,83	314,16
1	34,87	96,769	6	49,01	191,13	1	63,15	317,31
2	35,19	98,520	7	49,32	193,59	2	63,46	320,47
3	35,50	100,287	8	49,64	196,07	3	63,77	323,65
4	35,81	102,070	9	49,95	198,56	4	64,09	326,85
5	36,13	103,869	16,0	50,27	201,06	5	64,40	330,06
6	36,44	105,683	1	50,58	203,58	6	64,72	333,29
7	36,76	107,513	2	50,89	206,12	7	65,03	336,54
8	37,07	109,359	3	51,21	208,67	8	65,35	339,79
9	37,38	111,220	4	51,52	211,24	9	65,66	343,07
12,0	37,70	113,097	5	51,84	213,82	21,0	65,97	346,36
1	38,01	114,990	6	52,15	216,42	1	66,29	349,67
2	38,33	116,899	7	52,46	219,04	2	66,60	352,99
3	38,64	118,823	8	52,78	221,67	3	66,92	356,33
4	38,96	120,763	9	53,09	224,32	4	67,23	359,68
5	39,27	122,718	17,0	53,41	226,98	5	67,54	363,05
6	39,58	124,690	1	53,72	229,66	6	67,86	366,44
7	39,90	126,677	2	54,04	232,35	7	68,17	369,84
8	40,21	128,680	3	54,35	235,06	8	68,49	373,25
9	40,53	130,698	4	54,66	237,79	9	68,80	376,68
13,0	40,84	132,733	5	54,98	240,53	22,0	69,12	380,13
1	41,15	134,782	6	55,29	243,28	1	69,43	383,60
2	41,47	136,848	7	55,61	246,06	2	69,74	387,08
3	41,78	138,929	8	55,92	248,85	3	70,06	390,57
4	42,10	141,026	9	56,23	251,65	4	70,37	394,08
5	42,41	143,139	18,0	56,55	254,47	5	70,69	397,61
6	42,73	145,267	1	56,86	257,30	6	71,00	401,15
7	43,04	147,412	2	57,18	260,16	7	71,31	404,71
8	43,35	149,572	3	57,49	263,02	8	71,63	408,28
9	43,67	151,747	4	57,81	265,90	9	71,94	411,87
14,0	43,98	153,938	5	58,12	268,80	23,0	72,26	415,48
1	44,30	156,145	6	58,43	271,72	1	72,57	419,10
2	44,61	158,368	7	58,75	274,65	2	72,88	422,73
3	44,92	160,606	8	59,06	277,59	3	73,20	426,38
4	45,24	162,860	9	59,38	280,55	4	73,51	430,05

d	πd	$\frac{1}{4} \pi d^2$	d	πd	$\frac{1}{4} \pi d^2$	d	πd	$\frac{1}{4} \pi d^2$
23,5	73,83	433,74	29,0	91,11	660,52	34,5	108,4	934,82
6	74,14	437,44	1	91,42	665,08	6	108,7	940,25
7	74,46	441,15	2	91,73	669,66	7	109,0	945,69
8	74,77	444,88	3	92,05	674,26	8	109,3	951,15
9	75,08	448,63	4	92,36	678,87	9	109,6	956,62
24,0	75,40	452,39	5	92,68	683,49	35,0	110,0	962,11
1	75,71	456,17	6	92,99	688,13	1	110,3	967,62
2	76,03	459,96	7	93,31	692,79	2	110,6	973,14
3	76,34	463,77	8	93,62	697,47	3	110,9	978,68
4	76,65	467,59	9	93,93	702,15	4	111,2	984,23
5	76,97	471,44	30,0	94,25	706,86	5	111,5	989,80
6	77,28	475,29	1	94,56	711,58	6	111,8	995,38
7	77,60	479,16	2	94,88	716,31	7	112,2	1000,98
8	77,91	483,05	3	95,19	721,07	8	112,5	1006,60
9	78,23	486,95	4	95,50	725,83	9	112,8	1012,23
25,0	78,54	490,87	5	95,82	730,62	36,0	113,1	1017,87
1	78,85	494,81	6	96,13	735,42	1	113,4	1023,54
2	79,17	498,76	7	96,45	740,23	2	113,7	1029,22
3	79,48	502,73	8	96,76	745,06	3	114,0	1034,91
4	79,80	506,71	9	97,08	749,91	4	114,4	1040,62
5	80,11	510,71	31,0	97,39	754,77	5	114,7	1046,35
6	80,42	514,72	1	97,70	759,64	6	115,0	1052,09
7	80,74	518,75	2	98,02	764,54	7	115,3	1057,85
8	81,05	522,79	3	98,33	769,45	8	115,6	1063,62
9	81,37	526,85	4	98,65	774,37	9	115,9	1069,41
26,0	81,68	530,93	5	98,96	779,31	37,0	116,2	1075,21
1	82,00	535,02	6	99,27	784,27	1	116,6	1081,03
2	82,31	539,13	7	99,59	789,24	2	116,9	1086,87
3	82,62	543,25	8	99,90	794,23	3	117,2	1092,72
4	82,94	547,39	9	100,22	799,23	4	117,5	1098,58
5	83,25	551,55	32,0	100,53	804,25	5	117,8	1104,47
6	83,57	555,72	1	100,8	809,28	6	118,1	1110,4
7	83,88	559,90	2	101,2	814,33	7	118,4	1116,3
8	84,19	564,10	3	101,5	819,40	8	118,8	1122,2
9	84,51	568,32	4	101,8	824,48	9	119,1	1128,1
27,0	84,82	572,56	5	102,1	829,58	38,0	119,4	1134,1
1	85,14	576,80	6	102,4	834,69	1	119,7	1140,1
2	85,45	581,07	7	102,7	839,82	2	120,0	1146,1
3	85,77	585,35	8	103,0	844,96	3	120,3	1152,1
4	86,08	589,65	9	103,4	850,12	4	120,6	1158,1
5	86,39	593,96	33,0	103,7	855,30	5	121,0	1164,2
6	86,71	598,28	1	104,0	860,49	6	121,3	1170,2
7	87,02	602,63	2	104,3	865,70	7	121,6	1176,3
8	87,34	606,99	3	104,6	870,92	8	121,9	1182,4
9	87,65	611,36	4	104,9	876,16	9	122,2	1188,5
28,0	87,96	615,75	5	105,2	881,41	39,0	122,5	1194,6
1	88,28	620,16	6	105,6	886,68	1	122,8	1200,7
2	88,59	624,58	7	105,9	891,97	2	123,2	1206,9
3	88,91	629,02	8	106,2	897,27	3	123,5	1213,0
4	89,22	633,47	9	106,5	902,59	4	123,8	1219,2
5	89,54	637,94	34,0	106,8	907,92	5	124,1	1225,4
6	89,85	642,42	1	107,1	913,27	6	124,4	1231,6
7	90,16	646,92	2	107,4	918,63	7	124,7	1237,9
8	90,48	651,44	3	107,8	924,01	8	125,0	1244,1
9	90,79	655,97	4	108,1	929,41	9	125,3	1250,4

72

LIGEVÆGTSLÆRE

OG

STYRKELÆRE

TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN

I

DET TEKNISKE SELSKABS SKOLER
FOR BYGNINGSHAANDVÆRKERE, MASKINKONSTRUKTØRER
OG ELEKTROTEKNIKERE.

UDARBEJDET AF

K. MONRAD.

TREDIE UDGAVE.

~~~~~  
TRYKT SOM MANUSKRIFT.  
~~~~~

KØBENHAVN.

TRYKT HOS A/S PEDER ANDERSEN.

1909.



5319:539

d	πd	$\frac{1}{4} \pi d^2$	d	πd	$\frac{1}{4} \pi d^2$	d	πd	$\frac{1}{4} \pi d^2$
40.0	125,7	1256,6	45,5	142,9	1626,0	51,0	160,2	2042,8
1	126,0	1262,9	6	143,3	1633,1	1	160,5	2050,8
2	126,3	1269,2	7	143,6	1640,3	2	160,8	2058,9
3	126,6	1275,6	8	143,9	1647,5	3	161,2	2066,9
4	126,9	1281,9	9	144,2	1654,7	4	161,5	2075,0
5	127,2	1288,2	46,0	144,5	1661,9	5	161,8	2083,1
6	127,5	1294,6	1	144,8	1669,1	6	162,1	2091,2
7	127,9	1301,0	2	145,1	1676,4	7	162,4	2099,3
8	128,2	1307,4	3	145,5	1683,7	8	162,7	2107,4
9	128,5	1313,8	4	145,8	1690,9	9	163,0	2115,6
41,0	128,8	1320,3	5	146,1	1698,2	52,0	163,4	2123,7
1	129,1	1326,7	6	146,4	1705,5	1	163,7	2131,9
2	129,4	1333,2	7	146,7	1712,9	2	164,0	2140,1
3	129,7	1339,6	8	147,0	1720,2	3	164,3	2148,3
4	130,1	1346,1	9	147,3	1727,6	4	164,6	2156,5
5	130,4	1352,7	47,0	147,7	1734,9	5	164,9	2164,8
6	130,7	1359,2	1	148,0	1742,3	6	165,2	2173,0
7	131,0	1365,7	2	148,3	1749,7	7	165,5	2181,3
8	131,3	1372,3	3	148,6	1757,2	8	165,9	2189,6
9	131,6	1378,9	4	148,9	1764,6	9	166,2	2197,9
42,0	131,9	1385,4	5	149,2	1772,1	53,0	166,5	2206,2
1	132,3	1392,0	6	149,5	1779,5	1	166,8	2214,5
2	132,6	1398,7	7	149,9	1787,0	2	167,1	2222,9
3	132,9	1405,3	8	150,2	1794,5	3	167,4	2231,2
4	133,2	1412,0	9	150,5	1802,0	4	167,8	2239,6
5	133,5	1418,6	48,0	150,8	1809,6	5	168,1	2248,0
6	133,8	1425,3	1	151,1	1817,1	6	168,4	2256,4
7	134,1	1432,0	2	151,4	1824,7	7	168,7	2264,8
8	134,5	1438,7	3	151,7	1832,2	8	169,0	2273,3
9	134,8	1445,5	4	152,1	1839,8	9	169,3	2281,8
43,0	135,1	1452,2	5	152,4	1847,5	54,0	169,6	2290,2
1	135,4	1459,0	6	152,7	1855,1	1	170,0	2298,7
2	135,7	1465,7	7	153,0	1862,7	2	170,3	2307,2
3	136,0	1472,5	8	153,3	1870,4	3	170,6	2315,7
4	136,3	1479,3	9	153,6	1878,1	4	170,9	2324,3
5	136,7	1486,2	49,0	153,9	1885,7	5	171,2	2332,8
6	137,0	1493,0	1	154,3	1893,4	6	171,5	2341,4
7	137,3	1499,9	2	154,6	1901,2	7	171,8	2350,0
8	137,6	1506,7	3	154,9	1908,9	8	172,2	2358,6
9	137,9	1513,6	4	155,2	1916,7	9	172,5	2367,2
44,0	138,2	1520,5	5	155,5	1924,4	55,0	172,8	2375,8
1	138,5	1527,5	6	155,8	1932,2	1	173,1	2384,5
2	138,9	1534,4	7	156,1	1940,0	2	173,4	2393,1
3	139,2	1541,3	8	156,5	1947,8	3	173,7	2401,8
4	139,5	1548,3	9	156,8	1955,6	4	174,0	2410,5
5	139,8	1555,3	50,0	157,1	1963,5	5	174,4	2419,2
6	140,1	1562,3	1	157,4	1971,4	6	174,7	2427,9
7	140,4	1569,3	2	157,7	1979,2	7	175,0	2436,7
8	140,7	1576,3	3	158,0	1987,1	8	175,3	2445,4
9	141,1	1583,4	4	158,3	1995,0	9	175,6	2454,2
45,0	141,4	1590,4	5	158,7	2003,0	56,0	175,9	2463,0
1	141,7	1597,5	6	159,0	2010,9	1	176,2	2471,8
2	142,0	1604,6	7	159,3	2018,9	2	176,6	2480,6
3	142,3	1611,7	8	159,6	2026,8	3	176,9	2489,5
4	142,6	1618,8	9	159,9	2034,8	4	177,2	2498,3

d	πd	$\frac{1}{4} \pi d^2$	d	πd	$\frac{1}{4} \pi d^2$	d	πd	$\frac{1}{4} \pi d^2$
56,5	177,5	2507,2	62,0	194,8	3019,1	67,5	212,1	3578,5
6	177,8	2516,1	1	195,1	3028,8	6	212,4	3589,1
7	178,1	2525,0	2	195,4	3038,6	7	212,7	3599,7
8	178,4	2533,9	3	195,7	3048,4	8	213,0	3610,3
9	178,8	2542,8	4	196,0	3058,2	9	213,3	3621,0
57,0	179,1	2551,8	5	196,4	3068,0	68,0	213,6	3631,7
1	179,4	2560,7	6	196,7	3077,8	1	213,9	3642,4
2	179,7	2569,7	7	197,0	3087,6	2	214,3	3653,1
3	180,0	2578,7	8	197,3	3097,5	3	214,6	3663,8
4	180,3	2587,7	9	197,6	3107,4	4	214,9	3674,5
5	180,6	2596,7	63,0	197,9	3117,2	5	215,2	3685,3
6	181,0	2605,8	1	198,2	3127,1	6	215,5	3696,1
7	181,3	2614,8	2	198,5	3137,1	7	215,8	3706,8
8	181,6	2623,9	3	198,9	3147,0	8	216,1	3717,6
9	181,9	2633,0	4	199,2	3157,0	9	216,5	3728,5
58,0	182,2	2642,1	5	199,5	3166,9	69,0	216,8	3739,3
1	182,5	2651,2	6	199,8	3176,9	1	217,1	3750,1
2	182,8	2660,3	7	200,1	3186,9	2	217,4	3761,0
3	183,2	2669,5	8	200,4	3196,9	3	217,7	3771,9
4	183,5	2678,7	9	200,7	3206,9	4	218,0	3782,8
5	183,8	2687,8	64,0	201,1	3217,0	5	218,3	3793,7
6	184,1	2697,0	1	201,4	3227,1	6	218,7	3804,6
7	184,4	2706,2	2	201,7	3237,1	7	219,0	3815,5
8	184,7	2715,5	3	202,0	3247,2	8	219,3	3826,5
9	185,0	2724,7	4	202,3	3257,3	9	219,6	3837,5
59,0	185,4	2734,0	5	202,6	3267,5	70,0	219,9	3848,5
1	185,7	2743,3	6	202,9	3277,6	1	220,2	3859,5
2	186,0	2752,5	7	203,3	3287,7	2	220,5	3870,5
3	186,3	2761,8	8	203,6	3297,9	3	220,9	3881,5
4	186,6	2771,2	9	203,9	3308,1	4	221,2	3892,6
5	186,9	2780,5	65,0	204,2	3318,3	5	221,5	3903,6
6	187,2	2789,9	1	204,5	3328,5	6	221,8	3914,7
7	187,6	2799,2	2	204,8	3338,8	7	222,1	3925,8
8	187,9	2808,6	3	205,1	3349,0	8	222,4	3936,9
9	188,2	2818,0	4	205,5	3359,3	9	222,7	3948,0
60,0	188,5	2827,4	5	205,8	3369,6	71,0	223,1	3959,2
1	188,8	2836,9	6	206,1	3379,9	1	223,4	3970,4
2	189,1	2846,3	7	206,4	3390,2	2	223,7	3981,5
3	189,4	2855,8	8	206,7	3400,5	3	224,0	3992,7
4	189,8	2865,3	9	207,0	3410,8	4	224,3	4003,9
5	190,1	2874,8	66,0	207,3	3421,2	5	224,6	4015,2
6	190,4	2884,3	1	207,6	3431,6	6	224,9	4026,4
7	190,7	2893,8	2	208,0	3442,0	7	225,3	4037,6
8	191,0	2903,3	3	208,3	3452,4	8	225,6	4048,9
9	191,3	2912,9	4	208,6	3462,8	9	225,9	4060,2
61,0	191,6	2922,5	5	208,9	3473,2	72,0	226,2	4071,5
1	192,0	2932,1	6	209,2	3483,7	1	226,5	4082,8
2	192,3	2941,7	7	209,5	3494,2	2	226,8	4094,2
3	192,6	2951,3	8	209,9	3504,6	3	227,1	4105,5
4	192,9	2960,9	9	210,2	3515,1	4	227,5	4116,9
5	193,2	2970,6	67,0	210,5	3525,7	5	227,8	4128,2
6	193,5	2980,2	1	210,8	3536,2	6	228,1	4139,6
7	193,8	2989,9	2	211,1	3546,7	7	228,4	4151,1
8	194,2	2999,6	3	211,4	3557,3	8	228,7	4162,5
9	194,5	3009,3	4	211,7	3567,9	9	229,0	4173,9

72



72

LIGEVÆGTSLÆRE

OG

STYRKELÆRE.

TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN

I

DET TEKNISKE SELSKABS SKOLER
FOR BYGNINGSHAANDVÆRKERE, MASKINKONSTRUKTØRER
OG ELEKTROTEKNIKERE.

UDARBEJDET AF

K. MONRAD.

TREDIE UDGAVE.

TRYKT SOM MANUSKRIFT.

KØBENHAVN.

TRYKT HOS A/S PEDER ANDERSEN.

1909.

5319:539

d	πd	$\frac{1}{4} \pi d^2$	d	πd	$\frac{1}{4} \pi d^2$	d	πd	$\frac{1}{4} \pi d^2$
73,0	229,3	4185,4	78,5	246,6	4839,8	84,0	263,9	5541,8
1	229,7	4196,9	6	246,9	4852,2	1	264,2	5555,0
2	230,0	4208,4	7	247,2	4864,5	2	264,5	5568,2
3	230,3	4219,9	8	247,6	4876,9	3	264,8	5581,4
4	230,6	4231,4	9	247,9	4889,3	4	265,2	5594,7
5	230,9	4242,9	79,0	248,2	4901,7	5	265,5	5607,9
6	231,2	4254,5	1	248,5	4914,1	6	265,8	5621,2
7	231,5	4266,0	2	248,8	4926,5	7	266,1	5634,5
8	231,9	4277,6	3	249,1	4939,0	8	266,4	5647,8
9	232,2	4289,2	4	249,4	4951,4	9	266,7	5661,2
74,0	232,5	4300,8	5	249,8	4963,9	85,0	267,0	5674,5
1	232,8	4312,5	6	250,1	4976,4	1	267,4	5687,9
2	233,1	4324,1	7	250,4	4988,9	2	267,7	5701,2
3	233,4	4335,8	8	250,7	5001,4	3	268,0	5714,6
4	233,7	4347,5	9	251,0	5014,0	4	268,3	5728,0
5	234,0	4359,2	80,0	251,3	5026,5	5	268,6	5741,5
6	234,4	4370,9	1	251,6	5039,1	6	268,9	5754,9
7	234,7	4382,6	2	252,0	5051,7	7	269,2	5768,3
8	235,0	4394,3	3	252,3	5064,3	8	269,5	5781,8
9	235,3	4406,1	4	252,6	5076,9	9	269,9	5795,3
75,0	235,6	4417,9	5	252,9	5089,6	86,0	270,2	5808,8
1	235,9	4429,7	6	253,2	5102,2	1	270,5	5822,3
2	236,2	4441,5	7	253,5	5114,9	2	270,8	5835,9
3	236,6	4453,3	8	253,8	5127,6	3	271,1	5849,4
4	236,9	4465,1	9	254,2	5140,3	4	271,4	5863,0
5	237,2	4477,0	81,0	254,5	5153,0	5	271,7	5876,5
6	237,5	4488,8	1	254,8	5165,7	6	272,1	5890,1
7	237,8	4500,7	2	255,1	5178,5	7	272,4	5903,8
8	238,1	4512,6	3	255,4	5191,2	8	272,7	5917,4
9	238,4	4524,5	4	255,7	5204,0	9	273,0	5931,0
76,0	238,8	4536,5	5	256,0	5216,8	87,0	273,3	5944,7
1	239,1	4548,4	6	256,4	5229,6	1	273,6	5958,4
2	239,4	4560,4	7	256,7	5242,4	2	273,9	5972,0
3	239,7	4572,3	8	257,0	5255,3	3	274,3	5985,7
4	240,0	4584,3	9	257,3	5268,1	4	274,6	5999,5
5	240,3	4596,3	82,0	257,6	5281,0	5	274,9	6013,2
6	240,6	4608,4	1	257,9	5293,9	6	275,2	6027,0
7	241,0	4620,4	2	258,2	5306,8	7	275,5	6040,7
8	241,3	4632,5	3	258,6	5319,7	8	275,8	6054,5
9	241,6	4644,5	4	258,9	5332,7	9	276,1	6068,3
77,0	241,9	4656,6	5	259,2	5345,6	88,0	276,5	6082,1
1	242,2	4668,7	6	259,5	5358,6	1	276,8	6096,0
2	242,5	4680,8	7	259,8	5371,6	2	277,1	6109,8
3	242,8	4693,0	8	260,1	5384,6	3	277,4	6123,7
4	243,2	4705,1	9	260,4	5397,6	4	277,7	6137,5
5	243,5	4717,3	83,0	260,8	5410,6	5	278,0	6151,4
6	243,8	4729,5	1	261,1	5423,7	6	278,3	6165,3
7	244,1	4741,7	2	261,4	5436,7	7	278,7	6179,3
8	244,4	4753,9	3	261,7	5449,8	8	279,0	6193,2
9	244,7	4766,1	4	262,0	5462,9	9	279,3	6207,2
78,0	245,0	4778,4	5	262,3	5476,0	89,0	279,6	6221,1
1	245,4	4790,6	6	262,6	5489,1	1	279,9	6235,1
2	245,7	4802,9	7	263,0	5502,3	2	280,2	6249,1
3	246,0	4815,2	8	263,3	5515,4	3	280,5	6263,1
4	246,3	4827,5	9	263,6	5528,6	4	280,9	6277,2

d	πd	$\frac{1}{4} \pi d^2$	d	πd	$\frac{1}{4} \pi d^2$	d	πd	$\frac{1}{4} \pi d^2$
89,5	281,2	6291,2	93,0	292,2	6792,9	96,5	303,2	7313,8
6	281,5	6305,3	1	292,5	6807,5	6	303,5	7329,0
7	281,8	6319,4	2	292,8	6822,2	7	303,8	7344,2
8	282,1	6333,5	3	293,1	6836,8	8	304,1	7359,4
9	282,4	6347,6	4	293,4	6851,5	9	304,4	7374,6
90,0	282,7	6361,7	5	293,7	6866,1	97,0	304,7	7389,8
1	283,1	6375,9	6	294,1	6880,8	1	305,0	7405,1
2	283,4	6390,0	7	294,4	6895,6	2	305,4	7420,3
3	283,7	6404,2	8	294,7	6910,3	3	305,7	7435,6
4	284,0	6418,4	9	295,0	6925,0	4	306,0	7450,9
5	284,3	6432,6	94,0	295,3	6939,8	5	306,3	7466,2
6	284,6	6446,8	1	295,6	6954,6	6	306,6	7481,5
7	284,9	6461,1	2	295,9	6969,3	7	306,9	7496,9
8	285,3	6475,3	3	296,3	6984,1	8	307,2	7512,2
9	285,6	6489,6	4	296,6	6999,0	9	307,6	7527,6
91,0	285,9	6503,9	5	296,9	7013,8	98,0	307,9	7543,0
1	286,2	6518,2	6	297,2	7028,7	1	308,2	7558,4
2	286,5	6532,5	7	297,5	7043,5	2	308,5	7573,8
3	286,8	6546,8	8	297,8	7058,4	3	308,8	7589,2
4	287,1	6561,2	9	298,1	7073,3	4	309,1	7604,7
5	287,5	6575,5	95,0	298,5	7088,2	5	309,4	7620,1
6	287,8	6589,9	1	298,8	7103,1	6	309,8	7635,6
7	288,1	6604,3	2	299,1	7118,1	7	310,1	7651,1
8	288,4	6618,7	3	299,4	7133,1	8	310,4	7666,6
9	288,7	6633,2	4	299,7	7148,0	9	310,7	7682,1
92,0	289,0	6647,6	5	300,0	7163,0	99,0	311,0	7697,7
1	289,3	6662,1	6	300,3	7178,0	1	311,3	7713,2
2	289,7	6676,5	7	300,7	7193,1	2	311,6	7728,8
3	290,0	6691,0	8	301,0	7208,1	3	312,0	7744,4
4	290,3	6705,5	9	301,3	7223,2	4	312,3	7760,0
5	290,6	6720,1	96,0	301,6	7238,2	5	312,6	7775,6
6	290,9	6734,6	1	301,9	7253,3	6	312,9	7791,3
7	291,2	6749,2	2	302,2	7268,4	7	313,2	7806,9
8	291,5	6763,7	3	302,5	7283,5	8	313,5	7822,6
9	291,9	6778,3	4	302,8	7298,7	9	313,8	7838,3
						100,0	314,2	7854,0

72



~~72~~

LIGEVÆGTSLÆRE

OG

STYRKELÆRE.

TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN

I

DET TEKNISKE SELSKABS SKOLER
FOR BYGNINGSHAANDVÆRKERE, MASKINKONSTRUKTØRER
OG ELEKTROTEKNIKERE.

UDARBEJDET AF

K. MONRAD.

TREDIE UDGAVE.

~~~~~  
TRYKT SOM MANUSKRIFT.  
~~~~~

KØBENHAVN.

TRYKT HOS A/S PEDER ANDERSEN.

1909.

5319:539

Tabel

Elasticitetskoefficienter, Brudgrænser og

Materialerne.	Elasticitetskoefficienter i kg/mm ² for		Strækning paa 200 mm φ i 0/0	Brudgrænser i kg/mm ² for				Elasticitetsgrænser i kg/mm ² for	
	Strækning og Sammen-trykning. E	Forskydning. G		Strækning. K _s	Sammen-trykning. K _t	Bejning. K _b	Forskydning. K _f	Strækning. T _s	Sammen-trykning. T _t
Smedejærn.									
Stangjærn, prima	20000	7000	18	38	38	50	35	17	17
do. ord. 5-10 mm tykt.	—	—	12	36	—	—	32	—	—
do. " 11-15 " " "	—	—	12	35	—	—	—	—	—
do. " 15-25 " " "	—	—	12	34	—	—	—	13	13
Nitter, indtil 25 mm Diameter	—	—	18	38	—	—	35	—	—
do. " 25-40 " " "	—	—	15	36	—	—	—	—	—
Plader, ord. II (langs Fibrene)	—	—	5	32	—	—	—	—	—
do. " I (tværs paa Fibrene)	—	—	3	27	—	—	24	—	—
do. prima II	—	—	12	35	—	—	—	—	—
do. ordinære I	—	—	8	33	—	—	—	—	—
Blødt Staal.									
(Martin- & Bessemerjærn etc.)									
Stangjærn, haardere	21500	8300	20	44	—	—	—	24	24
do. blødere	20000	8000	25	37	—	—	—	20	20
Plader, haardere	—	—	20	45	—	—	—	—	—
do. blødere	—	—	25	34	—	—	—	—	—
Haardt Staal.									
Digelstaal, haardt hærdet	25000	9400	0	130	—	—	—	—	—
do. uhærd. Kulholdighed									
do. " do. 1,4 0/0	22000	8500	5	95	—	—	—	—	—
do. " do. 1,0 0/0	—	—	8	85	—	—	—	—	—
do. " do. 0,5 0/0	—	—	17	60	—	—	—	—	—
Martin- & Bessemerst., haardt	—	—	15	60	—	80	40	30	30
do. blødt	—	—	20	45	—	—	—	—	—
Fjederstaal, uhærdet	—	—	12	70	—	—	—	—	—
do. hærdet	—	—	4	80	—	—	—	—	—
Støbejærn.									
Blødt	7500	3000	—	18	70	—	15	—	—
Haardt	10500	4000	—	12	80	—	—	—	—

Anm. Denne Tabel angiver Middelværdier ved uforanderlige Belastninger. Ønsker man for et bestemt givet Materiale at bruge nøjagtigere Værdier, kunne disse kun faas ved, at man lader vedkommende Materiale underkaste særlige Styrkeprøver.

II.

Elasticitetsgrænser i kg/mm² for en Del Materialer.

Materialerne.	Elasticitetskoefficienter i kg/mm ² for		Brudgrænser i kg/mm ² for				Elasticitetsgrænser i kg/mm ² for	
	Strækning og Sammen-trykning. E	Forskydning. G	Strækning. K _s	Sammen-trykning. K _t	Bejning. K _b	Forskydning. K _f	Strækning. T _s	Sammen-trykning. T _t
Kobber, smedet og trukket	11000	4400	32	70	—	—	14	14
Kobberplader, vals. v. 150 T.	—	—	22	—	—	—	4	—
do. " " 2000 "	—	—	17	—	—	—	—	—
do. " " 4500 "	—	—	11	—	—	—	—	—
Fosforbrønce	9500	3800	40	—	—	—	13	—
Kanonbrønce	11000	—	31	—	—	—	3-9	—
Deltametal, haardt valset	10000	—	58	95	—	40	22	—
Aluminiumbrønce, 10 0/0	—	—	65	—	—	—	—	—
do. 2 0/0	—	—	48	—	—	—	—	—
Messing, støbt	6400	2400	12-15	7,5	—	—	—	—
Zinkplader II	1500	—	19	10	—	—	—	—
Bly, blødt	500	190	1,25	1,5	—	—	0,8	—
do. haardt	—	—	—	3	—	—	—	—
Tin	4000	1500	3,5	—	—	—	1,3	—
Egetræ II, middeltørt.	1100	80	11	6	6	0,8	4,8	1,5
Bøgetræ " do.	1700	120	13	6	6,5	0,7	5,8	1
Fyrretræ " do.	950	70	11	5	5,5	0,4	4,5	1,5
Granit	—	—	—	8-20	0,5-2,5	0,4-1,6	—	—
Kalksten	—	—	—	4-20	0,5-1,5	0,3-1,2	—	—
Sandsten	—	—	—	2,5-18	0,3-1,5	0,2-0,8	—	—
Brændte Mursten klinkebr.	—	—	—	4-11	—	—	—	—
do. middelbr.	—	—	—	2-4	—	—	—	—
do. løse	—	—	—	0,7-1,7	—	—	—	—
Kalkmørtel, god	—	—	0,05	0,4	—	—	—	—
Cementmørtel	—	—	0,16-0,35	1,6-3,5	—	—	—	—
Cementbeton	—	—	—	0,6-1,9	—	—	—	—
Glas	7000	—	2,5	—	—	—	—	—
Is	—	—	0,024-0,157	—	—	—	—	—

De for Bejning anførte Værdier gælder for saadanne Tværsnit, som ere symmetriske med Hensyn til en ret Linie, der gennem vedkommende Tværsnits Tyngdepunkt er tegnet vinkelret paa Kraftretningen.

72



~~72~~

LIGEVÆGTSLÆRE

OG

STYRKELÆRE.

TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN

I

DET TEKNISKE SELSKABS SKOLER
FOR BYGNINGSHAANDVÆRKERE, MASKINKONSTRUKTØRER
OG ELEKTROTEKNIKERE.

UDARBEJDET AF

K. MONRAD.

TREDIE UDGAVE.

~~~~~  
TRYKT SOM MANUSKRIFT.  
~~~~~

KØBENHAVN.

TRYKT HOS A/S PEDER ANDERSEN.
1909.

5319:539

Tabel

Tilladelige Paavirk-
Anvendes særligt ved

	Strækning.		
	k_s		
	a	b	c
Smedejærn II, bedste Slags	12	8	4
do. ordinært	9	6	3
Blødt Staal, bedste Slags	12	8	4
do. ordinært	9	6	3
Haardt Staal, bedste Slags	15	10	5
do. ordinært	12	8	4
Færdigstøbt Staal, bedste Slags	9	6	3
do. ordinært	6	4	2
Fjederstaa, hærdet	—	—	—
do. for Jærnbanevognsfjedre	—	—	—
Støbejærn	3	2	1
Fosforbronce	7,5	5	2,5
Kanonbronce	3	2	1

Anm. a Paavirkningerne anvendes ved fuldstændig rolig Belastning.

b " " , naar Belastningen skifter saaledes, at de i Materialet fremkaldte Spændinger vokse fra 0 til et Maksimum og atter aftage til Nul.

c " " , naar Belastningen hyppigt forandres saaledes, at de i Materialet fremkaldte Spændinger svinge mellem et positivt og et ligesaa stort negativt Maksimum (f. Eks. gentagen Bøjning eller Vridning i modsatte Retninger).

III.

ninger i kg/mm².

Maskonstruktioner.

Sammen- trykning.		Bøjning.			Forskyd- ning.			Vridning.		
k_t		k_b			k_f			k_v		
a	b	a	b	c	a	b	c	a	b	c
12	8	12	8	4	9,6	6,4	3,2	4,8	3,2	1,6
9	6	9	6	3	7,2	4,8	2,4	3,6	2,4	1,2
12	8	12	8	4	9,6	6,4	3,2	8,4	5,6	2,8
9	6	9	6	3	7,2	4,8	2,4	6	4	2
15	10	15	10	5	12	8	4	12	8	4
12	8	12	8	4	9,6	6,4	3,2	9	6	3
12	9	10,5	7	3,5	8,4	5,6	2,8	8,4	5,6	2,8
9	6	7,5	5	2,5	4,8	3,2	1,6	4,8	3,2	1,6
—	—	43	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	65-80	—	—	—	—	—	—	—	—
9	6	1)	—	—	3	2	1	2)	—	—
—	—	7,5	5	2,5	—	—	—	3	2	1
—	—	3	2	1	—	—	—	—	—	—

1) For forarbejdet Støbejærn er $k_b = \mu k_s \sqrt{\frac{e}{z_0}}$, hvor $\mu = 1,20$ til $1,33$.

e er Afstanden fra de stærkest paavirkede Fibre til den neutrale Akse.
 z_0 er Afstanden fra den neutrale Akse til Tyngdepunktet i det paa den ene Side af den liggende Tværnsitsareal.

2) k_v kan for forarbejdet Støbejærn sættes til:

ved cirkulært Tværnsnit $k_v = k_s$.

" hult cirkulært og hult elliptisk Tværnsnit $k_v = 0,8 k_s$ til k_s .

" elliptisk Tværnsnit $k_v = k_s$ til $1,25 k_s$.

" kvadratisk Tværnsnit $k_v = 1,4 k_s$.

" rektangulært Tværnsnit $k_v = 1,4 k_s$ til $1,6 k_s$.

" hult rektangulært Tværnsnit $k_v = k_s$ til $1,25 k_s$.

" I, □, + og L fornet Tværnsnit $k_v = 1,4 k_s$ til $1,6 k_s$.

72

LIGEVÆGTSLÆRE

OG

STYRKELÆRE.

TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN

I

DET TEKNISKE SELSKABS SKOLER
FOR BYGNINGSHAANDVÆRKERE, MASKINKONSTRUKTØRER
OG ELEKTROTEKNIKERE.

UDARBEJDET AF

K. MONRAD.

TREDIE UDGAVE.

~~~~~  
TRYKT SOM MANUSKRIFT.  
~~~~~

KØBENHAVN.

TRYKT HOS A/S PEDER ANDERSEN.

1909.



5319:539

Tabel IV.

Tilladelige Paavirkninger.

Anvendes ved Bygningskonstruktioner.

Materialet.	Tilladelige Paavirkninger i kg/mm ² .		
	Strækning. k_s	Sammen- trykning. k_t	Forskyd- ning. k_f
Smedejern i Stænger	7,5	7,5	6
do. i Plader	7,5	7,5	6
Jærntraad	12	—	—
Blødt Staal	9	9	7,2
Haardt Staal, hærdeligt	12	12	9,6
Støbejern	3	6,75	2,3
Egetræ 	1,2	0,80	0,07
do. ⊥	—	0,36	—
Bøgetræ 	1,2	0,66	0,06
do. ⊥	—	0,36	—
Fyrretræ 	0,9	0,63	0,07
do. ⊥	—	0,22	0,13
Glas	—	0,75	—
Granit	0,06	0,45	—
Kalksten, Marmor	0,03	0,24	—
Sandsten, rød	0,019	0,15	—
do. lys	0,038	0,30	—
Murstensmurværk i Kalkmørtel	0,009	0,03 à 0,07	—
do. i cementblandet Kalkmørtel	0,013	0,11	—
do. i Cementmørtel	0,019	0,14	—
Porøse Mursten i Hvælvinger, letbrændte	—	0,03	—
do. do. i do. haardtbrændte	—	0,06	—
Beton	0,019	0,06 à 0,1	—
God Byggegrund	—	0,026	—

Værdier for en Del andre Materialers Brudpaavirkninger og Elasticitetskoefficienter udtrykte i kg/mm² findes paa Tabel II.

|| betyder i Retning af Træets Fibre, ⊥ betyder vinkelret paa dem.

Tabel V.

Cirklers Inertimomenter J og Modstandsmomenter W
for Diametre fra 1 til 100.

d	$J = \frac{\pi d^4}{64}$	$W = \frac{\pi d^3}{32}$	d	$J = \frac{\pi d^4}{64}$	$W = \frac{\pi d^3}{32}$	d	$J = \frac{\pi d^4}{64}$	$W = \frac{\pi d^3}{32}$
1	0,0491	0,0982	35	73662	4209	68	1049556	30869
2	0,7854	0,7854	36	82448	4580	69	1112660	32251
3	3,976	2,651	37	91998	4973	70	1178588	33674
4	12,57	6,283	38	102354	5387	71	1247393	35138
5	30,68	12,27	39	113561	5824	72	1319167	36644
6	63,62	21,21	40	125664	6283	73	1393995	38192
7	117,9	33,67	41	138709	6766	74	1471963	39783
8	201,1	50,27	42	152745	7224	75	1553156	41417
9	322,1	71,57	43	167820	7806	76	1637662	43096
10	490,9	98,17	44	183984	8363	77	1725571	44820
11	718,7	130,7	45	201289	8946	78	1816972	46589
12	1018	169,6	46	219787	9556	79	1911967	48404
13	1402	215,7	47	239531	10193	80	2010619	50265
14	1886	269,4	48	263576	10857	81	2113051	52174
15	2485	331,3	49	282979	11550	82	2219347	54130
16	3217	402,1	50	306796	12272	83	2329605	56135
17	4100	482,3	51	332086	13023	84	2443920	58189
18	5153	572,6	52	358908	13804	85	2562392	60292
19	6397	673,4	53	387323	14616	86	2685120	62445
20	7854	785,4	54	417393	15459	87	2812205	64648
21	9547	909,2	55	449180	16334	88	2943748	66903
22	11499	1045	56	482750	17241	89	3079853	69210
23	13737	1194	57	518166	18181	90	3220623	71569
24	16286	1357	58	555497	19155	91	3366165	73982
25	19175	1534	59	594810	20163	92	3516586	76448
26	22432	1726	60	636172	21206	93	3671992	78968
27	26087	1932	61	679651	22284	94	3832492	81542
28	30172	2155	62	725332	23398	95	3998198	84173
29	34719	2394	63	773272	24548	96	4169220	86859
30	39761	2651	64	823550	25736	97	4345671	89601
31	45333	2925	65	876240	26961	98	4527664	92401
32	51472	3217	66	931420	28225	99	4715315	95259
33	58214	3528	67	989166	29527	100	4908738	98175
34	65597	3859						

72

LIGEVÆGTSLÆRE

OG

STYRKELÆRE

TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN

I

DET TEKNISKE SELSKABS SKOLER
FOR BYGNINGSHAANDVÆRKERE, MASKINKONSTRUKTØRER
OG ELEKTROTEKNIKERE.

UDARBEJDET AF

K. MONRAD.

TREDIE UDGAVE.

~~~~~  
TRYKT SOM MANUSKRIFT.  
~~~~~

KØBENHAVN.

TRYKT HOS A/S PEDER ANDERSEN.

1909.



5319:539

Tabel VI.

Nogle Tværnsforms Inertimomenter, Modstandsmomenter, Arealer m. m.

Tværnsform.	Inertimoment $J.$	Afstande fra den neutrale Aakse til de yderste Fibre $y.$	Modstandsmoment $W = \frac{J}{y}.$	Tværnsareal $A.$
	$\frac{b^4}{12}$	$\frac{b}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{12} b^3 = 0,118 b^3$	b^2
	$\frac{5\sqrt{3}}{16} b^4 = 0,5413 b^4$	$b \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866 b$	$\frac{5}{8} b^3$	$\frac{3\sqrt{3}}{2} b^2 = 2,598 b^2$
	$\frac{5\sqrt{3}}{16} b^4 = 0,5413 b^4$	b	$\frac{5\sqrt{3}}{16} b^3 = 0,5413 b^3$	$\frac{3\sqrt{3}}{2} b^2 = 2,598 b^2$
	$\frac{\pi}{8} r^4 - \frac{\pi r^2 (\frac{4}{3} r)^2}{2} = 0,11 r^4$	$y = 0,5756 r$ $y' = 0,4244 r$	$W = 0,19 r^3$ $W' = 0,26 r^3$	$\frac{\pi r^2}{2}$

18

	$\frac{bh^3}{36}$	$y = \frac{h}{3}$ $y' = \frac{2h}{3}$	$W = \frac{bh^2}{12}$ $W' = \frac{bh^2}{24}$	$\frac{bh}{2}$
	$\frac{b^2 + 4bb_1 + b_1^2}{36(b + b_1)} \cdot h^3$	$y = \frac{b + 2b_1}{b + b_1} \cdot \frac{h}{3}$ $y' = \frac{2b + b_1}{b + b_1} \cdot \frac{h}{3}$	$W = \frac{b^2 + 4bb_1 + b_1^2}{12(b + b_1)} \cdot h^2$ $W' = \frac{b^2 + 4bb_1 + b_1^2}{12(2b + b_1)} \cdot h^2$	$\frac{b + b_1}{2} \cdot h$

Skinneprofil.	Højde $h.$	Vægt pr. løbende m.	Inertimomentet J x med Hensyn til den neutrale Aakse x .	Afstanden fra den neutrale Aakse til de yderste Fibre.	Modstands- momentet W x med Hensyn til Aksen x .	Tværnsareal $A.$	
	mm.	kg.	cm ⁴ .	mm.	cm ³ .	mm ² .	
	Fodens Bredde ca. 91,5 mm.	131	32,7	919,0	65,4	140,4	4275
	Hovedets Bredde ca. 55 mm.	118	29,8	691,6	59,0	117,5	3900
		105	26,1	470,3	52,3	89,8	3420

19

72



~~72~~

LIGEVÆGTSLÆRE
OG
STYRKELÆRE.

TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN

I

DET TEKNISKE SELSKABS SKOLER
FOR BYGNINGSHAANDVÆRKERE, MASKINKONSTRUKTØRER
OG ELEKTROTEKNIKERE.

UDARBEJDET AF

K. MONRAD.

TREDIE UDGAVE.

~~~~~  
TRYKT SOM MANUSKRIFT.  
~~~~~

KØBENHAVN.

TRYKT HOS A/S PEDER ANDERSEN.
1909.

5319:539

Tabel VII.

Tyske Normalprofiler for valset Jærn.

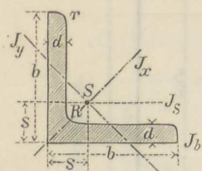
A. L-Jærn med ligestore Grene.

Normallængde = 4—8 m.

Største Længde = 12—16 m.

Radius til Afrundingen i Vinkelhjørnet

$$R = \frac{1}{2}(d_{\min} + d_{\max}).$$

 Radius til Grenedens Afrunding $r = \frac{1}{2}R$
 (afrundet til halve mm).


Profil-Nr.	Dimen-sioner.		Tvær-sni-areal.	Vægt.	Tyngde-punkts-afstand.	Inertimoment.				Profil-Nr.
	b	d				J_b	J_s	$J_x = \max$	$J_y = \min$	
	mm	mm	cm ²	kg/m	mm	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴	
1 ^{1/2}	15	3	0,82	0,65	4,8	0,33	0,15	0,24	0,06	1 ^{1/2}
		4	1,05	0,83	5,1	0,46	0,18	0,29	0,08	
2	20	3	1,12	0,88	6,0	0,78	0,38	0,62	0,15	2
		4	1,45	1,14	6,4	1,07	0,48	0,77	0,19	
2 ^{1/2}	25	3	1,42	1,12	7,3	1,53	0,79	1,27	0,31	2 ^{1/2}
		4	1,85	1,45	7,6	2,08	1,00	1,61	0,40	
3	30	4	2,27	1,78	8,9	3,5	1,80	2,85	0,76	3
		6	3,27	2,57	9,6	5,5	2,48	3,91	1,06	
3 ^{1/2}	35	4	2,67	2,09	10,0	5,6	2,96	4,68	1,24	3 ^{1/2}
		6	3,87	3,04	10,8	8,6	4,13	6,50	1,77	
4	40	4	3,08	2,42	11,2	8,3	4,47	7,09	1,86	4
		6	4,48	3,51	12,0	12,8	6,35	9,98	2,67	
4 ^{1/2}	45	8	5,80	4,55	12,8	17,4	7,90	12,4	3,38	4 ^{1/2}
		5	4,30	3,38	12,8	14,9	7,85	12,4	3,25	
5	50	7	5,86	4,60	13,6	21,2	10,4	16,4	4,39	5
		9	7,34	5,76	14,4	27,8	12,6	19,8	5,40	
5 ^{1/2}	55	5	4,80	3,77	14,0	20,4	11,0	17,4	4,59	5 ^{1/2}
		7	6,56	5,15	14,9	29,0	14,5	23,1	6,02	
6	60	9	8,24	6,47	15,6	38,0	17,9	28,1	7,67	6
		6	6,31	4,95	15,6	32,8	17,3	27,4	7,24	
6 ^{1/2}	65	8	8,23	6,46	16,4	44,2	22,1	34,8	9,35	6 ^{1/2}
		10	10,07	7,90	17,2	56,0	26,3	41,4	11,27	
7	70	6	6,91	5,42	16,9	42,5	22,7	36,1	9,43	7
		8	9,03	7,09	17,7	57,5	29,2	46,1	12,1	
7 ^{1/2}	75	10	11,07	8,69	18,5	72,8	34,8	55,1	14,6	7 ^{1/2}
		7	8,7	6,8	18,5	63	33,4	53,0	13,8	
8	80	9	11,0	8,6	19,3	82	41,3	65,4	17,2	8
		11	13,2	10,3	20,0	101	48,7	76,8	20,7	
8 ^{1/2}	85	7	9,4	7,4	19,7	79	42,3	67,1	17,6	8 ^{1/2}
		9	11,9	9,3	20,5	102	52,5	83,1	22,0	
9	90	11	14,3	11,2	21,3	126	62,0	97,6	26,0	9
		9	11,9	9,3	20,5	102	52,5	83,1	22,0	

Profil-Nr.	Dimen-sioner.		Tvær-sni-areal.	Vægt.	Tyngde-punkts-afstand.	Inertimoment.				Profil-Nr.
	b	d				J_b	J_s	$J_x = \max$	$J_y = \min$	
	mm	mm	cm ²	kg/m	mm	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴	
7 ^{1/2}	75	8	11,5	9,0	21,3	111	59,0	93,3	24,4	7 ^{1/2}
		10	14,1	11,1	22,1	140	71,0	113	29,8	
		12	16,7	13,1	22,9	170	82,5	130	34,7	
8	80	8	12,3	9,7	22,6	135	72,0	115	29,6	8
		10	15,1	11,9	23,4	170	87,5	139	35,9	
		12	17,9	14,1	24,1	206	102	161	43,0	
9	90	9	15,5	12,2	25,4	216	116	184	47,8	9
		11	18,7	14,7	26,2	266	138	218	57,1	
		13	21,8	17,1	27,0	317	158	250	65,9	
10	100	10	19,2	15,1	28,2	329	177	280	73,3	10
		12	22,7	17,8	29,0	398	207	328	86,2	
		14	26,2	20,6	29,8	468	235	372	98,3	
11	110	10	21,2	16,6	30,7	438	239	379	98,6	11
		12	25,1	19,7	31,5	529	280	444	116	
		14	29,0	22,8	32,1	621	319	505	133	
12	120	11	25,4	19,9	33,6	626	340	541	140	12
		13	29,7	23,3	34,4	745	393	625	162	
		15	33,9	26,6	35,1	864	445	705	186	
13	130	12	30,0	23,6	36,4	869	472	750	194	13
		14	34,7	27,2	37,2	1020	540	857	223	
		16	39,3	30,9	38,0	1171	604	959	251	
14	140	13	35,0	27,5	39,2	1175	638	1014	262	14
		15	40,0	31,4	40,0	1363	723	1148	298	
		17	45,0	35,3	40,8	1554	805	1276	334	
15	150	14	40,3	31,6	42	1559	845	1343	347	15
		16	45,7	35,9	43	1790	949	1507	391	
		18	51,0	40,0	44	2023	1052	1665	438	
16	160	15	46,1	36,2	45	2027	1099	1745	453	16
		17	51,8	40,7	46	2308	1225	1945	506	
		19	57,5	45,1	47	2590	1348	2137	558	

72



72

LIGEVÆGTSLÆRE

OG

STYRKELÆRE.

TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN

I

DET TEKNISKE SELSKABS SKOLER
FOR BYGNINGSHAANDVÆRKERE, MASKINKONSTRUKTØRER
OG ELEKTROTEKNIKERE.

UDARBEJDET AF

K. MONRAD.

TREDIE UDGAVE.

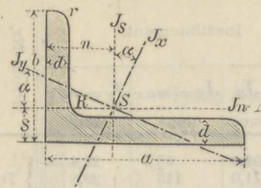
TRYKT SOM MANUSKRIFT.

KØBENHAVN.

TRYKT HOS A/S PEDER ANDERSEN.

1909.

5319:539



B. L-Jærn med uligestore Grene.

Normallængde = 4-8 m.
 Største Længde = 12-16 m.
 Radius til Afrundingen i Vinkelhjørnet
 $R = \frac{1}{2}(d_{\min} + d_{\max})$.

Radius til Grenendens Afrunding $r = \frac{1}{2} R$
 (afrundet til halve mm).

i (i mm) er Afstanden mellem 2 \perp , hvorved Inertimenterne m. H. t. de 2 Hovedakser er ligestore (lig 2 J_s).

Profil-Nr.	Dimen- sioner i mm			Tvær- snits- areal. A cm ²	Vægt. V kg/m	Tyngde- punkts- afstand		Inertimoment.				Af- stand. i mm	
	b	a	d			s	n	J_s	J_n	J_x = max	J_y = min		
$b:a = 1:1\frac{1}{2}$													
2/3	20	30	$\begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 1,42 \\ 1,85 \end{cases}$	$\begin{cases} 1,12 \\ 1,45 \end{cases}$	$\begin{cases} 4,9 \\ 5,4 \end{cases}$	$\begin{cases} 9,9 \\ 10,3 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,4216 \\ 0,4214 \end{cases}$	$\begin{cases} 1,25 \\ 1,60 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,45 \\ 0,55 \end{cases}$	$\begin{cases} 1,42 \\ 1,82 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,28 \\ 0,33 \end{cases}$	$\begin{cases} 5,2 \\ 4,3 \end{cases}$
3/4½	30	45	$\begin{cases} 4 \\ 5 \end{cases}$	$\begin{cases} 2,87 \\ 3,53 \end{cases}$	$\begin{cases} 2,25 \\ 2,77 \end{cases}$	$\begin{cases} 7,4 \\ 7,8 \end{cases}$	$\begin{cases} 14,8 \\ 15,2 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,4334 \\ 0,4288 \end{cases}$	$\begin{cases} 5,77 \\ 6,99 \end{cases}$	$\begin{cases} 2,05 \\ 2,46 \end{cases}$	$\begin{cases} 6,63 \\ 8,01 \end{cases}$	$\begin{cases} 1,19 \\ 1,44 \end{cases}$	$\begin{cases} 8,0 \\ 7,1 \end{cases}$
4/6	40	60	$\begin{cases} 5 \\ 7 \end{cases}$	$\begin{cases} 4,79 \\ 6,55 \end{cases}$	$\begin{cases} 3,76 \\ 5,14 \end{cases}$	$\begin{cases} 9,7 \\ 10,5 \end{cases}$	$\begin{cases} 19,5 \\ 20,4 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,4319 \\ 0,4275 \end{cases}$	$\begin{cases} 17,3 \\ 22,8 \end{cases}$	$\begin{cases} 6,20 \\ 8,10 \end{cases}$	$\begin{cases} 19,8 \\ 26,3 \end{cases}$	$\begin{cases} 3,66 \\ 4,63 \end{cases}$	$\begin{cases} 11,0 \\ 9,0 \end{cases}$
5/7½	50	75	$\begin{cases} 7 \\ 9 \end{cases}$	$\begin{cases} 8,33 \\ 10,5 \end{cases}$	$\begin{cases} 6,54 \\ 8,24 \end{cases}$	$\begin{cases} 12,4 \\ 13,2 \end{cases}$	$\begin{cases} 24,7 \\ 25,6 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,4304 \\ 0,4272 \end{cases}$	$\begin{cases} 46,3 \\ 57,2 \end{cases}$	$\begin{cases} 16,4 \\ 20,1 \end{cases}$	$\begin{cases} 53,1 \\ 65,4 \end{cases}$	$\begin{cases} 9,58 \\ 11,9 \end{cases}$	$\begin{cases} 13,1 \\ 11,2 \end{cases}$
6½/10	65	100	$\begin{cases} 9 \\ 11 \end{cases}$	$\begin{cases} 14,2 \\ 17,1 \end{cases}$	$\begin{cases} 11,1 \\ 13,4 \end{cases}$	$\begin{cases} 15,9 \\ 16,7 \end{cases}$	$\begin{cases} 33,1 \\ 34,0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,4101 \\ 0,4074 \end{cases}$	$\begin{cases} 140 \\ 167 \end{cases}$	$\begin{cases} 46,6 \\ 55,3 \end{cases}$	$\begin{cases} 160 \\ 189 \end{cases}$	$\begin{cases} 26,8 \\ 32,9 \end{cases}$	$\begin{cases} 19,5 \\ 17,7 \end{cases}$
8/12	80	120	$\begin{cases} 10 \\ 12 \end{cases}$	$\begin{cases} 19,1 \\ 22,7 \end{cases}$	$\begin{cases} 15,0 \\ 17,8 \end{cases}$	$\begin{cases} 19,5 \\ 20,2 \end{cases}$	$\begin{cases} 39,2 \\ 40,0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,4348 \\ 0,4304 \end{cases}$	$\begin{cases} 276 \\ 323 \end{cases}$	$\begin{cases} 97,9 \\ 115 \end{cases}$	$\begin{cases} 317 \\ 370 \end{cases}$	$\begin{cases} 56,8 \\ 67,5 \end{cases}$	$\begin{cases} 22,1 \\ 20,1 \end{cases}$
10/15	100	150	$\begin{cases} 12 \\ 14 \end{cases}$	$\begin{cases} 28,7 \\ 33,2 \end{cases}$	$\begin{cases} 22,5 \\ 26,1 \end{cases}$	$\begin{cases} 24,2 \\ 25,0 \end{cases}$	$\begin{cases} 48,9 \\ 49,7 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,4361 \\ 0,4339 \end{cases}$	$\begin{cases} 649 \\ 744 \end{cases}$	$\begin{cases} 232 \\ 263 \end{cases}$	$\begin{cases} 747 \\ 854 \end{cases}$	$\begin{cases} 134 \\ 153 \end{cases}$	$\begin{cases} 27,8 \\ 26,1 \end{cases}$
$b:a = 1:2$													
2/4	20	40	$\begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 1,72 \\ 2,25 \end{cases}$	$\begin{cases} 1,35 \\ 1,77 \end{cases}$	$\begin{cases} 4,1 \\ 4,8 \end{cases}$	$\begin{cases} 14,3 \\ 14,7 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,2575 \\ 0,2528 \end{cases}$	$\begin{cases} 2,81 \\ 3,58 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,46 \\ 0,60 \end{cases}$	$\begin{cases} 2,96 \\ 3,78 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,31 \\ 0,40 \end{cases}$	$\begin{cases} 14,6 \\ 13,4 \end{cases}$
3/6	30	60	$\begin{cases} 5 \\ 7 \end{cases}$	$\begin{cases} 4,29 \\ 5,85 \end{cases}$	$\begin{cases} 3,37 \\ 4,59 \end{cases}$	$\begin{cases} 6,8 \\ 7,6 \end{cases}$	$\begin{cases} 21,5 \\ 22,4 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,2544 \\ 0,2479 \end{cases}$	$\begin{cases} 15,6 \\ 20,6 \end{cases}$	$\begin{cases} 2,61 \\ 3,42 \end{cases}$	$\begin{cases} 16,5 \\ 21,8 \end{cases}$	$\begin{cases} 1,71 \\ 2,28 \end{cases}$	$\begin{cases} 21,2 \\ 19,1 \end{cases}$
4/8	40	80	$\begin{cases} 6 \\ 8 \end{cases}$	$\begin{cases} 6,89 \\ 9,01 \end{cases}$	$\begin{cases} 5,40 \\ 7,08 \end{cases}$	$\begin{cases} 8,8 \\ 9,6 \end{cases}$	$\begin{cases} 28,5 \\ 29,4 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,2568 \\ 0,2518 \end{cases}$	$\begin{cases} 44,9 \\ 57,5 \end{cases}$	$\begin{cases} 7,66 \\ 9,70 \end{cases}$	$\begin{cases} 47,6 \\ 60,8 \end{cases}$	$\begin{cases} 4,99 \\ 6,41 \end{cases}$	$\begin{cases} 28,9 \\ 26,9 \end{cases}$
5/10	50	100	$\begin{cases} 8 \\ 10 \end{cases}$	$\begin{cases} 11,5 \\ 14,1 \end{cases}$	$\begin{cases} 9,03 \\ 11,1 \end{cases}$	$\begin{cases} 11,2 \\ 12,0 \end{cases}$	$\begin{cases} 35,9 \\ 36,7 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,2565 \\ 0,2658 \end{cases}$	$\begin{cases} 116 \\ 141 \end{cases}$	$\begin{cases} 19,6 \\ 23,5 \end{cases}$	$\begin{cases} 123 \\ 150 \end{cases}$	$\begin{cases} 12,8 \\ 14,6 \end{cases}$	$\begin{cases} 35,5 \\ 33,7 \end{cases}$
6½/13	65	130	$\begin{cases} 10 \\ 12 \end{cases}$	$\begin{cases} 18,6 \\ 22,1 \end{cases}$	$\begin{cases} 14,6 \\ 17,3 \end{cases}$	$\begin{cases} 14,5 \\ 15,3 \end{cases}$	$\begin{cases} 46,5 \\ 47,5 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,2569 \\ 0,2549 \end{cases}$	$\begin{cases} 320 \\ 374 \end{cases}$	$\begin{cases} 54,4 \\ 62,8 \end{cases}$	$\begin{cases} 339 \\ 395 \end{cases}$	$\begin{cases} 35,4 \\ 41,3 \end{cases}$	$\begin{cases} 46,6 \\ 44,4 \end{cases}$
8/16	80	160	$\begin{cases} 12 \\ 14 \end{cases}$	$\begin{cases} 27,5 \\ 31,8 \end{cases}$	$\begin{cases} 21,6 \\ 25,0 \end{cases}$	$\begin{cases} 17,7 \\ 18,5 \end{cases}$	$\begin{cases} 57,2 \\ 58,1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,2586 \\ 0,2679 \end{cases}$	$\begin{cases} 719 \\ 822 \end{cases}$	$\begin{cases} 122 \\ 139 \end{cases}$	$\begin{cases} 762 \\ 875 \end{cases}$	$\begin{cases} 79,4 \\ 86,0 \end{cases}$	$\begin{cases} 57,8 \\ 55,7 \end{cases}$
10/20	100	200	$\begin{cases} 14 \\ 16 \end{cases}$	$\begin{cases} 40,3 \\ 45,7 \end{cases}$	$\begin{cases} 31,6 \\ 35,9 \end{cases}$	$\begin{cases} 21,8 \\ 22,6 \end{cases}$	$\begin{cases} 71,2 \\ 72,0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,2608 \\ 0,2586 \end{cases}$	$\begin{cases} 1654 \\ 1863 \end{cases}$	$\begin{cases} 282 \\ 315 \end{cases}$	$\begin{cases} 1754 \\ 1973 \end{cases}$	$\begin{cases} 182 \\ 205 \end{cases}$	$\begin{cases} 73,1 \\ 71,2 \end{cases}$

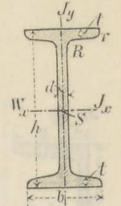
C. I-Jærn.

Normallængde = 4-10 m. Største Længde = 14-20 m.
 Hældning af Grenenes indre Flader 14°/10.

Radius til Afrundingen mellem Kroppen og Grenene $R = d$.

Radius til Grenendens Afrunding $r = 0,6 d$.

Grentykkelsen t ligger i Afstanden $\frac{1}{2} b$ paa hver Side af Profilmidten.



Profil-Nr.	Højde. h mm	Bredde. b mm	Krop- tykkelse. d mm	Gren- tykkelse. t mm	Tvær- snitsareal. A cm ²	Vægt. V kg/m	Inertimoment.		Modstands- moment.		Profil-Nr.
							J_y cm ⁴	J_x cm ⁴	W_y cm ³	W_x cm ³	
8	80	42	3,9	5,9	7,57	5,95	6,3	77,7	2,99	19,4	8
9	90	46	4,2	6,3	8,99	7,06	8,8	117	3,81	25,9	9
10	100	50	4,5	6,8	10,6	8,33	12,2	170	4,86	34,1	10
11	110	54	4,8	7,2	12,3	9,65	16,2	238	5,99	43,3	11
12	120	58	5,1	7,7	14,2	11,1	21,4	327	7,38	54,5	12
13	130	62	5,4	8,1	16,1	12,6	27,4	435	8,85	67,0	13
14	140	66	5,7	8,6	18,2	14,3	35,2	572	10,7	81,7	14
15	150	70	6,0	9,0	20,4	16,0	43,7	734	12,5	97,9	15
16	160	74	6,3	9,5	22,8	17,9	54,5	933	14,7	117	16
17	170	78	6,6	9,9	25,2	19,8	66,5	1165	17,1	137	17
18	180	82	6,9	10,4	27,9	21,9	81,3	1444	19,8	161	18
19	190	86	7,2	10,8	30,5	23,9	97,2	1759	22,6	185	19
20	200	90	7,5	11,3	33,4	26,2	117	2139	25,9	214	20
21	210	94	7,8	11,7	36,3	28,5	137	2558	29,3	244	21
22	220	98	8,1	12,2	39,5	31,0	163	3055	33,3	278	22
23	230	102	8,4	12,6	42,6	33,4	188	3605	36,9	314	23
24	240	106	8,7	13,1	46,1	36,2	220	4239	41,6	353	24
25	250	110	9,0	13,6	49,7	39,0	255	4954	46,4	396	25
26	260	113	9,4	14,1	53,3	41,8	287	5735	50,6	441	26
27	270	116	9,7	14,7	57,1	44,8	325	6623	56,0	491	27
28	280	119	10,1	15,2	61,0	47,9	363	7575	60,8	541	28
29	290	122	10,4	15,7	64,8	50,9	403	8619	66,1	594	29
30	300	125	10,8	16,2	69,0	54,2	449	9785	71,9	652	30
32	320	131	11,5	17,3	77,7	61,0	554	12493	84,6	781	32
34	340	137	12,2	18,3	86,7	68,1	672	15670	98,1	922	34
36	360	143	13,0	19,5	97,0	76,2	817	19576	114	1088	36
38	380	149	13,7	20,5	107	84,0	972	23978	131	1262	38
40	400	155	14,4	21,6	118	92,6	1160	29173	150	1459	40
42½	425	163	15,3	23,0	132	104	1433	36956	176	1739	42½
45	450	170	16,2	24,3	147	115	1722	45888	203	2040	45
47½	475	178	17,1	25,6	163	128	2084	56410	234	2375	47½
50	500	185	18,0	27,0	179	141	2470	68736	267	2750	50
55	550	200	19,0	30,0	212	166	3486	99054	349	3602	55

72

LIGEVÆGTSLÆRE

OG

STYRKELÆRE.

TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN

I

DET TEKNISKE SELSKABS SKOLER
FOR BYGNINGSHAANDVÆRKERE, MASKINKONSTRUKTØRER
OG ELEKTROTEKNIKERE.

UDARBEJDET AF

K. MONRAD.

TREDIE UDGAVE.

~~~~~  
TRYKT SOM MANUSKRIFT.  
~~~~~

KØBENHAVN.

TRYKT HOS A/S PEDER ANDERSEN.

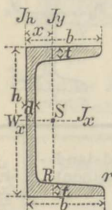
1909.

72

Denne Bog
tilhører
Industriforeningen
Kjøbenhavn

72

5319:539



D. C-Jærn.

Normallængde = 4-8 m. Største Længde = 12-16 m.

Hældning af Grenenes indre Flader 80/0.

$R = t$; $r = 1/2 t$ (afrundet til halve mm).

Grentykkelsen t ligger i Midten af Grenen.

i (i mm) er Afstanden mellem 2 J_x , hvorved Inertimomenterne m. H. t. de 2 Hovedakser ere ligestore (lig 2 J_x).

Profil-Nr.	Højde.		Krop-tykkelse d	Gren-tykkelse t	Tvær-sniareal A	Vægt V	Tyngde-punkts-afstand x	Inertimoment.			Afstand i	Mod-stands-moment W_x	Profil-Nr.
	h	b						J_h	J_y	J_x			
	mm	mm	mm	mm	cm ²	kg/m	mm	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴	mm	cm ³	
3	30	33	5	7	5,44	4,27	13,1	14,7	5,33	6,39	.	4,3	3
4	40	35	5	7	6,21	4,88	13,3	17,7	6,68	14,1	.	7,1	4
5	50	38	5	7	7,12	5,59	13,7	22,5	9,12	26,4	3,8	10,6	5
6 $1/2$	65	42	5,5	7,5	9,03	7,10	14,2	32,3	14,1	57,5	15,4	17,7	6 $1/2$
8	80	45	6	8	11,0	8,66	14,5	43,2	19,4	106	27,1	26,5	8
10	100	50	6	8,5	13,5	10,6	15,5	61,7	29,3	206	41,4	41,1	10
12	120	55	7	9	17,0	13,3	16,0	86,7	43,2	364	54,9	60,7	12
14	140	60	7	10	20,4	16,0	17,5	125	62,7	605	68,1	86,4	14
16	160	65	7,5	10,5	24,0	18,8	18,4	166	85,3	925	81,5	116	16
18	180	70	8	11	28,0	22,0	19,2	217	114	1354	94,7	150	18
20	200	75	8,5	11,5	32,2	25,3	20,1	278	148	1911	108	191	20
22	220	80	9	12,5	37,4	29,4	21,4	368	197	2690	120	245	22
24	240	85	9,5	13	42,3	33,2	22,3	458	248	3598	133	300	24
26	260	90	10	14	48,3	37,9	23,6	586	317	4823	146	371	26
28	280	95	10	15	53,3	41,8	25,3	740	399	6276	159	450	28
30	300	100	10	16	58,8	46,2	27,0	924	495	8026	172	535	30

E. T-Jærn.

Normallængde = 4-8 m.

Største Længde = 12-16 m.

Radius til Afrundingen i Vinkelhjørnet

$$R = d.$$

Radius til Fodens Afrunding $r = 1/2 d$.

Radius til Kroppens Afrunding $Q = 1/4 d$

(r og Q afrundet til halve mm).

Hældning ved T-Jærn med bred Fod:

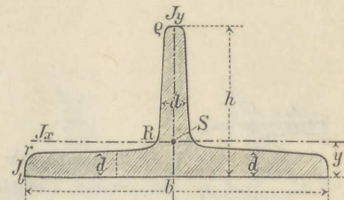
Kroppen 40/0; Foden 20/0.

Hældning ved T-Jærn med høj Krop:

Kroppen og Foden 20/0.

Tykkelsen d maales i Afstanden $1/2 h$

og $1/4 b$ fra Kanterne.



Profil-Nr.	Bredde.		Tykkelse d	Tvær-sniareal A	Vægt V	Tyngde-punkts-afstand y	Inertimoment.		
	b	h					J_b	J_x	J_y
	mm	mm	mm	cm ²	kg/m	mm	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴
6/3	60	30	5,5	4,64	3,64	6,7	4,69	2,58	8,62
7/3 $1/2$	70	35	6	5,94	4,66	7,7	8,00	4,49	15,1
8/4	80	40	7	7,91	6,21	8,8	13,9	7,81	28,5
9/4 $1/2$	90	45	8	10,2	7,98	10,0	22,9	12,7	46,1
10/5	100	50	8,5	12,0	9,42	10,9	33,0	18,7	67,7
12/6	120	60	10	17,0	13,3	13,0	66,5	38,0	137
14/7	140	70	11,5	22,8	17,9	15,1	121	68,9	258
16/8	160	80	13	29,5	23,2	17,2	204	117	422
18/9	180	90	14,5	37,0	29,0	19,3	323	185	670
20/10	200	100	16	45,4	35,6	21,4	486	277	1000

T-Jærn med bred Fod. $h:b = 1:2$.

T-Jærn med høj Krop. $h:b = 1:1$.									
Profil-Nr.	b	h	d	A	V	y	J_b	J_x	J_y
	mm	mm	mm	cm ²	kg/m	mm	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴
2/2	20	20	3	1,12	0,88	5,8	0,76	0,38	0,20
2 $1/2$ /2 $1/2$	25	25	3,5	1,64	1,29	7,3	1,74	0,87	0,43
3/3	30	30	4	2,26	1,77	8,5	3,35	1,72	0,87
3 $1/2$ /3 $1/2$	35	35	4,5	2,97	2,33	9,9	6,01	3,10	1,57
4/4	40	40	5	3,77	2,96	11,2	10,0	5,28	2,58
4 $1/2$ /4 $1/2$	45	45	5,5	4,67	3,66	12,6	15,5	8,13	4,01
5/5	50	50	6	5,66	4,45	13,9	23,0	12,1	6,06
6/6	60	60	7	7,94	6,23	16,6	45,7	23,8	12,2
7/7	70	70	8	10,6	8,32	19,4	84,4	44,5	22,1
8/8	80	80	9	13,6	10,7	22,2	141	73,7	37,0
9/9	90	90	10	17,1	13,4	24,8	224	119	58,5
10/10	100	100	11	20,9	16,4	27,4	336	179	88,3
12/12	120	120	13	29,6	23,2	32,8	684	366	178
14/14	140	140	15	39,9	31,3	38,0	1236	660	330

72



~~72~~

LIGEVÆGTSLÆRE
OG
STYRKELÆRE.

TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN

I

DET TEKNISKE SELSKABS SKOLER
FOR BYGNINGSHAANDVÆRKERE, MASKINKONSTRUKTØRER
OG ELEKTROTEKNIKERE.

UDARBEJDET AF

K. MONRAD.

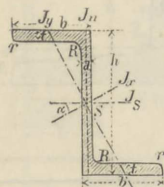
TREDIE UDGAVE.

~~~~~  
TRYKT SOM MANUSKRIFT.  
~~~~~

KØBENHAVN.

TRYKT HOS A/S PEDER ANDERSEN.
1909.

5319:539



F. Z-Jærn.

Normallængde = 4–8 m.

Største Længde = 12–16 m.

Radius til Afrundingen ved Kroppen $R = t$.

Radius til Grenenes Afrunding $r = 1/2 t$.

De indre Grenflader ere parallelle med de ydre.

Profil-Nr.	Højde. h mm	Bredde. b mm	Krop- tykkelse. d mm	Gren- tykkelse. t mm	Tvær- snitsareal. A cm ²	Vægt. V kg/m	$tg \alpha$	Inertimoment.			
								J_s	J_n	$J_x = \max$	$J_y = \min$
								cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴
3	30	38	4	4,5	4,32	3,39	1,655	5,94	13,7	18,1	1,54
4	40	40	4,5	5	5,43	4,26	1,181	13,4	17,6	28,0	3,05
5	50	43	5	5,5	6,77	5,31	0,939	25,7	24,4	44,9	5,23
6	60	45	5	6	7,91	6,21	0,779	44,0	30,8	67,2	7,60
8	80	50	6	7	11,1	8,73	0,588	108	48,7	142	14,7
10	100	55	6,5	8	14,5	11,4	0,492	220	74,5	270	24,6
12	120	60	7	9	18,2	14,3	0,433	400	108	470	37,7
14	140	65	8	10	22,9	18,0	0,385	671	154	768	56,4
16	160	70	8,5	11	27,5	21,6	0,357	1055	209	1184	79,5
18	180	75	9,5	12	33,3	26,1	0,329	1594	275	1759	110
20	200	80	10	13	38,7	30,4	0,313	2289	367	2509	147

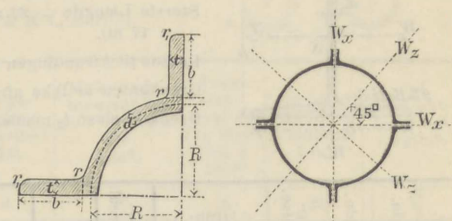
G. Kvadrantjærn.

Normallængde = 4–8 m.

Største Længde = 12–16 m.

Radius $r = 0,12 r$.

Radius $r_1 = 0,06 R$.



Profil-Nr.	Maal i mm.				Tvær- snitsareal af hele Røret.	Vægt af hele Røret.	Inerti- moment af hele Røret.	Modstandsmoment af hele Røret.	
	R	b	d	t	A	V	$J = \text{konst.}$	$W_z = \max$	$W_x = \min$
	cm ²	kg/m	cm ⁴	cm ³	cm ³	cm ³			
5	50	35	4	6	29,8	23,4	576	89,3	66,2
5	50	35	8	8	48,0	37,7	906	135	102
7 ^{1/2}	75	40	6	8	54,9	43,1	2068	237	175
7 ^{1/2}	75	40	10	10	80,2	63,0	2982	331	248
10	100	45	8	10	88,1	69,2	5511	501	370
10	100	45	12	12	120	94,2	7478	663	495
12 ^{1/2}	125	50	10	12	129	101	12161	917	676
12 ^{1/2}	125	50	14	14	169	133	15788	1165	867
15	150	55	12	14	179	141	23637	1515	1120
15	150	55	18	17	249	195	32738	2051	1530

72



~~72~~

LIGEVÆGTSLÆRE
OG
STYRKELÆRE.

TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN

I

DET TEKNISKE SELSKABS SKOLER
FOR BYGNINGSHAANDVÆRKERE, MASKINKONSTRUKTØRER
OG ELEKTROTEKNIKERE.

UDARBEJDET AF

K. MONRAD.

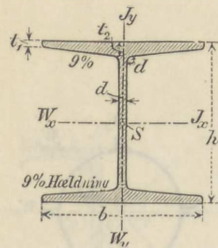
TREDIE UDGAVE.

~~~~~  
TRYKT SOM MANUSKRIFT.  
~~~~~

KØBENHAVN.

TRYKT HOS A/S PEDER ANDERSEN.
1909.

5319:539



H. Differdinger I-Jærn.

Største Længde = 20 m (for Nr. 65, 70 og 75 kun 17 m).

Radius til Afrundingen mellem Krop og Grene = d .

Grenkanten er ikke afrundet.

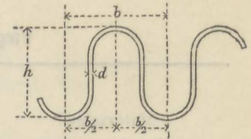
Grentykkelsen t_2 maales i Kropkantens Forlængelse.

Profil-Nr.	Højde.		Krop-tykkelse.	Gren-tykkelse.		Tvær-sni-areal.	Vægt.	Inertimoment.		Mod-stands-moment.		Profil-Nr.
	h	b		t_1	t_2			J_y	J_x	W_y	W_x	
	mm	mm	mm	mm	mm	cm ²	kg/m	cm ⁴	cm ⁴	cm ³	cm ³	
18	180	180	8,5	9	16,72	59,9	47	1073	3512	119	390	18
20	200	200	8,5	9,5	18,12	70,4	55,4	1568	5171	157	517	20
22	220	220	9	10	19,5	82,6	64,8	2216	7379	201	671	22
24	240	240	10	10,5	20,85	96,8	76	3043	10260	254	855	24
25	250	250	10,5	10,9	21,7	105,1	82,5	3575	12066	286	965	25
26	260	260	11	11,7	22,9	115,6	90,7	4261	14352	328	1104	26
27	270	270	11,25	11,95	23,6	123,2	96,7	4920	16529	365	1224	27
28	280	280	11,5	12,35	24,4	131,8	103,4	5671	19052	405	1361	28
29	290	290	12	12,7	25,2	141,1	110,8	6417	21866	443	1508	29
30	300	300	12,5	13,25	26,25	152,1	119,4	7494	25201	500	1680	30
32	320	300	13	14,1	27	160,7	126,2	7867	30119	524	1882	32
34	340	300	13,4	14,6	27,5	167,4	131,4	8097	35241	540	2073	34
36	360	300	14,2	16,15	29	181,5	142,5	8793	42479	586	2360	36
38	380	300	14,8	17	29,8	191,2	150,1	9175	49496	612	2605	38
40	400	300	15,5	18,2	31	203,6	159,8	9721	57834	648	2892	40
42 ^{1/2}	425	300	16	19	31,75	213,9	167,9	10078	68249	672	3212	42 ^{1/2}
45	450	300	17	20,3	33	229,3	180	10668	80887	711	3595	45
47 ^{1/2}	475	300	17,6	21,35	34	242	190	11142	94811	743	3992	47 ^{1/2}
50	500	300	19,4	22,6	35,2	261,7	205,5	11718	11283	781	4451	50
55	550	300	20,6	24,5	37	288	226,1	12582	145957	839	5308	55
60	600	300	20,8	24,7	37,2	300,6	236	12672	179303	845	5977	60
65	650	300	21,1	25	37,5	314,5	246,9	12814	217402	854	6690	65
70	700	300	21,1	25	37,5	325,2	255,3	12818	258106	854	7374	70
75	750	300	21,1	25	37,5	335,7	263,5	12823	302560	855	8068	75

Tabel VIII.

Bølgeblik af Jærn.

(fra L. Bernhard & K o., Berlin).



Profilnummer.	Bølge- dybde i mm.	Halve Bølge- bredde i mm.	Bølge- blikkets Tykkelse i mm.	Modstands- moment for et 1 m bredt Stk. mm ³ .	Tvær- snits- areal for 1 m bredt Stk. i mm ² .	Sædvanl. Bredde af Pladerne i m.	Omtrent- lig Vægt i kg/m ² .
F 4	50	45	1	21000	1750	0,675	13,1
G 4	45	45	1	17000	1620	0,675	12,3
G 3	45	45	3/4	12750	1215	0,675	9 & 10
1	50	50	1	17000	1600	0,650	12,2
2	60	50	1	25000	1800	0,650	14
3	70	50	1	33000	2050	0,650	16
4	60	50	1 1/2	37800	2690	0,650	21
5	80	50	1	40000	2380	0,550	18
6	90	50	1	48000	2480	0,550	19
7	60	50	2	50400	3625	0,650	29
8	70	50	1 1/2	50500	3000	0,650	23,5
9	100	50	1	56400	2625	0,450	20,4
10	80	50	1 1/2	60000	3375	0,550	25,5
11	70	50	2	67000	4000	0,650	31
12	90	50	1 1/2	72000	3650	0,550	28
13	80	50	2	80000	4500	0,550	35
14	100	50	1 1/2	84600	4000	0,450	30
15	90	50	2	96000	4900	0,550	38
16	70	50	3	101100	6120	0,650	48
17	100	50	2	112800	5375	0,550	40
18	80	50	3	120000	6875	0,650	52
19	90	50	3	144000	7250	0,650	55
20	120	60	2	152500	5500	0,540	42,6
21	80	60	4	160000	8000	0,660	62
22	100	50	3	169200	8000	0,550	61
23	90	60	4	182000	8680	0,660	67
24	140	60	2	199600	6120	0,420	48
26	100	60	4	225600	9400	0,660	72
27	120	60	3	228800	8240	0,540	64
30	140	60	3	299400	9400	0,540	72
31	120	60	4	305000	11000	0,540	85
32	120	60	5	381000	13800	0,540	107
33	140	60	4	399200	12240	0,540	96
34	140	60	5	499000	15300	0,540	120

72



72

LIGEVÆGTSLÆRE
OG
STYRKELÆRE.

TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN

I

DET TEKNISKE SELSKABS SKOLER
FOR BYGNINGSHAANDVÆRKERE, MASKINKONSTRUKTØRER
OG ELEKTROTEKNIKERE.

UDARBEJDET AF

K. MONRAD.

TREDIE UDGAVE.

~~~~~  
TRYKT SOM MANUSKRIFT.  
~~~~~

KØBENHAVN.

TRYKT HOS A/S PEDER ANDERSEN.

1909.

5319:539

Tabel IX.

Vægten af nogle Materialer.

Materialiet:	Vægt i kg/m ³ .	Materialiet:	Vægt i kg/m ³ .
Asfalt	ca. 1150	Marmor	ca. 2700
Beton	2300	Monierplader	2400
Granit	2700	Muldjord	1600
Smødejærn og Staal	7800	Murværk { alm. Mursten	1600
Støbejærn	7200	{ hule Sten	970
Is	890	Sand { fugtigt	1850
Købber	8900	{ tørt	1540
Kalksten	2400	Sandsten	2400
Kornsorter:		Skærver og Mursten	1600
Hvede, Majs, Rug	730	Stenkul	1300
Byg	650	Træ { Egetræ	800
Havre	550	{ Fyrretræ	730
Frø og Bølgæd	730	Vand	1000
Ler { meget fugtigt	1950		
{ tørt	1460		

Snevægt 75 kg/m².

Tabel X.

Etageadskillelsers Vægt og Belastning.

A. Egenvægt.	Vægt i kg/m ² .	B. Tilfældig Belastning.	Vægt i kg/m ² .
Bjælker med enkelt Gulv ca. Etageadskillelse i en alm. borgerlig Bygning (Bjælker, Gulv, Indskud, Forskalling, Gibsdække)	80	Beboelsesrum og Værksteder med lette Maskiner	200
Hvælvinger af Mursten mellem Jærnbjælker (Hvælvingerne 1/2 Sten tykke)	150	Danselokaler, Hø- og Frugtlofter	450
Bølgeblik med Betonlag 13 cm tykt	350	Saltlagere	600
		Købmandslagere	750
		Værksteder med tunge Maskiner	500 à 700
		Menneskemasse, tæt sammenstuvet	500

Tabel XI.

Tagkonstruktioner.

h er Tagets Højde og *s* dets Spændvidde.

A. Egenvægte.

<i>h:s</i> ==	Vægt i kg/m ² af Tagprojektion.					
	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6-1/10	1/32-1/48
Tegltage (alm.)	145	125	115	—	—	—
Skifertage paa Træ	110	90	85	80	—	—
Straatage	85	75	—	—	—	—
Tagpaptage	45	35	35	30	30	—
Zinktage paa Træ	60	50	45	45	40	—
Tage af Jærnplader paa Vinkeljærn	35	30	30	30	25	—
Bølgeblik af Jærn paa Vinkeljærn	30	25	25	25	20	—
Tage af Zinkplader paa Forskalling og Vinkeljærn	70	60	55	50	50	—
Bølgeblik af Zink paa Vinkeljærn	20	20	15	15	15	—
Glas paa Jærnsprosser	60	50	45	40	—	—
Bitumentage paa Træ eller Jærn	—	—	—	—	—	165-180

B. Totalbelastning (Egenvægt, Sne- og Vindtryk).

<i>h:s</i> ==	Vægt i kg/m ² af Tagprojektion.					
	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6-1/10	1/32-1/48
Tegltage (alm.)	270	245	220	—	—	—
Skifertage paa Træ	235	210	190	180	—	—
Straatage	210	195	—	—	—	—
Tagpaptage	170	155	140	130	125	—
Zinktage paa Træ	185	170	150	145	135	—
Tage af Jærnplader paa Vinkeljærn	160	150	135	130	120	—
Bølgeblik af Jærn paa Vinkeljærn	155	145	130	125	115	—
Tage af Zinkplader paa Forskalling og Vinkeljærn	195	180	160	150	145	—
Bølgeblik af Zink paa Vinkeljærn	145	140	120	115	110	—
Glas paa Jærnsprosser	185	170	150	140	—	—
Bitumentage paa Træ eller Jærn	—	—	—	—	—	250

72

LIGEVÆGTSLÆRE

OG

STYRKELÆRE

TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN

I

DET TEKNISKE SELSKABS SKOLER
FOR BYGNINGSHAANDVÆRKERE, MASKINKONSTRUKTØRER
OG ELEKTROTEKNIKERE.

UDARBEJDET AF

K. MONRAD.

TREDIE UDGAVE.

TRYKT SOM MANUSKRIFT.

KØBENHAVN.

TRYKT HOS A/S PEDER ANDERSEN.

1909.

72

Denne Bøg
tilhører
Industriforeningen
Kjøbenhavn

72

5319:539

Table XI

Statistical Summary of the
 ... of the ...

Year
1900
1901
1902
1903
1904
1905
1906
1907
1908
1909
1910



Table XII

Year
1900
1901
1902
1903
1904
1905
1906
1907
1908
1909
1910

72

LIGE VÆGTSLÆRE

OG

STYRKELÆRE

TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN

I

DET TEKNISKE SELSKABS SKOLER
FOR BYGNINGSHAANDVÆRKERE, MASKINKONSTRUKTØRER
OG ELEKTROTEKNIKERE.

UDARBEJDET AF

K. MONRAD.

TREDIE UDGAVE.

~~~~~  
TRYKT SOM MANUSKRIFT.  
~~~~~

KØBENHAVN.

TRYKT HOS A/S PEDER ANDERSEN.

1909.



5319:539

Forord.

Den her foreliggende 3die Udgave er i alt væsentligt overensstemmende med de paa det tekniske Selskabs Skoles Foranstaltning i 1892 og 1900 udarbejdede og indeholder en efter Elevernes Forkundskaber og Udvikling afpasset Fremstilling af Ligevægtslærens og Styrkelærens Grundprinciper samt deres Anvendelse paa Bygnings- og Maskinkonstruktioner. Ved Fremstillingen heraf følges Beregningsmetoden og den grafiske Metode jævnsides, for at disse Metoder kunne støtte hinanden gensidig og derved lette Forstaaelsen for Eleverne, hvilket yderligere er søgt opnaaet ved talrige Eksempler.

I denne Udgave ere Maal- og Vægtstørrelser i samtlige Taleksempler angivne i det metriske System. De af Hensyn hertil nødvendige Ændringer og Beregninger ere udførte af Hr. Ingeniør, cand. polyt. *Chr. J. Thorup*, som ogsaa har udført den væsentligste Del af Korrekturarbejdet.

Bag i Bogen findes Planer med de til Teksten hørende Skitser og i et Hefte for sig forskellige Tabeller over Materialernes Vægt, Paavirkninger m. m.

Index

Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page.

Indledning.

Ligevægtslæren giver Oplysning om, under hvilke Betingelser der er Ligevægt mellem Kræfter, samt om, hvorledes man finder de Paavirkninger, som givne ydre Kræfter frembringe i Dele af Bygninger og Maskiner, hvorimod Styrkelæren omhandler, hvorledes man finder de Dimensioner, som man skal give de vedkommende Konstruktionsdele, for at de kunne være i Stand til at modstaa Paavirkningerne uden at brydes eller i for høj Grad forandre Form.

Under Fremstillingen er Stoffet behandlet i 3 Hovedafsnit. I det første af disse, som er kaldt Ligevægtslæren, er der givet en almindelig Udvikling af dennes Grundprinciper samt disses Anvendelse paa Jærn- og Trækonstruktioner, medens det andet Hovedafsnit er kaldt Styrkelæren og omhandler dennes Grundprinciper og deres Anvendelse paa Jærn- og Trækonstruktioner. I det tredie Hovedafsnit, Stenkonstruktioner, er der givet en Udvikling af saavel Ligevægtslærens som Styrkelærens Anvendelse paa Stenkonstruktioner.

I. Ligevægtslæren.

En ydre Paavirkning eller Kraft udtrykkes i Vægt, altsaa i Kilogram, og den fremstilles i Tegning (grafisk) ved en ret Linie, hvis Længde angiver Kraftens Størrelse, medens Liniens Beliggenhed i Planet angiver Kraftens Beliggenhed. Den Retning, hvori Kraften virker, maa enten angives ved Liniens Benævnelse eller ved en paa Linien anbragt Pil.

Paa Fig. 1 virker AB fra venstre til højre, BA fra højre til venstre. Kraften 1 fra venstre til højre, 2 i modsat Retning.

Foruden ved Bogstaver kunne Kræfter ogsaa betegnes ved Tal anbragte i deres Endepunkter, saaledes som paa Fig. 1, hvor $\overline{01}$ og $\overline{32}$ begge virke fra venstre til højre, medens $\overline{10}$ og $\overline{23}$ virke i modsat Retning. Benyttes den grafiske Fremgangsmaade, maa man have en Maalestok for Kræfter, en Kraftmaalestok.

1. *Sammensætning og Opløsning af Kræfter.*

a. Kræfterne virke i samme rette Linie.

Angribe de givne Kræfter i forskellige Punkter af en ret Linie, vil deres samlede Virkning blive den samme, som om de angreb i eet Punkt, og saa stor som Summen af de enkelte Kræfter, idet disse regnes med Fortegn, saaledes at de, der virke i den ene Retning, regnes for positive, de, som virke i modsat Retning, for negative. Det er iøvrigt ligegyldigt, hvilken af Retningerne der regnes for positiv. Er Kræfternes Størrelse f. Eks. udtrykt i kg, faar man ved Beregning den samlede Virkning af dem, Resultanten, i kg ved Addition og Subtraktion af de enkelte Vægtstørrelser.

Er Summen af de positive Kræfter lig med Summen af de negative, bliver Resultantens Størrelse Nul 0: der er Ligevægt mellem Kræfterne.

Hvorledes man grafisk finder Resultanten af flere givne Kræfter, er vist paa Fig. 2, hvor de fire givne Kræfter \overline{ab} , \overline{bc} , \overline{cd} og \overline{de} efterhaanden ere afsatte ved Siden af hverandre i den rette Linie AB , hvorefter de virke. Resultanten er Stykket fra Udgangspunktet til Endepunktet, altsaa her \overline{ae} .

Falder e i a , er der Ligevægt mellem Kræfterne.

For at opnaa større Tydelighed i Tegningerne, angives i Almindelighed (se Fig. 2) en Kraft ved to rette Linier, der altid ere parallelle, og af hvilke den ene angiver Kraftens Retning og Størrelse, den anden dens Beliggenhed og undertiden tillige dens Retning.

b. Kræfterne gaa gennem samme Punkt i Planet, men virke i forskellige Retninger.

Virke to Kræfter P og Q paa Punktet M efter de paa Fig. 3 angivne Pile, vilde M under deres samlede Paa-virkning, ifald Punktet kunde flyttes, blive bevæget hen til C gennem Linien MC . Er Punktet M ubevægeligt, vil det derimod faa en Paavirkning efter Retningen MC af Størrelse $MC=R$, der kaldes de to Kræfters Resultant. $MACB$ er et Parallelogram, Kræfternes Parallelogram, altsaa $\overline{MB} \neq \overline{AC}$. De tre Kræfter P , Q og R danne saaledes en Trekant, den saakaldte Kræfternes Trekant, hvor P og Q gennembløbes i samme Retning, R i modsat Retning. Herved er den grafiske Fremgangsmaade given, idet man (Fig. 4) gennem et vilkaarligt Punkt i Planet, f. Eks. 0, trækker en Linie $\overline{01} \neq P$ og derpaa fra 1 en Linie $\overline{12} \neq Q$. Resultanten R er da i Størrelse og Retning $\overline{02}$ (den rette

Linie fra Udgangspunktet til Endepunktet). Dens Beliggenhed faas ved gennem M at tegne en Linie parallel med \overline{OZ} .

Ad Beregningens Vej finder man Størrelsen og Retningen af Resultanten af to Kræfter, naar man kender deres Størrelser P og Q og den Vinkel v , som deres Retninger danne med hinanden, paa følgende Maade ved Hjælp af Trigonometrien (Fig. 4^b):

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos (180-v) = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos v$$

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos v}$$

$$\sin \rho = \frac{P \sin (180-v)}{R} = \frac{P \sin v}{R}$$

Ligesom to givne Kræfter kunne sammensættes til en Resultant, kan omvendt ogsaa en given Kraft opløses i to andre, Komposanterne.

Dette kan ligeledes ske saavel ved Beregning som ad grafisk Vej.

I første Tilfælde kommer man til at foretage en Trekantopløsning ved Hjælp af Trigonometrien, i sidste Tilfælde Konstruktion af en Trekant.

Med de paa Fig. 4^b angivne Betegnelser kan saaledes R, ρ, q eller R, P, q eller R, P, ρ eller R, P, Q eller endelig R, P, v være givne, medens de øvrige Størrelser ere ubekendte.

Ekspl. 1. Givet Kræfterne $P = 15$ kg og $Q = 8$ kg samt deres mellemliggende Vinkel $v = 20^\circ$. Find Resultanten R (se Fig. 4^b).

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos v} = \sqrt{15^2 + 8^2 + 2 \cdot 15 \cdot 8 \cos 20^\circ}$$

$$= 22,68 \text{ kg,}$$

$$\sin \rho = \frac{P \sin v}{R} = \frac{15 \sin 20^\circ}{22,68}, \rho = 13,07^\circ.$$

Ekspl. 2. En Snor gaar henover de to Skiver A og B (se Fig. 5) og bærer i sine Endepunkter Vægtene $P = 16$ kg og $Q = 12$ kg. Hvor stor en Vægt V maa op-hænges i Snoren mellem Skiverne, naar de to Snorparter skulle danne en ret Vinkel med hinanden? Der ses bort fra Gnidningsmodstande.

I den ene Snorpart vil virke et Træk $ac = Q$, i den anden $ab = P$. Resultanten af disse Træk vil være

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20.$$

V maa have samme Størrelse som R , altsaa være 20 kg.

Ekspl. 3. En Kraft $R = 5549$ kg skal opløses i to Komposanter, af hvilke den ene P er 2002 kg, medens den med R danner en Vinkel q paa 50° . Man skal finde den anden Komposant Q og den Vinkel p , som den danner med R . Opgaven løses paa lignende Maade som Opgave 1 (se Fig. 4 b). $Q = 4529,7$ kg; $p = 19,79^\circ$.

Ekspl. 4. En Kraft $R = 612$ kg, dens ene Komposant $P = 518$ kg og Vinklen mellem R og den anden Komposant Q er $u = 47,88^\circ$.

Find Q samt P 's Vinkel v med R (se Fig. 6).

$$\frac{R}{\sin t} = \frac{P}{\sin u}; \quad \sin t = \frac{R \sin u}{P} = \frac{612 \sin 47,88^\circ}{518}$$

$$t = 61,2^\circ \text{ eller } t = 180^\circ - 61,2^\circ = 118,8^\circ;$$

$$v = 180 - (u + t), \text{ altsaa}$$

$$v = 70,92^\circ \text{ eller } v = 13,32^\circ.$$

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sin v}{\sin u}; \quad Q = \frac{P \sin v}{\sin u}, \text{ hvoraf man, ved deri at indsætte}$$

Værdierne for P og u samt v 's to Værdier, faar

$$Q = 660 \text{ kg og } Q = 160,9 \text{ kg.}$$

Opgaven har altsaa to Løsninger, idet der findes to Kræfternes Parallelogrammer, som indeholde de givne Størrelser R , P og u , nemlig $AFCE$ og $ABCD$.

Ekspl. 5. Kraften $S = 500$ kg virker gennem Spæret AB . S skal opløses i en vandret Komposant P og en lodret Komposant Q . Retningen for S er bestemt ved $\angle BAF = v = 30^0$ (Fig. 7).

$$P = S \cos v = 500 \cos 30^0 = 433 \text{ kg.}$$

$$Q = S \sin v = 500 \sin 30^0 = 250 \text{ kg.}$$

Ekspl. 6. En Kraft $R = 1000$ kg skal opløses i to Komposanter $P = 600$ kg og $Q = 800$ kg. Find de Vinkler v og u , som henholdsvis P og Q danne med R .

$$Q^2 = P^2 + R^2 - 2 PR \cos v; \cos v = \frac{P^2 + R^2 - Q^2}{2 PR}$$

$$\cos v = \frac{3}{5}; v = 53,13^0.$$

$$\frac{\sin u}{\sin v} = \frac{P}{Q}; \sin u = \frac{P \sin v}{Q}; u = 36,87^0.$$

Ofte bestemmes en given Krafts Retning ved de to Vinkler, som den danner med to paa hinanden vinkelrette Linier OX og OY .

I de fire følgende Opgaver er dette nærmere oplyst. Der er givet en Kraft K samt de Vinkler u og v , som den danner med de to paa hinanden vinkelrette Linier OX og OY . K 's Komposanter P og Q efter disse Linier søges.

Ekspl. 7.

$$K = 2000 \text{ kg}; u = 30^{\circ}; v = 60^{\circ} \text{ (se Fig. 8).}$$

$$P = K \cos u = 2000 \cos 30^{\circ} = 1732 \text{ kg.}$$

$$Q = K \cos v = 2000 \cos 60^{\circ} = 1000 \text{ kg.}$$

Ekspl. 8.

$$K = 1500 \text{ kg}; u = 135^{\circ}; v = 45^{\circ} \text{ (se Fig. 9).}$$

$$P = 1500 \cos 135^{\circ} = -1500 \cos 45^{\circ} = -1060 \text{ kg.}$$

$$Q = 1500 \cos 45^{\circ} = 1060 \text{ kg.}$$

Ekspl. 9.

$$K = 3000 \text{ kg}; u = 115,34^{\circ}; v = 154,66^{\circ} \text{ (se Fig. 10).}$$

$$P = 3000 \cos 115,34^{\circ} = -3000 \cos 64,66^{\circ} = -1283 \text{ kg.}$$

$$Q = 3000 \cos 154,66^{\circ} = -3000 \cos 25,34^{\circ} = -2711 \text{ kg.}$$

Ekspl. 10.

$$K = 1000 \text{ kg}; u = 60^{\circ}; v = 150^{\circ} \text{ (se Fig. 11).}$$

$$P = 1000 \cos 60^{\circ} = 500 \text{ kg.}$$

$$Q = 1000 \cos 150^{\circ} = -1000 \cos 30^{\circ} = -866 \text{ kg.}$$

Virke flere end to Kræfter gennem samme Punkt i Planet, kan man bestemme deres Resultant ved først at finde Resultanten af to af Kræfterne, derpaa sammensætte

denne med en 3die Kraft, den herved fremkomne Resultant med en 4de Kraft o. s. v., som vist paa Fig. 12.

Af de givne Kræfter $\overline{01}$, $\overline{02}$, $\overline{03}$, $\overline{04}$ og $\overline{05}$ ere først $\overline{01}$ og $\overline{02}$ sammensatte til Resultanten $\overline{02'}$, denne danner med $\overline{03}$ Resultanten $\overline{03'}$, denne med $\overline{04}$ Resultanten $\overline{04'}$ og denne sidste med $\overline{05}$ Resultanten $\overline{05'}$, der altsaa bliver Resultanten af alle fem Kræfter. Af den Maade, hvorpaa Fig. 12 er dannet, fremgaar det, at $\overline{12'} \neq \overline{02}$, $\overline{23'} \neq \overline{03}$, $\overline{34'} \neq \overline{04}$ og $\overline{45'} \neq \overline{05}$. Dette benyttes til den grafiske Bestemmelse af flere Kræfters Resultant, idet alle Diagonalerne i de enkelte Parallelogrammer udelades, og selve Konstruktionen udføres paa et andet Sted af Planet end der, hvor de givne Kræfter ere beliggende.

Skal man saaledes finde Resultanten af Kræfterne P_1 , P_2 , P_3 , P_4 og P_5 (Fig 13 a), tegnes der gennem et virkaarligt Punkt o (Fig. 13 b) en Linie $\overline{01} \neq P_1$ og i samme Retning som denne, fra 1 Linien $\overline{12} \neq P_2$, fra 2 Linien $\overline{23} \neq P_3$ o. s. v., idet man bestandig sørger for, at disse Linier komme til at gaa i samme Retning som vedkommene Kraft. Resultanten er nu i Størrelse og Retning $\overline{05}$ fra Udgangspunktet til Endepunktet, og dens Beliggenhed faas ved gennem O at tegne Linien $R \neq \overline{05}$.

Den brudte Linie fra o til 5 kaldes en Kraftpolygon.

Den Orden, i hvilken Kræfterne afsættes efter hverandre, er ligegyldig, hvad Bestemmelsen af Resultanten angaar, men Polygonen $\overline{012345's}$ Form vil selvfølgelig, efter den forskellige Orden, hvori Kræfterne afsættes, blive forskellig.

Have flere Kræfter ikke samme Angrebspunkt, medens dog Kraftlinierne ved Forlængelse ville skære hverandre i eet Punkt, bliver Resultanten i Størrelse, Retning og Be-

liggenhed den samme, som om alle Kræfterne virkede i dette Punkt, og den bestemmes derfor ganske paa samme Maade.

Af Fig. 13^b fremgaar det, at man ved at følge Pilene fra o kan gennemløbe alle Sider kontinuerligt med Undtagelse af Resultanten ($\overline{05}$), hvis Pil man vil møde i Punkt 5 .

Falder den sidste Krafts Endepunkt i det oprindelige Udgangspunkt, bliver Resultanten Nul, der er Ligevægt mellem Kræfterne. I saa Fald gennemløbes alle Sider kontinuerligt, og Kraftpolygonen er lukket (Fig. 14).

Naar man ved Beregning vil finde Resultanten af flere givne Kræfter, som angribe i eet Punkt, gaar man frem paa den Maade, at man gennem Punktet lægger to paa hinanden vinkelrette Linier, de saakaldte Koordinat-akser, af hvilke den ene benævnes X -Aksen eller Abscisse-aksen og den anden Y -Aksen eller Ordinataksen, og opløser alle Kræfterne i Komposanter efter disse Akser. Derefter sammensætter man Komposanterne efter X -Aksen til en Resultant for sig og Komposanterne efter Y -Aksen ligeledes til en Resultant for sig, og disse to Resultanter, hvoraf den ene virker i X -Aksen og den anden i Y -Aksen, sammensættes endelig til een Resultant, som altsaa maa blive Resultanten af alle de givne Kræfter.

Er saaledes (Fig. 15) fem Kræfter P_1, P_2, P_3, P_4 og P_5 givne i Størrelse og yderligere bestemte ved, at de alle gaa gennem Punktet O , samt ved, at deres Retninger danne givne Vinkler med de to Akser OX (X -Aksen) og OY (Y -Aksen), idet

P_1	danner	$\angle u_1$	med	OX	og	$\angle v_1$	med	OY
P_2	—	$\angle u_2$	—	—	—	$\angle v_2$	—	—
P_3	—	$\angle u_3$	—	—	—	$\angle v_3$	—	—
P_4	—	$\angle u_4$	—	—	—	$\angle v_4$	—	—
P_5	—	$\angle u_5$	—	—	—	$\angle v_5$	—	—

da ville de fem Kræfters Komposanter efter OX være $P_1 \cos u_1$; $P_2 \cos u_2$; $P_3 \cos u_3$; $P_4 \cos u_4$; $P_5 \cos u_5$, og deres Komposanter efter OY : $P_1 \cos v_1$; $P_2 \cos v_2$; $P_3 \cos v_3$; $P_4 \cos v_4$; $P_5 \cos v_5$. Cosinusserne ville ved deres Fortegn bestemme de enkelte Komposanters Fortegn. Bliver Komposanten positiv, virker den efter henholdsvis OX eller OY (Koordinataksernes positive Retninger), bliver den negativ, efter deres Forlængelser (Koordinataksernes negative Retninger) udover Skæringspunktet O , der kaldes Begyndelsespunktet.

Resultantens Komposant R_x efter OX vil være Summen af Kræfternes X -Komposanter, altsaa

$$R_x = P_1 \cos u_1 + P_2 \cos u_2 + P_3 \cos u_3 + P_4 \cos u_4 + P_5 \cos u_5,$$

og Resultantens Komposant R_y efter OY bliver i Lighed hermed

$$R_y = P_1 \cos v_1 + P_2 \cos v_2 + P_3 \cos v_3 + P_4 \cos v_4 + P_5 \cos v_5.$$

R_x og R_y danne 90° med hinanden, og Resultanten af dem vil altsaa i Størrelse være

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2},$$

medens dens Vinkler u og v med OX og OY bestemmes ved

$$\cos u = \frac{R_x}{R} \text{ og } \cos v = \frac{R_y}{R}.$$

Ekspl. 11. Fire Kræfter P_1 , P_2 , P_3 og P_4 , i Størrelse henholdsvis 6, 9, 12 og 15 kg, virke i samme Plan gennem eet Punkt. P_1 og P_3 danne en ret Vinkel med hinanden. P_2 ligger mellem P_1 og P_3 og danner 40° med P_1 og 50° med P_3 , P_4 danner 130° med P_1 og 40° med P_3 .

Resultantens Størrelse og Retning skal findes. Vælges P_1 til X -Aksse og P_3 til Y -Aksse, vise Kræfterne sig beliggende som paa Fig. 16.

$$P_1 = 6; P_2 = 9; P_3 = 12; P_4 = 15.$$

$$u_1 = 0^0; u_2 = 40^0; u_3 = 90^0; u_4 = 130^0.$$

$$v_1 = 90^0; v_2 = 50^0; v_3 = 0^0; v_4 = 40^0.$$

$$P_1 \cos u_1 = 6 \cos 0^0 = +6,000 \quad P_1 \cos v_1 = 6 \cos 90^0 = +0,000$$

$$P_2 \cos u_2 = 9 \cos 40^0 = +6,894 \quad P_2 \cos v_2 = 9 \cos 50^0 = +5,785$$

$$P_3 \cos u_3 = 12 \cos 90^0 = +0,000 \quad P_3 \cos v_3 = 12 \cos 0^0 = +12,00$$

$$P_4 \cos u_4 = 15 \cos 130^0 = -9,642 \quad P_4 \cos v_4 = 15 \cos 40^0 = +11,49$$

$$R_x = +3,252$$

$$R_y = +29,275.$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 29,46 \text{ kg,}$$

$$\cos u = \frac{R_x}{R} = \frac{3,252}{29,46}; u = 83,66^0.$$

$$\cos v = \frac{R_y}{R} = \frac{29,275}{29,46}; v = 6,4^0.$$

c. Momenter.

Virker Kraften P paa et Punkt B (Fig. 17), som antages fast forbundet med et fastliggende Punkt O , vil B ikke kunne bevæges retlinet fremad under P 's Paavirkning, men der vil om O finde en Omdrejning Sted, eller der vil, ifald denne Omdrejning forhindres, være en Bestræbelse dertil. Denne Bestræbelse maales ved Produktet af Kraften P og Punktet O 's Afstand a fra Kraftens Linie. Pa kaldes Kraftens Moment med Hensyn til O , som kaldes Momentpunktet. a kaldes Momentets Arm. Er Kraften given i Kilogram og Afstanden i Meter, Centimeter

eller Millimeter, kaldes Momentet altsaa Kilogram-Meter, Kilogram-Centimeter eller Kilogram-Millimeter, der betegnes ved henholdsvis kgm, kgcm og kgmm.

Da der i Momentet indgaar baade en Kraft og en Linie, vil det ved den grafiske Fremstilling være nødvendigt, foruden en Kraftmaalestok, ogsaa at have en Maalestok for Længder, en Længdemaalestok.

Virke to Kræfter af samme Størrelse til Omdrejning om et Punkt, vil altsaa Momentet være størst for den Kraft, der ligger længst fra Punktet. Ere Kræfterne ulige store, men ligge i samme Afstand fra Punktet, virker den største Kraft med størst Moment.

Ligger Momentpunktet i Kraftens Linie, er Momentet Nul.

Ligesom Kræfter regnes ogsaa Momenter med Fortegn, saaledes at alle Momenter, der virke til Omdrejning i samme Retning, faa samme Fortegn.

Virker der igennem to fastbundne Punkter *A* og *B* (Fig. 18) to Kræfter af samme Størrelse *P*, men i modsat Retning, vil Summen af disse Kræfters Momenter med Hensyn til et hvilket som helst Punkt i Planet være konstant α : have samme Størrelse, hvor Momentpunktet end ligger. Vælger man til Momentpunkt *O*, hvis Afstande fra de to Kræfter ere *l* og *m*, vil Summen af Momenterne være

$$Pm - Pl = P(m - l) = Pa.$$

eller Produktet af en af de ligestore Kræfter *P* og Afstanden *a* imellem dem.

Vælger man *O* liggende imellem Kræfterne, ville begge Momenter faa samme Fortegn, og Størrelsen indenfor Parantesen altsaa blive en Sum af Størrelse *a*.

De to ligestore Kræfter siges at danne et Kraftpar (Svingkraft).

d. Kræfterne virke gennem flere fastforbundne Punkter i forskellige Retninger.

Saadanne Kræfter ville, forsaavidt de ikke holde hverandre i Ligevægt, enten kunne erstattes ved en enkelt Kraft eller ved et Kraftpar.

Den her foreliggende Opgave vil straks dele sig i to Dele.

1. Bestemmelsen af Resultantens Størrelse.
2. Bestemmelsen af dens Beliggenhed.

Resultantens Størrelse findes paa samme Maade som i det Tilfælde, hvor Kræfterne gaa gennem samme Punkt.

Beliggenheden kan bestemmes ved successiv Anvendelse af Kræfternes Parallelogram, men denne Fremgangsmaade er i Almindelighed vidtløftig, og den skal derfor ikke omtales nærmere. Man gaar derimod frem paa følgende Maade:

Paa Fig. 19 er der givet fire Kræfter P_1, P_2, P_3 og P_4 . Efterat man først har dannet Kraftpolygonen $\overline{01234}$ ved fra et vilkaarligt Punkt 0 at tegne Linier ligestore og parallelle med de givne Kræfter og derved fundet Resultanten $\overline{04}$ i Størrelse og Retning, vælger man et andet Punkt p , Polen, vilkaarligt, dog i Almindelighed hverken i nogen af Kraftpolygonens Sider eller Vinkelspidser, og trækker derfra Linier til alle Kraftpolygonens Vinkelspidser; disse Linier kaldes Polstraalerne. Fra et i P_1 vilkaarligt valgt Punkt I tegnes Linier parallelle med de to Straaler, som omslutte $\overline{01}$; den med $\overline{1p}$ parallelle Linie skærer P_2 i II , hvorfra en Linie tegnes parallel med $\overline{2p}$ til Skæring med P_3 ; Skæringspunktet betegnes med III . Herfra føres en Linie parallel med $\overline{3p}$ til Skæring med P_4 , og fra disses Skæringspunkt IV en Linie parallel med $\overline{4p}$. Ved denne Linies Skæring med den Linie, der gennem I er tegnet parallel med $\overline{0p}$, faar man V , som er et Punkt af Resultanten, hvorfor denne, R , trækkes derigennem parallel med $\overline{04}$.

Ved Bestemmelsen af disse Kræfters Resultant er man begyndt med at opløse en af dem, nemlig P_1 , i et vilkaarligt Punkt I i to Komposanter, hvis Retninger og Størrelser ere bestemte ved Polstraalerne til \overline{OI} 's Endepunkter, altsaa her (Fig. 19^b) ved \overline{Op} og \overline{pI} , medens deres Beliggenhed maa være \overline{IV} og \overline{II} . Derefter ere alle de øvrige Kræfter paa samme Maade opløste i to Komposanter, nemlig P_2 i Punkt II i Komposanterne \overline{Ip} og $\overline{p2}$, P_3 i Punkt III i $\overline{2p}$ og $\overline{p3}$ og P_4 i IV i $\overline{3p}$ og $\overline{p4}$. De oprindelig givne Kræfter erstattes altsaa af \overline{Op} , \overline{pI} , \overline{Ip} , $\overline{p2}$, $\overline{2p}$, $\overline{p3}$, $\overline{3p}$ og $\overline{p4}$, af hvilke \overline{pI} og \overline{Ip} begge virke i \overline{II} i modsatte Retninger, hvorfor deres Resultant er Nul. Af lignende Grund ville $\overline{p2}$ og $\overline{2p}$ samt $\overline{p3}$ og $\overline{3p}$ hæve hinanden, saa at kun \overline{Op} og $\overline{p4}$ blive tilbage. Disses Resultant, som er $\overline{O4}$, maa gaa gennem de to Kraftlinier \overline{IV} 's og \overline{VIV} 's Skæringspunkt V , og dermed er Rigtigheden af denne Maade at bestemme Resultanten paa bevist. Polygonen $I II III IV V$ kaldes en Stangpolygon. Den bliver i dette Tilfælde lukket, medens Kraftpolygonen er aaben.

Anbringer man paa det Sted, hvor Resultanten R falder (se Fig. 20), en Kraft P_5 af samme Størrelse som R , men virkende i modsat Retning, vil den med R , som erstatter P_1 , P_2 , P_3 og P_4 , danne en Resultant af Størrelse Nul; P_5 og de fire givne Kræfter P_1 , P_2 , P_3 og P_4 holde altsaa hverandre i Ligevægt. Kraftpolygonen vil her faa sit Endepunkt i 5 , som falder sammen med 0 , og vil saaledes blive lukket.

Stangpolygonen $I II III IV V$ bliver i dette Tilfælde ogsaa lukket, og der vil her virke een Kraft i enhver af dens Vinkelspidser, medens der i det foregaaende Tilfælde ikke virkede nogen Kraft gennem Stangpolygons Vinkelspids V .

Ønsker man at bestemme Resultanten af nogle enkelte af de givne Kræfter f. Eks. af P_1 , P_2 og P_3 , findes dens

Størrelse og Retning som Diagonalen $\overline{03}$ paa Fig. 20^b, medens Beliggenhed maa være bestemt ved Skæringspunktet af de to Stangpolygonsider, som ere parallele med de to Polstraaler, der omslutte $\overline{03}$. Dette Punkt er paa Fig. 20^a betegnet med B , og herigennem er de tre Kræfters Resultantlinie R_1 tegnet parallel med $\overline{03}$. En saadan Resultant af enkelte af de givne Kræfter kaldes en partiel Resultant.

Da $\overline{03}$ er en Diagonal i Kraftpolygonen, angive alt-saa Diagonalerne i denne Størrelsen og Retningen af Resultanten af de Kræfter, som ere parallele med de Kraftpolygonsider, der ligge mellem vedkommende Diagonals Endepunkter.

Af det anførte fremgaar nu, at flere givne Kræfter, som virke i forskellige Linier, der ikke skære hinanden i eet Punkt, have en enkelt Resultant, naar Kraftpolygonen er aaben og Stangpolygonen er lukket. Resultantens Størrelse og Retning ere i Kraftpolygonen angivne ved den Linie, der gaar fra Udgangspunktet til Endepunktet, og dens Beliggenhed er bestemt derved, at den skal gaa gennem Skæringspunktet af Stangpolygonens første og sidste Side.

Naar Kraftpolygon og Stangpolygon begge ere lukkede, er der Ligevægt imellem de givne Kræfter.

Endelig kan der indtræffe det Tilfælde, at Kraftpolygonen er lukket og Stangpolygonen aaben, idet dennes første og sidste Side blive parallele. De givne Kræfter erstattes i saa Fald ved et Kraftpar.

Dette finder Sted, naar Resultanten af alle Kræfterne paa een nær er af samme Størrelse som denne, medens tillige denne Resultant og Kraft virke i modsatte Retninger efter to med hinanden parallele Linier. Sammensætter man (Fig. 21) Kræfterne P_1 , P_2 , P_3 og P_4 , ville disse

Kræfter danne Resultanten R af Størrelse $\overline{O4}$ og gaaende gennem V' . Denne Resultant vil i Forbindelse med P_5 , som er af samme Størrelse, men virker i modsat Retning, danne et Kraftpar, hvis Størrelse er Produktet af P_5 og Afstanden mellem R og P_5 .

Vil man finde Resultanten af samtlige fem Kræfter ved Hjælp af Kraftpolygon og Stangpolygon, viser dette sig umuligt. Resultantens Størrelse bliver nemlig Nul (se Fig. 21 b), og dens Beliggenhed paa Fig. 21^a kan ikke bestemmes, eftersom Skæringspunktet mellem \overline{VII} og \overline{VII} , første og sidste Stangpolygonside, der begge blive parallelle med \overline{Op} , falder uendelig fjernt. Disse Kræfter have altsaa ingen enkelt Resultant. Paa Fig. 21^a er P_1 i Punktet I opløst i \overline{Op} og $\overline{p1}$, P_2 i Punktet II i \overline{Ip} og $\overline{p2}$, P_3 i Punktet III i $\overline{2p}$ og $\overline{p3}$, P_4 i Punktet IV i $\overline{3p}$ og $\overline{p4}$, og P_5 i Punktet V i $\overline{4p}$ og $\overline{p5}$. Disse Komposanter ville hæve hinanden to og to med Undtagelse af \overline{Op} og $\overline{p5}$, som vel ere ligestore og modsatte, men derimod virke i forskellige Kraftlinier, den ene i Linien \overline{VII} henimod I , den anden i \overline{VII} henimod VI . Disse to Kræfter af Størrelse \overline{Op} danne saaledes et Kraftpar, hvis Moment er Produktet af \overline{Op} og Afstanden mellem \overline{VII} og \overline{VII} , altsaa et andet Udtryk for det samme Kraftpar, der foroven blev udtrykt ved Produktet af P_5 og Afstanden mellem R og P_5 .

Dette af de sidst omtalte fem Kræfter dannede System vil have en Bestræbelse til Drejning, som maa modvirkes, hvis ikke en Bevægelse af Systemet skal finde Sted.

Ere saadanne Kræfter, som de paa Fig. 19, 20 og 21 viste, indbyrdes parallelle, og man skal finde Størrelsen og Beliggenheden af disse Kræfters Resultant, kan man ad grafisk Vej gaa frem ganske paa samme Maade, som foran angivet. Dette er nærmere oplyst ved et Eksempel.

Eksp. 12. Igennem fem indbyrdes fastforbundne Punkter virke fem Kræfter $P_1 = 50$ kg, $P_2 = 30$ kg,

$P_3 = 70$ kg, $P_4 = 90$ kg og $P_5 = 60$ kg, af hvilke P_1 , P_3 og P_4 virke lodret nedad og de andre lodret opad (se Fig. 22). De givne Kræfter skære Linien AE , som er vinkelret paa dem, i Punkterne A, B, C, D og E , hvis Beliggenhed er bestemt derved, at

$AB = 50$ cm, $AC = 120$ cm, $AD = 210$ cm og $AE = 320$ cm.

Man skal bestemme de givne Kræfters Resultant.

Hvorledes dette gøres grafisk, er vist paa Fig. 22.

Kraftpolygonen (se Fig. 22^b) bliver en ret Linie, og Resultanten R findes i Størrelse og Retning som Linien $\overline{05}$, altsaa som de enkelte Kræfters algebraiske Sum. Til Pol er valgt et vilkaarligt Punkt p , hvorfra Polstraalerne ere tegnede til Kraftpolygonens Vinkelspidser. Endelig har man ved Linier parallelle med Polstraalerne dannet Stangpolygonen $I II III IV V VI$, og Resultantens Beliggenhed er altsaa bestemt derved, at den skal gaa gennem VI , som er Skæringspunktet imellem første og sidste Stangpolygonside.

Af dette Eksempel fremgaar det, at man, hvis man ønskede at bestemme disse Kræfters Resultant R ved Beregning, straks kunde finde dens Størrelse og Retning ved at addere Kræfterne, som naturligvis maa regnes med Fortegn, de lodret nedad virkende positive og de lodret opad virkende negative eller omvendt.

Man har altsaa $R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$.

Resultantens Beliggenhed kan findes ved den Ligning, som angiver, at Summen af de enkelte Kræfters Momenter med Hensyn til et eller andet vilkaarlig valgt Punkt er lige saa stor som Resultantens Moment med Hensyn til dette Punkt. Vælger man f. Eks. paa Linien AE et Punkt F til venstre for samtlige Kræfter og 10 cm fra A

til Momentpunkt, bliver Momentligningen, naar Kræfternes Afstande fra F betegnes ved henholdsvis a_1, a_2, a_3, a_4 og a_5 ,

$$\begin{aligned} P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 + P_4 a_4 + P_5 a_5 \\ = (P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5) x, \end{aligned}$$

hvor x angiver Punktet F 's Afstand fra Kræfternes Resultant R .

Af Ligningen faar man

$$x = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 + P_4 a_4 + P_5 a_5}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5}.$$

Indsætter man i de anførte Ligninger $P_1 = +50$, $P_2 = -30$, $P_3 = +70$, $P_4 = +90$ og $P_5 = -60$, samt $a_1 = 10$, $a_2 = 60$, $a_3 = 130$, $a_4 = 220$ og $a_5 = 330$, faar man

$$R = 50 - 30 + 70 + 90 - 60 = 120 \text{ kg}$$

og

$$x = \frac{50 \cdot 10 - 30 \cdot 60 + 70 \cdot 130 + 90 \cdot 220 - 60 \cdot 330}{120} = 65 \text{ cm.}$$

x er her positiv, og Resultanten ligger altsaa til højre for F i Afstanden 65 cm derfra. Var x bleven negativ, maatte man have afsat Værdien for x fra F til venstre Side.

Rigtigheden af denne Fremgangsmaade til Bestemmelse af Resultantens Beliggenhed kan indses saaledes:

Det vil ikke forandre noget i Systemet af de virkende Kræfter, om man i F tilføjer to Kræfter af Størrelse P_1 , men virkende i modsatte Retninger. Den ene af disse (her den opad virkende) vil med P_1 gennem A danne et Kraftpar af Størrelse $P_1 a_1$, og den enkelte Kraft P_1 gennem A er altsaa erstattet ved dette Kraftpar og en enkelt Kraft P_1 virkende gennem F . Paa samme Maade

kan man erstatte de øvrige Kræfter ved Kraftpar af Størrelse henholdsvis P_2a_2 , P_3a_3 , P_4a_4 og P_5a_5 samt enkelte Kræfter af Størrelse P_2 , P_3 , P_4 og P_5 . De sidste virke gennem F og danne med P_1 en Resultant R derigennem. Anbringer man nu i et Punkt G , som ligger i Linien EF i en endnu ubekendt Afstand x fra F , to ligestore Kræfter R , som virke i modsatte Retninger i en Linie, der er parallel med Kraftlinierne, vil den ene af disse to Kræfter R med R gennem F danne et Kraftpar, som vil ophæve den samlede Virkning af de fem Kraftpar P_1a_1 , P_2a_2 , P_3a_3 , P_4a_4 og P_5a_5 , naar blot Ligningen

$$Rx = P_1a_1 + P_2a_2 + P_3a_3 + P_4a_4 + P_5a_5$$

er tilfredsstillet.

Ligger altsaa R i den Afstand x , som findes af denne Momentligning, vil Virkningen af samtlige Kraftpar være hævet, og tilbage bliver kun den gennem G virkende Kraft R , som saaledes bliver samtlige Kræfters Resultant.

Foranstaaende Fremgangsmaade anvendes tillige, naar man ved Beregning vil bestemme den samlede Virkning af flere Kræfter, som virke i forskellige Retninger, og som ikke skære hverandre i eet Punkt. Man opløser nemlig i saa Fald alle Kræfterne efter to paa hinanden vinkelrette Retninger og ikke som ved den grafiske Metode i vilkaarlige Retninger.

Skal man saaledes finde Resultanten af Kræfterne P_1 , P_2 , P_3 og P_4 (Fig. 23), der ere givne i Størrelse samt iøvrigt bestemte ved, 1) at skulle gaa gennem de med hverandre fast forbundne Punkter 1, 2, 3 og 4, hvis Beliggenhed er angiven ved deres Afstande fra to paa hinanden vinkelrette Linier OX og OY , nemlig:

Punkt 1 ved Afstanden x_1 fra OY og Afstanden y_1 fra OX

— 2	—	x_2	—	—	y_2	—
— 3	—	x_3	—	—	y_3	—
— 4	—	x_4	—	—	y_4	—

(x 'erne kaldes Punkternes Abscisser og regnes positive til højre for Ordinataksen OY og negative til venstre derfor, medens y 'erne kaldes Ordinatorer og regnes positive over Abscisseaksen OX og negative under den), og 2) ved deres Vinkler med OX og OY nemlig:

P_1 ved $\angle u_1$ med OX og ved $\angle v_1$ med OY

P_2 — $\angle u_2$ — — $\angle v_2$ —

P_3 — $\angle u_3$ — — $\angle v_3$ —

P_4 — $\angle u_4$ — — $\angle v_4$ —,

saa opløser man hver Kraft for sig i dens Angrebspunkt efter de to Retninger OX og OY . Derved blive

P_1 's Komposanter $X_1 = P_1 \cos u_1$ og $Y_1 = P_1 \cos v_1$,

P_2 's — $X_2 = P_2 \cos u_2$ og $Y_2 = P_2 \cos v_2$,

P_3 's — $X_3 = P_3 \cos u_3$ og $Y_3 = P_3 \cos v_3$,

P_4 's — $X_4 = P_4 \cos u_4$ og $Y_4 = P_4 \cos v_4$.

De vandrette Komposanter faa en vandret Resultant

$$R_x = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

og de lodrette Komposanter en lodret Resultant

$$R_y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4.$$

Beliggenheden af R_x bestemmes derved, at dens Moment med Hensyn til et vilkaarligt Punkt i Planet, f. Eks. O , skal være lig med Summen af dens Komposanters Momenter med Hensyn til samme Punkt. Kaldes dens Afstand fra O for y , bestemmer man altsaa dens Beliggenhed ved Hjælp af Ligningen

$$R_x \cdot y = X_1 y_1 + X_2 y_2 + X_3 y_3 + X_4 y_4, \text{ hvoraf}$$

$$y = \frac{X_1 y_1 + X_2 y_2 + X_3 y_3 + X_4 y_4}{R_x}$$

Paa samme Maade finder man den Afstand x , hvori R_y ligger fra O , at være

$$x = \frac{Y_1 x_1 + Y_2 x_2 + Y_3 x_3 + Y_4 x_4}{R_y}$$

R_x og R_y , som virke henholdsvis i en vandret og en lodret Linie, skære hinanden i det Punkt, der er bestemt ved Koordinaterne x og y , og herigennem maa altsaa deres Resultant R gaa. Størrelsen af denne, som saaledes bliver Resultanten af de fire givne Kræfter, beregnes af Ligningen

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2, \text{ hvoraf } R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

Dens Retning findes af

$$\cos u = \frac{R_x}{R} \text{ og } \cos v = \frac{R_y}{R},$$

naar u og v betegne R 's Vinkler med henholdsvis OX og OY .

De fundne Værdier for R , u og v ere de samme, som man vilde faa, naar de fire givne Kræfter skar hverandre i eet Punkt.

Er enten R_x eller R_y Nul, vil den af dem, som ikke er Nul, i Størrelse være Resultanten af de givne Kræfter, medens dens Beliggenhed findes ved at sætte Summen af Momenterne af saavel de lodrette som de vandrette Komposanter lig med Resultantens Moment med Hensyn til Punktet O .

Ere baade R_x og R_y Nul, er der enten Ligevægt, eller Kræfterne erstattes af et Kraftpar. Ligevægt finder Sted, naar Summen af Momenterne af alle Komposanterne er

Nul med Hensyn til Punktet O . Er dette ikke Tilfældet, vil Størrelsen af Momentsummen netop angive Størrelsen af det Kraftpar, som erstatter de givne Kræfter.

De tre Betingelser for Ligevægt ere altsaa:

- 1) *at Summen af Kræfternes vandrette Komposanter skal være Nul.*
- 2) *at Summen af Kræfternes lodrette Komposanter skal være Nul.*
- 3) *at Summen af alle Komposanternes Momenter med Hensyn til et vilkaarligt Punkt i Planet skal være Nul eller, hvad der er det samme, at Summen af selve Kræfternes Momenter skal være Nul,*

thi en Krafts Moment er lig med Summen af dens Komposanternes Momenter med Hensyn til samme Punkt. Dette indses saaledes: Paa Fig. 24 er P 's Komposanter X og Y . O 's Afstande fra disse Kræfter og fra A ere henholdsvis a , b , c og d . X danner $\angle v$ med P og $\angle u$ med AO . Da $X = P \cos v$, $Y = P \sin v$, $b = d \sin u$, $c = d \cos u$ og $a = d \sin (v - u)$, vil det vise sig, at $Yc - Xb = Pa$, naar de for de enkelte Størrelser fundne Værdier indsættes i denne Ligning.

I de forannævnte Ligninger maa saavel Kræfter som Momenter indsættes med deres respektive Fortegn.

Ekspl. 13. I fem indbyrdes fast forbundne Punkter 1, 2, 3, 4 og 5, hvis Koordinater ere henholdsvis

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 \text{ cm}; & x_2 &= 9 \text{ cm}; & x_3 &= 17 \text{ cm}; & x_4 &= 20 \text{ cm}; & x_5 &= 15 \text{ cm}; \\ y_1 &= 10 \text{ cm}; & y_2 &= 12 \text{ cm}; & y_3 &= 14 \text{ cm}; & y_4 &= 13 \text{ cm}; & y_5 &= 18 \text{ cm}, \end{aligned}$$

virke fem Kræfter $P_1 = 50 \text{ kg}$, $P_2 = 30 \text{ kg}$, $P_3 = 70 \text{ kg}$, $P_4 = 90 \text{ kg}$ og $P_5 = 120 \text{ kg}$, hvis Retninger ere bestemte ved

$$\begin{aligned} u_1 &= 70^\circ; & u_2 &= 60^\circ; & u_3 &= 120^\circ; & u_4 &= 150^\circ; & u_5 &= 90^\circ; \\ v_1 &= 20^\circ; & v_2 &= 150^\circ; & v_3 &= 30^\circ; & v_4 &= 120^\circ; & v_5 &= 0^\circ. \end{aligned}$$

Man skal finde Størrelse, Retning og Beliggenhed af de fem Kræfters Resultant.

$$X_1 = P_1 \cos u_1 = 50 \cos 70^\circ = + 17,10$$

$$X_2 = P_2 \cos u_2 = 30 \cos 60^\circ = + 15,00$$

$$X_3 = P_3 \cos u_3 = 70 \cos 120^\circ = - 35,00$$

$$X_4 = P_4 \cos u_4 = 90 \cos 150^\circ = - 77,94$$

$$X_5 = P_5 \cos u_5 = 120 \cos 90^\circ = 0,00$$

$$R_x = - 80,84$$

$$Y_1 = P_1 \cos v_1 = 50 \cos 20^\circ = + 46,99$$

$$Y_2 = P_2 \cos v_2 = 30 \cos 150^\circ = - 25,98$$

$$Y_3 = P_3 \cos v_3 = 70 \cos 30^\circ = + 60,62$$

$$Y_4 = P_4 \cos v_4 = 90 \cos 120^\circ = - 45,00$$

$$Y_5 = P_5 \cos v_5 = 120 \cos 0^\circ = + 120,00$$

$$R_y = + 156,63$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{80,84^2 + 156,63^2} = 176,3$$

$$\cos u = -\frac{80,84}{176,3}; u = 117,3^\circ (117^\circ 18')$$

$$\cos v = +\frac{156,63}{176,3}; v = 27,33^\circ (27^\circ 19' 48'')$$

$$y = \frac{X_1 \cdot y_1 + X_2 \cdot y_2 + X_3 \cdot y_3 + X_4 \cdot y_4 + X_5 \cdot y_5}{R_x}$$

$$= \frac{17,10 \cdot 10 + 15 \cdot 12 - 35 \cdot 14 - 77,94 \cdot 13 + 0 \cdot 18}{- 80,84}$$

$$= + 14,25 \text{ cm.}$$

$$x = \frac{Y_1 \cdot x_1 + Y_2 \cdot x_2 + Y_3 \cdot x_3 + Y_4 \cdot x_4 + Y_5 \cdot x_5}{R_y}$$

$$= \frac{46,99 \cdot 5 - 25,98 \cdot 9 + 60,62 \cdot 17 - 45 \cdot 20 + 120 \cdot 15}{156,63}$$

$$= + 12,33 \text{ cm.}$$

Ekspl. 14. Man skal finde Resultanten af Kræfterne $P_1 = 4000 \text{ kg}$, $P_2 = 2000 \text{ kg}$, $P_3 = 2000 \text{ kg}$ og $P_4 = 1000 \text{ kg}$, som angribe i Punkterne 1, 2, 3 og 4, der ere bestemte ved Koordinaterne

$$x_1 = + 3 \text{ m}; x_2 = + 2 \text{ m}; x_3 = - 1 \text{ m}; x_4 = - 2 \text{ m}$$

$$y_1 = + 1 \text{ m}; y_2 = - 1 \text{ m}; y_3 = - 3 \text{ m}; y_4 = + 2 \text{ m}$$

til to Akser, hvoraf den ene er vandret med positiv Retning til højre, den anden lodret med positiv Retning opad. Kræfternes Vinkler med disse Aksers positive Retninger ere

$$u_1 = 90^\circ; u_2 = 0^\circ; u_3 = 180^\circ; u_4 = 90^\circ;$$

$$v_1 = 0^\circ; v_2 = 90^\circ; v_3 = 90^\circ; v_4 = 180^\circ.$$

Man faar herefter

$$R_x = P_1 \cos u_1 + P_2 \cos u_2 + P_3 \cos u_3 + P_4 \cos u_4 = 0,$$

$$R_y = P_1 \cos v_1 + P_2 \cos v_2 + P_3 \cos v_3 + P_4 \cos v_4 = 3000,$$

altsaa

$$R = 3000 \text{ kg.}$$

Til Bestemmelse af Resultantens Beliggenhed opstilles Momentligningen med Hensyn til Koordinaternes Begyndelsespunkt, og man maa i dette Eksempel, hvor $R_x = 0$, tage Summen af samtlige Komposanters Mo-

menter. Regnes den ved Kræften P_1 's Moment bestemte Omdrejningsretning for positiv, faar man

$$R \cdot x = 4000 \cdot 3 + 2000 \cdot 1 - 2000 \cdot 3 + 1000 \cdot 2 = 10000.$$

Da $R = 3000$, bliver $x = \frac{10}{3}$.

Da Momentet 10000 kgm er positivt og R virker opad, maa x afsættes fra Begyndelsespunktet henad Abscisseaksen til højre, hvorved R 's Beliggenhed er bestemt.

Parallele Kræfters Sammensætning, som i det foregaaende er nærmere omtalt i Ekspl. 12, finder bl. a. Anvendelse ved Bestemmelsen af Liniers og Fladers Tyngdepunkt.

Forinden mere udviklede Tilfælde behandles, skal Beliggenheden af Tyngdepunkterne i simple Linie- og Arealformer findes, idet man skal minde om, at Tyngdepunktet er det Punkt, hvorom vedkommende Linie, Flade eller Legeme vil være i Ligevægt i en hvilken som helst Stilling, og hvorigennem altsaa Liniens, Fladens eller Legemets Størrelse kan tænkes virkende som en Kraft. Kan man gennem vedkommende Linie eller Areal, hvis Tyngdepunkt skal findes, lægge en Linie, som deler Linien eller Arealet symmetrisk, ligger Tyngdepunktet i denne Linie, som kaldes en Symmetrilinie. Findes der to Symmetrilinier, bliver disses Skæringspunkt Figurens Tyngdepunkt.

En ret Liniens Tyngdepunkt er dens Midtpunkt.

En brudt Liniens Tyngdepunkt findes ved Kraftpolygon og Stangpolygon, som vist paa Fig. 25, idet man tænker sig de enkelte Siders Længder virkende som Kræfter i Sidernes Midtpunkter, først lodret og dernæst vandret. I Stedet for at tegne to Kraftpolygoner, en for hver af disse Kraftretninger, tegner man kun een, som sammen med Polstraalerne tænkes drejet 90° . Siderne i Stang-

polygonen $I' II' III' IV' V'$ ville da blive vinkelrette paa de tilsvarende i Stangpolygonen $I II III IV V$. De to Resultantlinier ere R og R' , og deres Skæringspunkt T det søgte Tyngdepunkt.

Den paa Fig. 26 viste brudte Linie er en Del af en regelmæssig Mangelkants Omkreds. Da den brudte Linie deles i to symmetriske Halvdele ved Linien OD , maa Tyngdepunktet ligge i denne. Dets Afstand fra Centrum O for den indskrevne Cirkel findes som fjerde Proportional til de tre Størrelser b , k og r , der betegne henholdsvis den brudte Linies Længde, dens Projektion paa Linien MN , der er vinkelret paa OD , og Radius til den i den brudte Linie indskrevne Cirkel. Proportionen bliver

$$\frac{b}{k} = \frac{r}{x}. \quad (1)$$

Kaldes nemlig de enkelte Sider i Mangelkanten s og deres Projektioner paa AG henholdsvis $s_1, s_2, s_3, s_4 \dots$ samt Afstandene fra Sidernes Midtpunkter til MN for $h_1, h_2, h_3, h_4 \dots$, har man, idet $\triangle BCH \infty \triangle JOL$,

$$\frac{s}{s_2} = \frac{r}{h_2} \text{ eller } s h_2 = r s_2.$$

Paa lignende Maade findes

$$s h_1 = r s_1; \quad s h_3 = r s_3; \quad s h_4 = r s_4; \quad \text{o. s. v.}$$

Adderes alle disse Ligninger, faar man

$$s h_1 + s h_2 + s h_3 + s h_4 + \dots = r s_1 + r s_2 + r s_3 + r s_4 + \dots$$

Venstre Side af denne Ligning er Summen af de enkelte Siders Momenter med Hensyn til O , naar Siderne tænkes virkende som Kræfter i vandret Retning. Denne Momentsum kan da erstattes ved den brudte Linies Moment, der

er $b \cdot x$, naar x er Tyngdepunktets Afstand fra O . Ligningen bliver derved til

$$b x = r (s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \dots) = r k$$

eller
$$\frac{b}{k} = \frac{r}{x}$$

Konstruktionen kan nu udføres saaledes (Fig. 27): Fra O afsættes henad OD Stykket $OR = r$; i R oprejses en Linie PR vinkelret paa OD . Om O som Centrum slaas med b som Radius en Cirkelbue til Skæring med PR . Skæringspunktet P forbindes med O og henad OP afsættes $OK = k$. Linien KT tegnes parallel med PR , og T er da det søgte Tyngdepunkt. Af de ligedannede Trekanter OTK og ORP faar man nemlig

$$\frac{OP}{OK} = \frac{OR}{OT} \text{ eller } \frac{b}{k} = \frac{r}{x}$$

En Cirkelbues Tyngdepunkt kan findes ved samme Proportion, kun at b da betyder Cirkelbuens Længde, r Cirkelens Radius og k Korden mellem Cirkelbuens Endepunkter, som vist paa Fig. 28. Det er ofte bekvemt eller nødvendigt f. Eks., naar Buens Længde er mindre end Radius, at benytte et Multiplum af Buens Længde i Stedet for selve Længden, men man maa da samtidig bruge det samme Multiplum af Kordens Længde.

Kender man Buens Radius r og dens Centervinkel v , kan Tyngdepunktets Afstand x fra O findes af ovenangivne

Ligning, hvoraf
$$x = \frac{kr}{b},$$

naar deri indsættes

$$k = 2r \sin \frac{v}{2} \text{ og } b = \frac{\pi r v}{180},$$

hvorved

$$x = \frac{2r^2 \sin \frac{v}{2}}{\left(\frac{\pi r v}{180}\right)} = \frac{360 r \sin \frac{v}{2}}{\pi v}.$$

Kender man i Stedet for Radius og Centervinklen enten Radius og Korden eller Korden og Centervinklen, vil Buens Tyngdepunkt ogsaa let kunne findes ved Ligning (1).

Ekspl. 15. Hvorlangt fra Centrum ligger Tyngdepunktet i en Cirkelbue, hvis Radius er 12 cm og hvis Korde er 15 cm?

Centervinklen v findes af

$$\sin \frac{1}{2} v = \frac{k}{2r} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8};$$

$$\frac{1}{2} v = 38,68^{\circ}; \quad v = 77,36^{\circ};$$

$$b = \frac{\pi r v}{180^{\circ}} = \frac{\pi \cdot 12 \cdot 77,36^{\circ}}{180^{\circ}} = \frac{\pi \cdot 77,36^{\circ}}{15^{\circ}} = 16,19 \text{ cm.}$$

$$x = \frac{12 \cdot 15}{16,19} = 11,12 \text{ cm.}$$

Vil man bestemme Tyngdepunktet for en vilkaarlig krum Linie, maa man dele den i Stykker saa smaa, at de kunne betragtes som Cirkelbuer eller rette Linier. Tyngdepunkterne for de enkelte Dele findes først, og derefter bestemmes hele den krumme Liniens Tyngdepunkt ved samme Fremgangsmaade, som foran er angiven til Bestemmelse af den brudte Liniens Tyngdepunkt.

Trekantens Tyngdepunkt er Medianernes Skæringspunkt. I dette Punkt dele de hverandre i to Stykker, af hvilke det mindste er Halvdelen af det største. Antages $\triangle ABC$ (Fig. 29) ved Linier parallelle med AC delt i ganske smalle Strimler, ville disses Tyngdepunkter alle ligge i Medianen BD ; ved samme Betragtning indses det, at Tyngdepunktet ogsaa maa ligge i AE , altsaa i Skæringspunktet T mellem BD og AE .

Parallelogrammets Tyngdepunkt er Skæringspunktet mellem Diagonalerne, da disse hver for sig dele det i to kongruente Trekanter, hvis Tyngdepunkter ligge i lige store Afstande fra vedkommende Diagonal.

Trapezets Tyngdepunkt T maa dels ligge i den Linie EF (se Fig. 30), der forbinder Midtpunkterne af AB og CD , idet Trapezet ligesom Trekanten kan tænkes delt i smalle Strimler ved Linier parallelle med de to parallelle Sider, dels i Forbindelseslinien mellem $\triangle ABD$'s og $\triangle DBC$'s Tyngdepunkter T_1 og T_2 . Tyngdepunktet T bliver da Skæringspunktet mellem disse to Linier. En anden og noget lettere Maade at finde dette Tyngdepunkt paa, er vist paa Fig. 31, hvor $BH \parallel DC$ og $GD \parallel AB$. T er Skæringspunktet mellem GH og Linien EF , som forbinder Midtpunkterne af AB og DC .

Naar Trapezets parallelle Sider kaldes a og b samt dets Højde h , og Tyngdepunktets Afstand fra CD betegnes ved x , har man, da $\triangle GTF \sim \triangle EHT$,

$$\frac{x}{h-x} = \frac{b + \frac{1}{2}a}{a + \frac{1}{2}b} \quad \text{hvoraf } x = \frac{h}{3} \cdot \frac{2b+a}{b+a}.$$

Polygonens Tyngdepunkt. Ved Diagonaler fra en Vinkelspids deles Polygonen i Trekanter, hvis Arealer og Tyngdepunkter først findes. Dernæst anbringer man Kræfter proportionale med Arealerne i de respektive

Tyngdepunkter virkende først lodret og derefter vandret, hvorpaa det fælles Tyngdepunkt (Polygonens Tyngdepunkt) bestemmes ved Kraftpolygon og Stangpolygon paa samme Maade som den brudte Linies Tyngdepunkt.

Ved mere indviklede Arealformer maa man gaa frem paa samme Maade, idet de deles i Arealer, hvis Størrelser og Tyngdepunkter let kunne findes.

Ekspl. 16. Bestem ad grafisk Vej Tyngdepunktet for en uregelmæssig Femkant, hvis Vinkelspidser ere angivne ved Koordinaterne:

$$x_1 = 2 \text{ m}; x_2 = 10 \text{ m}; x_3 = 18 \text{ m}; x_4 = 16 \text{ m}; x_5 = 8 \text{ m}; \\ y_1 = 10 \text{ m}; y_2 = 14 \text{ m}; y_3 = 12 \text{ m}; y_4 = 6 \text{ m}; y_5 = 2 \text{ m}.$$

Ekspl. 17. Find Tyngdepunktets Beliggenhed i det paa Fig. 32 viste Tværsnit af et Vinkeljærn.

Ved den punkterede Linie deles Arealet i to Rektangler, det ene paa 800 mm^2 og det andet paa 1100 mm^2 .

Gøres O til Momentpunkt, finder man først Tyngdepunktets Afstand y fra den vandrette Linie OA ved Momentligningen:

$$800 \cdot 5 + 1100 \cdot 65 = (800 + 1100) y,$$

hvoraf
$$y = 39,7 \text{ mm},$$

og dernæst dets Afstand x fra den lodrette Linie OB ved

$$800 \cdot 40 + 1100 \cdot 5 = (800 + 1100) x,$$

hvoraf
$$x = 19,7 \text{ mm}.$$

I den første Ligning er Kraftretningen forudsat vandret, i den sidste lodret.

Cirkeludsnittets Tyngdepunkt.

Ethvert Cirkeludsnit kan ved Radier deles i et vilkaarligt Antal ligestore smaa Cirkeludsnit, der kunne betragtes som Trekanter, hvis Tyngdepunkter alle ligge i en Afstand fra Cirkelens Centrum af $\frac{2}{3} r$, idet r er Cirkelens Radius, altsaa i en Cirkelbue med Radius $\frac{2}{3} r$. Cirkeludsnittets Tyngdepunkt maa følgelig være det samme som Tyngdepunktet af denne Bue. Hvorledes dette findes, er tidligere vist.

Konstruktionen er angiven paa Fig. 33.

$$CM = \frac{2}{3} CD; \quad CK = \sphericalcap ADB; \quad CL = AB;$$

KM og $TL \perp CD$. T er det søgte Tyngdepunkt.

Cirkelafsnittets Tyngdepunkt.

Da Cirkelafsnittet kan deles symmetrisk af en Radius, vil dets Tyngdepunkt komme til at ligge i denne Radius, men det maa ogsaa ligge i en anden ret Linie, der kan findes paa følgende Maade:

Cirkelafsnittet er Differensen mellem et Cirkeludsnit og en Trekant. Disse Arealer tænker man sig virkende som Kræfter i deres respektive Tyngdepunkter vinkelret paa den omtalte Symmetriradius, men i modsatte Retninger. Beliggenheden af disse Kræfters Resultant, hvis Størrelse er deres Differens, altsaa Cirkelafsnittets Areal, bestemmes derefter enten grafisk ved Kraftpolygon og Stangpolygon eller ad Beregningens Vej derved, at man opstiller Momentligningen f. Eks. med Hensyn til Centrum for Cirkelbuen som Momentpunkt. Hvor denne Resultantlinie skærer Symmetriradien, findes Tyngdepunktet.

Ekspl. 18. Bestem Tyngdepunktet af et Cirkelafsnit, hvis Radius er 36 cm og hvis Korde er 44 cm. Centervinklen er mindre end 180° (Fig. 34).

$$\sin v = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}, \quad v = 37,67^\circ.$$

$$\begin{aligned} \widehat{AB} &= \frac{\pi r \cdot 2v}{180} = \frac{\pi \cdot 36 \cdot 37,67^\circ}{90^\circ} = \frac{2\pi \cdot 37,67}{5} \\ &= 47,33 \text{ cm}; \end{aligned}$$

$$CD = \sqrt{36^2 - 22^2} = 28,49 \text{ cm};$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 44 \cdot 28,49 = 626,9 \text{ cm}^2;$$

$$\text{Udsnit } AEBC = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 47,33 = 852,2 \text{ cm}^2;$$

$$\text{Afsnit } AEBD = 225,2 \text{ cm}^2.$$

Betegn T_1 og T_2 henholdsvis Udsnittets og Trekantens Tyngdepunkter, har man ifølge Ligning (1) (se S. 30)

$$CT_1 = \frac{2}{3} \cdot 36 \cdot \frac{44}{47,33} = 22,30 \text{ cm},$$

$$CT_2 = \frac{2}{3} \cdot 28,49 = 19,00 \text{ cm}.$$

Momentligningen med Hensyn til C bliver

$$852,2 \cdot 22,30 - 626,9 \cdot 19,00 = x \cdot 225,2,$$

hvoraf

$$CT = x = 31,48 \text{ cm}.$$

Tyngdepunktet for et af to Radier begrænset Stykke af en Cirkelring bestemmes paa lignende Maade, da dette Areal er Differensen mellem to Cirkeludsnit.

Endnu skal i Forbindelse med det foregaaende omtales, hvorledes man tilnærmelsesvis ved Beregning kan bestemme Tyngdepunktet af et vilkaarligt Areal.

Hertil benyttes den saakaldte „Simpsons Formel“.

Fig. 35 viser et Areal begrænset af to parallelle rette Linier og to krumme Linier.

Der anbringes to paa hinanden vinkelrette Akser, af hvilke Y-Aksen falder sammen med en af de rette Begrænsningslinier. Afstanden mellem disse Begrænsningslinier deles i et lige Antal lige store Dele, her otte, og gennem Delingspunkterne tegnes Linier parallelle med Y-Aksen. De Stykker af disse Linier, som afskæres indenfor Arealets Omkreds, ere betegnede ved henholdsvis a_0 , a_1 , $a_2 \dots a_8$, medens Afstanden mellem dem er kaldt m .

Arealet er da ifølge „Simpsons Formel“

$$A = \frac{m}{3} (a_0 + 4a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 2a_4 + 4a_5 + 2a_6 + 4a_7 + a_8). \quad (2)$$

Er ingen Del af Arealets Omkreds retliniet, blive a_0 og a_8 begge 0.

Har Omkredsen skarpe Knæk eller stærke Krømninger, foretrækker man for Nøjagtighedens Skyld at dele Arealet i flere andre ved parallelle Linier paa disse Steder og derefter beregne hvert Areal for sig ved „Simpsons Formel“. m vil i saa Fald sandsynligvis have forskellige Værdier ved de forskellige Arealer, hvori det oprindelige Areal er delt.

Kaldes Tyngdepunktets X-Koordinat x , findes den af Ligningen

$$A \cdot x = \frac{m}{3} (a_0 \cdot 0 \cdot m + 4a_1 \cdot 1 \cdot m + 2a_2 \cdot 2 \cdot m + 4a_3 \cdot 3 \cdot m + 2a_4 \cdot 4 \cdot m + 4a_5 \cdot 5 \cdot m + 2a_6 \cdot 6 \cdot m + 4a_7 \cdot 7 \cdot m + a_8 \cdot 8 \cdot m)$$

at være

$$x = \frac{m (a_0 \cdot 0 + 4a_1 \cdot 1 + 2a_2 \cdot 2 + 4a_3 \cdot 3 + 2a_4 \cdot 4 + 4a_5 \cdot 5 + 2a_6 \cdot 6 + 4a_7 \cdot 7 + a_8 \cdot 8)}{a_0 + 4a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 2a_4 + 4a_5 + 2a_6 + 4a_7 + a_8} \quad (3)$$

medens Y-Koordinaten y findes af Ligningen

$$A \cdot y = \frac{m}{3} (a_0 \cdot y_0 + 4a_1 \cdot y_1 + 2a_2 \cdot y_2 + 4a_3 \cdot y_3 + 2a_4 \cdot y_4 + 4a_5 \cdot y_5 + 2a_6 \cdot y_6 + 4a_7 \cdot y_7 + a_8 \cdot y_8),$$

hvor $y_0, y_1, y_2 \dots$ ere Afstandene fra X-Aksen til Midtpunkterne af henholdsvis a_0, a_1, a_2 o. s. v., at være

$$y = \frac{a_0 y_0 + 4a_1 y_1 + 2a_2 y_2 + 4a_3 y_3 + 2a_4 y_4 + 4a_5 y_5 + 2a_6 y_6 + 4a_7 y_7 + a_8 y_8}{a_0 + 4a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 2a_4 + 4a_5 + 2a_6 + 4a_7 + a_8} \quad (4)$$

Ekspl. 19. Er $a_0 = 6,0$ mm, $a_1 = 21,8$ mm, $a_2 = 24,0$ mm, $a_3 = 25,0$ mm, $a_4 = 25,0$ mm, $a_5 = 25,4$ mm, $a_6 = 23,4$ mm, $a_7 = 16,8$ mm, $a_8 = 6,2$ mm, $m = 6$ mm, kan Beregningen skematisk udføres saaledes:

$a_0 = 6,0$	1	6,0	0	0,0	$y_0 = 19,4$	6,0	116,40
$a_1 = 21,8$	4	87,2	1	87,2	$y_1 = 18,9$	87,2	1648,08
$a_2 = 24,0$	2	48,0	2	96,0	$y_2 = 18,6$	48,0	892,80
$a_3 = 25,0$	4	100,0	3	300,0	$y_3 = 19,2$	100,0	1920,00
$a_4 = 25,0$	2	50,0	4	200,0	$y_4 = 19,4$	50,0	970,00
$a_5 = 25,4$	4	101,6	5	508,0	$y_5 = 19,8$	101,6	2011,68
$a_6 = 23,4$	2	46,8	6	280,8	$y_6 = 19,8$	46,8	926,64
$a_7 = 16,8$	4	67,2	7	470,4	$y_7 = 19,8$	67,2	1330,56
$a_8 = 6,2$	1	6,2	8	49,6	$y_8 = 20,2$	6,2	125,24
		513,0	1992,0			513,0	9941,40

$$x = m \cdot \frac{1992}{513} = 6 \cdot \frac{1992}{513} = 23,8 \text{ mm}; \quad y = \frac{9941,4}{513} = 19,4 \text{ mm};$$

$$A = \frac{m}{3} \cdot 513 = 1026 \text{ mm}^2.$$

Et noget nøjagtigere Resultat vilde selvfølgelig være opnaaet, ifald man havde behandlet Arealerne mellem a_0 og a_1 samt mellem a_7 og a_8 hvert for sig efter „Simpsons Formel“ ved her at dele m i f. Eks. seks ligestore Dele.

2. *Understøtningspunkter og disses Modstande.*

Naar et System af givne Kræfter ikke er i Ligevægt, vil en Bevægelse af Systemet finde Sted, hvis der ikke ydes tilstrækkelig Modstand herimod i eet eller flere Punkter. Disse Punkter, der kaldes Understøtningspunkter, kunne enten være simple Understøtningspunkter, Omdrejningspunkter eller Indspændinger. De Modstande eller, som de ogsaa kaldes, Reaktioner, som Understøtningspunkterne yde, ere selv Kræfter.

De simple Understøtningspunkter kunne kun yde Modstand mod Tryk og kun i een bestemt Retning, nemlig vinkelret paa den understøttende Flade, medens Omdrejningspunkter kunne gøre Modstand i alle Retninger saavel mod Tryk som mod Træk. Indspændinger kunne yde Modstand i alle Retninger og tillige modsætte sig en Drejning af Systemet.

Er der eet Understøtningspunkt, vil Betingelsen for Ligevægt være, at Resultanten af de givne Kræfter gaar gennem dette Punkt. Det kan være et simpelt Understøtningspunkt, naar Resultantens Linie virker vinkelret ind imod den understøttende Flade, men ellers maa det være et Omdrejningspunkt. Gaar Resultanten ikke gennem Understøtningspunktet, vil Modstanden vel være lige saa stor som Resultanten af Kræfterne og modsat denne, men den vil virke i en med Resultanten parallel Linie, hvorved Resultant og Modstand komme til at danne et Kraftpar, hvorfor Understøtningen maa være en Indspænding.

Har Konstruktionen to Understøtningspunkter, kunne disse enten være simple Understøtningspunkter eller

det ene af dem kan være et Omdrejningspunkt eller en Indspænding, eller de kunne begge være Omdrejningspunkter eller Indspændinger. Betingelsen for Ligevægt vil i de tre første Tilfælde være, at de to Modstande og Resultanten af de givne Kræfter skære hverandre i eet Punkt, og derved kunne Modstandene bestemmes. Denne Betingelse vil altid være opfyldt, naar begge Understøtningspunkter ere Omdrejningspunkter, Indspændinger, eller Kombination af disse 2 Slags Understøtninger, men man vil i dette Tilfælde ikke kunne vide noget om Retningen for de Modstande, som de yde, da de begge kunne gøre Modstand i alle mulige Retninger. Blandt andet bør af denne Grund, naar der haves flere Understøtningspunkter, kun eet af dem være et Omdrejningspunkt og de andre simple Understøtningspunkter. Indspændinger anvendes sædvanlig kun, naar der kun anvendes een Understøtning.

Ekspl. 20. En Obelisk (Fig. 36) af Vægt P_1 skal ved Drejning om A rejses paa sin Sokkel ved Anvendelse af Kraften P_2 i Obeliskens Top, idet Glidning forhindres ved Hjælp af en Kraft P_3 i A . P_1 's og P_3 's Størrelser samt P_2 's Retning ere bekendte, medens P_2 's Størrelse og P_3 's Retning skulle findes.

Kræfterne P_1 , gennem Obeliskens Tyngdepunkt T , og P_2 skære hinanden i B , og Reaktionen fra Understøtningen A maa saaledes virke efter AB . Paa Fig. 36^b angiver Trekanten $o12$, hvis Sider ere parallele med henholdsvis P_1 , P_2 og AB , Ligevægten mellem de to nævnte Kræfter og Reaktionen. Den sidste $\overline{20}$ er derpaa opløst i to Komposanter, den ene lodret og den anden af Størrelse P_3 . Cirkelbuen med Radius $\overline{o3} = P_3$ skærer den lodrette Linie gennem 2 i Punkterne 3 og $3'$, og man faar saaledes to Løsninger. Resultatet bliver, at man, foruden gennem C at virke med et Træk P_2 af Størrelse og

Retning $\overline{12}$, tillige maa virke gennem A enten med en Kraft P_3 af Størrelse og Retning $\overline{30}$ eller med P'_3 , hvis Størrelse og Retning er $\overline{3'0}$. Fundamentet modtager i begge Tilfælde et lodret Tryk, hvis Størrelse er henholdsvis $\overline{32}$ og $\overline{3'2}$, og det maa altsaa kunne yde en Modstand lodret opad af samme Størrelse.

Ekspl. 21. En Svingkran, som vist paa Fig. 37, er støttet i Sporlejet A og ved Halslejet B . Kranens Egenvægt er P_1 og Byrden P_2 . Modstandene i A og B skulle findes.

Det vil være nødvendigt først at kende Beliggenheden af Resultanten af P_1 og P_2 ; denne er funden paa sædvanlig Maade ved Kraftpolygon og Stangpolygon og er i Beliggenhed angiven ved P_3 , medens dens Størrelse er $\overline{02}$. Da Modstanden P_4 gennem B kun kan være vandret, maa Modstanden P_5 gennem A virke i Linien AC . Ligevægten mellem P_3 og disse to Modstande er angiven ved $\triangle 024$, hvor $\overline{24}$ og $\overline{40}$ angive Størrelse og Retning af henholdsvis P_4 og P_5 . P_5 ($\overline{40}$) er atter opløst i Komposanterne P_6 ($\overline{46}$) og P_7 ($\overline{60}$), hvoraf ses, at Fundamentet, foruden i A at optage den samlede Vægt af Kran og Byrde, tillige maa kunne hindre, at Kraftparret P_3, P_6 vælter Kranen. (Modstanden mod Væltning er netop udtrykt ved Kraftparret P_4, P_7 , som er lige stort med, men modsat P_3, P_6).

Ekspl. 22. Fig. 38 viser en Svingkran, som bestaar af en faststaaende Stamme og en herom drejelig Del, der ved A er ophængt paa en Tap, medens den ved B gennem en konisk Rulle støtter sig til den nederste Del af Stammen, der er tildannet som en Keglestub. Vægten af den bevægelige Del af Kranen er P_1 og Byrden er P_2 . Modstandene ønskes bestemte.

P_1 og P_2 ere sammensatte til Resultanten P_3 , der skal holde Ligevægt med Modstandene P_4 gennem A og

P_5 gennem B . Tages der ikke Hensyn til Gnidningsmodstanden, vil P_5 virke vinkelret paa den Frembringer, efter hvilken Keglefladerne berøre hinanden, og P_4 's Beliggenhed vil da være bestemt derved, at den skal gaa gennem A og Skæringspunktet C mellem P_3 og P_5 .

P_4 's og P_5 's Størrelser ere fundne paa Fig. 38^b som $\overline{24}$ og $\overline{40}$. Fremdeles er P_4 ($\overline{24}$) opløst i P_8 ($\overline{28}$) og P_9 ($\overline{84}$), medens P_5 ($\overline{40}$) er opløst i P_6 ($\overline{46}$) og P_7 ($\overline{60}$). Den samlede Vægt af den bevægelige Del af Kranen og af Byrden optages altsaa dels gennem Tappen ved A og dels af Keglefladen i B , hvorhos der ved Kranstammens Befæstelse maa kunne tilvejebringes et Kraftpar i det mindste af Størrelse P_7, P_8 , for at Kranen ikke skal vælte.

Lader man Frembringerne i Keglefladen danne en meget stor Vinkel med Stammens Midtlinie (Aksen), vil det Tilfælde kunne indtræde, at Punktet C kommer til at ligge højere end A . I saa Fald vil P_4 virke fra højre Side nedad mod venstre, og dens Komposant P_9 's Retning bliver lodret nedad. Kranens bevægelige Del vil da have Tilbøjelighed til at løfte sig af Tappen ved A , hvilket maa forhindres ved Taplejets Konstruktion. Det samme vil kunne indtræffe ved en Forøgelse af Byrden, hvorfor man ogsaa af denne Grund altid bør undersøge Forholdene med den størst mulige Byrde for Øje.

3. Bjælker og Aksler.

Bjælker ere i Almindelighed prismatiske Legemer, der forekomme saavel i Bygnings- som Maskinkonstruktioner, medens Akslerne i Regelen ere Omdrejningslegemer, og de anvendes kun i Maskinkonstruktioner. Saavel Akslerne som Bjælkerne maa understøttes mindst i to Punkter, medens de iøvrigt paavirkes af en eller flere Kræfter. Ligge Understøtningspunkterne nær ved hinanden i Bjælkens ene Ende, medens Bjælken kun paavirkes af ydre Kræfter

paa Stykket mellem Bjælkens anden Ende, den saakaldte frie Ende, og det Understøtningspunkt, som er denne nærmest, og er Bjælken iøvrigt fastgjort i sin Stilling, saaledes at den ikke kan bevæges i nogen Retning, siges den at være indspændt i den ene Ende (se Side 39). Paa samme Maade kunne Aksler ogsaa være understøttede, men her kan der selvfølgelig ikke være Tale om nogen Befæstelse, da det netop er Meningen, at Akslerne skulle kunne dreje sig frit, og Betegnelsen Indspænding bruges derfor ikke for Akslers Vedkommende.

Som allerede tidligere omtalt, vil det være nødvendigt, at disse Understøtningspunkter yde Modstande eller Reaktionen af bestemt Størrelse og Retning, da ellers Bjælken (Akslen), tilligemed de paa den virkende ydre Kræfter, vil bevæge sig. Størrelsen af Reaktionen findes overensstemmende med de i det foregaaende anførte Regler. Tænker man sig nemlig disse Reaktionen anbragte i Understøtningspunkterne som ydre Kræfter, hver med sin bestemte Størrelse og Retning, skulle de være i Ligevægt med de givne ydre Kræfter \therefore de 3 Ligevægtsligninger (se Side 26) skulle være tilfredsstillende, og man kan saaledes ganske se bort fra Understøtningerne selv, medens man beskæftiger sig med Bjælkens (Akslens) Beregning. I Styrkelæren vil det blive paavist, hvorledes man kan finde Konstruktionsdeles Tværnsnitsdimensioner, naar de paavirkes paa visse simple Maader, nemlig enten efter Konstruktionsdelens geometriske Akse (den Linie, som forbinder Tværnsnittenes Tyngdepunkter), hvorved Paavirkningerne ville søge at forlænge eller forkorte Legemet, eller tværs paa Legemets Akse, hvorved de dels ville søge at forskyde umiddelbart opad hinanden liggende Tværnsnit i Forhold til hinanden, dels søge at give Legemet en fra den oprindelige afvigende Form f. Eks. give et lige Legeme en krum Form, i hvilket Tilfælde man siger, at Legemet bøjes.

I indeværende Afsnit skal det nu blive paavist, hvorledes man altid kan reducere Virkningen af hvilkesomhelst paa Bjælker og Aksler virkende ydre Kræfter til en eller flere af de ovenfor nævnte simple Paavirkninger.*)

a) *Konstruktionsdelen paavirkes af Kræfter, som ligge i Plan indbyrdes og med dens Akse.*

Fig. 39 viser en vandret liggende Bjælke, som er understøttet i Punkterne A og B , hvis indbyrdes Afstand er l , medens den paavirkes af de lodrette Kræfter P_1 , P_2 og P_3 . Disse Angrebspunkter C , D og E ligge i Afstande fra A af henholdsvis l_1 , l_2 og l_3 .

Reaktionerne i A og B betegnes ved henholdsvis R_1 og R_2 , og deres Størrelse kan findes ved Opstilling af Ligevægtsbetingelserne. Den første af disse falder bort, da samtlige givne Kræfter have deres vandrette Komposanter lig med Nul; derimod vil den anden af dem, der udsiger, at Summen af de lodrette Komposanter skal være Nul, give Ligningen

$$R_1 + R_2 + P_1 + P_2 + P_3 = 0. \quad (5)$$

Ved den tredje Ligevægtsligning, som angiver, at Summen af Kræfternes Momenter med Hensyn til et hvilket som helst Punkt skal være Nul, faar man, naar A vælges til Momentpunkt,

$$R_2 l + P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3 = 0,$$

hvoraf
$$R_2 = -\frac{P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3}{l}. \quad (6)$$

Ved Indsættelse af Værdien for R_2 i Ligning (5) findes R_1 .

R_1 kan ogsaa findes direkte ved Momentligningen for B som Momentpunkt, og Ligning (5) kan i saa Fald bruges

*) Anm.: I Tabel X er der angivet, hvilke Belastninger der i forskellige Tilfælde kunne antages at virke paa Bjælker, som indgaa i Etageadskillelser.

til Prøve paa Regningens Rigtighed. Tilføjes nu R_1 og R_2 som ydre Kræfter, er hele Systemet af Kræfter i Ligevægt. Af Hensyn til Bestemmelsen af Konstruktionsdelens Tværsnitsdimensioner kan det, saaledes som det nærmere vil ses af Styrkelæren, være ønskeligt for et hvilket som helst Tværnit at kende dels Summen af samtlige til den ene Side af Tværnittet virkende Kræfter — denne Sum kaldes Forskydningen —, dels Summen af Momenterne af alle de samme Kræfter med Hensyn til et Punkt (Tyngdepunktet) i vedkommende Tværnit — denne Sum kaldes Bøjningsmomentet med Hensyn til Tværnittet.

At Virkningen af alle de Kræfter, som ligge til den ene Side for et Tværnit, netop vil reducere sig til en Sum af Kræfter gennem Tværnittet og en Sum af Kræfternes Momenter med Hensyn til et Punkt i dette Tværnit, indses saaledes: Betragter man f. Eks. et Tværnit G beliggende mellem D og E (Fig. 39), kan man, uden at der indtræder nogen Forstyrrelse i Ligevægten mellem de givne ydre Kræfter, i G tilføje to Kræfter af Størrelse R_1 , den ene virkende lodret opad, den anden lodret nedad. Den sidste af disse vil i Forbindelse med R_1 gennem A danne et Kraftpar R_1x , hvor x er G 's Afstand fra A . R_1 i A er saaledes erstattet af Momentet R_1x og R_1 gennem G . Paa samme Maade kan man indse, at P_1 kan erstattes af Momentet $P_1(x-l_1)$ og den enkelte Kraft P_1 gennem G og endelig P_2 af Momentet $P_2(x-l_2)$ og Kraften P_2 gennem G . Den samlede Virkning af R_1 , P_1 og P_2 (alle de til venstre for G virkende Kræfter) er altsaa: 1) Summen af de tre Momenter, Bøjningsmomentet med Hensyn til G , og 2) Summen af de tre Kræfter, Forskydningen i G . Selvfølgelig maa saavel de enkelte Momenter som de enkelte Kræfter regnes med Fortegn.

Hvad enten man tager Summen af de til venstre eller af de til højre for det betragtede Tværnit virkende

Kræfter, vil man faa samme numeriske Værdi for Forskydningen, men Fortegnene ville i de to Tilfælde blive modsatte, og disse to tæt opad hinanden i modsat Retning virkende Kræfter ville søge at forskyde de to Nabotværsnit, hvorpaa de virke, i Forhold til hinanden, efter hvilken Bestræbelse Paavirkningen netop har sit Navn.

For Bøjningsmomentets Vedkommende vil man ligeledes faa samme numeriske Værdi, enten man finder det ved Summen af Momenterne af Kræfterne til venstre for Tværsnittet eller til højre derfor, men det vil derimod faa modsat Fortegn i de to Tilfælde \circ : Bøjningsmomentet bestemt ved Kræfterne til venstre vil angive en Drejning med Uhrets Visere (se Fig. 39), medens Bøjningsmomentet fundet ved Kræfterne til højre angiver en Drejning mod Uhrets Visere. Kræfterne til venstre ville altsaa søge at dreje den venstre Ende af Bjælken opad og Kræfterne til højre at dreje den højre Ende opad; disse Drejninger skulle hindres af Sammenhængskraften i Legemets Materiale. Imidlertid ville disse Bestræbelser til Drejning i modsat Retning bevirke en Bøjning af Legemet, hvorfor Momentssummerne kaldes Bøjningsmomenter.

Ved Bestemmelsen af Konstruktionsdeles Tværsnitsdimensioner benytter man, som det vil ses af Styrkelæren, kun den numeriske Værdi af Forskydninger og Bøjningsmomenter.

I Henhold til det foregaaende vil man ved Betragtning af Fig. 39 faa følgende Værdier for Forskydningen i Bjælkens forskellige Tværsnit:

Forskydningen mellem A og C er $F_1 = R_1$

— — — C og D er $F_2 = R_1 + P_1$

— — — D og E er $F_3 = R_1 + P_1 + P_2$

— — — E og B er $F_4 = R_1 + P_1 + P_2 + P_3 = -R_2$

hvor man har fundet Forskydningerne som Summen af de til venstre for vedkommende Tværnsnit virkende Kræfter.

Søges Bøjningsmomenterne for de samme Kræfter, faar man efterhaanden følgende Værdier for M_b , nemlig:

I A , hvor $x=0$, er $M_b=0$;

i Afstanden x fra A , naar $x < l_1$ (mellem A og C) er

$$M_b = R_1 x;$$

i C , hvor $x=l_1$, er $M_b = R_1 l_1;$

i Afstanden x fra A , naar $l_1 < x < l_2$ (mellem C og D),
 er $M_b = R_1 x + P_1 (x - l_1),$

i D , hvor $x=l_2$, er $M_b = R_1 l_2 + P_1 (l_2 - l_1);$

i Afstanden x fra A , naar $l_2 < x < l_3$ (mellem D og E),
 er $M_b = R_1 x + P_1 (x - l_1) + P_2 (x - l_2);$

i E , hvor $x=l_3$, er $M_b = R_1 l_3 + P_1 (l_3 - l_1) +$
 $P_2 (l_3 - l_2);$

i Afstanden x fra A , naar $l_3 < x < l$ (mellem E og B),
 er $M_b = R_1 x + P_1 (x - l_1) + P_2 (x - l_2)$
 $+ P_3 (x - l_3) = R_2 (l - x);$

i B , hvor $x=l$, er $M_b=0$.

Ved Benyttelsen af disse for Forskydningerne og Bøjningsmomenterne fundne Udtryk maa man naturligvis indsætte Kræfterne med Fortegn.

Foruden ved Beregning kunne Forskydninger og Bøjningsmomenter ogsaa godt bestemmes ad grafisk Vej, men forinden den grafiske Fremgangsmaade angives, skal det bemærkes, at man, for lettere at kunne sammenligne flere Bøjningsmomenter, ved deres grafiske Fremstilling omdanner dem saaledes, at de alle faa en fælles Faktor.

Man siger i saa Fald, at man reducerer dem til denne fælles Faktor som Basis, og de andre Faktorer blive da Udtryk for Bøjningsmomenternes Størrelse. De reduceres saaledes enten til samme Arm eller til samme Kraft som Basis. De nye Momenter kaldes reducerede Momenter.

Indgaar saaledes Kraften P_1 (Fig. 40^b) i en Kraftpolygon, hvis Pol er p , saa at de Kraften omsluttende Polstraaler ere \overline{op} og \overline{pI} , og de med disse parallelle Stangpolygonsider (Fig. 40^a) $E I$ og $I II$, vil Kraftens \overline{OI} 's Moment med Hensyn til et vilkaarligt Punkt D kunne paavises at være Produktet af Polafstanden a og det Stykke, som Stangpolygonsiderne eller deres Forlængelser afskære paa en Linie, der trækkes gennem D parallel med Kraften P_1 . Dette Stykke er paa Figuren betegnet med BC , og Kraftens P_1 's Moment M med Hensyn til D skal altsaa være

$$M = a \cdot BC.$$

$$\text{Da } \triangle IBC \infty \triangle OIp,$$

$$\text{har man } \frac{\overline{OI}}{a} = \frac{BC}{d}, \text{ hvoraf } \overline{OI} \cdot d = a \cdot BC.$$

$\overline{OI} \cdot d$ er P_1 's Moment med Hensyn til D , og dette Moment kan altsaa udtrykkes ved $a \cdot BC$.

Før den paa Fig. 39 viste Bjælkes Vedkommende er den grafiske Fremgangsmaade til Bestemmelse af Bøjningsmomenter og Forskydninger nærmere angiven paa Fig. 41.

Kræfterne P_1 , P_2 og P_3 ere afsatte efter hverandre i den for dem angivne Retning som $\overline{O1}$, $\overline{12}$ og $\overline{23}$. Dernæst er valgt en Pol p . Beliggenheden af den kan i Princippet være ligegyldig, men af praktiske Hensyn maa Polafstanden være udtrykt ved en Talstørrelse, som det er let at multiplicere med, altsaa, hvis ikke Enheden kan bruges, f. Eks. ved 10 eller et andet simpelt Tal, saasom en Potens eller et Multiplum af 10.

Efterat Polstraalerne ere tegnede, dannes Stangpolygonen paa sædvanlig Maade ved Linier parallelle med Polstraalerne, nemlig $\overline{VI} \neq \overline{Op}$, $\overline{II} \neq \overline{Ip}$, $\overline{II III} \neq \overline{2p}$ og $\overline{III IV} \neq \overline{3p}$. Tilsidst tegnes \overline{IVV} , den saakaldte Slutlinie, og parallel med den $\overline{4p}$. Reaktionerne R_2 og R_1 ville da faa henholdsvis Værdierne $\overline{34}$ og $\overline{40}$.

Forskydningen i de forskellige Tværsnit (se Fig. 41^c) er grafisk angiven ved Ordinaterne i Arealet $abcdefgik$. De have følgende Værdier:

- i Arealet $abcm$ er $F_1 = ab = \overline{40} = R_1$
- - $mden$ - $F_2 = md = \overline{41} = R_1 + P_1$
- - $nfgo$ - $F_3 = nf = \overline{42} = R_1 + P_1 + P_2$
- - $ohik$ - $F_4 = ki = \overline{43} = R_1 + P_1 + P_2 + P_3$.

* Bøjningsmomenterne findes angivne paa Fig. 41^a som Længden af de Linier, parallelle med de ydre Kræfter, der afskæres indenfor Omkredsen af Stangpolygonen $I II III IV V$, for Polafstanden a som Enhed eller Basis. Det af Stangpolygonen begrænsede Areal kaldes derfor ogsaa Momentfladen. For at faa Størrelsen af Bøjningsmomenterne for de forskellige Tværsnit, maa man altsaa i dette Eksempel multiplicere Ordinaterne i Momentfladen med Polafstanden a . Er Polafstanden afsat efter Kraftmaalestocken, maa Ordinaterne i Momentfladen maales paa Længdemaalestocken eller omvendt.

Betragter man f. Eks. Tværsnittet i G , vil Bøjningsmomentet med Hensyn til dettes Tyngdepunkt, naar Omdrejningsretningen med Uhret regnes for positiv, blive $M_b = R_1 \cdot AG - P_1 \cdot CG$. Da $\triangle Vsr$ paa Fig. 41^a er ligedannet med $\triangle op4$ paa Fig. 41^b, ville Højderne i disse Trekanter være proportionale med Grundlinierne, eller

$$\frac{sr}{AG} = \frac{\overline{04}}{a}, \text{ hvoraf } AG \cdot \overline{04} = a \cdot sr.$$

Fremdeles er $\triangle Iqr \infty \triangle O1p$, altsaa

$$\frac{qr}{CG} = \frac{\overline{O1}}{a}, \text{ hvoraf } CG \cdot \overline{O1} = a \cdot qr.$$

Herved faar man

$$M_b = R_1 \cdot AG - P_1 \cdot CG = a \cdot sr - a \cdot qr = a(sr - qr) = a \cdot sq$$

∴ Bøjningsmomentet for et Tværsnit i Bjælken er Produktet af Polafstanden og det Stykke, som indenfor Momentfladen (Stangpolygonen) afskæres paa en Linie, der gennem vedkommende Tværsnit tegnes parallel med Kraftretningen.

I Stedet for ved Bestemmelsen af Bøjningsmomenterne at maale Polafstanden og Ordinerterne i Momentfladen paa henholdsvis Kraftmaalestocken og Længdemaalestocken eller omvendt, kan man, om man vil, konstruere en særlig Momentmaalestock, paa hvilken Bøjningsmomenterne kunne maales direkte. Enheden for denne Maalestock vil da blive Enheden for Længdemaalestocken eller for Kraftmaalestocken divideret med Antallet af Enheder i Polafstanden, alt eftersom denne sidste maales paa Kraftmaalestocken eller Længdemaalestocken. Benævnelsen for Momentmaalestockens Enheder bliver Produktet af Benævnelserne for de to andre Maalestockes Enheder.

Ved den paa Fig. 41 viste grafiske Metode til Bestemmelse af Bøjningsmomenterne blev det angivet, at Polen p kunde vælges vilkaarlig, naar den blot laa i en simpel Afstand fra den lodrette Linie $\overline{O\beta}$. Af p 's Beliggenhed vil imidlertid Stangpolygonens Form afhænge, idet dens enkelte Sider ere parallelle hver med en Polstraale. Slutlinien \overline{IVV} , der er parallel med \overline{Ap} , bliver saaledes paa Figuren skraatliggende. Det kan imidlertid i nogle Tilfælde være fordelagtigt, at denne Slutlinie bliver vandret, og dette vilde let kunne opnaas paa Fig. 41, naar

man flyttede Polen p parallelt med $\overline{03}$, indtil den kom til at ligge i den paa $\overline{03}$ vinkelrette Linie gennem A . Polstraalen \overline{Ap} vilde da blive vandret, og følgelig Slutlinien i den til den nye Pol svarende Stangpolygon ligeledes vandret.

Ved Bestemmelsen af Bjælkens eller Akslens Tværnsnitdimensioner vil det navnlig være Bøjningsmomenterne, som faa Betydning, og det er derfor en stor Fordel ved den grafiske Metode, at Tegningen paa en anskuelig Maade angiver, hvorledes Bøjningsmomenterne variere i Størrelse. Det fremgaar derved straks af Tegningen, hvilket Bøjningsmoment der er størst, og dette maa lægges til Grund for Bestemmelsen af Bjælkens eller Akslens Dimensioner, naar den skal være prismatisk.

Af saavel Fig. 41 som Fig. 45 fremgaar det, at Bøjningsmomentet er størst med Hensyn til det Tværnsnit, hvor Forskydningen skifter Fortegn.

I de i de nævnte Figurer behandlede Tilfælde er Bjælken understøttet i dens to Endepunkter, men Regelen vil ogsaa ses at gælde for en Bjælke, der har den ene Ende fri, og er indspændt i den anden Ende, naar man blot betragter Indspændingen som fremkommen ved en Understøtning i to Punkter.

Naar man ønsker ad Beregningens Vej at finde det største Bøjningsmoment, og man ikke forud grafisk har bestemt Beliggenheden af det Tværnsnit, med Hensyn til hvilket Bøjningsmomentet er størst, behøver man altsaa blot at opsøge det Tværnsnit, hvor Forskydningen skifter Fortegn, og derefter bestemme Bøjningsmomentet med Hensyn dertil. Naar en Aksel eller Bjælke paavirkes af nogle Kræfter lodret nedad og af andre lodret opad, kan det ske, at Forskydningen skifter Fortegn i flere Tværnsnit. I saa Fald maa man beregne Bøjningsmomenterne med Hensyn til alle disse Tværnsnit, for at komme til Klarhed

over, hvilket af dem, der er størst. Hvor der i det følgende intet særligt bemærkes, forudsættes Understøtningspunkterne at være simple Understøtningspunkter.

Ekspl. 23. En vandret liggende Bjælke AB belastes i de paa Fig. 42 viste Punkter C , D , E og G af Kræfter henholdsvis paa 2000 kg, 800 kg, 1000 kg og 2400 kg, alle virkende lodret nedad, idet $AC = 1$ m, $AD = 1,5$ m, $AE = 2$ m, $AG = 3$ m og $AB = 4$ m.

Man skal bestemme Reaktionerne i A og B samt Bøjningsmomenterne og Forskydningerne i C , D , E og G .

Regnes Retningen lodret nedad for positiv, faar man

$$A = - \frac{2000 \cdot 3 + 800 \cdot 2,5 + 1000 \cdot 2 + 2400 \cdot 1}{4} = - 3100 \text{ kg.}$$

$$B = - 2000 - 800 - 1000 - 2400 + 3100 = - 3100 \text{ kg.}$$

Forskydningen mellem A og C er $F_1 = - 3100$ kg.

— — C og D er $F_2 = - 1100$ kg.

— — D og E er $F_3 = - 300$ kg.

— — E og G er $F_4 = + 700$ kg.

— — G og B er $F_5 = + 3100$ kg.

Forskydningen skifter altsaa Fortegn i Tværsnit E .

Bøjningsmomentet med Hensyn til E vil, naar Afstandene indføres i mm, og naar Omdrejningsretningen med Uhret regnes for positiv, blive

$$M_b = 3100 \cdot 2000 - 2000 \cdot 1000 - 800 \cdot 500 = 3800000 \text{ kgmm.}$$

Bøjningsmomenterne med Hensyn til de andre Punkter faa nedenstaaende Værdier:

Med Hensyn til C bliver $M_b = 3100000$ kgmm.

- - - D — $M_b = 3650000$ kgmm.

- - - G — $M_b = 3100000$ kgmm.

Ekspl. 24. Bjælken AB af Længde l mellem Understøtningspunkterne paavirkes af en Kraft P i Midten. Det største Bøjningsmoment og Forskydningerne skulle findes (se Fig. 43^a).

$$R_1 = R_2 = -\frac{1}{2} P.$$

Forskydningen er paa ethvert Punkt af saavel Stykket AC som BC lig med $\frac{1}{2} P$.

Bøjningsmomentet med Hensyn til et vilkaarligt Punkt i Afstanden x fra A bliver, naar $x < \frac{1}{2} l$, $M_b = \frac{1}{2} P x$, og naar $x > \frac{1}{2} l$, $M_b = \frac{1}{2} P x - P(x - \frac{1}{2} l) = \frac{1}{2} P(l - x)$. For $x = \frac{1}{2} l$ faar M_b sin største Værdi, nemlig

$$M_b = \frac{1}{4} P l. \quad (7)$$

Bjælkens farligste Tværsnit er altsaa i Midten.

Med Hensyn til Endepunkterne af Bjælkens Akse ere Bøjningsmomenterne Nul.

Fig. 43^a, ^b og ^c vise den grafiske Løsning.

Ekspl. 25. En Bjælke AB har Længden l . Den er understøttet i Endepunkterne og paavirket af en over hele Længden jævnfordelt Belastning P (se Fig. 44).

Find Bøjningsmomenter og Forskydninger.

$$R_1 = R_2 = -\frac{1}{2} P.$$

Forskydningen vil i A og B være $\frac{1}{2} P$ og derfra aftage jævnt henimod Midten, hvor den er Nul. Bøjningsmomentet for et Tværsnit C i Afstanden x fra A er

$$M_b = \frac{1}{2} P x - \frac{P x}{l} \cdot \frac{1}{2} x, \text{ idet Belastningen paa Stykket } AC$$

er $\frac{P x}{l}$, som maa tænkes virkende i Midten af Stykket,

altsaa paa Armen $\frac{1}{2} x$.

$$M_b = \frac{1}{2} P x - \frac{P x^2}{2l} = \frac{P x (l - x)}{2l},$$

som vokser med x indtil $x = \frac{1}{2}l$, hvor M_b bliver størst, nemlig

$$M_b = \frac{1}{8} P l. \quad (8)$$

Bjælkens farligste Tværsnit er i Midten. Med Hensyn til Endepunkterne af Bjælkens Akse er $M_b = 0$.

Den grafiske Bestemmelse af saavel Bøjningsmomenter som Forskydninger er vist paa Fig. 45. Linien AB deles i et vilkaarligt Antal lige store Dele (her otte). Gennem Delingspunkterne er der tegnet lodrette Linier, som dele Belastningen, der er angiven ved Rektanglet $ABDE$, i otte lige store Rektangler, som altsaa repræsenterer Belastningerne paa AB 's Stykker. I disse Rektanglers Tyngdepunkter tænkes Belastningerne virkende som ligestore Kræfter lodret nedad. Disse Kræfter ere paa Fig. 45^a betegnede ved $P_1, P_2, P_3, \dots P_8$. Af Kræfterne dannes som sædvanlig en Kraftpolygon (Fig. 45^b) og derefter den dertil svarende Stangpolygon $I II III \dots IX X$. Bjælkens farligste Tværsnit viser sig at være i Midten af den, og Bøjningsmomentet her bliver altsaa Ordinaten i Midten af Momentfladen multipliceret med Polafstanden. Jo flere Dele man deler AB i, desto mere vil den brudte Linie $X I II III \dots VIII IX$ nærme sig til at blive en Parabel, og desto nøjagtigere blive Bøjningsmomenterne bestemte.

Det Areal, hvis Ordinator angive Forskydningerne (Fig. 45^c), er betegnet ved $abcd$. Havde Bjælken været belastet af de otte enkelte Vægte i Stedet for af en jævnfordelt Belastning, vilde Arealet være blevet begrænset af den brudte Linie $ae fgh \dots rstud$ i Stedet for af Linien ad . Det er paa Figuren vist skraveret.

Ekspl. 26. En Bjælkes Understøtningspunkter A og B (se Fig. 46) ligge i Afstanden l fra hinanden I et Punkt C beliggende mellem A og B , saaledes at $AC = l_1$, paa-virkes Bjælken af Kraften P_1 lodret nedad og i Punktet

D , til højre for A og B i Afstanden $AD = l_2$, af en ligeledes lodret nedad virkende Kraft P_2 . Man skal bestemme Bøjningsmomenterne samt Forskydningen paa det Sted, hvor Bøjningsmomentet er størst.

Opgaven er løst grafisk. Paa Fig. 46^b er P_1 afsat som $\overline{0I}$ og P_2 som $\overline{I2}$. $\overline{IV I} \neq \overline{0p}$, $\overline{I II} \neq \overline{Ip}$, $\overline{II III} \neq \overline{2p}$. Slutlinien er paa Fig. 46^a $\overline{III IV}$, og parallel med den er tegnet $\overline{3p}$ paa Fig. 46^b. Reaktionen i B og A blive henholdsvis $P_3 = \overline{23}$ og $P_4 = \overline{30}$.

Det farligste Tværsnit bliver i C ; Forskydningen har der Størrelsen $\overline{3I}$. For Tværsnittet E er Bøjningsmomentet 0.

Ekspl. 27. Bjælken AB er 5 m lang; den belastes dels af 600 kg pr. løb. m, dels af 3000 kg, 1000 kg og 1600 kg i Afstande fra A af henholdsvis 1 m, 1,5 m og 3,5 m. Bøjningsmomentet for det farligste Tværsnit skal bestemmes (Fig. 47).

Antages den positive Retning at være lodret nedad, vil den jævnfordelte Belastning i A give en Reaktion af -1500 kg og de enkelte Vægte en Reaktion af -3580 kg. Reaktionen i A bliver saaledes i alt -5080 kg og Reaktionen i B -3520 kg. Forskydningen vil, naar den bestemmes ved Summen af Kræfterne til venstre for vedkommende Tværsnit, i C , D og E blive henholdsvis -1280 kg, -180 kg og $+2620$ kg. Den maa altsaa, da Belastningen mellem D og E er jævnfordelt, mellem disse Punkter først aftage negativt indtil Nul og derefter vokse positivt. Det Punkt af Bjælken, hvor Forskydningen er Nul, vil ligge i en Afstand x fra A , der er bestemt ved Ligningen

$$-5080 + 3000 + 1000 + 600x = 0,$$

hvoraf $x = 1,8$ m.

Bøjningsmomentet for dette Tværsnit bliver

$$M_b = - 3520 \cdot 3,2 + 1600 \cdot 1,7 + \frac{600 \cdot 3,2^2}{2}$$

$$= - 5472 \text{ kgm} = - 5472000 \text{ kgmm.}$$

Eksp. 28. En Bjælke er understøttet ved Enderne og belastes som angivet paa Fig. 48. Find det største Bøjningsmoment.

$$A \cdot 11,6 + 3000 \cdot 3 \cdot 10,1 + 4000 \cdot 6,8 + 3000 \cdot 5 \cdot 2,5 = 0.$$

$$A = - 13414 \text{ kg}, B = 13414 - 28000 = - 14586 \text{ kg.}$$

Forskydningen vil blive Nul for et Tværsnit i en Afstand y fra B , hvor y er mindre end 5 m.

y bestemmes af Ligningen

$$- 14586 + 3000 y = 0; y = 4,862 \text{ m} = BC.$$

Det største Bøjningsmoment faar man med Hensyn til C , og det er

$$M_b = - 14586 \cdot 4,862 + \frac{3000 \cdot 4,862 \cdot 4,862}{2}$$

$$= - 35458566 \text{ kgmm.}$$

Eksp. 29. En vandret liggende Bjælke af Længde l er indspændt i den ene Ende ved A , medens den anden Ende B er fri, og paavirkes af de lodrette Kræfter P_1 , P_2 , P_3 og P_4 , hvis Angrebepunkter ligge henholdsvis i Afstandene l_1 , l_2 , l_3 og l fra A . Bøjningsmomenterne bestemmes grafisk, og derefter beregnes det største Bøjningsmoment og Forskydningen for samme Tværsnit (Fig. 49).

Paa Fig. 49^b ere Kræfterne afsatte som $\overline{01}$, $\overline{12}$, $\overline{23}$ og $\overline{34}$ paa en lodret Linie. Til Pol er valgt p i en Linie gennem A vinkelret paa $\overline{04}$. Stangpolygonsiderne blive

parallele med de til Polen trukne Polstraaler. Bøjningsmomenterne ses her at vokse henimod Indspændingen, og det samme vil være Tilfældet med Forskydningen, som mellem P_4 og P_3 har Værdien P_4 , mellem P_3 og P_2 Værdien $P_4 + P_3$, mellem P_2 og P_1 Værdien $P_4 + P_3 + P_2$ samt mellem P_1 og Indspændingen, altsaa ogsaa i denne, Værdien $P_4 + P_3 + P_2 + P_1$.

Det største Bøjningsmoment M_b er Produktet af \sqrt{VI} og Polafstanden $\overline{p^4}$. Ved Beregning findes

$$M_b = P_4 l + P_3 l_3 + P_2 l_2 + P_1 l_1.$$

Ved Indspændingen maa Befæstelsen ske paa en saadan Maade, at den vil kunne modstaa et Bøjningsmoment, som er større end M_b .

Belastes Bjælken af en enkelt Kraft P i Endepunktet B , vil Bøjningsmomentet ifølge sidst anførte Ligning, naar i denne P_1 , P_2 og P_3 sættes lig Nul, blive

$$M_b = P l. \quad (9)$$

Forskydningen ved Indspændingen bliver i saa Fald P .

Ekspl. 30. En Bjælke er indspændt i den ene Ende og belastet af en over dens Længde jævndelt Byrde. Dette Tilfælde behandles grafisk ganske paa den samme Maade, som er anvendt paa Fig. 45, efter at man har delt Belastningen i et passende Antal lige store Dele, hvis Vægte tænkes virkende gennem de vedkommende Deles Tyngdepunkter.

Ligger Indspændingen A (Fig. 50) og den frie Ende B i en indbyrdes Afstand l , og er den jævndelte Belastning P , bliver Bøjningsmomentet med Hensyn til et Punkt C , der ligger i Afstanden x fra B , $M_b = \frac{Px}{l} \cdot \frac{1}{2} x = \frac{Px^2}{2l}$. Belastningen paa Stykket BC er nemlig $\frac{Px}{l}$, og den virker

paa en Arm $\frac{1}{2} x$. M_b vokser med x og faar den største Værdi ved Indspændingen, hvor

$$M_b = \frac{1}{2} P l. \quad (10)$$

Forskydningen i A har Værdien P .

Det største Bøjningsmoment (ved Indspændingen) bliver altsaa, naar Vægten er jævndelt, kun halvt saa stort som i det Tilfælde, hvor hele Vægten er ophængt i Bjælkens frie Ende. Forskydningen i Indspændingen faar derimod samme Værdi i begge Tilfælde.

Ekspl. 31. Tre Vægte A , B og C med indbyrdes uforanderlige Afstande bevæge sig fra den ene til den anden Ende af en vandret liggende Bjælke DE . Bjælkens farligste Tværsnit og Bøjningsmomentet for dette søges (Fig. 51).

Opgaven er løst grafisk paa den Maade, at Vægtene tænkes liggende stille, medens Bjælken bevæger sig under dem, men i modsat Retning af den, i hvilken Vægtene vilde bevæge sig. Under denne Forudsætning har man paa Fig. 51^a bestemt Momentfladerne for fem forskellige Stillinger, nemlig de to Yderstillinger og tre mellemliggende Stillinger. Disse fem Stillinger ere betegnede med Tallene fra 1 til 5 saaledes, at altid to tilsvarende Understøtninger ere mærkede med samme Tal, ligesom Slutlinien i Momentfladen for vedkommende Stilling og de dermed parallelle Polstraaler ogsaa ere mærkede med dette Tal. Man faar paa denne Maade et let Overblik over Størrelsen saavel af Reaktionen som af Bøjningsmomenter.

Ekspl. 32. En Trappevange, hvis Midtlinie paa Fig. 52 er betegnet med AB , har en Hældning af 45° mod en vandret Linie og paavirkes paa de paa Figuren angivne otte Steder af 150 kg paa hvert Sted. Linien $AC = 1785$ mm.

Vangen antages i B støttet mod et lodret Plan, saaledes at der af dette kun kan ydes en vandret Modstand, samt i A fastgjort til et vandret Plan paa en saadan Maade, at Glidning er forhindret. Paavirkningerne i Vangens forskellige Tværnsnit dels efter dens Længde og dels til Bøjning og Forskydning skulle bestemmes.

De otte ydre Kræfter ere betegnede med Tallene fra 1 til 8 og ere afsatte efter hverandre paa Fig. 52^b i en lodret Linie EF . Der er dernæst valgt en Pol p saaledes, at dens Afstande til EF og til en vandret Linie gennem F blive lige store. Som det vil fremgaa af det følgende, vælges p netop paa dette Sted af Hensyn til en simpel Fremstilling af Bøjningsmomenterne, idet de derved alle reduceres til samme Polafstand som Basis.

Efter at Straalerne til Polen p ere tegnede, har man ved Linier parallelle med Polstralerne konstrueret Stangpolygonen $I II \dots VII VIII$, hvis første og sidste Side skære hinanden i S , der saaledes er et Punkt af de otte givne Kræfters Resultant. Denne skærer den vandrette Modstandslinie gennem B i D , og Modstanden gennem A maa nu, for at der kan være Ligevægt mellem de givne Kræfter og de to Modstande, have Retningen AD . Denne Ligevægt mellem Kræfterne er paa Fig. 52^b angiven ved $\triangle EFQ$, hvor $9 \neq BD$ og $10 \neq AD$. For de ti Kræfter 1 til 10 har man derefter konstrueret en Stangpolygon med Q som Pol, og man har altsaa fraveget den i § 2 d (Side 17) anførte almindelige Regel. Man opnaar imidlertid ved at vælge en af Kraftpolygonens Vinkelspidser til Pol, at enhver af de enkelte Straaler ved dens Størrelse og Retning angiver Resultanten af de Kræfter, som i Kraftpolygonen ligge mellem Straalens Endepunkter. Saaledes er 17 Resultant af 8 og 9, 16 af 7, 8 og 9 o. s. v. Den Stangpolygon, som svarer til disse Polstraler, bliver derved en saakaldt Middelkraftlinie, og da enten

en Middeltryklinie eller en Middeltræklinie, eftersom de enkelte Sider i den udsættes for sammentrykkende eller strækkende Kræfter.

Middeltryklinien paa Fig. 52^a er betegnet med $A I' II'$. . . $VII' VIII' B$. Det øverste Stykke af Vangen indtil det Sted, hvor 8 angriber, paavirkes af 9, som paa Fig. 52^b atter er opløst i een Kraft efter Vangens Længderetning og een vinkelret derpaa. Det næste Stykke af Vangen mellem Angrebspunkterne for 7 og 8 paavirkes af 17, der ogsaa er opløst i Komposanter efter de samme Retninger. De øvrige Stykker af Vangen paavirkes af henholdsvis 16, 15, 14, 13, 12, 11 og 10, der ligeledes alle ere opløste i to Komposanter efter de nævnte Retninger. Komposanterne efter Vangens Retning virke til Sammentrykning af den, Komposanterne tværs paa den til Forskydning.

Vangen vil, foruden disse sammentrykkende og forskydende Paavirkninger, tillige være Genstand for bøjende Paavirkninger i dens forskellige Tværsnit. Betragtes f. Eks. Tværsnittet gennem s_8 , vil Bøjningsmomentet med Hensyn til dette Punkt være Summen af Momenterne af de to til højre for Tværsnittet virkende Kræfter med Hensyn til dette Punkt. Kræfterne ere den vandrette Kraft 9 og den lodrette 8. 9's Moment er for a (pG) som Polafstand $b_8 m_8$, fordi $\triangle b_8 N m_8 \infty \triangle Q p F$, og 8's Moment bliver for a (pH) som Polafstand $c_8 n_8$, idet $\triangle c_8 VIII n_8$ er ligedannet med den Trekant paa Fig. 52^b, som til Toppunkt har p og til Grundlinie 8. Disse Momenter virke til Drejning i modsatte Retninger, og det resulterende Bøjningsmoment bliver da Produktet af a og Størrelsen $b_8 m_8 - c_8 n_8$. Denne Differens er afsat paa Fig. 52^a som $n_8 g_8$, idet $c_8 g_8 = b_8 m_8$. For Punktet s_7 er Bøjningsmomentet $n_7 g_7$ og saaledes videre. Ordinaterne i det skraverede Areal ville multiplicerede med a give Bøjningsmomenterne for Vangens forskellige Tværsnit.

Det skraverede Areal's nederste Begrænsningslinie er, som omtalt, fremkommen ved at afsætte b_8m_8 , b_7m_7 . . . o. s. v. fra c_8 , c_7 o. s. v. lodret nedad. Man kunde lige saa godt have afsat dem lodret opad fra n_8 , n_7 o. s. v., og man vilde i saa Fald have faaet Bøjningsmoment-fladen begrænset foroven af den rette Linie AL , o: Bøjningsmomenterne ville for Vangen AB 's forskellige Tværsnit faa samme Værdier som Bøjningsmomenterne for de tilsvarende Tværsnit i en vandret liggende Bjælke af Længde AC , der er understøttet ved Enderne og paa-virket af de samme lodrette Kræfter som Vangen.

Ved en aldeles lignende Fremgangsmaade som ovenstaaendé kan man finde Paavirkningerne i en krum Bjælkes Tværsnit, naar den er understøttet i de to Endepunkter, og man kender Retningen af Reaktionen i et af disse Understøtningspunkter.

Ekspl. 33. En krum Kranstamme har den paa Fig. 53 angivne Form ABC . Den støttes ved A i et Sporleje og ved B i et Halsleje, medens der ved C er ophængt en Byrde 1 . Paavirkningerne i Kranstammens forskellige Tværsnit ønskes bestemte, idet man ikke tager Hensyn til dens Egenvægt.

Modstanden 2 gennem B maa være vandret, og Modstanden 3 vil til Kraftlinie have AD , fordi 1 , 2 og 3 skulle skære hverandre i eet Punkt. Ligevægten mellem disse tre Kræfter er angiven paa Fig. 53^b ved en Trekant, der er bestemt ved Størrelsen af 1 og Retningerne af 2 og 3 , idet $2 \neq BD$ og $3 \neq AD$. Paavirkningerne i de med a , b , c , d , e , f og g betegnede Punkter af Kranstammen ere fundne ved Fig. 53^a og ^b.

Med Hensyn til g er Bøjningsmomentet 0. Derimod virker der gennem g Kraften 1 , som er opløst efter Tangenten og Normalen til Kranstammen i g . Disse Kompo-

santer ere betegnede ved g_1 og g_2 . g_1 virker til Strækning, g_2 til Forskydning.

I f vil Kranstammen dels paavirkes af et Bøjningsmoment, hvis Størrelse er Ordinaten f_3 multipliceret med Polafstanden \bar{z} , dels af en enkelt Kraft 1 , som opløses efter Tangent og Normal til Kranstammen i Punkt f . Komposanten f_1 virker til Strækning, f_2 til Forskydning.

Paa samme Maade findes Paavirkningerne i de andre Tværsnit af Kranstammen. Deres Værdier ere angivne i nedenstaaende Skema.

Tværsnit.	Bøjningsmoment.	Forskydning.	Sammen-trykning.	Strækning.
a	$a_3 \cdot \bar{z}$	a_2	a_1	0
b	$b_3 \cdot \bar{z}$	b_2	b_1	0
c	$c_3 \cdot \bar{z}$	c_2	c_1	0
d	$d_3 \cdot \bar{z}$	d_2	d_1	0
e	$e_3 \cdot \bar{z}$	e_2	0	0
f	$f_3 \cdot \bar{z}$	f_2	0	f_1
g	0	g_2	0	g_1

Ekspl. 34. I Fig. 54 er der vist en Kran med faststaaende Stamme. Kranens bevægelige Del er foroven ophængt paa en Tap ved A og forneden støttet ind mod en Del af Stammen, der er tildannet cylindrisk, for at Kranens bevægelige Del kan dreje sig om den. Kranens Egenvægt er angiven ved Kraften P_2 , medens Byrden er P_1 . Man skal bestemme Paavirkningerne paa Stammen og paa Fundamentboltene ved F og G . Kræfterne P_1 og P_2 ere ved Hjælp af Polstraalerne til Polen p og Stangpoly-

gonen *I III III* sammensatte til en fælles Resultant. Reaktionen, som Stammen maa yde, og som skulle holde Ligevægt med den fundne Resultant $P_1 + P_2$, maa gaa gennem *A* og *B*. Da Stammen er cylindrisk ved *B*, maa Reaktionen her være vandret; den skærer $P_1 + P_2$ i *C*. Gennem dette Punkt og *A* maa den anden Reaktion altsaa gaa. Reaktionen ere betegnede ved henholdsvis P_4 og P_3 , og deres Størrelser ere fundne paa Fig. 54^b. P_3 er atter opløst i P_5 og P_6 . Stammen vil saaledes for det første blive paavirket til Sammentrykning af P_6 . Paa Fig. 54^c ere P_4 og P_5 afsatte i modsatte Retninger af de paa Fig. 54^b fundne, idet de her betegne de Paavirkninger, som Stammen faar henholdsvis i *B* og *A*, medens den er understøttet i en Fundamentplade ved *D* og *E*. De vandrette Paavirkninger i *D* og *E* findes paa Fig. 54^c ved Hjælp af Polstraalerne fra Polen p_1 og den dertil hørende Stangpolygon *IV V VI IX*, hvor \overline{VIX} er Slutlinien. Bøjningsmomenterne for Stammens forskellige Tværsnit udtrykkes ved Produkterne af Polafstanden for Polen p_1 og de Stykker, som Stangpolygonen *IV V VI IX* afskærer af vandrette Linier gennem vedkommende Tværsnit (se Fig. 54^a). Endelig har man ved Stangpolygonen *III VII VIII* for Polen p fundet de Paavirkninger P_7 og P_8 , som Fundamentboltene udsættes for efter deres Længderetning.

Er en Bjælke simpelt understøttet i Endepunkterne og paavirket af Kræfter, som vel ligge indbyrdes i samme Plan og i Plan med Bjælkens Akse, men ikke staa vinkelrette paa denne, kan man, i Stedet for at anvende den i Ekspl. 32 og 33 angivne Fremgangsmaade, gaa frem paa den Maade, at man opløser de enkelte Kræfter i Komposanter efter Bjælkens Længdeakse og vinkelret derpaa. Denne Fremgangsmaade er navnlig at foretrække, naar Beregningsmetoden anvendes. Komposanterne efter Aksen

ville enten virke til Sammentrykning eller til Strækning, og Komposanterne vinkelret paa Aksen til Bøjning og Forskydning.

Paavirkes saaledes AB (Fig. 55) i C af Kraften P , der med AB danner en $\angle v$, ville Komposanterne efter Bjælkens Akse og vinkelret paa den være henholdsvis $P \cos v$ og $P \sin v$. For at den første af disse ikke skal medføre en Bevægelse af Bjælken i vandret Retning, maa denne være befæstet. Er den fastgjort i A , vil AC blive sammentrykket af $P \cos v$, men BC blive upaavirket deraf; findes Befæstelsen derimod ved B , bliver BC strakt af $P \cos v$ og AC upaavirket af den. I begge Tilfælde vil AB desuden faa saavel Paavirkning til Bøjning som til Forskydning hidrørende fra Komposanten $P \sin v$. Disse Paavirkninger bestemmes i Overensstemmelse med det foregaaende.

b. Konstruktionsdelen er understøttet i to Punkter og paavirkes af Kræfter, som skære dens geometriske Akse, og som ere vinkelrette paa den. Kræfterne ligge derimod ikke alle i samme Plan.

I de foregaaende Eksempler er det forudsat, at de ydre Kræfter, som virkede vinkelret paa en Aksel eller Bjælke, laa i Plan med dens geometriske Akse og med hverandre indbyrdes. Dette er imidlertid ikke altid Tilfældet, og navnlig er Forholdet ved Aksler ofte det, at Kræfterne vel skære den geometriske Akse og saaledes hver for sig ligge i Plan med denne, men derimod ikke alle ligge i samme Plan. I saa Fald vil der paa Akslen virke saavel Bøjningsmomenter som forskydende Kræfter i to eller flere Planer, som indbyrdes danne bekendte Vinkler. For da at finde det med Hensyn til et eller andet Tværsnit virkende resulterende Bøjningsmoment, maa man sammensætte de enkelte fra de givne Kræfter

hidrørende Bøjningsmomenter, og ligeledes maa man, for saa vidt man ønsker at finde Forskydningen i Tværsnittet, sammensætte de enkelte der virkende forskydende Kræfter til en enkelt Kraft. Hvad denne sidste Sammensætning angaar, er intet nyt at bemærke, da der her kun bliver Tale om Sammensætning af flere Kræfter, som skære hverandre i eet Punkt, og som alle ligge i et Plan, der er vinkelret paa Akslens geometriske Akse. Derimod skal Bestemmelsen af de resulterende Bøjningsmomenter nærmere oplyses ved et Eksempel.

Eksp. 35. Akslen AB (Fig. 56^a), der er understøttet ved A og B , paavirket i C af en Kraft P_1 , som tilligemed Akslens geometriske Akse tænkes liggende i Papirets Plan, samt i D af en Kraft P_2 , som danner en Vinkel v med Papirets Plan. Baade P_1 og P_2 staa vinkelrette paa AB . Ved Bestemmelsen af de resulterende Bøjningsmomenter er Fremgangsmaaden da den, at man for samme Polafstand finder Bøjningsmomentfladerne for hver af de givne Kræfter for sig, og derefter for de enkelte Tværsnits Vedkommende under Vinklen v sammensætter Ordinaterne i disse Bøjningsmomentflader. For lettere at kunne foretage denne Sammensætning, vælges Polerne saaledes, at Slutlinierne i begge Stangpolygoner blive vandrette. Hvorledes man kan opnaa dette, er vist nederst Side 50. Paa Fig. 56^b er Polen p_1 lagt i Afstanden a fra P_1 , saaledes at Slutlinien AB i Stangpolygonen AcB bliver vandret. Paa Fig. 56^c er Polafstanden for Polen p_2 ligeledes a , og den tilsvarende Stangpolygon paa Fig. 56^a er AdB . Slutlinierne for de to Stangpolygoner falde altsaa sammen. Sammensætningen af Ordinaterne i de to Momentflader er vist paa tre Steder. Ved Tværsnittet C er Linien cC afsat lig med fC saaledes, at den danner Vinklen $(180-v)^0$ med Cg . Resultanten af fC og Cg bliver da fg , som i Papirets

Plan er afsat fra C som Cb . Alle de resulterende Bøjningsmomenter komme til at ligge i en vindskæv Flade, men tænkes afsatte i Papirets Plan fra AB paa Linier vinkelrette paa denne, hvorved man faar Momentfladen $ABeb$ for de resulterende Bøjningsmomenter.

P_1 's Reaktioner i A og B ere henholdsvis A_1 og B_1 , medens P_2 's Reaktioner i disse Understøtningspunkter ere A_2 og B_2 . De resulterende Reaktionen faar man ved Sæmsætning af henholdsvis A_1 og A_2 og af B_1 og B_2 . Man vil iøvrigt let ved den nøje Forbindelse, der er imellem Fig. 56^a paa den ene Side og Fig. 56^b og 56^c paa den anden Side, kunne indse, at Reaktionen i A vil være Stykket mn , som afskæres mellem AB og Ab paa en Linie, der er tegnet parallel med P_1 i Afstanden a fra A . Reaktionen i B vil være Stykket rs , der i Afstanden a fra B afskæres mellem AB og Be . Ved Bestemmelsen af Akslens Tværsnitsdimensioner maa selvfølgelig de resulterende Bøjningsmomenter benyttes.

I det foreliggende Eksempel skifte ingen af Bøjningsmomenterne Fortegn. Ifald et af dem skifter Fortegn, ville de paa vedkommende Tværnit* virkende Bøjningsmomenter komme til at danne Vinklen $180-v$ i Stedet for v med hinanden, hvortil der da maa tages Hensyn ved deres Sæmsætning.

*c. Konstruktionsdelen er understøttet i to Punkter og paa-
virkes af Kræfter, som staa vinkelrette paa dens geometriske
Aakse. En Del af Kræfterne eller slet ingen af dem skære
Aksen.*

Det er navnlig Aksler, som paa-
virkes paa denne Maade. I Fig. 57 er der i to Projektioner fremstillet en Aksel AD , der ved Lejer er understøttet i Punkterne A og B , medens der i C paa Akslen sidder en Kædeskive, til hvilken der ved en Kæde er ophængt en Vægt Q . Paa Akslen er

der fremdeles i D anbragt et Haandsving, og paa dette virkes der med en Kraft P til Omdrejning af Akslen. Haandsvingets Arm er R , og Skivens Radius regnet fra Akslens geometriske Akse til Kædens Midte r . Da Q ikke skærer Akslens geometriske Akse, vil den, foruden at virke med et Tryk Q paa Akslen i C , tillige søge at dreje den med et Moment $Q.r$, og den paa Haandsvinget virkende Kraft P vil ligeledes udøve et Tryk af Størrelse P paa Akslen i D samtidig med, at den vil søge at dreje Akslen med et Moment $P.R$ i modsat Retning af den, i hvilken Q vil dreje den. Ser man bort fra Gnidningsmodstandene, vil P kunne løfte Q , for saa vidt $P.R > Q.r$. Er $P.R = Q.r$, vil der være Ligevægt mellem de to til Omdrejning i modsatte Retninger virkende Kræfter P og Q .

Akslen vil altsaa, foruden at paavirkes til Bøjning af Kræfterne Q i C og P i D , tillige paa Stykket mellem C og D i alle Tværnsnit blive paavirket af hinanden modsatte Momenter af Størrelse $Q.r$, som ville søge at vride eller sno Akslen, hvorfor man siger, at den paavirkes til Vridning. $Q.r$ kaldes et vridende Moment og betegnes ved M_v . Under Styrkelæren skal Vridningen blive yderligere omtalt.

Hvis der paa Akslen i Stedet for Haandsvinget og Skiven var anbragt to Tandhjul ved C og D , og Akslen indgik i en eller anden Tandhjulsforbindelse (f. Eks. som Mellemaksel i et Spil), vilde den paa Stykket mellem Tandhjulene ligeledes paavirkes til Vridning.

Vil man i saadanne Tilfælde tillige tage Hensyn til Kædeskivens, Kædens, Haandsvingets eller Tandhjulenes Vægt, maa disse medtages som Kræfter, der virke paa de respektive Steder af Akslens geometriske Akse. Akslen vil under disse Forhold i dens enkelte Tværnsnit paavirkes dels til Forskydning, dels til Bøjning og dels til Vridning. Virker der i et Tværnsnit Forskydninger i forskellige Ret-

ninger, maa de som omtalt i § 3^b (Side 65) sammensættes til en enkelt forskydende Paavirkning, men i Almindelighed spiller Forskydningen en saa ringe Rolle, at man kan se bort fra den. Virker der Bøjningsmomenter i forskellige Planer, maa de ligeledes overensstemmende med § 3^b sammensættes til resulterende Bøjningsmomenter. For hvert enkelt Tværsnits Vedkommende maa man derefter sammensætte det resulterende Bøjningsmoment M_b med det i Tværnittet virkende Vridningsmoment M_v til et saakaldt ideelt Bøjningsmoment M_i ved Hjælp af Ligningen

$$M_i = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + M_v^2}, \quad (11)$$

der bruges saavel til Beregning af M_i som til den grafiske Bestemmelse deraf. Den sidste er nærmere angivet i

Ekspl. 36. En Aksel AB (Fig. 58^a) er understøttet i Lejer ved A og B . Den paavirkes i C af en Kraft P_1 og i D af P_2 , som i det foreliggende Tilfælde begge antages at ligge i Papirets Plan. Akslen vil da paavirkes til Bøjning og Forskydning paa Grund af Kræfterne P_1 og P_2 . Men den forudsættes desuden paa Stykket CD paavirket til Vridning af et Kraftpar $K.R$, hvor K er Kraften og R Armen. Man skal bestemme de ideelle Bøjningsmomenter for alle Tværnit.

Paa Fig. 58^b ere P_1 og P_2 afsatte som $\overline{01}$ og $\overline{12}$, hvorefter Polen p er anbragt i Afstanden a derfra saaledes, at Slutlinien AB i Stangpolygonen $ABLG$ bliver vandret. Bøjningsmomentet for et eller andet Tværnit vil altsaa blive den gennem Tværnittet parallel med P_1 og P_2 i $ABLG$ trukne Linie multipliceret med Polafstanden a . Størrelsen af det vridende Moment, som virker i alle de Tværnit, der ligge mellem C og D , vil være $M_v = K.R$.

For nu grafisk at kunne finde M_i ved Formel (11), maa man reducere det vridende Moment $K.R$ til Bøjnings-

momenternes Polafstand a som Basis, hvorved alle Momenterne blive udtrykte ved rette Linier, der let kunne sammensættes. Kaldes den ubekendte Kraft, som multipliceret med a skal være lige saa stor som $K \cdot R$, for x , har man

$$x \cdot a = K \cdot R, \text{ hvoraf } \frac{a}{R} = \frac{K}{x}.$$

x er funden paa Fig. 58^b, idet K er afsat henad P_1 som $\overline{05}$. Fra p ere Linierne $\overline{p0}$ og $\overline{p5}$ trukne gennem $\overline{05}$'s Endepunkter, og i Afstanden R fra p er der tegnet en Linie parallel med $\overline{05}$. Det Stykke, som afskæres paa denne mellem $\overline{p0}$ og $\overline{p5}$, er da x , eftersom $\overline{05}$ og x ere Grundlinier i to ligedannede Trekanter, hvis Højder ere henholdsvis a og R . Da det vridende Moment er det samme i alle mellem C og D liggende Tværnsnit, vil Vridningsmomentfladen paa CD blive Rektanglet $CEFD$, i hvilket Siden $CE = x$. Den grafiske Bestemmelse af M_i er nu vist for nogle faa Tværnsnits Vedkommende. $Cc = \frac{5}{8} CE$ og $Dd = \frac{5}{8} DF$. $Cg = \frac{5}{8} CG$ og $Dl = \frac{5}{8} DL$. Cc er om C som Centrum drejet ned i AB som Ci , hvorved

$$gi = \sqrt{Cg^2 + Ci^2} = \frac{5}{8} \sqrt{CG^2 + CE^2}.$$

Dernæst drejes gi om g som Centrum op i Linien CG som gJ . Da nu $gG = \frac{3}{8} CG$, bliver

$$GJ = \frac{3}{8} CG + \frac{5}{8} \sqrt{CG^2 + CE^2}.$$

Ved paa begge Sider af Lighedstegnet at multiplicere med a , faar man

$$\begin{aligned} a \cdot GJ &= \frac{3}{8} a \cdot CG + \frac{5}{8} \sqrt{(CG \cdot a)^2 + (CE \cdot a)^2} \\ &= \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + M_v^2} = M_i, \end{aligned}$$

altsaa er GJ for Polafstanden a som Basis det saakaldte ideelle Bøjningsmoment for Tværnsnittet C . Ved at bestemme det ideelle Bøjningsmoment for flere Tværnsnit paa den her angivne Maade, faar man Momentfladen for

de ideelle Bøjningsmomenter at være det skraverede Areal $ACJHNDBLG$.

Ønsker man ved Beregning at finde det ideelle Bøjningsmoment for et eller andet Tværnsnit f. Eks. Tværnsnittet ved D , er Fremgangsmaaden den, at man beregner saavel Bøjningsmomentet som Vridningsmomentet for dette Tværnsnit og indsætter de for dem fundne Værdier i Formel (11).

I ovenstaaende Eksempel har man set ganske bort fra Forskydningerne, i hvilket Tilfælde man altsaa ved Beregningen af Akslens Tværnsnitsdimensioner udelukkende tager Hensyn til de for de ideelle Bøjningsmomenter fundne Værdier.

Er der slet ingen bøjende Paavirkninger paa Akslen, men kun vridende, eller ere de bøjende Paavirkninger saa smaa, at man kan se bort fra dem, beregnes Akslen udelukkende for Vridning.

d. Konstruktionsdelen er understøttet i flere Punkter og paavirkes af en jævnfordelt Belastning.

I det foreliggende Afsnit om Aksler og Bjælker har man hidintil forudsat, at vedkommende Konstruktionsdel kun understøttedes i to Punkter. Har den flere Understøtninger, kan man tænke sig den overskaaren paa disse Steder, og dens enkelte Stykker kunne da behandles hver for sig i Henhold til det foregaaende. Det er dog ikke ganske korrekt at forudsætte Bjælken eller Akslen overskaaren ved Understøtningerne, og blandt andet ville Beregningerne under denne Forudsætning give Tryk paa Understøtningerne af nogen anden Størrelse end de, som ville vise sig at virke, naar Bjælken ikke tænkes overskaaren.

Er saaledes en Bjælke paavirket af en jævnfordelt Belastning samt understøttet i flere Punkter, som ligge i indbyrdes ligestore Afstande, vil Forholdet være følgende:

Er der tre Understøtninger, ville disse faa Tryk paa henholdsvis $\frac{3}{16}$, $\frac{5}{8}$ og $\frac{3}{16}$ af den samlede Belastning, naar Bjælken ikke er overskaaren, i Stedet for at de, naar Bjælken var overskaaren, vilde faa Tryk paa henholdsvis $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{4}$ af Belastningen.

Ved 4 Understøtninger blive Trykkene $\frac{2}{15}$, $\frac{11}{30}$, $\frac{11}{30}$ og $\frac{2}{15}$ i det første Tilfælde og $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ og $\frac{1}{6}$ i det andet Tilfælde.

For 5 Understøtninger fordeler Belastningen sig med $\frac{11}{112}$, $\frac{32}{112}$, $\frac{26}{112}$, $\frac{32}{112}$ og $\frac{11}{112}$ i første og $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{8}$ i andet Tilfælde.

Endelig fordeler den sig ved 6 Understøtninger med $\frac{15}{190}$, $\frac{43}{190}$, $\frac{37}{190}$, $\frac{37}{190}$, $\frac{43}{190}$ og $\frac{15}{190}$ i første og $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$ og $\frac{1}{10}$ i andet Tilfælde.

4. Ledsystemer.

Disse dannes af prismatiske Legemer, der ved de saakaldte Led eller Knuder ere forbundne med hverandre.

Ved Bestemmelsen af Paavirkningerne i Ledsystemets Stænger eller Ledstykker maa der tænkes kun at virke ydre Kræfter i Leddene. Stykkerne ville derved udelukkende blive sammentrykkede eller strakte.

Bliver et Stykke paavirket af Kræfter mellem Stykkets Led, maa man af Hensyn til Bestemmelsen af disse sammentrykkende eller strækkende Paavirkninger regne med de Tryk, som disse ydre Kræfter frembringe i Stykkets to Led, og da bagefter nærmere undersøge, hvilke andre Paavirkninger vedkommende Stykke faar foruden Længdepaavirkningen.

Ledsystemerne kunne nu enten være enkelte Ledsystemer, hvor kun to Stykker støde sammen i hvert Led, eller sammensatte Ledsystemer, hvor der i et eller flere Led støde flere Stykker sammen.

De enkelte Ledsystemer ere atter enten lukkede eller aabne. De lukkede kunne betragtes som materielle

Stangpolygoner uden Diagonaler, medens derimod de aabne Ledsystemer mangle een Side i Stangpolygonen, hvorfor de to Modstande maa falde i samme Linie som de yderste Sider i den ikke lukkede Stangpolygon.

Ved den grafiske Behandling af Ledsystemerne vil der, ligesom i de foregaaende Afsnit, til hver Opgave høre to Figurer, den ene, der er mærket Fig. a, indeholder Ledsystemet med Angivelse af Kraftlinierne for de ydre Kræfter, medens den anden mærket Fig. b, det saakaldte Diagram, angiver Størrelsen og Retningen af samtlige Kræfter, baade de givne ydre Kræfter og de i Ledsystemets enkelte Stykker fremkomne Spændinger. Paa Figurerne a ville de Stykker, som sammentrykkes, blive tegnede med tykke, de strakte derimod med tynde Linier, og i Figurerne b ville Betegnelserne paa de trykkede Stykker blive understregede.

a. *Enkelte lukkede Ledsystemer.*

Ekspl. 37. Paa Fig. 59^a er der vist et simpelt Spærfag, bestaaende af to Spær og een Bjælke. Paa Spærene hviler der en jævnfordelt Belastning af $2P$. Man skal finde Paavirkningerne i Spærfagets tre Stykker.

Vægten $2P$ vil fordele sig saaledes paa Knuderne, at der i C kommer til at virke P og i hver af Knuderne A og B $\frac{1}{2}P$, alle lodret nedad. Desuden ville Understøtningerne i hvert af Punkterne A og B frembringe en Reaktion lodret opad af Størrelse P . Der vil da i det hele i A virke $P_3 = \frac{1}{2}P$ lodret opad, i C $P_1 = P$ lodret nedad og i B $P_2 = \frac{1}{2}P$ lodret opad.

Paavirkningerne i AC og BC kunne nu findes ved at opløse P_1 efter disse Retninger, og Paavirkningen i AB ved at opløse P_2 efter AB og BC . Sker dette, ville P_1 's Komposanter faa Retninger bort fra C og P_2 's Komposanter bort fra B . Men modsat disse Paavirkninger

maa der i Stykkerne 4, 5 og 6 af Materialet ydes lige saa store Modstande. Modstandene i 4 og 5 ville paa Fig. 59^b med P_1 danne en Kræfternes Trekant, hvis Sider gennemløbes kontinuerligt i den Retning, der er bestemt af P_1 's Retning.

Der er altsaa Ligevægt i C mellem P_1 og Modstandene 4 og 5. Paa samme Maade indser man let, at der i A maa være Ligevægt mellem P_3 , 4 og 6 og i B mellem P_2 , 5 og 6. Den Retning, i hvilken Modstanden i vedkommende Stykke virker, er saaledes afhængig af den ydre Krafts Retning. Virker Modstanden ind imod Knuden, bliver Stykket trykket, virker den bort fra Knuden, bliver det strakt. I den til C svarende Trekant paa Fig. 59^b ville Siderne gennemløbes i Ordenen 1, 5 og 4. Modstanden vil altsaa i saavel 4 som 5 gaa ind imod C , og de to Spær ses saaledes at blive sammentrykkede. I den til B svarende Trekant ville Siderne gennemløbes i Ordenen 2, 6 og 5; 6 bliver strakt, da Modstanden gaar bort fra B .

Ved den ovenfor angivne Fremgangsmaade fandt man Spærfagets Stykker udelukkende paavirkede enten til Sammentrykning eller til Strækning, idet man, som overalt ved Behandlingen af Ledsystemer, forudsatte, at der kun angreb Kræfter i Knuderne. Man har derved set bort fra, at den paa Spærene jævnfordelte Belastning tillige vil paavirke disse til Bøjning, idet de maa betragtes som Bjælker understøttede i deres Endepunkter. Ved Dimensionsbestemmelsen af Spærfagets Stykker maa man selvfølgelig ogsaa tage Hensyn til den sidstomtalte Paavirkning.

Ekspl. 38. En Svingkran, som bestaar af Stykkerne AB , BC og AC (Fig. 60^a), er understøttet i et Halsleje ved B , hvor Modstanden forudsættes kun at kunne ydes vandret, samt ved A i et Sporleje. Ved C hænger en Byrde 1. Modstandene i Understøtningspunkterne og Paa-

virkningerne i Kranens enkelte Stykker skulle findes, idet der ikke tages Hensyn til Kranens Egenvægt.

Den vandrette Modstand 2 gennem B paa Fig. 60^a skærer 1 i D . Herigennem maa Modstanden i A gaa, og dennes Kraftlinie bliver altsaa AD . Diagrammet paa Fig. 60^b dannes paa følgende Maade: Ved Linier parallel med de i D sammenstødende Kraftlinier konstrueres den Trekant, som angiver Ligevægten mellem 1 , 3 og 2 . Om-løbsretningen er paa Trekantens Sider angiven ved Pile. Modstanden 3 , der virker opad til højre, er derefter opløst i Modstandene 7 og 8 . Herved bortfalder 3 , og der ses nu at være Ligevægt mellem 1 , 7 , 8 og 2 . Dernæst har man konstrueret den til Knuden C svarende Trekant, og endelig skal Linien 6 paa Fig. 60^b, naar den tegnes fra Skæringspunktet mellem 4 og 5 til Skæringspunktet mellem 2 , 3 og 8 , blive parallel med 6 paa Fig. 60^a, altsaa lodret. Denne Linie, som saaledes afslutter Diagrammet, kaldes Kontrollinien, da den vil afgive en Prøve paa Tegningens Rigtighed.

Til hver Knude paa Fig. 60^a svarer der nu en Mangelkant paa Fig. 60^b. AC vil blive trykket, AB og BC strakte. Modstandene 2 og 7 samt 1 og 8 danne lige-store Kraftpar, der virke til Omdrejning i modsatte Retninger og altsaa hæve hinandens Virkning.

b. De enkelte aabne Ledsystemer.

I disse kan der indgaa to eller flere Ledstykker.

Ekspl. 39. Fig. 61 viser en saakaldt Væggekran. Kraften 1 skal holde Ligevægt med Reaktionen 4 og 5 , som maa virke i Forlængelserne af 2 og 3 , naar begge disse Stænger ere befæstede til Muren ved Led. 4 og 5 faa derved de paa Figurerne ved Pilene angivne Retninger. Men imellem de i 2 og 3 virkende Modstande og Kraften 1 skal der ogsaa være Ligevægt, hvorfor 2 bliver strakt og

3 sammentrykket. Der er naturligvis intet i Vejen for at variere Væggekranens Form ved f. Eks. enten at gøre 2 eller 3 vandret.

Ekspl. 40. Fig. 62^a viser en Jordkran. Den vil, naar den kun bestaar af de to Stykker AB og BC , have stærk Tilbøjelighed til at vælte til Siden, med mindre der anbringes en Sideafstivning. En saadan kan tilvejebringes ved, at man opstiller to Stivere i Stedet for den ene BC . Disse danne da en spids Vinkel med hinanden og stilles saaledes, at et Plan gennem AB vinkelret paa de to Stiveres Plan halverer Vinklen mellem dem. 4 og 5, hvis Retninger ere angivne ved Pile, have samme Størrelse som 2 og 3. 2 bliver strakt og 3 trykket. Er BC lodret Billede af de to Ben, maa 3 tilsidst opløses efter disses Retninger.

Formen af en saadan Jordkran kan ogsaa varieres f. Eks. ved at gøre Benet AB bevægeligt. Der maa da i B og C anbringes Charnièrer, medens A maa gøres forskydeligt i vandret Retning, eller AB kunne forlænges og forkortes.

Ekspl. 41. Fig. 63^a viser en Hængebro. Brobanen AB med den derpaa hvilende jævnfordelte Belastning er delt i otte lige store Dele, der ved Stænger gennem Delenes Midtpunkter ere ophængte i et Tov eller en Stangkæde. Dennes ene Befæstelsespunkt C og Retningen for Modstanden derigennem kunne f. Eks. være givne, i hvilket Tilfælde Kædens eller Tovets Form samt de deri virkende Spændinger ville være bestemte.

Da Belastningerne ere jævnfordelte over Brobanen, maa deres Resultant gaa gennem dennes Midte, altsaa som EF paa Fig. 63^a. Modstanden gennem C skærer EF i S , og herigennem maa da den anden Modstand SD virke.

I Fig. 63^b ere de otte givne Kræfter afsatte efter hverandre paa den lodrette Linie GH . Derefter er Kraftpolygonen GHO dannet af de givne otte Kræfter og de to

Modstande 9 og 10. O gøres til Pol for denne Kraftpolygon, Polstraalerne tegnes og Stangpolygonen *I II III* dannes dernæst ved Linier parallele med disse Polstraaler. Kæden eller Tovet skal nu have netop den ved Stangpolygonen angivne Form og Længde, og dens enkelte Stykker ville da paavirkes af Kræfterne 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 og 10, alle til Strækning. Stangpolygonen bliver, da Polstraalerne ere Diagonaler i Kraftpolygonen, en saakaldt Middeltræklinie. De to yderste Sider i denne falde sammen med de to ydre Modstande.

c. De sammensatte Ledsystemer.

En lignende Forbindelse som den, der ved de enkelte Ledsystemer findes imellem Figureerne *a* og *b*, maa ogsaa eksistere ved de sammensatte Ledsystemer, hvor der altsaa 1) til hver Linie i den ene Figur svarer en dermed parallel i den anden, og 2) til hver Knude i den ene svarer en Mangekant i den anden med lige saa mange Sider, som der er Linier sammenstødende i vedkommende Knude.

Ved de sammensatte Ledsystemer ville de indre Modstande i Stykkerne blive bestemte ved Hjælp af en stor Mængde Kraftpolygoner, som enten kunne tegnes hver for sig uden Forbindelse med hverandre, eller, hvad der er det almindeligste, fordi det yder en Kontrol paa Tegningens Rigtighed, som en samlet Figur, et Diagram, hvor to og to Kraftpolygoner have en Side fælles.

Vinklerne mellem Stykkerne i et Ledsystem, som det paa Fig. 64 viste, ville, hvad enten det indeholder begge Diagonalerne *BF* og *EC* eller kun den ene, ikke kunne forandres, uden at ogsaa Stykkernes Længder forandres. Systemet kaldes derfor uforanderligt. Er den ene Diagonal borte, siges Systemet at være geometrisk bestemt, idet man vil kunne konstruere det, naar man

kender Længden af alle Stykkerne og deres Følgeorden. Findes derimod begge Diagonalerne i Systemet, siges det at være geometrisk overbestemt, fordi den ene Diagonal er overflødig til Systemets Konstruktion; den kan uden Skade borttages og maa, for at kunne indgaa i Systemet, have en af de øvrige Stykker afhængig Længde. Mangle begge Diagonaler, og forudsættes alle Stykkerne at være drejelige om Knuderne, kaldes Systemet geometrisk ubestemt, idet Vinklerne i Firkanten $BCFE$ kunne forandres, uden at Siderne samtidig undergaa nogen Forandring. Systemet er altsaa tillige foranderligt.

Som almindelig Regel gælder altsaa, at et Ledsystem er geometrisk bestemt, naar alle de mellem Ledstykkerne indesluttede Arealer ere Trekanter, liggende ved Siden af hinanden to og to med en Side fælles. Findes der derimod blandt Arealerne en eller flere Manglekanter, er Systemet geometrisk ubestemt og tillige foranderligt og kan kun blive geometrisk bestemt ved Deling af Manglekanterne ved Diagonaler i Trekanter. Findes der i et Ledsystem Ledstykker, som overskære hverandre, er Systemet endelig geometrisk overbestemt.

Naar et System er geometrisk bestemt, er det ogsaa statisk bestemt, hvilket vil sige, at Spændingerne i alle Ledstykker kunne findes, naar de i Knuderne virkende Kræfter ere bekendte og indbyrdes i Ligevægt.

I Konstruktioner foretrækkes altid de geometrisk uforanderlige Systemer. Er man nødsaget til at anvende geometrisk foranderlige Systemer, bøder man paa det uheldige ved dem paa den Maade, at man gør nogle enkelte eller samtlige Knuder stive, hvorved Systemerne imidlertid ophøre at være Ledsystemer og gaa over til at blive stive Systemer.

Bestemmelsen af Paavirkningerne i et Ledsystems enkelte Stykker kan enten foretages ved Hjælp af den

grafiske Metode eller ad Beregningens Vej ved den saakaldte Snitmetode.

Ved Benyttelsen af den grafiske Metode bør man, af Hensyn til en heldig Ordning af Diagrammets enkelte Dele, iagttage:

- 1) at Linierne for de ydre Kræfter paa Figurerne a ikke forlænges ind over Knuderne. Trykker en Kraft paa en Knude, skal Kraftliniens Endepunkt findes i Knuden. Trækker Kraften i Knuden, skal dens Udgangspunkt ligge i den.
- 2) at Kræfterne i Figurerne b netop tegnes i den Orden, i hvilken de findes tegnede paa Figurerne a.

Ekspl. 42. En armeret Bjælke med to Støtter. En saadan er vist paa Fig. 65^a. Der antages at virke i *B* en Vægt $P = 2400$ kg og i *C* en Vægt $Q = 1800$ kg. Til at holde Ligevægt med disse Kræfter maa Understøtningen ved *D* udøve en Reaktion $R = 2000$ kg og Understøtningen ved *A* en Reaktion $S = 2200$ kg; disse Reaktionen findes paa samme Maade som Reaktionen ved belastede Bjælker.

I dette Eksempel skal saavel den grafiske Metode som Snitmetoden blive anvendte.

Den grafiske Metode:

Man tegner først den Kraftpolygon, som angiver Ligevægten mellem Kræfterne P , Q , R og S ; denne Kraftpolygon er paa Fig. 65^b vist med tykke Linier; dernæst tegnes efterhaanden de til Knuderne svarende Kraftpolygoner, som angive Ligevægten mellem de i vedkommende Knude virkende Kræfter, idet man iagttager, at den i det foregaaende med Hensyn til Kræfternes Orden angivne Regel overholdes. De i en Knude

virkende Kræfter bestaa dels af de i den virkende ydre Kræfter dels af de i Knudens Ledstykker virkende Modstande. Den Orden, i hvilken Kraftpolygonerne tegnes, er ligegyldig, men man skal dog bemærke, at man ikke kan tegne nogen Polygon, der indeholder flere end to ubekendte Sider. Man maa saaledes begynde enten med den til A eller den til D svarende Kraftpolygon. Begynder man med den sidste, maa man derefter først tegne Kraftpolygonen svarende til Knuden E , da der, efterat m er funden ved Hjælp af den til D svarende Kraftpolygon, kun angriber to ubekendte Kræfter i E , medens der i C angriber tre. Naar g er funden, kan man gaa til den til C svarende Polygon, eftersom der i denne nu kun indgaar de to ubekendte d og e .

Til Knuden D paa Fig. 65^a svarer paa Fig. 65^b Polygonen Rhm ; h maa gaa ud fra det Punkt, hvor R og Q støde sammen, fordi h skal indgaa i en Polygon med saavel R som Q . Da den Orden, i hvilken Stykkerne nævnes, angiver Omløbsretningen i Polygonens Omkreds, som er bestemt ved R 's Retning, indser man, at h bliver trykket, eftersom Modstanden i den gaar ind imod D , medens m bliver strakt, da Modstanden gaar bort fra D . Til E svarer Trekanten mgf ; g bliver trykket og f strakt. Til C svarer $ghQde$, d bliver trykket og e strakt. Til F svarer $fecb$, hvor c trykkes og b strækkes. Til B svarer $cdPa$, hvor a trykkes. Linien a 's Beliggenhed paa Fig. 65^b er bestemt, saasnart alle de øvrige Kræfter ere tegnede. Trækkes en ret Linie fra Skæringspunktet mellem P og S til Skæringspunktet mellem b og c , skal den vise sig at blive parallel med a paa Fig. 65^a, ifald Tegningen er rigtig. a vil altsaa paa Diagrammet blive Kontrollinien. Som fremhævet i Begyndelsen af Afsnittet om Ledsystemer, maa der, for at Bevægelse ikke skal finde Sted, i hver Knude være Ligevægt mellem de i den virkende ydre Kræfter og de

Modstande, som Materialet i de Ledstykker, der støde sammen i vedkommende Knude, maa yde mod de i Stykkerne fremkaldte Spændinger, hvorfor der ogsaa ved den grafiske Bestemmelse af disse Modstande for hver enkelt Knudes Vedkommende tegnes en Kraftpolygon, som angiver denne Ligevægt.

Ved den saakaldte Snitmetode ligger den samme Betragtning til Grund for Bestemmelsen af Modstandene og dermed af Spændingerne i Ledstykkerne, men her tænkes en Del af Ledsystemet ved et Snit skilt fra Resten af Systemet. For at den tilbageblevne Del til Trods herfor skal kunne være i Ligevægt (svæve frit), maa man paa de Steder, hvor Ledstykker ere overskaarne, anbringe ydre Kræfter af samme Størrelse og Retning som de Modstande, der ved Overskæring af Stykkerne ere faldne bort. Disse Modstande er det netop, som skulle bestemmes, hvilket kan ske ved at opstille de tre Ligninger, som ere Betingelsen for Ligevægten mellem de paa den tilbageblevne Del af Ledsystemet virkende ydre Kræfter og de i de overskaarne Stykker virkende ubekendte Modstande, der nu ogsaa fremtræde som ydre Kræfter. Af disse tre Ligninger kan der kun bestemmes tre Ubekendte, og der maa altsaa i Ligningerne kun indgaa tre ubekendte Modstande. Et Snit, som deler Ledsystemet i to Dele, maa altsaa i det højeste overskære tre Ledstykker, i hvilke Modstandene ere ubekendte. I Stedet for at benytte alle tre Ligevægtsligninger foretrækker man imidlertid som oftest at benytte Momentligningen alene, da man ved de tre Momentligninger, som faas med Hensyn til tre forskellige Punkter, kan finde de tre ubekendte Modstande. Beregningen af disse kan yderligere lettes, naar man kan vælge hver af Momentpolerne saaledes, at Momenterne af de to Modstande med Hensyn til vedkommende Pol blive Nul. Ved Opstillingen af disse Momentligninger

regnes Modstandene i de overskaarne Stykker altid bort fra den Knude, hvorfra de udgaa. Faar man da ved Beregningen en positiv Værdi for en Modstand, gaar denne bort fra Knuden, og Stykket strækkes; bliver Modstandens Værdi negativ, virker den ind imod Knuden og Stykket sammentrykkes.

Lægger man saaledes i Ledsystemet (Fig. 65^a) Snittet MN , vil det overskære a og b . Den Del af Ledsystemet, som ligger til højre for MN , tænkes borttagen, og i Endepunkterne af de tilbageblevne Stykker af a og b anbringes ydre Kræfter, begge virkende bort fra A . Gøres F til Momentpunkt, bliver Momentligningen for Kræfterne S , a og b

$$S \cdot 3 + a \cdot 0,9 + b \cdot 0 = 0;$$

$$a = -\frac{3S}{0,9} = -\frac{22000}{3} = -7333 \text{ kg.}$$

$$\operatorname{tg} v = \frac{0,9}{3} = 0,3. \quad v = 16,7^{\circ}.$$

Tages B til Momentpunkt, bliver Momentligningen

$$S \cdot 3 - b \cdot 3 \sin v + a \cdot 0 = 0;$$

$$b = \frac{S}{\sin v} = \frac{2200}{\sin 16,7^{\circ}} = 7654 \text{ kg.}$$

Modstanden i a gaar altsaa ind imod Knuden og a trykkes, medens Modstanden i b gaar bort fra Knuden og b strækkes.

I det følgende udelades de Led i Momentligningerne, som blive Nul ved, at Momentarmen er Nul.

Til Bestemmelse af c og d lægges Snittet OG , og den til højre derfor liggende Del af Systemet tænkes borttagen.

Gøres A til Momentpunkt, vil Momentligningen, idet Modstanden c antages at virke lodret nedad, blive

$$2400 \cdot 3 + c \cdot 3 = 0, \quad \text{hvoraf } c = -2400 \text{ kg.}$$

Tages F til Momentpunkt, faar man Ligningen

$$2200 \cdot 3 + d \cdot 0,9 = 0. \quad d = -7333 \text{ kg.}$$

c og d sammentrykkes.

Til Bestemmelse af e og f lægges Snittet JL , og den højre Del af Systemet tænkes borte.

Tages C til Momentpunkt, faar man Ligningen

$$2200 \cdot 6 - 2400 \cdot 3 - f \cdot 0,9 = 0.$$

$$f = \frac{2200 \cdot 6 - 2400 \cdot 3}{0,9} = 6667 \text{ kg. } f \text{ strækkes.}$$

Ved at tage E til Momentpunkt faar man Momentligningen

$$2200 \cdot 6 - 2400 \cdot 3 + d \cdot 0,9 + e \cdot 3 \sin v = 0,$$

idet e antages at virke bort fra F . Indsætter man heri $d = -7333$, faar man

$$e = \frac{2400 \cdot 3 + 7333 \cdot 0,9 - 2200 \cdot 6}{3 \sin v} = \frac{200}{\sin 16,7^\circ} \\ = 695,8 \text{ kg. } e \text{ strækkes.}$$

Til Bestemmelse af g og h lægges Snittet HT , og venstre Del af Systemet tænkes borte. Tages D til Momentpunkt, faar man, idet g antages at virke lodret opad, Ligningen

$$f \cdot 0,9 + g \cdot 3 = 0, \text{ hvoraf } g = -\frac{f \cdot 0,9}{3} = -2000 \text{ kg,}$$

naar man i Ligningen sætter $f = 6667$. g sammentrykkes.

Tages E til Momentpunkt, faar man Ligningen

$$h \cdot 0,9 + 2000 \cdot 3 = 0; \quad h = -\frac{2000 \cdot 3}{0,9} = -6667 \text{ kg.}$$

h sammentrykkes.

Lægger man endelig Snittet UV , og tænkes Systemets venstre Del borte, faar man, naar C tages til Momentpunkt, Ligningen

$$m \cdot 3 \sin v - 2000 \cdot 3 = 0.$$

$$m = \frac{2000 \cdot 3}{3 \sin v} = \frac{2000}{\sin 16,7^{\circ}} = 6958 \text{ kg.}$$

m strækkes.

Ekspl. 43. Paa Fig. 66^a er der vist en armeret Bjælke med een Støtte.

I B virker Vægten P og i A og C henholdsvis Modstandene R og Q .

Paa Fig. 66^b har man først tegnet den til disse svarende Kraftpolygon.

Til Knuden A svarer Rab ; a trykkes, b strækkes.

Til Knuden B svarer $aPdc$, baade c og d trykkes, og til C svarer dQe , hvor e strækkes.

Ved de armerede Bjælker gøres selve Bjælkerne af Smedejærn eller Træ, Støtterne af Støbejærn, Smedejærn eller Træ og Baandene af Smedejærn.

Ekspl. 44. Fig. 67^a viser et dobbelt Hængeværk. I B og C virke henholdsvis P og Q , hvorefter Reaktio-
nerne R og S findes. Efter at den til disse fire Kræfter svarende Kraftpolygon er tegnet paa Fig. 67^b, ere de til de enkelte Knuder svarende Kraftpolygoner fundne. Til A svarer Sba , a trykkes og b strækkes; til E svarer acd , c strækkes og d trykkes; til B svarer $cbPe$, hvor e strækkes; til C svarer $eQhf$, baade h og f strækkes; til F svarer dfg , hvor g trykkes; endelig svarer til D Trekanten Rgh . h er Kontrollinien.

De to armerede Bjælker og Hængeværket paavirkes ofte af en over Bjælken jævntfordelt Belastning, der i saa

Fald af Hensyn til Bestemmelsen af de sammentrykkende og strækkende Paavirkninger, som komme til at virke i Systemets forskellige Stykker, tænkes fordelt paa Bjælkens Knuder paa den Maade, at den Belastning, som hviler paa et mellem to Knuder liggende Bjælkestykke, fordeles med Halvdelen til hver Knude. Bjælken tænkes altsaa i saa Fald overskaaren i vedkommende Knude. Var den jævnfordelte Belastning paa Bjælken i Fig. 65^a K , vilde i dette Tilfælde saavel P som Q være blevne $\frac{K}{3}$, hvorhos der i A og

D vilde virke $\frac{K}{6}$ lodret nedad paa hvert af Stederne. Da der desuden i A og D virke Reaktioner lodret opad af Størrelse $\frac{K}{2}$, faa de Reaktioner, som skulle holde Ligevægt med P og Q , Størrelsen $\frac{K}{2} - \frac{K}{6} = \frac{K}{3}$.

Da man ved Diagrammets Bestemmelse ganske ser bort fra, at Belastningen muligvis er jævnfordelt, maa man senere ved Bestemmelsen af Stykkernes Tværsnitsdimensioner tage Hensyn til en saadan paa Ledstykket virkende jævnfordelt Belastning. Tværsnitsdimensionerne af de tre Stykker AB , BC og CD ville i saa Fald være at beregne saavel for den paa Diagrammet fundne sammentrykkende Paavirkning som for Bøjning, idet Stykkerne hvert for sig ere Bjælker med jævnfordelt Belastning, understøttede ved Enderne og med et fritliggende paa 3 m.

Bjælken AD danner iøvrigt i Almindelighed eet Stykke, i hvilket Tilfælde man overalt maa give den samme Tværsnitsdimensioner, som det stærkest paavirkede Stykke vilde faa.

Hvilede der paa de paa Fig. 66^a og Fig. 67^a som AC og AD betegnede Bjælker en jævnfordelt Belastning K , vilde P for Fig. 66's Vedkommende blive lig med $\frac{K}{2}$

og virke lodret nedad, medens Q samt R hver blev $\frac{K}{4}$, virkende lodret opad; ved Hængeværket paa Fig. 67^a bliver $P = Q = \frac{K}{3}$ og $R = S = \frac{K}{3}$, de to første virkende lodret nedad, de to sidste lodret opad. I disse Tilfælde ville Stykkerne af Bjælken AC (Fig. 66^a) være at beregne saavel for Sammentrykning som for Bøjning, medens Bjælken AD 's Stykker (Fig. 67^a) maa beregnes for saavel Strækning som Bøjning.

Ekspl. 45. Fig. 68^a viser det saakaldte enkelte Sprængeværk, hvor Bjælken AC i Midten understøttes af to Skraastivere, der i Punkterne D og E skulle overføre en Del af den paa Bjælken hvilende Belastning paa Sidemurene. Antages der paa AC at hvile en jævnfordelt Belastning K , vil P blive $\frac{K}{2}$, og der vil i A og C direkte overføres et Tryk af $\frac{K}{4}$ paa hver af Sidemurene. Til at modstaa P maa der gennem Skraastiverne EB og DB virke Modstande, som ere kaldte henholdsvis Q og R . Disses Størrelser ere fundne paa Fig. 68^b, hvor det ligeledes er angivet, at Stiverne a og b paavirkes til Sammentrykning af Kræfter af samme Størrelse som Q og R . Bjælken AC 's to Dele AB og BC blive ikke Genstand for nogen sammentrykkende eller strækkende Paavirkning, men de paavirkes hver for sig kun af en jævnfordelt Belastning $\frac{K}{2}$. De maa altsaa beregnes som Bjælker understøttede ved Enderne, med Spændvidde AB og BC og paavirkede af en jævnfordelt Belastning.

Ekspl. 46. Paa Fig. 69^a er der fremstillet et dobbelt Sprængeværk. Her understøttes Bjælken AD foruden

ved Enderne i de to Punkter B og C . For saa vidt der paa Bjælken hviler en jævnfordelt Belastning K , ville P og Q hver blive $\frac{K}{3}$, medens enhver af Murene ved A og D vil modtage et lodret Tryk af $\frac{K}{6}$. Fig. 69^b viser med tykke Linier den Kraftpolygon, som angiver Ligevægten mellem Vægtene Q og P samt Modstandene S og R . Til Knuden B svarer Krafttrekanten Pab , hvor altsaa baade a og b trykkes. Til C svarer Qbc , c trykkes saaledes ogsaa. Bjælken AD 's Stykker paavirkes udelukkende af den jævnfordelte Belastning. Ved det dobbelte Sprængeværk udelades undertiden Stykket b , i hvilket Tilfælde Bjælkestykket BC foruden at paavirkes af den jævnfordelte Belastning tillige maa optage den sammentrykkende Paavirkning, som ellers Stykket b vilde blive Genstand for.

Ekspl. 47. Fig. 70^a viser en Kran, som er støttet foroven ved A i et Halsleje og forneden ved B i et Sporleje, medens der i C virker en Byrde P_1 . Kranens Egenvægt P_2 tænkes virkende gennem dens Tyngdepunkt. Ved Hjælp af Polstraalerne til Polen p paa Fig. 70^b og den til disse svarende Stangpolygon $I II IV$ paa Fig. 70^a findes Beliggenheden af Resultanten af P_1 og P_2 . Denne skærer den vandrette Reaktion P_3 gennem A i Punktet D , hvorigennem den i B virkende Reaktion P_4 maa gaa. Paa Fig. 70^b er dernæst P_4 opløst i Reaktionen P_5 lodret opad og P_6 vandret. P_1, P_2, P_3, P_5 og P_6 ere indbyrdes i Ligevægt. Paa Fig. 70^c har man ved de to Reaktionen P_3 og P_6 , ved de til Polen p_1 trukne Polstraaler og ved Stangpolygonen $III VI VIII VII$ bestemt Paavirkningerne P_7 i E og P_8 i F . Bøjningsmomenterne for de enkelte Tværsnit af Kranstammen faar man paa sædvanlig Maade ved Produktet af Polafstanden for p_1 og de Stykker, som Stangpolygonen $III VI VIII VII$ afskærer paa Linier parallele

med P_7 og P_8 . Sluttelig ere Paavirkningerne P_9 i Baandet EC og P_{10} i Stiveren CF fundne paa Fig. 70 c, idet P_7 maa være P_9 's ene Komposant, medens den anden Komposant virker efter EA , og P_8 maa være P_{10} 's ene Komposant, medens den anden virker efter FB .

Resultatet af det udviklede vil altsaa være, at FC paavirktes til Sammentrykning, CE til Strækning, BF til Sammentrykning, Bøjning og Forskydning, EF til Strækning, Bøjning og Forskydning og endelig AE til Bøjning og Forskydning.

De sammensatte Ledsystemer forekomme, foruden i de anførte og lignende Konstruktioner, navnlig i Tagværker som de saakaldte Spærfag samt i Broer som Gitterdragere.

Forinden specielle Eksempler paa saadanne Konstruktioner anføres, skal man omtale, hvilke ydre Belastninger, der kunne komme til at hvile paa dem.

Ved Spærfag forstaas de i Tagværker indgaaende Hoveddragere, som bære Tagbeklædningen med den derpaa kommende tilfældige Belastning, og som overføre den samlede Vægt paa de Mure eller Søjler, der bære Taget. Hele Belastningen tænkes i de følgende Eksempler fordelt paa Spærets enkelte Knuder paa den Maade, at Vægten af de enkelte Ledstykker med den derpaa hvilende Belastning fordeles med Halvdelen til hver af de to Knuder, til hvilke Ledstykket støder. Spærene tænkes altsaa overskaarne ved Knuderne. Vil man behandle dem som værende i eet Stykke, maa Belastningen fordeles som angivet Side 70—71 (Clapeyron).

Belastningen paa Spærfaget hidrører som bemærket først og fremmest fra Tagets Egenvægt, der afhænger af Tagkonstruktionens Art, de Materialer, som indgaa i Tagkonstruktionen, og Afstanden mellem Spærfagene.

Paa Tabel XI. A. findes anført Tages Egenvægt i kg/m^2 af Tagets Horisontalprojektion.

Heri indgaar dog ikke selve Spærfagenes Vægt, som man ved en foreløbig Beregning kan sætte til 10 à 25 kg/m^2 af Tagfladens Horisontalprojektion.

Den tilfældige Belastning hidrører dels fra Sne-tryk og dels fra Vindtryk.

Snevægten ansættes til højest 75 kg/m^2 af Tagets Horisontalprojektion.

Vinden kan antages at virke skraat nedad i en Retning af 10^0 med det vandrette Plan. Paa et faststaaende Plan, der er vinkelret paa dens Retning, vil den udøve et Tryk $p = 0,12248 V^2$ i kg/m^2 , naar V betegner Vindens Hastighed i Meter pr. Sekund. Vindtrykket kan ved Bygningskonstruktioner passende regnes at være ikke under 125 kg/m^2 ; ved høje og isoleret liggende Bygninger saasom Skorstene kan det stige til 250 kg/m^2 , i særlige Tilfælde endogsaa højere.

Ofte nøjes man med at regne med Vindtrykkets lodrette Komposant, idet man ser bort fra den vandrette Komposant. For dette Tilfælde er der paa Tabel XI. B. angivet Totalbelastningen ved almindelige Bygninger, altsaa Tagets Egenvægt, Snetryk og Vindtrykkets lodrette Komposant i kg/m^2 .

Gitterdragerne benyttes navnlig ved Broer til at bære selve Brobanen (Tværdragere, Længdedragere og Brodække) samt den derpaa hvilende tilfældige Belastning, der afhænger af Broens forskellige Anvendelse, om den er en Gangbro, en Vejbro eller en Jærnbanebro.

Ved Gangbroer regner man, at den største tilfældige Belastning vil fremkomme, naar Broen er tæt pakket med Mennesker. Belastningen kan da sættes til 500 kg/m^2 . Egenvægten af saadanne Gangbroer af lettere Konstruktion kan ved en foreløbig Beregning anslaaes til

$$p = (120 b + 1,5 l^2 + 60) \text{ kg pr. løb. Meter af Broen, (12)}$$

hvor b er Afstanden mellem Gitterdragerne og l disses fritliggende, begge udtrykte i Meter. Ved Vejbroer og Jærnbanebroer maa Belastningen gøres til Genstand for mere indgaaende Undersøgelser. Den samlede Vægt, som kommer til at hvile paa en Gitterdrager, fordeles paa dennes enkelte Knuder paa den ved Spærfagene angivne Maade.

Ekspl. 48. Fig. 71^a viser et Spærfag med Hanebjælke. I Knuderne B , C og D virke de ligestore Vægte T , P og Q lodret nedad, medens der i A og E virke Reaktionen S og R lodret opad, hver lig $\frac{1}{2}(T + P + Q)$.

Til Knuden A paa Fig. 71^a svarer paa Fig. 71^b:

—	—	B	—	—	—	Saf
—	—	C	—	—	—	$aTbe$
—	—	D	—	—	—	bPc
—	—	E	—	—	—	$cQde$
—	—	E	—	—	—	$dRf.$

a , b , c , d og e trykkes, medens f strækkes. Hvis Tagkonstruktionen er indrettet saaledes, at der i Knuderne er anbragt Aase mellem Spærfagene, og naar Tagbeklædningens Vægt samt den tilfældige Belastning gennem Over-spær overføres til disse Aase og derfra til Knuderne, blive Spærenes Dele kun paavirkede til Sammentrykning. Findes der Aase mellem Knudepunkterne, paavirkes Spærene tillige til Bøjning. Hviler Tagbeklædningen paa Lægter, der direkte ere befæstede til Spærene, virker der paa Spærenes Stykker foruden de ved Diagrammet fundne sammentrykkende Paavirkninger tillige en jævnfordelt Belastning til Bøjning. Spærene betragtes ved Bestemmelsen af deres Tværnsdimensioner som overskaarne ved B og D . Tagbjælkerne f beregnes for Strækning, med mindre de danne Underlag for et Gulv, hvorpaa der kommer til at hvile en

Belastning, i hvilket Tilfælde de tillige ville paavirkes til Bøjning.

Alle Spærfagets Dele gøres af Træ.

Ekspl. 49. Fig. 72^a viser et Spærfag med tre Trækstænger.

De ydre Kræfters Polygon er PQR . Følger man Knuderne paa Fig. 72^a fra venstre til højre, faar man paa Fig. 72^b efterhaanden Polygonerne: Rab ; $aPdc$; bce ; e er Kontrollinien. a og d trykkes, medens b , c og e strækkes. Alle Stykkerne kunne passende gøres af Smedejærn.

Ekspl. 50. Paa Fig. 73^a er der vist et enkeltstøttet Spærfag med tre Trækstænger. Den af de ydre Kræfter dannede Polygon er paa Fig. 73^b $QPTSR$. Følger man Knuderne paa Fig. 73^a fra højre til venstre, ville Kraftpolygonerne paa Fig. 73^b blive: Rhi ; $hQfg$; $fPde$; $dTac$; endelig bliver b Kontrollinien. Til den midterste Knude svarer Polygonen $gecbi$. a, d, f, h, c og g trykkes, medens b, i og e strækkes. Spærene og Støtterne kunne være af Træ eller Smedejærn, Trækstængerne af Smedejærn.

Ekspl. 51. Fig. 74^a viser et Schweitzer Hanebjælkefag uden Tagbjælke.

De ydre Kræfters Polygon er $QPTSR$. Følger man paa Fig. 74^a Knuderne fra højre til venstre, faar man paa Fig. 74^b Polygonerne: Rab ; $aQdc$; $dPfe$; $fTig$; iSh ; $bcegh$. h bliver Kontrollinien. a, c, d, f, g og i trykkes; medens b, e og h strækkes.

Ekspl. 52. Fig. 75^a viser et Spærfag med fem Trækstænger.

Den af de ydre Kræfter paa Fig. 75^b dannede Polygon

er PQR , og de til Knuderne paa Fig. 75^a svarende Polygoner paa Fig. 75^b ville fra venstre til højre blive: Rab ; bcd ; $caPfe$; deg ; Qgf . g er Kontrollinien. a og f trykkes. b , c , d , e og g strækkes.

Ekspl. 53. Fig 76^a viser et fransk enkeltstøttet Spærfag med fem Trækstænger.

Tagets Højde h er 3 m og dets Spændvidde l er 9 m, altsaa Forholdet mellem dem $\frac{1}{3}$. Ifølge Tabel XI. B. kan Totalbelastningen, naar Taget tænkes dækket med Skifer, i saa Fald regnes til 210 kg/m^2 , hvortil kommer Spærfagets egen Vægt, der ansættes til 10 kg/m^2 , altsaa ialt 220 kg/m^2 af Horisontalprojektion. Afstanden mellem Spærfagene tænkes at være 4 m. Paa hvert Spærfag kommer altsaa Belastningen paa en Tagflade, hvis vandrette Billede er $4 \cdot 9 = 36 \text{ m}^2$. Hele Belastningen paa Spæret bliver saaledes $36 \cdot 220 = 7920 \text{ kg}$. Regnes den til 8000 kg , virker der i B , C og D 2000 kg og i A og E 1000 kg lodret nedad, medens der i A og E virker 4000 kg lodret opad, som sammensatte med de 1000 kg lodret nedad give Kræfter paa 3000 kg lodret opad. Altsaa er $T = P = Q = 2000 \text{ kg}$ og $R = S = 3000 \text{ kg}$.

Paa Fig. 76^b er Diagrammet tegnet.

Til A paa Fig. 76 ^a svarer paa Fig. 76 ^b :	Sab
— B — — —	: $aTdc$
— F — — —	: $bceh$
— C — — —	: $edPfg$
— D — — —	: $fQki$
— G — — —	: $hgil$

l er Kontrollinien; a , c , d , f , k og i trykkes, medens b , e , h , g og l strækkes.

I dette Eksempel er foruden den grafiske Metode ogsaa Snitmetoden angiven.

Til Bestemmelse af a og b lægges Snit $I II$, og højre Del af Spærfaget tænkes borte. For F som Momentpol faar man

$$3000 \cdot m + a \cdot BF = 0, \text{ hvoraf } a = -\frac{3000 \cdot m}{BF},$$

og for B som Momentpol

$$3000 \cdot 2,25 - b \cdot BH = 0, \text{ hvoraf } b = \frac{3000 \cdot 2,25}{BH}.$$

Lægges Snittet $III IV$, og tænkes højre Del af Spærfaget borte, faar man for A som Momentpol

$$2000 \cdot 2,25 + c \cdot AB = 0, \text{ hvoraf } c = -\frac{2000 \cdot 2,25}{AB},$$

og for F som Momentpol

$$3000 \cdot m - 2000 \cdot n + d \cdot BF = 0,$$

$$\text{hvoraf } d = \frac{2000 \cdot n - 3000 \cdot m}{BF}.$$

Lægges endelig Snittet $V VI$, og højre Del af Spærfaget tænkes borte, faar man, naar C tages til Momentpol,

$$3000 \cdot 4,5 - 2000 \cdot 2,25 - h \cdot 2,7 = 0,$$

$$\text{hvoraf } h = \frac{3000 \cdot 4,5 - 2000 \cdot 2,25}{2,7},$$

og, naar A tages til Momentpol,

$$2000 \cdot 2,25 + h \cdot 0,3 - e \cdot y = 0,$$

$$\text{hvoraf } e = \frac{2000 \cdot 2,25 + h \cdot 0,3}{y}.$$

Heri maa indføres den for h fundne Værdi. Da a , c og d ere negative, blive de trykkede, medens b , e og h , der ere positive, strækkes.

Udføres Tegningen nøjagtigt i et ikke for lille Maalestoksforhold, kunne de i de ovenfor fundne Udtryk indgaaende ubekendte Længder maales paa Tegningen, men det er selvfølgelig det nøjagtigste at beregne dem.

Naar man har fundet Modstandene i a , b , c , d , e og h , ere paa Grund af Symmetrien i Spærfag og Belastning ogsaa Modstandene og dermed Spændingerne i de øvrige Stykker bekendte.

Ekspl. 54. Paa Fig. 77 er der vist et belgisk Spærfag med tostøttet Spær.

De i Knudepunkterne virkende ydre Kræfter ere L , M , N , O , P , Q og T samt Reaktionen S og R . Polygonerne, som svare til de enkelte Knuder, nævnede fra højre til venstre, blive: $TopS$; $oQmn$; $mPkl$; $pnlih$; $ikOfg$; $fNde$; $dMac$; $hgecb$ og $LRba$. b er Kontrollinien; b , g , h , i og p strækkes, medens de øvrige sammentrykkes.

Ekspl. 55. Fig. 78 viser et Halvtæg, som i A tænkes hvilende paa Muren, medens det ved B er fastgjort ind i Muren paa en saadan Maade, at der her kun kan ydes en Modstand i vandret Retning. De ydre Kræfter ere M , N , O og P . Deres Resultant er Q , som skærer den vandrette Modstand gennem B i C ; Modstanden i A maa altsaa virke efter Linien AC . Ligevægten mellem de ydre Kræfter er angiven paa Fig. 78^b ved Polygonen $PONMSR$. Til de forskellige Knuder paa Fig. 78^a, tage fra højre til venstre Side, svare paa Fig. 78^b følgende Polygone: Pab ; $aOdc$; $bcef$; $edNkg$; $fgih$; $ikMSl$. l er Kontrollinien. a , d , e , i og k strækkes og de andre sammentrykkes.

Ekspl. 56. Fig. 79^a fremstiller et fransk Spærfag med trestøttet Spær.

Spændvidden $l = 20$ m og Højden $h = 5$ m, altsaa $\frac{h}{l} = \frac{1}{4}$. Afstanden mellem Hovedspærfagene fra Midte til Midte er 5 m, og Taget antages at være Skifertag, saa at den samlede Belastning pr. m^2 af Tagets vandrette Projektion kan regnes til 190 kg, hvortil kommer Spærfagets Egenvægt, der er 10 kg/m^2 . Den hele Belastning paa hvert Hovedspærfag bliver altsaa $20 \cdot 5 \cdot 200 = 20000$ kg. Naar Spæret tænkes overskaaret i Knuderne, vil der følgelig paa enhver af Knuderne med Undtagelse af de to nederste, som hver belastes af 1250 kg, komme Tryk lodret nedad paa 2500 kg. Enhver af de to Reaktionen bliver i saa Fald 10000 kg. I dette Eksempel vil det vise sig at være nødvendigt tillige et enkelt Sted at benytte Snitmetoden.

Ligevægten mellem de ydre Kræfter er paa Fig. 79^b angiven ved Polygonen $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 P_8 P_9 P_{10} P_{11}$.

Begynder man fra venstre Side, vil man efterhaanden paa Fig. 79^b faa følgende til Knuderne paa Fig. 79^a svarende Polygone: $P_{11} P_1 ab$; $a P_2 dc$; $bcef$. Da der saavel i den Polygon, som angiver Ligevægten mellem f , g , k og l , som i den, der svarer til den Knude, hvor P_3 angriber, vil være tre ubekendte, kan man ikke konstruere nogen af de til disse Knuder svarende Kraftpolygone. For at komme videre i Diagrammet, maa man da først ved Snitmetoden finde en af de ubekendte Spændinger, i hvilket Øjemed Snittet $I II$ er lagt gennem l , o og n . Tages Punkt B til Momentpunkt, idet den til højre for Snittet liggende Del af Spærfaget tænkes borte, bliver Momentligningen $8750 \cdot 10 - 2500 \cdot 7,5 - 2500 \cdot 5 - 2500 \cdot 2,5 - l \cdot 4,5 = 0$, hvoraf
$$l = \frac{87500 - 2500 \cdot 15}{4,5} = 11111 \text{ kg.}$$

Denne Værdi for l afsættes paa Fig. 79^b som indgaaende i Polygonen $fgkl$, og nu kunne de øvrige Polygone

efterhaanden tegnes. De blive: $gedP_3ih$; iP_4nm ; $khmo$; onP_5qp ; qP_6sr ; $prtu$; $luvx$; $utsP_7zy$; $xy\alpha\theta$; Kontrollinien bliver w ; endelig αzP_8w og $P_9P_{10}\theta w$. Selve Spærene og de seks paa dem lodrette Ledstykker (Støtterne) blive sammentrykkede, de øvrige Ledstykker strækkes.

Ekspl. 57. Paa Fig. 80^a er der vist et engelsk Spærfag med tostøttet Spær.

Medens man i de foregaaende Eksempler har set bort fra Vindtrykkets vandrette Komposant, og altsaa kun har taget Hensyn til den lodrette, idet denne indgaar under de paa Tabel XI. B. angivne Belastninger, er hele Vindtrykket taget med i Beregning i det foreliggende Eksempel. Vinden antages at virke skraat nedad fra venstre Side under en Vinkel af 10^0 med den vandrette Linie. Vindtrykkets Størrelse bestemmes derved, at man projicerer den Del af Tagfladen, som bæres af Spæret AD , ind paa et Plan, der er vinkelret paa Vindretningen V , og derpaa multiplicerer Tagfladens Projektion (paa Fig. 80^a angiven ved AH) med Vindtrykket pr. Arealenhed. Dette Vindtryk, der vil fordele sig paa Knuderne A , B , C og D med $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ og $\frac{1}{6}$, vil imidlertid ikke virke paa det leddede System med dets fulde Kraft. Opløser man nemlig V i to Komposanter, hvoraf den ene følger langs med Spæret, medens den anden staar vinkelret paa det, vil, forsaavidt Tagfladen er glat, den Del af Vindtrykket, som følger Spæret, glide af uden at kunne udøve noget Tryk paa Spærfaget, hvorfor man i saa Fald kun har at tage Hensyn til Komposanten vinkelret paa Spæret. Kan Tagfladen ikke betragtes som glat, bør man regne med hele Vindtrykket. Vindtrykkets Opløsning efter de 2 omtalte Retninger er paa Fig. 80^a foretagen i Midtpunktet af AD , hvor Resultanten af Vindtrykket vil angribe. Den paa Spæret vinkelrette Komposant

er betegnet med Q , og den er derefter fordelt paa de fire Knuder, som foran angivet. Komposanterne ere betegnede ved $1'$, $2'$, $3'$ og $4'$. Mod disse fire Kræfter eller, hvad der bliver det samme, mod deres Resultant Q maa Understøtningerne yde Modstande. Spærfaget paa Fig. 80^a er vist befæstet ved A , medens det ved G hviler paa et System af Ruller, hvorved Spærfaget kan forlænges og forkortes, uden at dette vil gaa ud over Murene, der i modsat Fald vilde udsættes for stærke Sidetryk. Paa Grund af denne Maade at befæste Spæret paa, vil Understøtningen ved G imidlertid kun kunne yde Modstand lodret opad, medens Understøtningen ved A maa optage det fra Vindtrykket hidrørende Sidetryk. Retningen for Reaktionen i A maa altsaa findes ved at forlænge Q til Skæring med den lodrette Linie gennem G og ved fra dette Skæringspunkt at tegne en ret Linie gennem A , som vil blive den Linie, hvorefter Reaktionen i A vil virke. Dette Skæringspunkt vil imidlertid altid falde langt borte, og Tegnepapiret maatte saaledes være meget stort, hvis det var nødvendigt at finde dette Skæringspunkt. Det gælder dog kun om foruden A at kende et Punkt til af Reaktionen derigennem, da dens Retning saa er bestemt. Et saadant kan findes, som vist paa Fig. 80^a, ved igennem K , der ligger paa AD i Afstanden $AK = \frac{1}{3} AJ$, at tegne en Linie parallel med Q og derefter gennem det Punkt af Linien AG , der ligger i Afstanden $\frac{1}{3} AG$ fra A , at tegne en Linie parallel med Reaktionen gennem G , altsaa lodret. Disse to Linier ville da skære hinanden i et Punkt af den søgte Reaktion gennem A . Beviset for Rigtigheden af denne Konstruktion føres let ved Hjælp af ligedannede Trekanter. LA , KL og LC angive saaledes Retningerne for henholdsvis Reaktionen gennem A , Vindtrykket Q og Reaktionen gennem G . Fra L har man i Forlængelsen af KL afsat Q , som med Kræfterne efter

Linierne LC og LA danne en Trekant, der angiver Ligevægten mellem disse tre Kræfter. Reaktionen i G er betegnet ved 9 og Reaktionen i A ved 10 .

Tagets Egenvægt samt Snetrykket, som er tænkt jævfordelt over Tagfladen, ere fordelte paa sædvanlig Maade over Spærenes Knuder, og de Paavirkninger, som herefter komme i disse, ere betegnede ved $1. 2. 3. 4. 5. 6.$ og 7 , medens Reaktionen i G og A kaldes 8 og 11 .

Paa Fig. 80^b er først tegnet Kraftpolygonen $1'. 1. 2'. 2. 3'. 3. 4'. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11$, hvorefter de til de forskellige Knuder svarende Kraftpolygoner ere tegnede i følgende Orden: $10. 11. 1'. 1. 12. 13$; $12. 2'. 2. 15. 14$; $13. 14. 16. 17$; $16. 15. 3'. 3. 19. 18$; $17. 18. 20. 21$; $20. 19. 4'. 4. 23. 22$; $21. 22. 24. 25$; $24. 23. 5. 27. 26$; $25. 26. 28. 30$; 29 bliver Kontrollinien. Spærdelene og Støtterne sammentrykkes, medens alle de øvrige Ledstykker strækkes.

Naar Vinden kommer fra den anden Side, bliver Diagrammet en Del forskelligt fra det paa Fig. 80^b viste, saaledes som det ses af:

Ekspl. 58. (Fig. 81). Her tænkes Vinden blæsende fra højre Side, men Opgaven er iøvrigt forskellig fra den foregaaende derved, at der tænkes liggende Snevægt paa den venstre Halvdel af Spærfaget (Læsiden), medens der paa den højre Halvdel kun virker Egenvægt. Vindtrykkets Komposant vinkelret paa Spæret DG er her ligeledes betegnet ved Q og af samme Størrelse som i Ekspl. 57; det fordeler sig paa Knuderne paa samme Maade som der, og de Tryk i disse, som hidrøre fra Vinden, ere betegnede ved $4', 5', 6'$ og $7'$. Da Spærfaget kun er befæstet i A , maa Reaktionen gennem G være lodret. Den Linie, hvori Reaktionen gennem A vil virke, maa altsaa findes ved at forbinde A med Skæringspunktet mellem Q og den lodrette Linie gennem G . Da dette Skæringspunkt falder uden-

for Papiret, maa man som i forrige Eksempel finde et andet Punkt af Reaktionen gennem A . Forlænges Q til Skæring med AG i Punktet K , og trækkes en Linie parallel med Q gennem L , der er Midtpunktet af AK , vil denne Linie ved Skæring med den lodrette Linie gennem Midtpunktet af AG give et Punkt M af den søgte Reaktion. A forbindes med M , og den Trekant, som angiver Ligevægten mellem Q og de to Reaktionen 9 og 10, tegnes. I Eksempel 57 bleve Reaktionen 8 og 11 ligestore, fordi Belastningen (Egenvægt og Snevægt) var jævnt fordelt over Spærene. Da Snetrykket kun virker paa AD , men ikke paa DG , ville Reaktionen i A og G blive ulige store, hvorfor de maa bestemmes ved en særlig Konstruktion. De ere fundne ved en Kraftpolygon med Pol p (Fig. 81^c) og den dertil svarende Stangpolygon $I II III IV V VI VII$. Paa Fig. 81^b er Diagrammet tegnet paa sædvanlig Maade, efter at først Kraftpolygonen $7'. 7. 6'. 6. 5'. 5. 4'. 4. 3. 2. 1. 11. 10. 9. 8$ er konstrueret. Man vil se, at de forskellige Ledstykker her blive paavirkede af andre Kræfter end de paa Fig. 80^b fundne, idet nogle af Paavirkningerne blive større, men de fleste mindre end de i Ekspl. 57 fundne, hvor Vindtrykket kom fra den anden Side, og Snetrykket var jævnt fordelt over hele Spærfaget.

Ekspl. 59. Fig. 82^a viser en Væggekran, som er ophængt paa en Mur ved A og B , medens der i C virker en Kraft P lodret nedad. Efter at a og b ere fundne ved den til Knuden C svarende Polygon $P . b . a$, findes d og c ved Polygonen $a . d . c$, samt e og f ved Polygonen $b . e . f$. Nu viser det sig imidlertid paa Diagrammet, at e og d , som skulle indgaa i een Polygon; ikke støde sammen; man maa da, hvis man vil have et sammenhængende Diagram, fra det af e 's Endepunkter, hvor f støder til e , tegne en Linie ligestor og parallel med d ,

hvorefter Polygonen *d. e. k. i* kan dannes. Paa lignende Maade maa Spændingerne i de øvrige Diagonaler indføres een Gang til i Diagrammet. Hvor de oprindelig ere fundne, ere de tegnede med fulde Linier, hvor de ere gentagne, derimod med punkterede Linier.

a, c, f, g, i, l, n, p og *r* sammentrykkes, medens de øvrige strækkes. *s* og *q* maa holde Ligevægt med Reaktionen *R*, som man faar paa Fig. 82^b ved at forbinde *s*'s og den punkterede *q*'s Endepunkter. Paa samme Maade maa *Q*, *p* og *r* danne en Trekant, som angiver Ligevægten mellem disse tre Kræfter. En Prøve paa Tegningens Rigtighed faar man derved, at *R* og *Q* samt de punkterede *r* og *q* paa Fig. 82^b skulle skære hverandre i eet Punkt.

Paa Figurerne 83, 84 og 85 er der vist nogle forskellige Gitterdragere, der som omtalt finde Anvendelse ved Broer. I Figurerne 83 og 84 ere Hoved og Fod parallelle, medens derimod Hovedet i Fig. 85 tænkes formet efter en Cirkelbue eller en Parabel. I Knudepunkterne i Dragerens Fod forudsættes der befæstet Tværdragere. Paa Tværdragerne anbringes der Længdedragere og paa disse Brodækket. Belastningen har man i alle tre Eksempler tænkt jævnt fordelt over hele Broens Længde. Der vil saaledes komme til at virke ligestore Kræfter i alle Knudepunkterne i Foden med Undtagelse af de to ved Enderne, hvor der kun vil virke halvt saa store Kræfter lodret nedad som i de øvrige Knuder.

Ekspl. 60. I den paa Fig. 83 viste Gitterdrager ere de lodret nedad virkende Kræfter betegnede ved 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9. Reaktionen 10 og 11 blive ligestore og hver af dem lig med Halvdelen af Summen af de givne ydre Kræfter. Efter at Kraftpolygonen 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11 er tegnet, ere de til de forskellige Knuder svarende Polygoner

konstruerede i følgende Orden: 11. 1. 12; 12. 14. 15; Modstanden i 13 bliver altsaa Nul; 14. 2. 17. 16; 15. 16. 18. 19; 18. 17. 3. 21. 20; 19. 20. 22. 23; 22. 21. 4. 25. 24; 23. 24. 26. 27; 26. 25. 5. 29. 30; Modstanden i 28 bliver altsaa Nul; 31 bliver ligesaa stor som 27; 31. 30. 32. 35; 32. 29. 6. 33. 34; 35. 34. 36. 39; 36. 33. 7. 37. 38; 39. 38. 40. 43; 40. 37. 8. 42; 42 bliver Kontrollinien. Spændingen i 44 bliver Differensen mellem Paavirkningerne 10 og 9, og Spændingen i 41 bliver Nul. 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 27, 31, 32, 35, 36, 39, 40, 43 og 44 trykkes, alle de øvrige Stykker strækkes.

Ekspl. 61. Gitterdrageren paa Fig. 84 indeholder ingen lodrette Stykker, idet Hoved og Fod ere forbundne udelukkende ved skraa Stykker, som hælde 60° mod den vandrette Linie. Af de i Fodens Knudepunkter angribende Kræfter og Reaktionen i Understøtningpunkterne har man først dannet Kraftpolygonen 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9, og derefter ere de til Knuderne svarende Polygoner tegnede i følgende Orden: 9. 1. 10. 13; Spændingerne i 11 og 12 blive altsaa Nul; 13. 14. 15; 14. 10. 2. 17. 16; 15. 16. 18. 19; 18. 17. 3. 21. 20; 19. 20. 22. 23; 22. 21. 4. 25. 24; 23. 24. 26. 27; 26. 25. 5. 29. 28; 27. 28. 30. 31; 30. 29. 6. 33. 32; 34 bliver Kontrollinien; i 35 og 36 blive Spændingerne Nul. Af Fig. 84^a og ^b fremgaar det tydeligt, hvilke af Stykkerne der strækkes, og hvilke der sammentrykkes.

Ekspl. 62. Bestemmelsen af Diagrammet for den paa Fig. 85 viste Gitterdrager sker aldeles paa samme Maade som i de foregaaende Eksempler, hvorfor den ikke skal omtales nærmere. Man ser af Figuren, at Spændingerne i Diagonalerne, for saa vidt de ikke blive Nul, i ethvert Tilfælde blive meget smaa, naar Belastningen tænkes jævnt fordelt over hele Broens Længde. Havde Hovedet været

formet efter en Parabel, vare Spændingerne blevne Nul i alle Diagonaler.

Ved alle disse Brokonstruktioner vil det vise sig, at Spændingerne i Dragerens Hoved og Fod faa deres største Værdier, naar Belastningen er jævnfordelt over hele Længden. Derimod ville de øvrige Stykker, de saakaldte Fyldingsdele, blive stærkest paavirkede, naar Belastningen skrider frem fra Broens ene Ende hen imod den anden. Diagonalerne ville derved blive paavirkede enten til Strækning eller Sammentrykning, eftersom Belastningen skrider frem fra den ene eller den anden Ende af Broen. Ønsker man i de paa Fig. 83 og 85 viste Dragere, at Diagonalerne kun skulle modstaa strækkende Kræfter, maa man i alle eller en Del af Fagene tillige anbringe Diagonaler, som krydse de paa Figureerne viste, saa at der altid kan være een Diagonal til Stede til at modstaa de strækkende Kræfter, idet de Diagonaler, som blive trykkede, straks ville give efter under den sammentrykkende Paavirkning, naar de dannes af tyndt Stangjærn. For at Behandlingen af saadanne Brodragere kan være fyldestgørende, bør man, foruden Diagrammet for den jævnfordelte Belastning, tillige bestemme et nyt Diagram, for hver Gang Belastningen er skreden frem indtil midt imellem to efter hinanden følgende lodrette Stivere.

II. Styrkelæren.

~~~~~

De Konstruktioner, som ere omtalte i Ligevægtslæren, bestaa af et eller flere prismatiske Legemer eller af Legemer, som tilnærmelsesvis kunne betragtes som pris-



matiske. Et saadant Legeme er sammensat af en stor Mængde meget smaa Dele, de saakaldte Partikler, som ved en indbyrdes Sammenhængskraft holdes i en saadan Forbindelse med hverandre, at de danne det faste Legeme. Disse Partikler kunne dog bevæges noget i Forhold til hverandre, idet de under ydre Kræfters Paavirkning kunne fjernes fra hverandre eller nærmes til hverandre; men disse Bevægelser maa holdes indenfor temmelig snævre Grænser i de Materialer, som her skulle omtales, hvis ikke Sammenhængskraften og dermed Legemets Modstandsevne i væsentlig Grad skal forringes. Indenfor visse Grænser vil denne Sammenhængskraft gøre desto større Modstand mod Partiklernes Bevægelse, jo mere disse nærme sig til hverandre eller fjerne sig fra hverandre. Disse saakaldte indre Modstande i Materialet ville vokse, indtil Modstandene og de ydre Paavirkninger holde hverandre i Ligevægt. Saalænge den ved Partiklernes Bevægelse indtraadte Forandring i Legemets Form kun er ringe, ville Partiklerne, saasart den ydre Paavirkning ophører, atter vende tilbage til deres tidligere Plads, og Legemet altsaa igen antage den oprindelige Form. Saalænge dette finder Sted, siges Legemerne at være elastiske. En saadan Elasticitet besidde de forskellige Legemer imidlertid i meget forskellig Grad. Saalænge et Legeme forholder sig elastisk, siges Paavirkningerne at holde sig indenfor vedkommende Materiales Elasticitetsgrænse. Denne afhænger foruden af Materialets Art og Beskaffenhed tillige af Paavirkningens Art. Ved Forsøg er det godtgjort, at man indenfor en vis Grænse, kaldet Proportionalitetsgrænsen, kan betragte Formforandringen som proportional med Paavirkningen (Hookes Lov). Dette gælder dog kun for smedeligt Jærn, men i Praksis regner man Hookes Lov gældende ogsaa for andre Materialer. Overskrides Proportionalitetsgrænsen, vil denne

Proportionalitet ophøre, idet Formforandringerne ville tiltage stærkere end Paavirkningerne. Proportionalitetsgrænsen og Elasticitetsgrænsen er to forskellige Størrelser, som dog, ved de gængse Bygningsmaterialer, praktisk talt falde sammen. Forøges Paavirkningerne yderligere, ville de til sidst blive saa store, at Sammenhængskraften mellem Partiklerne ophæves, og der indtræder da et Brud i Legemet. I Konstruktioner maa selvfølgelig intet Materiale belastes udover Elasticitetsgrænsen.

De forskellige Slags Paavirkninger, som et prismatisk Legeme kan blive Genstand for, ere følgende:

1) Virker der i Legemets Akse to ligestore Kræfter bort fra hinanden, ville de søge at fjerne hvilket som helst to Nabotværsnit fra hinanden i Legemets Længderetning. Man siger da, at Legemet paavirkes til Strækning.

2) Virke saadanne to ligestore Kræfter i Aksen imod hinanden, ville de søge at nærme Nabotværsnit til hinanden. Legemet siges da at paavirkes til Sammentrykning. Man forudsætter i dette Tilfælde, at Legemet under Paavirkningen ikke antager nogen krum Form.

3) Virker der paa Legemet tæt opad hinanden to ligestore og parallelle Kræfter, men i modsatte Retninger, ville de søge at forskyde de to Tværsnit, som de virke paa, i Forhold til hinanden. Legemet paavirkes i saa Fald til Forskydning eller Overklipping.

4) Virker der paa Legemet et Kraftpar, saaledes at Legemets Akse ligger i Kraftparrets Plan, vil Legemet under Paavirkningen antage en krum Form. Legemet paavirkes til Bøjning.

5) Paavirkes Legemet af et Kraftpar, hvis Plan staar vinkelret paa Legemets Akse, paavirkes det til Vridning.

Alle de Paavirkninger, som Legemer maatte blive ud-



satte for, og som ikke direkte henhøre til en af de nævnte, ville kunne erstattes ved to eller flere af dem.

Idet disse Paavirkninger hver for sig skulle blive gjort til Genstand for Omtale i Styrkelæren, vil denne tillige komme til at omhandle, hvorledes man er i Stand til at finde:

a) *den Belastning, som man tør byde en Konstruktionsdel af bekendt Længde, Tværsnit og Materiale.*

b) *hvilke Tværsnitsdimensioner man bør give en Konstruktionsdel, naar dens Længde og Paavirkningerne paa den ere bekendte.*

c) *den Formforandring, som givne Paavirkninger frembringe i en Konstruktionsdel af bekendte Dimensioner og Materiale.*

### 1. *Strækning.*

Naar der i et prismatisk Legemes Akse med dennes Endepunkter som Angrebspunkter virke to ligestore Kræfter bort fra hinanden, vil Legemet strækkes, idet Kræfterne, hvis Virkning forplanter sig gennem hele dets Længde, ville søge at fjerne hvilket som helst to paa hinanden følgende Tværsnit fra hinanden efter Legemets Længderetning. Den ene af de to Kræfter erstattes ofte af en ydre Modstand (Befæstelsen).

Fig. 86 viser et prismatisk Legeme  $MN$ , som i lodret Stilling er befæstet ved  $M$ , medens der ved  $N$  hænger en Vægt  $P$ . For at Legemet ikke skal falde, maa Befæstelsen ved  $M$  yde en Modstand lodret opad af Størrelse  $P$ . Legemets Tværsnitsareal betegnes ved  $A$ , dets Længde ved  $L$  og det Stykke, som Legemet under  $P$ 's Virkning er blevet forlænget, ved  $e$ . Da Kraften  $P$  kan antages at fordele sig jævnt over Tværsnitsarealet, vil der paa hver

Arealenhed komme til at virke en Kraft  $\frac{P}{A}$ , og Legemet vil for hver Længdeenhed forlænges et Stykke  $\frac{e}{L}$ .

Denne Forlængelse kan betragtes som Udtryk for hele Formforandringen, idet den Formindskelse, som Tværsnitsdimensionerne samtidig lide, er meget ringe i Sammenligning med Legemets Forlængelse. Da Hookes Lov antages gældende, vil Forholdet mellem Formforandringen og Paavirkningen være en for hvert enkelt Materiale bestemt (konstant) Størrelse. Betegnes denne Konstant ved  $E$ , har man altsaa

$$\frac{P}{A} \cdot \frac{e}{L} = E, \text{ hvoraf } P = AE \frac{e}{L}. \quad (13)$$

Antog man, at Stangens Tværsnitsareal var 1 Kvadratenhed, samt at  $P$  var saa stor, at Legemet forlængedes et ligesaa stort Stykke som dets oprindelige Længde, hvorved altsaa  $e = L$ , vilde man af Ligning (13) faa  $P = E$ .  $E$ , der kaldes Elasticitetskoefficienten, er altsaa den Paavirkning pr. Arealenhed, ved hvilken Prismets Længde vilde fordobles. Denne Betragtning er dog ganske teoretisk, da der ikke kan være Tale om at belaste de Materialer, som anvendes i Bygnings- og Maskinkonstruktioner saa stærkt, at deres Længde fordobles, idet der, længe førend en saadan Belastning naas, vil indtræde Brud i Legemet, og forinden Bruddet indtraadte, var allerede Proportionalitetsgrænsen overskreden, men udover den gælder Ligning (13) ikke.

Elasticitetskoefficienten har, som nævnt, for samme Materiale altid den samme Værdi udtrykt i  $\text{kg/mm}^2$ . Derimod er Elasticitetskoefficienten forskellig for de forskellige Materialer. Af Ligning (13) kan man finde enhver af de 5 Størrelser, naar de 4 andre ere bekendte, og den kan saaledes benyttes dels til ved Forsøg at bestemme



Elasticitetskoefficienten, naar Legemets Længde og dets Tværnsnitsareal samt den virkende Kraft ere bekendte, og naar den Forlængelse, som Kraften fremkalder, maales, dels til, naar Elasticitetskoefficienten er bekendt, at finde, hvormeget et Legeme af givne Dimensioner vil forlænges under en given strækkende Kraft  $P$ 's Virkning.

Ekspl. 63. En prismatisk Stang af Smedejærn med et Tværnsnitsareal af  $100 \text{ mm}^2$  og af Længde  $500 \text{ mm}$  var fastgjort ved den ene Ende, medens der i den anden Ende var ophængt  $1000 \text{ kg}$ . Paa Grund af denne Vægt forlængedes Stangen  $0,25 \text{ mm}$ .

Man skal bestemme Elasticitetskoefficienten.

Løser man (13) med Hensyn til  $E$  og indsætter Værdierne for  $P$ ,  $A$ ,  $L$  og  $e$  i den, faar man

$$E = \frac{PL}{Ae} = \frac{1000 \cdot 500}{100 \cdot 0,25} = 20000 \text{ kg.}$$

Elasticitetskoefficienten for Smedejærn er altsaa  $20000 \text{ kg/mm}^2$ .

Ekspl. 64. En prismatisk Stang af Træ med et Tværnsnitsareal af  $200 \text{ mm}^2$  og en Længde af  $5 \text{ m}$  blev, ved at strækkes af  $48 \text{ kg}$ , forlænget  $1 \text{ mm}$ . Bestem Elasticitetskoefficienten.

$$E = \frac{48 \cdot 5000}{200 \cdot 1} = 1200 \text{ kg/mm}^2.$$

Løses Ligning (13) med Hensyn til  $e$ , faar man  $e = \frac{PL}{AE}$ . Herved kan man finde en Stangs Forlængelse, naar dens Tværnsnitsareal og Længde samt Belastningens Størrelse og Materialets Elasticitetskoefficient ere bekendte.

Paa Tabel II. ere Værdierne for en Del Materialers Elasticitetskoefficienter angivne.

Den største Værdi, som  $\frac{Ee}{L}$ , der betegner en Paavirkning pr. Arealenhed, kan antage indenfor Proportionalitetsgrænsen, kaldes Legemets Bæreevne. I Konstruktioner tør man dog ikke benytte en saa høj Værdi, men man maa nøjes med en Brøkdel ( $\frac{1}{2}$  à  $\frac{1}{4}$ ) deraf. Denne Værdi af  $\frac{Ee}{L}$  angiver den tilladelige Paavirkning for Strækning pr. Kvadratenhed af Tværsnitsarealet. Den betegnes ved  $k_s$  og udtrykkes i kg/mm<sup>2</sup>.

De Værdier, som man tør benytte for  $k_s$ , afhænge foruden af Materialets Art og Beskaffenhed tillige af den Anvendelse, der gøres af vedkommende Konstruktionsdel. Der maa saaledes benyttes en mindre Værdi for  $k_s$ , naar Konstruktionen er udsat for Rystelser eller, naar den snart paavirkes af den fulde Kraft snart slet ikke, medens der kan bruges en større Værdi for  $k_s$ , naar Konstruktionen er fuldstændig rolig, og naar den uafbrudt paavirkes af samme Kraft.

Paa Tabellerne III. og IV. findes der anført forskellige Værdier af  $k_s$  for en Del Materialers Vedkommende.

Ved i Ligning (13) at erstatte  $\frac{Ee}{L}$  med  $k_s$ , faar man en dermed analog Ligning, nemlig

$$P = A \cdot k_s, \quad (14)$$

der bruges enten til at bestemme, hvor stort et Tværsnitsareal man skal give en Stang, som paavirkes til Strækning af en bekendt Kraft  $P$ , eller til at finde den Kraft, hvormed man uden Fare tør strække en Stang af givet Tværsnitsareal, eller endelig til at finde Paavirkningen pr. Arealenhed, naar Kraften og Arealet ere bekendte.

Den Værdi af  $\frac{Ee}{L}$ , hvorved Brud vil indtræde i et Legeme, kaldes vedkommende Materiales Brudgrænse.



Den betegnes ved  $K_s$ , og Værdier for den ere angivne paa Tabel II. Erstattes  $\frac{Ee}{L}$  i Ligning (13) med  $K_s$ , faar man

$$P = A \cdot K_s, \quad (15)$$

der benyttes til Bestemmelse af den Kraft, som vil sønderrive en Stang af givet Tværnsitsareal.

Ekspl. 65. En Smedejærns Stang af kvadratisk Tværnsnit med Side 30 mm er i lodret Stilling befæstet foroven. Hvor stor en Vægt vil det være nødvendigt at ophænge i Stangens nederste Ende, for at Stangen skal blive sønderreven?  $K_s = 38 \text{ kg/mm}^2$ .

$$P = 30^2 \cdot 38 = 34200 \text{ kg.}$$

Ekspl. 66. En prismatisk Stang af Smedejærn med kvadratisk Tværnsnit af Side 27 mm er befæstet i den øverste Ende. Hvor stor en Vægt tør man med Sikkerhed ophænge i den anden Ende, naar  $k_s$  regnes til  $7,5 \text{ kg/mm}^2$ ?

$$P = 27 \cdot 27 \cdot 7,5 = 5468 \text{ kg.}$$

Ekspl. 67. Hvor stor Belastning tør man ophænge i denne Stangs nederste Ende, naar Stangen er 12 m lang, og der tages Hensyn til Stangens Egenvægt? Smedejærn vejer  $7800 \text{ kg/m}^3$ . Kaldes den søgte Belastning  $P$ , har man

$$P + \frac{27^2 \cdot 12 \cdot 7800}{1000^2} = 27^2 \cdot 7,5, \text{ hvoraf}$$

$$P = 27^2 \left( 7,5 - \frac{12 \cdot 7800}{1000^2} \right) = \text{ca. } 5400 \text{ kg.}$$

Ekspl. 68. En Hængesøjle bestaar af to Tænger. Disse have samme Tværnsnit, nemlig rektangulært med Sider 110 mm og 260 mm, og de tænkes befæstede ved en

26 mm tyk Bolt. Hvor stor Paavirkning tør man byde Hængesøjlen til Strækning, naar  $k_s = 0,7$  kg/mm<sup>2</sup>?

Tværsnitsarealet vil paa det svageste Sted være

$$2 \cdot 110 (260 - 26) = 51480 \text{ mm}^2.$$

$$P = 51480 \cdot 0,7 = \text{ca. } 36000 \text{ kg.}$$

Ekspl. 69. Skal en saadan Hængesøjle bære 50000 kg, og Tværsnittenes ene Side gøres 140 mm, hvor stor bliver da Rektanglernes anden Side, naar  $k_s$  har samme Værdi som i forrige Eksempel?

$$50000 = 2 \cdot 140 x \cdot 0,7; x = 256 \text{ mm,}$$

hvortil man desuden maa lægge Befæstelsesboltens Diameter, for at faa den søgte Dimension paa det Sted, hvor Tangen ikke er gennembrudt. Hver af Tængerne faar altsaa et rektangulært Tværsnit med Sider 140 mm og 282 mm.

Ekspl. 70. Stemplet i en hydraulisk Presse har en Diameter af 500 mm, medens det største Vandtryk er 200 Atmosfærer. Pressen har fire Søjler af Smedejærn med cirkulært Tværsnit. Find Diametren af disse, naar  $k_s = 6$  kg/mm<sup>2</sup>. En Atmosfæres Tryk regnes til 0,01 kg/mm<sup>2</sup>.

$$\text{Trækket i de fire Søjler bliver } 200 \cdot 0,01 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 500^2.$$

Diametren af en af Søjlerne findes af Ligningen

$$\frac{1}{4} \cdot 200 \cdot 0,01 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 500^2 = 6 \cdot \frac{\pi}{4} d^2, \text{ hvoraf}$$

$$d = 144,3 \text{ mm.}$$

Ekspl. 71. En Hængesøjle af Fyrretræ har kvadratisk Tværsnit med Side 150 mm. Paa det svageste Sted har den det paa Fig. 87 skraverede Tværsnitsareal. Hvor stor Paavirkning tør man byde Søjlen, naar  $k_s = 0,9$  kg/mm<sup>2</sup>?

$$P = 20 \cdot 25^2 \cdot 0,9 = 11250 \text{ kg.}$$



Ekspl. 72. En Stang af Smedejærn, der er 20 Meter lang og har kvadratisk Tværnsnit, er i lodret Stilling fastgjort foroven og bærer i den nederste Ende 30000 kg. Find Kvadratsiden, naar Hensyn tages til Stangens Egenvægt. Smedejærn vejer  $7800 \text{ kg/m}^3$  og  $k_s = 6 \text{ kg/mm}^2$ .

$$x^2 \cdot \frac{20 \cdot 7800}{1000^2} + 30000 = x^2 \cdot 6;$$

$$x = 71,65 \text{ mm} = \text{ca. } 72 \text{ mm.}$$

Ekspl. 73. Den i Ekspl. 72 nævnte 20 m lange Stang tænkes erstattet ved ti indbyrdes forbundne 2 m lange Stænger. Hvilke Tværnsnitsdimensioner maa man i saa Fald give disse Stænger, og hvor stor Besparelse i Materiale vilde man opnaa ved at benytte de ti Stænger i Stedet for den ene Stang?

## 2. *Sammentrykning.*

Virker der i et prismatisk Legemes Akse to ligestore Kræfter ind imod hinanden, idet deres Angrebspunkter ligge i Aksens Endepunkter, siger man, at Legemet paavirkes til Sammentrykning af de to Kræfter. Disse, hvis Virkning forplanter sig gennem hele Legemets Længde, ville nemlig nærme hvilket som helst to paa hinanden følgende Tværnsnit ind imod hinanden. Ogsaa her vil, ligesom ved Strækning, den ene Kraft kunne erstattes ved en ydre Modstand. Hviler et Legeme, som det paa Fig. 88 viste, paa et Plan  $BC$ , medens Legemet ved  $M$ , som er det øverste Endepunkt af dets Akse, paavirkes af en ydre Kraft  $P$ , maa Planet  $BC$  yde en Modstand lodret opad af Størrelse  $P$ , da der ellers vilde finde en Bevægelse Sted lodret nedad. Under de ydre Kræfters Virkning vil Legemet, hvis Længde kaldes  $L$ , og hvis Tværnsnitsareal

betegnes ved  $A$ , forkortes et Stykke  $e$ . Paa Grund af Proportionaliteten mellem Paavirkningen og Formforandringen vil man ogsaa her faa Forholdet mellem  $\frac{P}{A}$ , Paavirkningen pr. Arealenhed, og  $\frac{e}{L}$ , Forkortelsen pr. Længdeenhed, lig med en Konstant, og denne har ved Forsøg vist sig for de enkelte Materialers Vedkommende at have omtrent samme Værdi som den under Strækning omtalte Konstant  $E$ , Elasticitetskoefficienten for Strækning. Man kan altsaa ogsaa her sætte

$$\frac{P}{A} : \frac{e}{L} = E,$$

men  $E$  betegner nu Elasticitetskoefficienten for Sammentrykning. Ved at løse Ligningen med Hensyn til  $P$ , faar man

$$P = AE \frac{e}{L}, \quad (16)$$

der er ganske analog med Ligning (13) og ligesom denne kan bruges til at bestemme en af de 5 Størrelser, naar de andre ere bekendte.

Ved Bæreevnen forstaar man ogsaa her den største Værdi, som  $\frac{Ee}{L}$  kan antage indenfor Proportionalitetsgrænsen.

I Konstruktioner, der udsættes for Sammentrykning, benyttes dog ligesom ved Strækning kun en Brøkdelen af denne Værdi; den kaldes den tilladelige Paavirkning for Sammentrykning og betegnes ved  $k_t$ . Den udtrykkes i  $\text{kg/mm}^2$ . Værdier af den findes angivne i Tabellerne III. og IV. for forskellige Materialer og under forskellige Belastningsforudsætninger. Erstattes  $\frac{Ee}{L}$  i Ligning (16) med  $k_t$ , faar man

$$P = A \cdot k_t, \quad (17)$$



som benyttes enten til Bestemmelse af den Kraft, hvor- med man tør sammentrykke en Konstruktionsdel af pris- matisk Form, hvis Tværsnitsdimensioner ere givne, eller til at finde Tværsnitsdimensionerne af et saadant prismatisk Legeme, der udsættes for Sammentrykning af en bekendt Kraft, eller endelig til at finde Paavirkningen pr. Areal- enhed, naar Kraften og Arealet ere bekendte.

Erstatter man  $\frac{Ee}{L}$  i Ligning (16) med den Paavirkning  $K_t$ , der svarer til Brud, faar man  $P = A \cdot K_t$  (18)

For  $K_t$ , som kaldes Brudgrænsen, er der anført Værdier i Tabel II. Ligning (18) bruges til Bestemmelse af den Kraft, som vil knuse et Prisme af et bestemt Ma- teriale. Ligningerne (17) og (18) kunne kun anvendes i Tilfælde, hvor man er sikker paa, at der udelukkende finder Sammentrykning Sted, saaledes at Legemet altsaa forkortes uden samtidig at bøjes. Er Legemet langt i For- hold til Tværsnitsdimensionerne, vil der let indtræde en Sidebøjning, og i saa Fald maa der anvendes Formler, i hvilke der tages Hensyn hertil.

Forinden man imidlertid gaar nærmere ind paa saa- danne Tilfælde, er der Anledning til at omtale en Størrelse, som forekommer i de Formler, der benyttes, naar Legemet er udsat for at bøjes under Sammentrykningen. Denne Størrelse kaldes Tværsnitsarealets Inertimoment og betegnes ved  $J$ .

Antages et Areal delt i en overordentlig stor Mængde ganske smaa Arealer (Arealelementer), og multipliceres hvert enkelt Arealelement med Kvadratet paa dets Afstand fra en eller anden Linie (Aksen) i Arealets Plan, kaldes Summen af alle de saaledes dannede Produkter Arealets Inertimoment med Hensyn til den valgte Linie som Akse. Til yderligere Forstaaelse heraf skal man an-

give, hvorledes man kan finde Inertimomentet af det paa Fig. 89 viste Rektangel med Hensyn til Linien  $XX$ , der falder sammen med Rektanglets ene Side  $b$ .

Rektanglets anden Side  $a$  tænkes delt i et meget stort Antal ligestore Dele. Antallet af Dele betegnes ved  $n$ . Ved Linier gennem Delingspunkterne parallelle med  $b$  deles Rektanglet i  $n$  ganske smalle Rektangler, hvis enkelte Arealelementer tilnærmelsesvis alle have samme Afstand fra Aksen som vedkommende Delingspunkter. Disse Afstande ville være: For det nærmest Aksen liggende Rektangel  $\frac{1}{n} a$ , for det næste  $\frac{2}{n} a$ , for det følgende

$\frac{3}{n} a$  o. s. v. Rektanglets Inertimoment bliver altsaa

$$\begin{aligned} J &= b \cdot \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^2 + b \cdot \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{2a}{n}\right)^2 + b \cdot \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{3a}{n}\right)^2 \\ &\quad + \dots + b \cdot \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{na}{n}\right)^2 \\ &= \frac{b a^3}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2). \end{aligned}$$

Størrelsen indenfor Parentesen er  $\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ , som indsat i ovenstaaende Udtryk giver

$$\begin{aligned} J &= \frac{b a^3}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = b a^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} \\ &= b a^3 \cdot \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

$n$  maa nu antages at være uendelig stor, da kun i det Tilfælde de enkelte smalle Rektanglers Arealelementer have samme Afstand fra Aksen som Delingspunkterne.

Herved bliver  $\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$ , hvorved

$$J = b a^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3} b a^3, \quad (19)$$



som saaledes er Inertimomentet af et Rektangel med Hensyn til Siden  $b$ , naar den anden Side er  $a$ .

Inertimomentet af det paa Fig. 91 viste Rektangel, der ligeledes har Bredden  $b$ , men hvis Højde  $h$  er lig med  $2a$ , indses let at maatte være dobbelt saa stort som Inertimomentet af det paa Fig. 89 viste med Hensyn til samme

Akse. Altsaa bliver  $J = 2 \cdot \frac{1}{3} ba^3$ , som for  $a = \frac{h}{2}$

bliver til 
$$J = \frac{1}{12} bh^3, \quad (20)$$

der er Inertimomentet af et Rektangel, hvis Sider ere  $b$  og  $h$ , med Hensyn til en Linie gennem Rektanglets Tyngdepunkt parallel med  $b$ .

I ethvert Areal kan der gennem dets Tyngdepunkt lægges to paa hinanden vinkelrette Linier saaledes, at Arealets Inertimoment med Hensyn til den ene Linie er det største og dets Inertimoment med Hensyn til den anden det mindste af alle Inertimomenter med Hensyn til Linier, som lægges gennem Tyngdepunktet. Disse Linier kaldes Arealets Hovedakser.

Paa Tabellerne V, VI, VII og VIII er der angivet en Del almindelig forekommende Tværsnitsformer samt deres Inertimomenter med Hensyn til nogle Akser gennem Tyngdepunkterne tilligemed Størrelsen af Tværsnittenes Arealer og Afstandene fra Aksen til de yderste Arealelementer. Inertimomenterne af mere indviklede Tværsnitsformer kunne findes enten ad grafisk Vej eller ved Beregning ved Hjælp af de i Tabellerne angivne simple Former. Man vil i saa Fald ofte have Brug for Inertimomenterne med Hensyn til Linier, som ikke gaa gennem vedkommende Areal Tyngdepunkt. Kender man (Fig. 90) en plan Figurs Inertimoment  $J$  med Hensyn til en Akse gennem dens Tyngdepunkt, kan man finde Figurens Inertimoment  $J_1$  med Hensyn til en med denne Akse parallel Linie, der ligger i Afstanden  $m$  fra den, ved Hjælp af Ligningen

$$J_1 = J + Am^2, \quad (21)$$

hvor  $A$  er Figurens Areal.

Arealets Inertimoment med Hensyn til Linien  $X_1 X_1$  vil nemlig, ifølge Definitionen paa et Inertimoment, være

$$J_1 = a_1(m + y_1)^2 + a_2(m + y_2)^2 + a_3(m + y_3)^2 + \dots \\ + a_n(m + y_n)^2 = \Sigma a(m + y)^2,$$

naar  $\Sigma$  (det græske  $S$ , der kaldes Sigma) betegner Summen af de enkelte Arealelementers Inertimomenter,  $a$ 'erne Elementernes Arealer og  $y$ 'erne deres Afstande fra Linien  $XX$ .

$$\Sigma a(m + y)^2 = \Sigma am^2 + \Sigma 2amy + \Sigma ay^2 = m^2 \Sigma a + 2m \Sigma ay + \Sigma ay^2.$$

$\Sigma a = A$ ,  $\Sigma ay = 0$ , fordi  $XX$  gaar gennem Arealets Tyngdepunkt, og  $\Sigma ay^2 = J$ ; altsaa er  $J_1 = J + Am^2$ .

Løses Ligning (21) med Hensyn til  $J$ , faar man

$$J = J_1 - Am^2. \quad (22)$$

Ved Hjælp af denne sidste Ligning kunde man ogsaa have fundet Inertimomentet af Rektanglet paa Fig. 91. Ifølge (19) er Rektanglets Inertimoment  $J_1$  med Hensyn til  $ZZ$ :  $J_1 = \frac{1}{3} b h^3$ ; dets Areal  $A = b h$  og  $m = \frac{1}{2} h$ . Indsættes disse Størrelser i (22), faar man

$$J = \frac{1}{3} b h^3 - b h \left(\frac{1}{2} h\right)^2 = \frac{1}{12} b h^3.$$

Til Oplysning om, hvorledes man finder Inertimomenterne af mere indviklede Arealer, skal man vise, hvorledes man ved Hjælp af Rektanglets Inertimoment kan finde Inertimomentet af den paa Fig. 92 viste  $\perp$ -Form med Hensyn til en Akse gennem dens Tyngdepunkt. Tyngdepunktets Beliggenhed antages bestemt paa den i Ligevægtslæren angivne Maade. Inertimomentet af Figuren med Hensyn til Aksen  $XX$  maa være Summen af Inertimomenterne af  $ABCD$  og  $LMGH$  minus Summen af Inertimomenterne af  $DEFM$  og  $CKIL$ , altsaa



$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{3} b h^3 + \frac{1}{3} b_1 h_1^3 - \left( \frac{1}{3} \frac{b_2}{2} h_2^3 + \frac{1}{3} \frac{b_2}{2} h_2^3 \right) \\
 &= \frac{1}{3} (b h^3 + b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3).
 \end{aligned}$$

Som forhen bemærket, vil man ved Bestemmelse af en Søjles Tværnsnitsdimensioner, naar der paa den hviler en bekendt Vægt, eller af den Belastning, som man tør byde en Søjle af bekendte Tværnsnitsdimensioner, komme til at benytte Formler, hvori der forekommer Inertimomenter med Hensyn til Akser gennem vedkommende Tværnsnits Tyngdepunkt, for saa vidt man ved Beregning mener at maatte tage Hensyn til en mulig indtrædende Bøjning. Blandt de Formler, som da anvendes, skal her kun omtales en enkelt, der vil kunne bruges i alle de almindeligst forekommende Tilfælde.

En Søjle vil som oftest kunne betragtes som simpelt understøttet saavel forneden som foroven, og Kraften, som virker sammentrykkende efter Søjleens Længde, antages at virke efter Linien  $BC$ , Søjleens geometriske Akse (Fig. 93). Under  $P$ 's Virkning vil Søjlen da faa den paa Fig. 94 viste Form. Til Bestemmelse af dens Tværnsnitsdimensioner haves en ved den højere Matematik udviklet Formel,

$$P = \frac{10 EJ}{n L^2}, \quad (23)$$

hvor  $P$  er Paavirkningen,  $E$  Elasticitetskoefficienten,  $J$  Inertimomentet,  $L$  Søjleens Længde og  $n$  en Konstant, som for Smedejærn er 4 à 5, for Støbejærn 6 à 8 og for Træ 10 à 12.

Ved Betragtning af (23) ser man, at  $P$  vokser og aftager med  $J$ . Ved Bestemmelsen af den Belastning, som man tør byde Søjlen, maa man blandt vedkommende Tværnsnits forskellige Inertimomenter med Hensyn til forskellige gennem Tyngdepunktet gaende Akser, benytte det mindste Inertimoment, og omvendt maa man, naar Trykket

$P$  er bekendt, benytte en Tværsnitsform, hvis mindste Inertimoment er lig med eller større end den Værdi, som man finder for  $J$  af Ligning (23). Imidlertid kan det hændes, at man ved Benyttelse af (23) faar et Tværnit, hvis Areal multipliceret med  $k_t$  giver en Størrelse, der er mindre end  $P$ , medens man, hvis Arealet var tilstrækkelig stort til at modstaa den direkte Sammentrykning, maatte faa  $Ak_t > P$ .

Tværsnitsarealet er i saa Fald for lille. Man maa da lægge Ligning (17) til Grund for Bestemmelsen af Arealet. Det vil derfor være rigtigst i hvert enkelt Tilfælde at undersøge Søjlen for begge Formlers Vedkommende samt vælge et Tværnit, som gør højre Side saavel i Ligning (17) som i Ligning (23) større end venstre Side, eller i hvert Fald lig dermed.

Ekspl. 74. En 3 m høj Søjle af Fyrretræ med kvadratisk Tværnit skal med Sikkerhed kunne bære 20000 kg. Find Kvadratsiden, naar  $k_t = 0,63$  kg/mm<sup>2</sup> og  $E = 950$  kg/mm<sup>2</sup>, medens  $n$  sættes til 10.

Ifølge (17) har man

$$20000 = x^2 \cdot 0,63, \quad \text{hvoraf } x = 178,2 \text{ mm.}$$

Ifølge (23) er

$$20000 = \frac{10 \cdot 950 \cdot J}{10 \cdot 3^2 \cdot 1000^2}, \quad \text{altsaa}$$

$$J = \frac{1}{12} x^4 = \frac{20000 \cdot 1000^2 \cdot 3^2 \cdot 10}{10 \cdot 950}, \quad \text{hvoraf}$$

$$x = 218,4 \text{ mm.}$$

Søjlen kan altsaa af Hensyn til Styrken passende være af 22 cm  $\times$  22 cm Tømmer.

Ekspl. 75. Hvor meget kan en 3 m høj, hul cirkulær Søjle af Smedejærn bære, naar den udvendige Diameter



$D = 130$  mm og den indvendige  $d = 115$  mm?  $E = 20000$  kg/mm<sup>2</sup>,  $k_t = 7,5$  kg/mm<sup>2</sup> og  $n = 5$ .

$$J = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64} (130^4 - 115^4) = 5443000 \text{ mm}^4.$$

Ifølge (23) er

$$P = \frac{10 \cdot 20000 \cdot 5443000}{5 \cdot 3000^2} = 24180 \text{ kg.}$$

Ifølge (17) er

$$P = 7,5 \cdot \frac{\pi}{4} (130^2 - 115^2) = 21670 \text{ kg.}$$

Søjlen bør altsaa kun belastes med 21600 kg.

Ekspl. 76. Hvor stort et Tryk tør man byde en 5 m høj Smedejærns Søjle af det paa Fig. 95 viste Tværsnit, der er dannet af to  $\square$ -Jærn Profil Nr. 10 og to 10 mm tykke Smedejærnsplader?  $n = 4$ .

Antages det betragtede Tværsnit ikke at indeholde Nittehuller, ville Inertimomenterne med Hensyn til  $XX$  og  $YY$  være henholdsvis  $J_x = 13220000$  mm<sup>4</sup> og  $J_y = 10640000$  mm<sup>4</sup>. Søjlen vil, da  $J_y < J_x$ , bøje sig efter Retningen  $XX$ , og Belastningen maa altsaa findes ved

$$P = \frac{10 EJ_y}{n \cdot L^2} = \frac{10 \cdot 20000 \cdot 10640000}{4 \cdot 5000^2} = 21280 \text{ kg.}$$

Søjle's Tværsnitsareal er 5700 mm<sup>2</sup>. Ved (17) vilde man for  $k_t = 7,5$  kg/mm<sup>2</sup> finde  $P = 42760$  kg.

Søjlen maa altsaa kun belastes med 21000 kg.

Ekspl. 77. En Støbejærns Søjle, 4 m lang og af det paa Fig. 96 viste hule kvadratiske Tværsnit, skal kunne bære 20000 kg. Find Tværsnitsdimensionerne, naar  $E = 10000$  kg/mm<sup>2</sup> og  $n = 6$ .

$$\text{Af } P = \frac{10 EJ}{n L^2} \text{ faar man } J = 19200000 \text{ mm}^4.$$

Kaldes Godstykkelsen  $x$ , og antages det udvendige Kvadrats Side at være  $10 x$ , medens Siden i det indvendige Kvadrat altsaa bliver  $8 x$ , findes Inertimomentet med Hensyn til saavel  $X X$  som  $Y Y$  at være

$$J = \frac{1}{12} [(10 x)^4 - (8 x)^4] = 492 x^4;$$

$$492 x^4 = 19200000; x = 14,05 \text{ mm.}$$

Kvadratsiderne kunne derefter passende gøres  $141 \text{ mm}$  og  $112,5 \text{ mm}$ , hvorved Godstykkelsen bliver  $14,25 \text{ mm}$ .

Ved Benyttelsen af (17) vil Søjlen vise sig stærk nok til at modstaa den direkte Sammentrykning.

Ekspl. 78. En Søjle af valset Kvadrantjærn, der er  $5 \text{ m}$  høj, skal bære  $40000 \text{ kg}$ . Hvilket Profil Nr. i Tabel VII. G. skal man bruge, naar  $E = 20000 \text{ kg/mm}^2$  og  $n = 5$ ?

Ved Benyttelse af (23) faar man  $J = 25000000 \text{ mm}^4$ . Hertil svarer Profil Nr.  $7\frac{1}{2}$ , som ogsaa vil være stærkt nok til at modstaa den direkte Sammentrykning.

### 3. Forskydning.

Virke to parallelle Kræfter i modsatte Retninger paa to Tværnsnit af et Legeme, der ligge umiddelbart opad hinanden, ville Kræfterne søge at forskyde de to Tværnsnit i Forhold til hinanden. Man siger da, at Legemet paavirkes til Forskydning eller Overklipping. Materialet vil imod denne Paavirkning frembyde en Modstand af samme Størrelse, for saa vidt der ikke indtræder Brud, og denne Modstand kan ligesom ved Strækning og Sammentrykning betragtes som jævnfordelt over hele det Tværnsnitsareal, i hvilket Paavirkningen til Forskydning finder Sted. Kaldes den ydre Paavirkning  $P$ , Tværnsnitsarealet  $A$  og den Paavirkning pr. Kvadratenhed af Tvær-



snitsarealet, som vil svare til Brud,  $K_f$ , vil der indtræde Brud i Konstruktionsdelen, naar

$$P = A \cdot K_f. \quad (24)$$

$K_f$  udtrykkes i  $\text{kg}/\text{mm}^2$ , og Værdier af den findes for en Del Materialers Vedkommende angivne paa Tabel II. Ligning (24) benyttes til at bestemme, hvor stor en Kraft der kræves for at overklippe en Konstruktionsdel af bekendt Materiale og Tværsnit.

Ekspl. 79. Ved Hjælp af en Løkkemaskine skal der i en 15 mm tyk Smedejærns Plade udhugges (lokkes) cylindriske Huller af 25 mm Diameter. Hvor stor Kraft udføres dertil, naar  $K_f = 24 \text{ kg}/\text{mm}^2$ ?

Ifølge (24) har man

$$P = \pi \cdot 25 \cdot 15 \cdot 24 = 28274 \text{ kg.}$$

$P$  bør dog gøres noget større, for at Bruddet kan ske lettere.

Skal man bestemme Tværsnitsdimensionerne af en Konstruktionsdel, der udsættes for Paavirkning til Forskydning, saaledes at der ikke er nogen Fare for Brud, maa man benytte en Paavirkning pr. Arealenhed, som kun er en Brøkdels af  $K_f$ . Denne Værdi angiver den tilladte Paavirkning pr. Arealenhed for Forskydning og betegnes ved  $k_f$ . Værdier for  $k_f$ , som i Almindelighed er  $0,8 \cdot k_s$ , findes angivne paa Tabellerne III og IV i  $\text{kg}/\text{mm}^2$ .

$$\text{Ligning} \quad P = A \cdot k_f \quad (25)$$

vil altsaa være at benytte dels til Bestemmelse af den Paavirkning  $P$ , som man med Sikkerhed tør byde et givet Areal til Forskydning, uden at behøve at frygte for, at der skal indtræde Brud, dels til at finde, hvor stort et

Tværsnitsareal  $A$  Legemet maa have paa vedkommende Sted, for at det tør udsættes for Virkningen af en given forskydende Kraft  $P$ .

Ekspl. 80. Et Træspær  $A$  (Fig. 97) er tappet ned i Bjælken  $B$ .  $A$  og  $B$  ere af  $15 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$  Fyrretømmer og danne  $45^\circ$  med hinanden. Gennem  $A$  virker der en sammentrykkende Kraft paa  $3000 \text{ kg}$ . Find den Bjælkelængde  $x$ , som af Hensyn til den forskydende Kraft maa være udenfor Tappen.

$$\text{Til Forskydning vil virke } P = \frac{3000}{\sqrt{2}} = 2122 \text{ kg.}$$

Sættes  $P = 2125 \text{ kg}$  og  $k_f = 0,07 \text{ kg/mm}^2$ , vil man, da der til at modstaa Forskydningen findes tre Arealer, alle af Længde  $x$  og Bredde  $5 \text{ cm}$ , ved Benyttelse af (25) faa

$$2125 = 3 \cdot 50 \cdot x \cdot 0,07; \quad x = 202 \text{ mm.}$$

Vilde man undersøge Tappen for Forskydning, vil den vise sig at blive stærkere paavirket end forsvarligt, men man kan da sikre Forbindelsen ved Beslag, i hvilket Tilfælde  $x$  iøvrigt kan gøres noget mindre end den beregnede Værdi.

Blandt de Jærnkonstruktioner, i hvilke Forskydning forekommer, skal man særlig omtale Konstruktionsdele samlede ved Nitter og Bolte.

#### Nitninger.

Smedejærns- og Staalplader kunne samles ved de saakaldte Nitter eller Nagler, der ere smedede cirkulære Cylindre, som ved Enderne ere forsynede med Nittehoveder, hvoraf nogle almindeligt forekommende Former ere viste paa Fig. 98 og 99. Nittens ene Hoved har sin endelige Form forinden dens Anbringelse i Konstruktionen, medens det andet Hoved, efter at Nitten er anbragt paa sin Plads,



ved Hammerslag dannes af den cylindriske Del, som oprindelig er noget længere end den samlede Tykkelse af de Plader, som skulle samles. Fig. 98 viser en Nitte med fremstaaende Hoved, Fig. 99 en Nitte med forsænket Hoved.  $D = 1,5 d$  à  $1,6 d$ ;  $h = 0,5 d$  à  $0,6 d$  og  $o = \frac{1}{8} d$ .  $D_1 = 1,7 d$  à  $2 d$ ;  $h_1 = \frac{1}{3} d$  à  $0,4 d$ . Naar to Plader skulle samles ved Nitning, kan dette ske enten derved, at Pladerne samles direkte, idet den ene lægges et Stykke henover den anden, som vist paa Fig. 100 og 101, hvor Forbindelsen er tilvejebragt henholdsvis ved een og to Nitterækker, eller som i Fig. 102 og 103, hvor der er anvendt Stødplader eller Lasker, henholdsvis een og to. Antager man, at der i de to Plader, som skulle samles, virke de to ligestore, men modsatte Kræfter  $P$ , ville Nitterne netop paavirkes til Forskydning af Kraften  $P$ . I Fig. 100, 101 og 102 vil hver Nitte frembyde eet Tværnsitsareal til at modstaa Forskydningen; der vil altsaa i Fig. 100 og 102 i det Hele findes to Nittearealer og i Fig. 101 fire Nittearealer virksomme i saa Henseende. Derimod vil hver Nitte i Fig. 103 frembyde to Arealer til Modstand mod Forskydningen; her vil altsaa ialt fire Nittearealer yde Modstand. Betegnes Nittediametren ved  $d$ , vil man i Tilfældene Fig. 100 og 102, hvor der er to Nitter, af hvilke hver frembyder et Areal  $\frac{\pi}{4} d^2$ , ifølge (25) have

$$2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot k_f = P, \text{ hvoraf } d = \sqrt{\frac{2P}{\pi k_f}}$$

og i Tilfældene Fig. 101 og 103, hvor der findes fire Nittearealer virksomme hvert Sted,

$$4 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot k_f = P, \text{ hvoraf } d = \sqrt{\frac{P}{\pi k_f}}$$

I de nævnte Tilfælde var Antallet af virksomme Nitte-

arealer forud bekendt, og af dette Antal afhæng igen Nittediametren, men ofte foretrækker man at gaa den modsatte Vej, idet man fastsætter Nittediametren og derefter beregner Antallet af Nittearealer. Kaldes dette Antal  $n$ , har man

$$\frac{\pi}{4} d^2 \cdot n \cdot k_f = P, \text{ hvoraf } n = \frac{4P}{\pi d^2 \cdot k_f} = \frac{1,27P}{d^2 \cdot k_f}. \quad (26)$$

Betegner  $t$  Pladetykkelsen, kan man passende,

$$\left. \begin{array}{l} \text{naar } t < 12 \text{ mm, gøre } d = (t + 10) \text{ mm,} \\ \text{,, } t > 12 \text{ mm, ,, } d = (0,5t + 16) \text{ mm.} \end{array} \right\} \quad (27)$$

Ogsaa flere end to Plader kunne samles ved Nitning.

Hvor Plader af forskellig Tykkelse skulle samles, betegner  $t$  deres Middeltykkelse.

$d$  gøres i Reglen ikke over 26 mm.

For at Stødpladerne kunne være i Stand til at yde en ligesaa stor samlet Modstand mod Overrivning (Strækning) som de Plader, der skulle samles, maa man, hvor enkelt Stødplade anvendes, gøre dennes Tykkelse  $t_1 = t$ , medens Stødpladerne, naar der bruges to, hver bør have en Tykkelse af  $\frac{5}{8}t$  à  $\frac{3}{4}t$ .

Afstanden  $a$  mellem Nitterne i samme Plade bestemmes derved, at Pladen skal gøre samme Modstand som Nitterne mod den ydre Paavirkning.

I Tilfældene Fig. 100 og 102 har man altsaa

$$(a - d) t k_s = \frac{\pi}{4} d^2 k_f, \text{ hvoraf } a = d + \frac{\pi d^2 k_f}{4 t k_s}.$$

Indsættes heri  $k_f = \frac{4}{5} k_s$ , bliver

$$a = d + 0,63 \frac{d^2}{t},$$

og i Tilfældene Fig. 101 og 103



$$(a - d) t k_s = 2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 k_f, \text{ hvoraf } a = d + \frac{\pi d^2 k_f}{2 t k_s},$$

som for  $k_f = \frac{4}{5} k_s$  bliver til

$$a = d + 1,26 \frac{d^2}{t}.$$

Afstanden  $e$  til Pladeranden kan passende sættes til  $2d$ , naar der er een Række Nitter, og til  $1,6d$ , hvis der benyttes to eller flere Nitterækker. Afstanden  $b$  mellem Nitterækkerne sættes til  $0,8a$ , naar Nitterne sidde lige bagved hinanden som i Fig. 101, og til  $0,5a$  à  $0,6a$ , naar de som i Fig. 104 ere forsatte i Forhold til hinanden. Naar de ovenfor angivne Afstande ere bestemte, vil saavel Pladernes Bredde som Stødpladernes eller Overdækningernes Længde let kunne findes.

Ekspl. 81. To Smedejærnsbaand, 12 mm tykke, paa-virktes til Strækning af 10000 kg og skulle samles ved Nitning.

Da  $t = 12$  mm, faar man ifølge (27)

$$d = (t + 10) \text{ mm} = 22 \text{ mm}.$$

Af  $n = \frac{1,27 P}{d^2 k_f}$ , hvor  $k_f = 7,2$  kg/mm<sup>2</sup>,  $P = 10000$  kg og  $d = 22$  mm, faas  $n = 3,644$ ;  $4 > n > 3$ .

Samles Pladerne som i Fig. 101, maa der anvendes fire Nitter i Samlingen.

$$a = d + 1,26 \frac{d^2}{t} = \text{ca. } 73 \text{ mm}.$$

Pladerne maa altsaa gøres 146 mm brede,  $e = 1,6d = 35,5$  mm og  $b = 0,8a = 58,5$  mm.

Overdækningens Længde bliver derved 129,5 mm.

Benyttes der to Stødplader, maa der anbringes to Nitter paa hver Side af Stødet.  $a = 73$  mm,  $e = 2d = 44$  mm,  $t_1 = \frac{5}{8}t = 7,5$  mm. Stødpladernes Længde bliver  $4e = 176$  mm.

I det foreliggende Eksempel kunde der naturligvis godt anvendes enkelt Stødplade og i saa Fald dobbelt Nitterække paa hver Side af Stødet.

Gaar Paavirkningen i Pladerne bort fra hinanden (Pladerne strækkes), behøve de ikke, hvor Samlingsplade anvendes, at støde imod hinanden; trykkes Pladerne derimod ind imod hinanden, bør de støde til hinanden og ved Stødet være nøjagtigt afrettede vinkelret paa den Retning, hvorefter Kraften virker, for at Berøringen kan blive saa inderlig som mulig.

Den Maade, hvorpaa Nittesamlinger iøvrigt indrettes, vil afhænge af hvert enkelt foreliggende Tilfælde. Til nærmere Oplysning skal anføres et Par Eksempler.

Ekspl. 82. Paa Fig. 105 er der vist en ved et Spærfag forekommende Samling af tre Baand og een Stiver. I Punktet  $O$  tænkes Baandenes og Stivernes Akser ved Forlængelse at støde sammen. Baandene  $OA$ ,  $OC$  og  $OD$  paavirkes henholdsvis af 12000 kg, 1500 kg og 9000 kg til Strækning, medens Stiveren  $OB$  paavirkes til Sammentrykning af 3000 kg.  $OA$  og  $OD$  dannes af 14 mm tykt Baandjærn og  $OC$  af 6 mm tykt Baandjærn. Samlingen er tænkt ordnet saaledes som angivet paa Figuren, hvor Baandene støde mod en 14 mm tyk Samlingsplade af Smedejærn, til hvilken de ere befæstede ved enkelte Stødplader. Stiveren bestaar derimod af to Vinkeljærn, som ligge hver paa sin Side af den 14 mm Samlingsplade. Til Samlingen er der anvendt Nitter, som ere anbragte saaledes, at der i de yderste Nitterækker kun findes een



Nitte, hvorved Baandenes Bredde indskrænkes saa meget som muligt. Fremdeles ere Nitterne overalt forsatte for hinanden.  $k_s = 9 \text{ kg/mm}^2$  og  $k_f = 7,2 \text{ kg/mm}^2$ .

Baandet  $OA$ .

Nittediametren  $d = 7 + 16 = 23 \text{ mm}$ .

Antallet af Nittearealer og altsaa ogsaa af Nitter er

$$\text{ifølge (26)} \quad n = \frac{1,27 \cdot 12000}{23^2 \cdot 7,2}; \quad n = 4.$$

Vil man beregne Baandets Bredde under Forudsætning af, at det vilde briste over den enkelte Nitte til venstre, bliver Bredden

$$x = 23 + \frac{12000}{14 \cdot 9} = 118 \text{ mm}.$$

Forudsættes Baandet at ville briste over de mellemste Nitter, bliver

$$x = 2 \cdot 23 + \frac{12000 - \frac{\pi \cdot 23^2}{4} \cdot 7,2}{14 \cdot 9} = 118 \text{ mm},$$

idet den enkelte Nitte til venstre da samtidig maatte briste, for at Forbindelsen skulde ophøre.

Baandet  $OD$ .

$$d = 23 \text{ mm}, \quad n = \frac{1,27 \cdot 9000}{23^2 \cdot 7,2}; \quad n = 3.$$

Baandets Bredde bliver

$$y = 23 + \frac{9000}{14 \cdot 9} = 95 \text{ mm}.$$

Stødpladerne ved disse to Baand blive 14 mm tykke.

Stødpladen ved Baandet  $OC$  gøres 6 mm tyk.

Nitterne, som forbinde den 6 mm Stødplade og Baandet  $OC$ , faa Diametren  $d = 16 \text{ mm}$ .

$$n = \frac{1,27 \cdot 1500}{16^2 \cdot 7,2}; \quad n = 2.$$

Nitterne, som forbinde den 14 mm Samlingsplade og den 6 mm Stødplade, faa Diametren  $d = 20$  mm.

$$n = \frac{1,27 \cdot 1500}{20^2 \cdot 7,2}; n = 1.$$

$$\text{Baandets Bredde } z = 20 + \frac{1500}{6 \cdot 9} = 48 \text{ mm.}$$

Til Stiveren  $OB$ , som i Spærfaget har en Længde af 2 m, er tænkt benyttet to Vinkeljærn med en indbyrdes Afstand af 14 mm, saaledes at de kunne befæstes hver paa sin Side af Samlingspladsen (se Fig. 106). Disse Vinkeljærns mindste Inertimoment i den omtalte Stilling skal være lig med eller større end den Værdi, som man faar for  $J$  af Ligning (23), naar  $n = 5$ . Da  $P = 3000$ ,  $E = 20000$  og  $L = 2000$ , faar man  $J = 300000 \text{ mm}^4$ .

Vælges Profil Nr.  $\frac{4}{6}$  (Tabel VII.B), og stilles Vinkeljærnene som vist paa Fig. 106, vil Inertimomentet ved en Undersøgelse vise sig at være mindst med Hensyn til  $XX$  Aksen, nemlig 346000, og de to Vinkeljærn altsaa tilstrækkeligt stærke, eftersom Arealet ogsaa er stort nok til at modstaa den direkte Sammentrykning.

Nittediametren kan sættes til 18 mm, da Middeltykkelsen af Pladerne, som skulle samles, er 8 mm.

$$n = \frac{1,27 \cdot 3000}{18^2 \cdot 7,2}; n = 2.$$

Een Nitte vil saaledes være tilstrækkelig, da den frembyder to Arealer til at modstaa Forskydningen. For at gøre Forbindelsen yderligere sikker, bør der dog, som vist paa Figuren, anbringes to Nitter.

Naar en Konstruktionsdel, der paavirkes til Sammentrykning, saaledes som den her forekommende Stiver, bestaar af flere Stykker (her to Vinkeljærn), der skulle virke sammen, bør man, for fuldtud at opnaa dette, paa pas-



sende Steder (i Afstande af 0,5 m à 1 m) forbinde de enkelte Stykker ved Nitning, idet et lille Pladestykke af passende Tykkelse (her 14 mm) lægges imellem Stykkerne paa vedkommende Sted. Til saadanne Forbindelser kan godt anvendes mindre Nitter.

Med Hensyn til Nitters Anbringelse i Samlinger bør det iagttages, at de saavidt muligt ordnes symmetrisk med Hensyn til vedkommende Baand eller Stivers geometriske Akse.

Eksp. 83. Fig. 107 viser i to Projektioner en sammen-nittet Pladejærnsdrager med Stødforbundelse i Hoved og Krop. Den 8 mm Kropplade er ved Vinkeljærn Profil Nr. 8 og ved 20 mm Nitter samlet med de 10 mm Plader i Hoved og Fod.

Nitterne anbringes i Almindelighed med samme indbyrdes Afstand paa hele Dragerens Længde.

Kaldes Reaktionen i Understøtningerne  $Q$  udtrykt i kg, Dragerens Højde  $h$ , dens Kroptykkelse  $\delta$ , Nitte-diametren  $d$ , Nitteafstanden  $a$ , disse udtrykte i mm, og kaldes Materialets tilladelige Paavirkning i kg/mm<sup>2</sup> til Forskydning  $k_f$ , kan man sætte

$$a \begin{cases} = \\ < \end{cases} 12,6 \frac{d \delta h}{Q}, \text{ naar } d \begin{cases} > \\ = \end{cases} 1,6 \delta \text{ og}$$

$$a = 1,8 \frac{\frac{\pi d^2}{4} \cdot k_f \cdot h}{Q}, \text{ naar } d < 1,6 \delta.$$

Finder man  $a > 6 d$ , gøres  $a = 6 d$ .

Den mindste brugelige Afstand er 2,5  $d$  à 3  $d$ .

Finder man ved Beregningen et mindre  $a$  (paa Grund af at Dragerens Hoved er meget svært), maa man forøge Kroptykkelsen og formindske Tværsnittet af Hovedet.

Ved Stødene anbringes Stødplader, hvis Tykkelse bestemmes i Henhold til det foregaaende.

I Hovedet er der tænkt anbragt enkelt Stødplade; dennes Tykkelse bliver altsaa her 10 mm. Kaldes det nyttige Tværnsnitsareal i den overskaarne Plade  $A$  og Summen af de Nittearealer, som maa findes i Samlingen for at yde en lige saa stor Modstand mod Forskydning, som Pladen yder mod Strækning eller Sammentrykning,  $N$ , kan man bestemme Antallet af virksomme Nittearealer paa følgende Maade:  $A \cdot k_s = N \cdot k_f$ . For  $k_f = \frac{4}{5} k_s$  faar man

$$N = \frac{5A}{4}. \quad \text{Da } N = n \cdot \frac{\pi}{4} d^2, \text{ bliver } n = \frac{5A}{\pi d^2}.$$

Tværnsnitsarealet af den i Hovedet indgaaende Plade er, naar Nittehullerne fradrages, 1600 mm<sup>2</sup>, altsaa  $n = 7$ .

Da hver Nitte frembyder eet Areal mod Forskydning, vilde det være tilstrækkeligt at anbringe 7 Nitter paa hver Side af Stødet, men da der sidder to og to Nitter ved Siden af hinanden, kommer der til at indgaa otte Nitter i Samlingen paa hver Side af Stødet, og derved er Stødpladens Længde bestemt. En Samling i Foden maa i dette Tilfælde blive ganske som Samlingen i Hovedet. Nitterne i Kroppens Samling kan man give en lidt mindre Diameter end Nitterne i Hoved og Fod, da Pladernes Middelttykkelse i Kroppen er mindre end de to andre Steder. Sættes  $d = 17$  mm, vil Antallet af Nittearealer, da Kroppladens nyttige Tværnsnitsareal er ca. 5000 mm<sup>2</sup>, blive 28. Efter-som hver Nitte frembyder to Arealer til at modstaa Forskydningen, bliver Antallet af Nitter fjorten paa hver Side af Stødet. De fjorten Nitter anbringes bedst i tre Rækker, som vist paa Figuren. For Stødpladernes Vedkommende vil der være størst Fare for Bristning over den Stødet nærmest værende Nitterække. Stødpladernes nyttige Tværnsnitsareal bør derfor paa dette Sted være mindst ligesaa



stort som det nyttige Tværsnitsareal af den stødte Kropplade. Deres Tykkelse  $t_1$  faar man da af Ligningen

$$(480 - 5 \cdot 17) 2t_1 = 5000, \text{ hvoraf } t_1 = 7 \text{ mm.}$$

Bolte.

Boltene ere ligesom Nitterne retstaaende cirkulære Smedejærns cylindre, som i den ene Ende ere forsynede med et fast Hoved, Boltehovedet, medens den anden Ende er skrueskaaren. Her paaskrues et løst Hoved, den saakaldte Møttrik, under hvilken der ofte anbringes en Underlagsskive. Boltehoved og Møttrik kunne have meget forskellige Tværsnitsformer (Kvadrat, regulær Sekskant eller Cirkel). Paa Fig. 108 er der vist en Bolt med sekskantet Hoved, Møttrik og Underlagsskive.

Er Boltediametren  $d$  udtrykt i Millimeter, bliver  $D = 5 + 1,4 d$ ;  $D_1 = 1,155 D$ ;  $U = 1,3 D$ ;  $u = 0,1 D$ ;  $H = d$ ;  $h = 0,7 d$ .

Bolte kunne benyttes baade til Samling af Smedejærns- og Støbejærnsdele. De kunne paavirkes enten efter deres Længderetning (til Strækning eller Sammentrykning) eller ogsaa tværs paa Længderetningen (til Forskydning eller Bøjning og ofte i ringe Grad tillige til Vridning). Hvis man vil tage Hensyn til denne Vridning, kan det ske ved, at man regner med Paavirkninger pr. Arealenhed, der ere lavere, end man ellers vilde benytte.

Udsættes en Bolt for en strækkende eller sammentrykkende Paavirkning, beregnes Kærnediametren i den skrueskaarne Del for den ydre Paavirkning, og Boltens faar da paa den ikke skrueskaarne Del samme Diameter som Skruens ydre Diameter.

Kaldes Kærnediametren  $d_1$  og Skruens ydre Diameter  $d$ , begge udtrykte i Millimeter, kan man passende sætte  $d_1 = 0,9 d - 1,3$ .

Med Hensyn til Beregningen af Boltens Tværsnitsdimen-

sioner, naar de faa en Paavirkning vinkelret paa deres Længderetning, skal man bemærke, at de kunne beregnes til Forskydning, hvis de Dele, som skulle samles, ere spændte meget stærkt ind imod hinanden. Er dette ikke Tilfældet, ville Boltene ogsaa faa en bøjende Paavirkning, og de bør i saa Fald beregnes for denne Paavirkning, hvilket vil blive nærmere omtalt senere, under Afsnittet om Bøjning.

Beregnes Boltene for Forskydning, bør man dog, af Hensyn til den mulig samtidige bøjende Paavirkning, byde Materialet en mindre Paavirkning, end man ellers vilde lægge til Grund for Beregningen.

Ekspl. 84. Fig. 109 viser, hvorledes et Spær i den Ende, hvor det skal hvile paa Muren, kan samles med et Baand af Rundjærn. Spæret hviler i en saakaldt Sko af Støbejærn. I Samlingens lodrette Billede er Spæret vist i Skoen, i det vandrette Billede er det tænkt borttaget. Igennem Baandet virker en Kraft paa 6000 kg. Kærnediametren af Rundjærnsstangen  $A$  vil paa den skrueskaarne Del, naar  $k_s = 6$  kg/mm<sup>2</sup>, kunne findes af

$$\frac{\pi}{4} d_1^2 \cdot 6 = 6000; d_1 = \sqrt{\frac{4000}{\pi}} = 35,69 \text{ mm}; d_1 = 36 \text{ mm.}$$

Af  $d_1 = 0,9 d - 1,3$  faar man Stangens Diameter  $d = 41,5$  mm.

Igennem hver af Gafflen  $B$ 's to Grene virker der 3000 kg. Giver man dem rektangulært Tværsnit med Højde  $h = 2b$ , faar man  $2b \cdot b \cdot 6 = 3000$ .

$$b = \sqrt{250} = \text{ca. } 16 \text{ mm, } h \text{ altsaa } 32 \text{ mm.}$$

Da det 6000 kg store Træk muligvis vil fordele sig noget ulige paa Gafflens to Grene, kan der dog være Anledning til at gøre  $b$  og  $h$  lidt større, f. Eks. henholdsvis 20 mm og 40 mm.



Bolten vil for hver af Gafflens Grene frembyde eet Tvær-  
snitsareal mod Forskydning. Sættes  $k_f = 4,8$  kg/mm<sup>2</sup>, faar  
man dens Diameter  $d_o$  af Ligningen

$$\frac{\pi}{4} d_o^2 \cdot 4,8 = 3000; d_o = \sqrt{\frac{3000 \cdot 4}{\pi \cdot 4,8}} = 28,2 \text{ mm}; d_o = 30 \text{ mm.}$$

Bredden  $b_o$  af Jærnet i Øskenen (Fig. 110) kan bestem-  
mes ved, at Øskenen skal frembyde et Tværnsnitsareal lige-  
saa stort som Tværnsnitsarealet af Gafflens ene Gren mod  
Strækning, altsaa  $b_o \cdot 20 = 20 \cdot 40$ , hvoraf  $b_o = 40$  mm.

Ekspl. 85. I Fig. 111 støde tre Stænger sammen i  $O$ .  
De paavirkes alle til Strækning, nemlig  $AO$  af 6800 kg,  
 $OB$  af 2000 kg og  $OC$  af 5200 kg. Stængerne gøres af  
Rundjærn, og deres Diametre blive under Forudsætning  
af, at  $k_s = 9$  kg/mm<sup>2</sup>, henholdsvis 32 mm, 17 mm og  
28 mm. Stængerne forsynes alle med Øskener af samme  
Tykkelse, nemlig 32 mm, og samles indbyrdes imellem to  
Smedejærns Plader af Tykkelse 16 mm ved Bolte gennem  
Øskenerne. Disse Bolte ville hver for sig frembyde to  
Tværnsnitsarealer til Modstand mod Forskydning. Sættes  
 $k_f$  til 6 kg/mm<sup>2</sup>, bliver Diametren af Boltene gennem  
 $AO$ ,  $OB$  og  $OC$ , ifølge Ligningen  $2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot k_f = P$ , hen-  
holdsvis 27 mm, 15 mm og 24 mm.

Bredden  $b_o$  af Jærnet i Øskenerne bliver i Henhold til  
den i det foregaaende Eksempel anførte Regel henholdsvis  
26 mm, 8 mm og 20 mm.

Afstandene  $a_1$ ,  $a_2$  og  $a_3$  mellem Boltene og Pladeran-  
den i Retning af Stængernes geometriske Akse kan be-  
stemmes derved, at de to Plader tilsammen paa disse  
Steder skulle have ligesaa store Tværnsnitsarealer som  
Rundjærnsstængerne, altsaa  $\frac{1}{4} \pi \cdot 32^2 = 2 \cdot 16 a_1$ , hvoraf  
 $a_1 = 26$  mm.

Paa samme Maade findes  $a_2 = 8$  mm og  $a_3 = 20$  mm. Der kan dog være Grund til at gøre Afstandene lidt større, nemlig henholdsvis 32 mm, 10 mm og 25 mm, da to 16 mm Plader ikke yde saa stor Modstand som een 32 mm Plade.

Afstandene mellem Boltehullernes Centrere og Pladeranden blive derved paa disse Steder henholdsvis  $45,5$  mm,  $17,5$  mm og 37 mm.

Ved saavel Nitte- som Boltensamlinger bør man iøvrigt, særlig hvor de Stykker, som skulle samles, ere tynde, undersøge, om der ikke er Fare for Knusning af Materialet. Pladen eller Øskenen anses for stærk nok, naar et rektangulært Areal, hvis Sider ere Hullets Diameter og henholdsvis Pladens eller Øskenens Tykkelse, er stort nok til at modstaa Knusning. Er dette ikke Tilfældet, bør Pladen forstærkes paa vedkommende Sted eller Øskenen være tykkere.

#### 4. *Bøjning.*

Et prismatisk Legeme, der er understøttet i to eller flere Punkter eller er indspændt i den ene Ende, vil, naar det paavirkes af Kræfter vinkelrette paa dets Længderetning, antage en krum Form, blive bøjet. Formen afhænger dels af den Maade, hvorpaa Legemet er understøttet, dels af dets Længde, dels af den samlede Belastning og dens Fordeling, dels endelig af vedkommende Materiales Modstandsevne mod ydre Paavirkninger. Formforandringen vil dog i Almindelighed for de Materialers Vedkommende, som forekomme i Bygnings- og Maskinkonstruktioner, være meget ringe indenfor Proportionalitetsgrænsen, eller man vil i alt Fald som oftest forlange, at Formforandringen holdes indenfor snævre Grænser.



Fig. 112<sup>a</sup> forestiller lodret Billede af et vandret liggende prismatisk Legeme  $ABCD$ , som er indspændt i den ene Ende ved  $AD$ , og i den anden Ende  $BC$  paa-virket af en lodret nedad virkende Kraft  $P$ . Fig. 112<sup>b</sup> angiver et Snit i Legemet vinkelret paa dets Længderetning.

Legemet kan tænkes bestaaende af en overordentlig stor Mængde ganske tynde prismatiske Legemer af samme Længde som Legemet og med deres Endeflader i Legemets Endeflader, i hvilke de indgaa som Arealelementer. Disse tynde prismatiske Legemer kaldes Legemets Fibre. Idet Legemet under  $P$ 's Virkning bøjes, viser det sig, at Fibrene paa Legemets øverste Del forlænges, og at Fibrene paa den underste Del forkortes, medens der mellem de forlængede og forkortede Fibre findes et Lag Fibre, hvis Længde ikke forandres, og som, forinden  $P$  begynder at virke, ligge i et vandret Plan. Samtidig med at Legemet bøjes, gaar dette Plan over til at blive en Cylinderflade, som kaldes den neutrale Flade, fordi de i den liggende Fibre ikke undergaa nogen Længdeforandring. Fremdeles viser det sig, at Fibrene forlænges eller forkortes desto mere, jo fjernere de ligge fra den neutrale Flade henholdsvis over og under den.

Paa Fig. 112<sup>a</sup> angiver  $AEKD$  Legemets Form efter Bøjningen og  $GMUH$  den neutrale Flade.

Betegnes et vilkaarligt Tværsnit i Legemet ved  $NMO$ , punkteret, hvor Legemet har Formen  $ABCD$ , og fuldt optrukket i Figuren  $AEKD$ , og antages dette Tværsnit at ligge i Afstanden  $x$  fra  $BC$ , har man i Ligevægtslæren paavist, at Kraften  $P$ 's Virkning paa dette Tværsnit ytrer sig som en enkelt Kraft  $P$  i Tværsnittet og et Bøjningsmoment  $P \cdot x$ , nemlig  $P$ 's Moment med Hensyn til Tværsnittets Tyngdepunkt. Den enkelte Kraft  $P$  i Tværsnittet virker lodret nedad og vil søge at forskyde den til højre for Tværsnittet liggende Del af Legemet i Forhold til den

anden Del. Imod denne Forskydning maa Legemets Fibre yde en Modstand lodret opad af Størrelse  $P$ . Denne Modstand betegnes ved  $F$ , og den vil ifølge Afsnittet om Forskydning fordele sig jævnt over hele Tværnsnitsarealet. Bøjningsmomentet  $P \cdot x$  vil søge at dreje den til højre for  $NMO$  liggende Del af Legemet fra venstre til højre omkring Skæringslinien  $MM$  mellem Tværnsnittet  $NMO$  og den neutrale Flade, altsaa med Uhrets Visere, hvorved Fibrene over den neutrale Flade ville paavirkes til Strækning og Fibrene under den til Sammentrykning.

Saasart Legemet ikke krummes yderligere, maa dette hidrøre fra, at der til venstre for  $NMO$  i de enkelte Fibre over den neutrale Flade er fremkaldt Modstande mod deres Strækning netop saa store som de strækkende Kræfter, der svare til Forlængelserne, og i de enkelte Fibre under den neutrale Flade Modstande saa store som de sammentrykkende Kræfter, der svare til Forkortelserne. Modstandene mod Strækning maa virke til venstre, og Modstandene mod Sammentrykning til højre. Betragter man et andet med  $NMO$  parallelt Tværnsnit, som ligger i en Afstand derfra, som er  $MU = L$ , vil dette Tværnsnit, naar Legemet bøjes, blive drejet i Forhold til  $NMO$  og antage Stillingen  $JUS$ . Dette Snit saavel som  $NMO$  forudsættes under Bøjningen at forblive plant. Lægges der nu gennem  $U$  et Snit  $RUQ$  parallelt med  $NMO$ , ser man, hvorledes Forlængelserne og Forkortelserne af de enkelte Fibre ville stille sig.

Betegnes det samlede Tværnsnitsareal af de over den neutrale Flade i Afstanden  $y$  fra denne liggende Fibre ved  $a$ , og det Stykke, hvormed Længden  $L$  forøges, ved  $e$ , vil ifølge Formel (13) Side 105 den Kraft, som svarer til Forlængelsen  $e$ , altsaa ogsaa Modstanden, være udtrykt ved

$$\frac{a E e}{L}$$



Da Fibrene forlænges desto mere, jo fjernere de ligge fra den neutrale Flade, vil  $\frac{e}{e_s} = \frac{y}{y_s}$ , hvor  $y_s$  betegner Afstanden fra den neutrale Flade til de yderste Fibre paa Legemets konvekse Side og  $e_s$  disses Forlængelse. Indsættes den heraf for  $e$  fundne Værdi  $e = \frac{e_s \cdot y}{y_s}$  i Udtrykket for Modstanden, bliver dette til

$$\frac{a E e_s}{L} \cdot \frac{y}{y_s}.$$

Heri kan  $y$  antage alle mulige Værdier mellem 0 og  $y_s$ , men samtidig vil ogsaa  $a$  variere paa en Maade, der er afhængig af Tværnittets Form.

Modstanden mod Sammentrykning af de i Afstanden  $y'$  fra den neutrale Flade paa Legemets underste Del liggende Fibre, hvis samlede Tværnsitsareal betegnes ved  $a'$ , og som forkortes et Stykke  $e'$ , bliver ifølge Formel (16)

$$\frac{a' E e'}{L},$$

hvor i man for  $e'$  kan indsætte den af  $\frac{e'}{e_s} = \frac{y'}{y_s}$  fundne Værdi

$e' = \frac{e_s y'}{y_s}$ , hvorved Udtrykket for Modstanden bliver

$$\frac{a' E e_s}{L} \cdot \frac{y'}{y}.$$

$y'$  kan antage alle Værdier mellem 0 og  $y_t$ , der er Afstanden fra den neutrale Flade til de stærkest sammentrykkede Fibre. Samtidig med at  $y'$  skifter Værdi, varierer ogsaa  $a'$ .

Medens den ydre Kraft  $P$ , som nævnt, vil søge dels at dreje den til højre for Tværnittet  $NMO$  liggende Del af Legemet dels at forskyde den lodret nedad, ville de omtalte ved  $P$ 's Virkning i Tværnittet fremkaldte Mod-

stande søge at forhindre disse Bevægelser, og der maa, hvis Legemet ikke yderligere skal forandre Form, være Ligevægt mellem den ydre Kraft og disse Modstande, som selv ere virkende Kræfter. Ifølge Ligevægtslæren vil der være Ligevægt mellem et System af Kræfter, naar de tre Ligevægtsligninger (se Side 26) ere tilfredsstillende, nemlig:

1) at Summen af Kræfternes vandrette Komposanter er Nul. Da  $P$  og  $F$  ere lodrette, medens de øvrige Modstande ere vandrette, vil denne Ligning komme til at angive, at Summen af disse sidste Modstande skal være Nul. Ligningen bliver da

$$\sum \frac{a E e_s y}{L y_s} - \sum \frac{a' E e_s y'}{L y_s} = 0,$$

idet Kræfterne, som virke til venstre, regnes for positive, og de, der virke til højre, for negative. I denne Ligning angive Sigmategnene Summen af de Størrelser, som man faar ved at lade  $y$  og  $y'$  antage alle mulige Værdier indenfor de forhen angivne Grænser, medens selvfølgelig samtidig  $a$  og  $a'$  variere paa den ved Tværnsnittens bestemte Maade. Ved udenfor Sigmategnene, der tillige virke som Parenteser, at sætte de for alle Addenderne fælles Faktorer, bliver Ligningen til

$$\frac{E e_s}{L y_s} (\sum a y - \sum a' y') = 0,$$

hvoraf man faar  $\sum a y - \sum a' y' = 0$ , (28)

som udtrykker, at Summen af Arealdelernes Momenter med Hensyn til Linien  $MM$  er Nul. Da Arealerne paa hver Side af  $MM$  saaledes ere i Ligevægt om denne, maa  $MM$  gaa gennem Tværnsnittets Tyngdepunkt. Den er Skæringslinien mellem Tværnsnittet og den neutrale Flade og kaldes den neutrale Akse. Det fremgaar altsaa af (28), at



Tværsnittets neutrale Akse gaar gennem dets Tyngdepunkt.

2) at Summen af Kræfternes lodrette Komposanter er Nul. Denne Ligning vil i det foreliggende Tilfælde, hvor Kraften  $P$  og Modstanden  $F$  begge ere lodrette, medens de øvrige Modstande ere vandrette, blive til  $P - F = 0$ , naar Retningen lodret nedad regnes for positiv.

Virkede der i Stedet for den enkelte Kraft  $P$  flere lodrette Kræfter til højre for Tværsnittet, vilde man i Stedet for  $P$  i Ligningen faa Summen af alle disse Kræfter, hvorved den bliver til

$$\Sigma P - F = 0, \quad (29)$$

hvor  $\Sigma P$  er den forskydende Kraft i Tværsnittet.

3) at Summen af Kræfternes Momenter er Nul.

Da den ydre Kraft vil søge at dreje den til højre for Tværsnittet liggende Del af Legemet om den neutrale Akse  $MM$ , vil det være naturligst at opstille Ligevægtsligningen mellem Momenterne af Kræfterne med Hensyn til denne Akse. Momentligningen vil i saa Fald blive

$$P \cdot x - \Sigma \frac{a E e_s y^2}{L y_s} - \Sigma \frac{a' E e_s y'^2}{L y_s} = 0.$$

Virkede der i Stedet for den ene Kraft flere Kræfter til højre for  $NMO$ , vilde man i Stedet for  $P \cdot x$  faa Summen af alle disse Kræfters Momenter med Hensyn til Tværsnittets Tyngdepunkt, eller med andre Ord den Størrelse, der tidligere er betegnet ved  $M_b$  og kaldt Bøjningsmomentet med Hensyn til Tværsnittet. Ligningens almindelige Form bliver herved til

$$M_b - \frac{E e_s}{L y_s} \Sigma (a y^2 + a' y'^2) = 0,$$

idet de for Addenderne fælles Faktorer ere satte udenfor Sigmategnet. Her variere selvfølgelig ogsaa  $a$ ,  $y$ ,  $a'$  og  $y'$ , som tidligere anført. Udtrykket  $\Sigma (a y^2 + a' y'^2)$  er netop

den Størrelse, som under Afsnittet om Sammentrykning er kaldt Tværnsnittets Inertimoment med Hensyn til  $MM$  som Akse, og som betegnes ved  $J$ . Ved Indførelse af  $J$  bliver Ligningen til

$$M_b = \frac{E e_s J}{L y_s}. \quad (30)$$

Havde man, den Gang Udtrykkene for de vandrette Modstande mod Strækning og Sammentrykning bleve fundne, i Stedet for at indføre  $y_s$  og  $e_s$ , indført  $y_t$  og  $e_t$ , hvor  $y_t$  angiver Afstanden fra den neutrale Akse til de yderste Fibre paa Legemets konkave Side og  $e_t$  disse Fibres Forkortelse, vilde man have faaet Ligningen

$$M_b = \frac{E e_t J}{L y_t}. \quad (31)$$

De to for  $M_b$  fundne Udtryk ere ganske analoge og gælde begge indenfor Proportionalitetsgrænsen.

Skal man bestemme, hvilke Tværnsnitsdimensioner man bør give Konstruktionsdele, der udsættes for bøjende Kræfter, eller omvendt, hvilke bøjende Kræfter man tør lade virke paa Konstruktionsdele af givne Tværnsnitsdimensioner, maa man ligesom ved Strækning og Sammentrykning i Stedet for  $\frac{E e_s}{L}$  indføre den tilladelige Paa-virkning  $k_s$  for Strækning og i Stedet for  $\frac{E e_t}{L}$  den tilladelige Paa-virkning  $k_t$  for Sammentrykning.

Derved blive Ligningerne (30) og (31) henholdsvis til

$$M_b = \frac{k_s}{y_s} J \quad (32)$$

og

$$M_b = \frac{k_t}{y_t} J. \quad (33)$$

Naar de bøjende Kræfter ere givne i Størrelse, Retning og Beliggenhed, hvorved  $M_b$  kan findes, maa man til Bestemmelse af Tværnsnitsdimensionerne af vedkommende



Konstruktionsdel benytte den af de to sidst anførte Ligninger, som giver størst Værdi for  $J$ . Naar  $\frac{k_s}{y_s} < \frac{k_t}{y_t}$ , maa altsaa den første benyttes, og i modsat Fald den anden. Ere derimod Tværnittets Størrelse og Form givne, maa man til Bestemmelse af de bøjende Paavirkninger, som man tør udsætte Konstruktionsdelen for, benytte den af Ligningerne, som giver den mindste Værdi af  $M_b$ .\*)

Af Ligningerne (32) og (33) fremgaar det, at jo større  $M_b$  bliver, desto større bliver ogsaa  $J$ . Deraf følger, at man, naar en Aksel eller Bjælke, som udelukkende paavirkes af Kræfter vinkelrette paa Længderetningen, skal have samme Tværnitsareal paa alle Steder, maa bestemme Tværnittet efter det Sted, med Hensyn til hvilket  $M_b$  er størst. Vil man tillige tage Hensyn til den i Tværnittet virkende forskydende Kraft, som dog i Almindelighed har meget ringe Indflydelse paa Dimensionerne, gør man det paa den i Afsnittet „Sammensatte Paavirkninger“ angivne Maade.

Naar Akslen eller Bjælken ikke overalt skal have samme Tværnitsareal, maa man bestemme Tværnittene paa de forskellige Steder efter de Bøjningsmomenter, som virke med Hensyn til vedkommende Sted.

Forinden der anføres specielle Eksempler paa Anvendelsen af det i nærværende Afsnit udviklede, skal man endnu omtale de Formforandringer, som Konstruktionsdele, der paavirkes paa de nedenfor angivne Maader, undergaa. Formlerne ere udledede ved den højere Matematik.

\*) Anm. Det er netop paa Grund af den ved lange Søjlers Belastning indtrædende Bøjning, at Inertimomentet kommer til at indgaa i de Formler, som benyttes til Bestemmelse af Søjlerens Tværnitsdimensioner, naar der skal tages Hensyn til Bøjningen, samt at man maa bestemme Inertimomentet med Hensyn til en Linie, som gaar gennem Tværnittets Tyngdepunkt og staar vinkelret paa den Retning, i hvilken Søjlen lettest vil bøje sig.

Naar den i Fig. 113 viste Bjælke er indspændt ved  $G$ , medens der ved  $H$  virker en Kraft  $P$  lodret nedad, vil Punktet  $H$  synke et Stykke  $t_1$  under den vandrette Linie gennem  $G$  af Størrelse  $t_1 = \frac{1}{3} \frac{Pl^3}{EJ}$ . (34)

Paavirkes Bjælken af en jævnfordelt Belastning  $P$ , bliver  $t_1 = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{Pl^3}{EJ} = \frac{1}{8} \frac{Pl^3}{EJ}$ . (35)

Er en Bjælke understøttet ved Enderne og i Midten paavirket af  $P$  lodret nedad, vil den største Nedbøjning finde Sted her. Den bliver, naar Bjælkens fritliggende er  $l$ ,

$$t_1 = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{Pl^3}{EJ} = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EJ}. \quad (36)$$

Er Kraften jævnfordelt over hele Længden, bliver Nedbøjningen i Midten

$$t_1 = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{Pl^3}{EJ} = \frac{5}{384} \frac{Pl^3}{EJ}. \quad (37)$$

Eksp. 86. En Aksel af Smedejærn af Længde  $4,2$  m er simpelt understøttet ved Enderne og modtager i Punkter, der ligge  $1$  m,  $2,2$  m og  $3,2$  m fra Akslens ene Ende, Tryk lodret nedad paa henholdsvis  $1000$  kg,  $2000$  kg og  $800$  kg. Find Akslens Diameter, naar  $k_s = 3$  kg/mm<sup>2</sup>.

Reaktionerne blive ca.  $1895$  kg og ca.  $1905$  kg. Da Forskydningen skifter Fortegn i det Tværsnit, hvor de  $2000$  kg virke, vil Bøjningsmomentet blive størst med Hensyn til dette, nemlig  $M_b = 2991000$  kgmm.

$J = \frac{\pi}{64} d^4$ ;  $y = \frac{1}{2} d$ . Ved at indsætte disse Værdier i Ligning (32), faar man

$$2991000 = 3 \cdot \frac{\pi}{32} d^3; \quad d = 216 \text{ mm.}$$



Ekspl. 87. Den paa Fig. 107 viste Pladejærnsdrager er simpelt understøttet ved Enderne. Den har et fritliggende af 8 m og paavirkes af en jævnfordelt Belastning af 22000 kg.  $k_s = 7,5$  kg/mm<sup>2</sup>. Dragerens Tværsnit skal bestemmes.

En saadan Dragets Højde  $h$  kan passende sættes til  $\frac{1}{12}$  à  $\frac{1}{15}$  af Spændvidden  $s$  og dens Kroptykkelse til  $\frac{1}{1000}$   $s$ , dog ikke gerne mindre end 8 mm. Sætter man  $h$  til  $\frac{1}{12}$   $s$ , bliver den 660 mm;  $t = 8$  mm. Kaldes det samlede Areal af de to Vinkeljærn og Pladen i Hovedet  $A$ , faar man for Inertimomentet  $J_1$  af Hovedet og Foden med Hensyn til en vandret Akse gennem Tværsnittets Tyngdepunkt, naar Afstanden mellem Hovedets og Fodens Tyngdepunkter kaldes  $h_1$ , tilnærmelsesvis Værdien

$$J_1 = 2 \cdot A \cdot \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 = \frac{A h_1^2}{2}.$$

Inertimomentet  $J_2$  af Kroppen bliver tilnærmelsesvis  $\frac{1}{12} t h_1^3$ , og Tværsnittets Inertimoment altsaa

$$J = \frac{A h_1^2}{2} + \frac{1}{12} t h_1^3, \text{ hvorved man ifølge (32) vil faa}$$

$$M_b = \frac{k_s}{\left(\frac{h_1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{A h_1^2}{2} + \frac{1}{12} t h_1^3\right) = k_s h_1 \left(A + \frac{1}{6} t h_1\right).$$

Naar hele Højden er 660 mm, kan  $h_1$  passende sættes til 600 mm. Indsætter man Værdierne for  $M_b$ ,  $k_s$ ,  $h_1$  og  $t$  i Ligningen, finder man  $A = 4100$  mm<sup>2</sup>. Det paa Fig. 107<sup>b</sup> viste Tværsnit, som bestaar af en 10 mm tyk Plade og to Stk. Vinkeljærn Profil Nr. 8, samlede ved 20 mm Nitter, vil, idet Nittehullerne trækkes fra, netop have den angivne Størrelse, naar Pladebredden gøres 190 mm. Regner man Tværsnittet nøjagtigt ud, vil man, ved at lade Pladebredden  $B$  være ubekendt, af Ligningen

$$\frac{1}{8} \cdot 22000 \cdot 8000 = \frac{7,5}{330} \cdot \frac{1}{12} [(B-40) \cdot 660^3 - (B-168) \cdot 640^3 \\ - 100 \cdot 620^3 - 20 \cdot 480^3]$$

faa  $B = 202$  mm. Sættes  $B$  til 200 mm, vil  $k_s$  kun blive ganske lidt større end  $7,5$  kg/mm<sup>2</sup>.

Ekspl. 88. Gulvet i et Lokale, der er  $7,5$  m bredt og  $15,2$  m langt (se Figur 114) belastes med jævnfordelt Belastning af  $400$  kg/m<sup>2</sup>. Etageadskillelsens Vægt kan regnes til  $200$  kg/m<sup>2</sup>. Gulvbræderne bæres af Træbjælker paa tværs i Lokalet med en indbyrdes Afstand af  $0,95$  m fra Midte til Midte. Disse Træbjælker hvile foruden paa Murene tillige paa en Jærndrager, der anbringes paa langs af Lokalet under Gulvets Midtlinie. Tværsnitsdimensionerne af Gulvbræderne, Træbjælkerne og Jærndrageren skulle bestemmes.

Gulvbræderne kan man passende gøre  $15$  cm brede. Da de i det højeste faa et fritliggende af  $0,95$  m, vil der paa dette Stykke af Brættet, for en Belastning af  $400$  kg/m<sup>2</sup>, komme et jævnfordelt Tryk af  $400 \cdot 0,95 \cdot 0,15 = 57$  kg.

$$M_b = \frac{1}{8} Pl = \frac{1}{8} \cdot 57 \cdot 950 = 6769 \text{ kgmm.}$$

Anvendes der Fyrretræs Bræder, er  $k_t = 0,63$  kg/mm<sup>2</sup>, og man har altsaa

$$6769 = \frac{0,63 \cdot \frac{1}{12} \cdot 150 \cdot x^3}{\frac{1}{2} x},$$

hvor  $x$  er Brædernes Tykkelse.  $x = \text{ca. } 21$  mm.

Med denne Tykkelse vilde Bræderne i Midten synke et Stykke

$$t = \frac{5}{384} \cdot \frac{Pl^3}{EJ} = \frac{5 \cdot 57 \cdot 950^3}{384 \cdot 950 \cdot \frac{1}{12} \cdot 150 \cdot 21^3} = 5,8 \text{ mm.}$$

Dels er denne Nedsænkning større end tilladelig, og dels maa man tage Hensyn til det stærke Slid, som et



Gulv udsættes for. Bræderne bør derfor være stærkere og kunne passende gøres 40 mm tykke. Nedsænkningen vil i saa Fald vise sig kun at blive 0,839 mm, altsaa meget ringe.

Træbjælkerne have et fritliggende af 3,75 m, og paa hver af dem kommer der til at hvile en jævnfordelt Belastning af  $0,95 \cdot 3,75 \cdot 600 = 2138$  kg. Altsaa bliver

$$M_b = \frac{1}{8} \cdot 2138 \cdot 3750 = 1002000 \text{ kgmm.}$$

Anvendes der Bjælker af Fyrretræ med kvadratisk Tværsnit, faar man  $1002000 = 0,63 \cdot \frac{1}{6} x^3$ ;  $x = 212,1$  mm.

Man kan altsaa passende bruge 22 cm  $\times$  22 cm Tømmer.

Jærndrageren. Antages der til Støtte for denne anbragt en Søjle ved *A*, vil Dragerens fritliggende blive 7,6 m. Den paavirkes i syv Punkter af 2138 kg hvert Sted. Reaktionen i Understøtningspunkterne blive altsaa hver 7483 kg. Det farligste Tværsnit bliver i Midten ved *B*, og Momentligningen med Hensyn hertil er

$$M_b = 7483 \cdot 3800 - 2138 (2850 + 1900 + 950) \\ = 16250000 \text{ kgmm.}$$

Sættes  $k_s = 9$  kg, faar man  $\frac{J}{y} = \frac{16250000}{9} = 1805555 \text{ mm}^3$ .

En **I** Drager Profil Nr. 45 vil altsaa kunne bruges eller ogsaa, hvis man foretrækker det, to ved Siden af hinanden liggende Jærnbjælker af Profil Nr. 34. Paa Søjlen vil der, naar Dragerens Vægt anslaaes til 1800 kg, hvorved Drageren og dens Belastning tilsammen udgøre ca. 36000 kg, komme til at hvile et Tryk af Størrelse  $\frac{5}{8}$  heraf eller ialt ca. 22500 kg. Udelades Søjlen i Midten, vil Dragerens fritliggende blive 15,2 m, og det farligste Tværsnit vil være i *A*, med Hensyn til hvilket Punkt Bøjningsmomentet bliver ca. 65030000 kgmm.

For  $k_s = 9$  kg/mm<sup>2</sup> bliver  $\frac{J}{y} = \text{ca. } 7225000 \text{ mm}^3$ .

Her antages benyttet en sammennittet Jærndrager, f. Eks. af det paa Fig. 115 viste Profil. Hoved og Fod bestaa hver af to Stkr. 25 mm Plader og ere samlede med de to 10 mm tykke Kroppe ved fire Vinkeljærn af Profil Nr. 8. Nitterne ere af 26 mm Diameter.

Ethvert af Vinkeljærnene har et Tværnsnitsareal af 1510 mm<sup>2</sup>, og det samlede Inertimoment af de to paa samme Side af den neutrale Akse  $XX$  liggende Vinkeljærn er 1750000 mm<sup>4</sup> med Hensyn til Linien  $MM$  gennem deres fælles Tyngdepunkt. Afstanden fra  $MM$  til  $XX$  er 176,6 mm. Inertimomentet med Hensyn til  $XX$  bliver altsaa

$$J = \frac{1}{12} [360 (500^3 - 400^3) + 20 \cdot 400^3 - 52 (500^3 - 380^3)] + 2 (1750000 + 3020 \cdot 176,6^2) = \text{ca. } 1824000000 \text{ mm}^4.$$

Da Dragerens hele Højde er 500 mm, vil  $y = 250$  mm, altsaa  $\frac{J}{y} = 7292000 \text{ mm}^3$ . Bjælken er saaledes stærk nok.

I Stedet for at bestemme Inertimomentet paa den ovenfor angivne Maade, kunde man ogsaa have fundet det ved fra Inertimomentet af Rektanglet med Siderne 360 mm og 500 mm at subtrahere Inertimomenterne af de ved de punkterede Linier paa Figuren antydede ikke skraverede Rektangler, som ligge indenfor det førstnævnte Rektangels Omkreds. Nitterne i Hoved og Fod tænkes anbragte i samme lodrette Plan, medens de Nitter, som samle Kroppene med Vinkeljærnene, og hvis Diameter passende kan sættes til 20 mm, anbringes midt imellem de førstnævnte. For et Tværnsnit, i hvilket Kroppenes Nitter findes, vil  $\frac{J}{y}$  være større end det ovenfor fundne  $\frac{J}{y}$ .

Ekspl. 89. Hvor stor jævnfordelt Belastning tør man lade det i forrige Eksempel beregnede Gulvbræt, der er 15 cm  $\times$  4 cm, bære, naar det stilles paa Højkant og der bydes Materialet 0,63 kg/mm<sup>2</sup>?



$\frac{1}{8} \cdot P \cdot 950 = 0,63 \cdot \frac{1}{6} \cdot 40 \cdot 150^2$ ;  $P = 795,8$  kg,  
medens Brættet liggende paa Fladen kun vil kunne bære  
212,2 kg.

Eksp. 90. En Etageadskillelse bæres af  $\Gamma$ -formede Smedejærnsdragere, mellem hvilke der er anbragt Bølgeblik. Jærndragerne have et fritliggende af 7,2 m, og deres Afstand fra Midte til Midte er 2 m. Belastningen vil ialt være 500 kg/m<sup>2</sup>. Bestem Dragerne og Bølgeblikket.  $k_s$  kan sættes til 7,5 kg/mm<sup>2</sup>.

Dragerne. Belastningen paa hver Drager vil være  
 $7,2 \cdot 2 \cdot 500 = 7200$  kg. Det farligste Tværsnit er i Midten af Drageren, med Hensyn til hvilket

$$M_b = \frac{1}{8} \cdot 7200 \cdot 7200 = 6480000 \text{ kgmm};$$

$$\frac{J}{y} = \frac{6480000}{7,5} = 864000. \quad \Gamma \text{ Profil Nr. 34 kan benyttes.}$$

Bølgeblikket. Dettes fritliggende bliver 2 m. Paa et 1 m bredt Bælte af det vil der altsaa komme en jævnfordelt Belastning af 1000 kg.

For det farligste Tværsnit, som er i Midten, vil Bøjningsmomentet være  $M_b = \frac{1}{8} \cdot 1000 \cdot 2000$  kgmm,

$$\text{altsaa bliver } \frac{J}{y} = \frac{1000 \cdot 2000}{8 \cdot 7,5} = 33333 \text{ mm}^3.$$

Fig. 116 viser Tværsnittet af et Stykke af en Bølgeblikplade, som passende kan bruges i det foreliggende Tilfælde, nemlig Profil Nr. 4. Inertimomentet af et saadant 100 mm bredt Stykke med Hensyn til  $XX$  vil være det samme som Inertimomentet af den Figur, som fremkommer, naar man drejer den ene Halvdel af Figuren 180° om Linien  $FG$ . Denne Halvdels nye Stilling er vist punkteret. Den krumme Dels udvendige Diameter vil blive 51,5 mm og dens indvendige Diameter 48,5 mm. Ved Hjælp

af Halvcirkelens og Rektanglets Inertimomenter bestemmes Figurens Inertimoment uden stor Vanskelighed.

Det vil for et 1 m bredt Stykke være  $J = \text{ca. } 1170000 \text{ mm}^4$ ; altsaa bliver  $\frac{J}{y} = \frac{1170000}{30,75} = \text{ca. } 38000 \text{ mm}^3$ .

Bølgeblikket er saaledes tilstrækkelig stærkt.

Eksp. 91. En Støbejernsdrager af det paa Fig. 117 viste Tværnsnit er indspændt i den ene Ende og har et fritliggende af 1 m. Med hvor stor jævnfordelt Vægt tør man belaste Bjælken?

Tværsnittets Tyngdepunkt bestemmes ved Ligningen  $105 \cdot 25 \cdot 12,5 + 130 \cdot 25 \cdot 65 = 25 \cdot 235 \cdot y$ , hvoraf  $y = 41,5 \text{ mm}$ ; altsaa er  $y' = 88,5 \text{ mm}$ . Inertimomentet med Hensyn til  $XX$  bliver

$$J = \frac{1}{3} (130 \cdot 41,5^3 + 105 \cdot 16,5^3 + 25 \cdot 88,5^3) = 9037000 \text{ mm}^4.$$

Naar  $k_s = 3 \text{ kg/mm}^2$  og  $k_t = 6,75 \text{ kg/mm}^2$ , vil

$$k_s \cdot \frac{J}{y} = \frac{3 \cdot 9037000}{41,5} \quad \text{og} \quad k_t \cdot \frac{J}{y'} = \frac{6,75 \cdot 9037000}{88,5}$$

Man ser let, at det første af disse Udtryk er det mindste, og Ligningen til Bestemmelse af  $P$  vil altsaa være

$$\frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot P = \frac{3 \cdot 9037000}{41,5}; \quad P = 1306 \text{ kg.}$$

Naar Støbejernsbjælker ønskes anvendte, er det meget almindeligt, at man lader deres forskellige Tværnsnit variere saaledes, at de netop svare til de i dem virkende Spændinger, da man paa den Maade forbruger mindst Materiale. Paa Fig. 118 er der vist en i den ene Ende fastspændt Bjælke af fritliggende  $l$ . Den antages belastet af en jævnfordelt Byrde  $P$ , og den skal have rektangulært Tværnsnit. Ser man ligesom i alle de foregaaende Eksempler bort fra den i de enkelte Tværnsnit virkende forskydende Kraft, bliver der kun at tage Hensyn til Bøjningsmomentet.



af  $\perp$  Tværsnit Profil Nr. 20 faar i sine stærkest paavirkede Fibre.

$$M_b = \frac{1}{3} \cdot 1200 \cdot 3000 = 450000 \text{ kgmm.}$$

$$\text{tg } v = \text{tg } u = \frac{2}{5}, \quad v = 21,8^\circ.$$

Da  $J_n = 21390000$ ,  $J_l = 1170000$ ,  $l = + 100$  og  $n = + 45$ , faar man ved Ligning (38)

$$t = + 450000 \left( \frac{100 \cos 21,8^\circ}{21390000} + \frac{45 \sin 21,8^\circ}{1170000} \right);$$

$$t = + 8,38 \text{ kg/mm}^2.$$

Ekspl. 93. Hvor stor Paavirkning ville de stærkest paavirkede Fibre faa, naar Aasen (se Fig. 120) dannes af Z-Jærn Profil Nr. 12, Tabel VII. F?

$$J_n = 4700000, \quad J_l = 377000, \quad l = \text{ca. } 60 \cos \alpha \text{ og } n = \text{ca. } 60 \sin \alpha.$$

$$u = 21,8^\circ. \text{ Ifølge Tabellen er } \text{tg } \alpha = 0,433, \text{ altsaa}$$

$$\alpha = 24,41^\circ; \quad v = u - \alpha = - (24,41 - 21,8) = - 2,61^\circ.$$

Ifølge (38) bliver Paavirkningen paa Fibrene ved B

$$t = 450000 \left( \frac{60 \cos 24,41^\circ \cdot \cos 2,61^\circ}{4700000} + \frac{60 \sin 24,41^\circ \cdot \sin 2,61^\circ}{377000} \right); \quad t = 6,57 \text{ kg/mm}^2.$$

Vil man undersøge den Paavirkning, som Fibrene ved C faa, maa man først finde Punktet C's Koordinater  $l_1$  og  $n_1$ .

$$l_1 = l + 60 \sin 24,41^\circ = 60 (\cos 24,41^\circ + \sin 24,41^\circ) = 79,45.$$

$$n_1 = n - 60 \cos 24,41^\circ = 60 (\sin 24,41^\circ - \cos 24,41^\circ) = - 29,85.$$

$$t = 450000 \left( \frac{79,45 \cdot \cos 2,61^\circ}{4700000} - \frac{29,85 \sin 2,61^\circ}{377000} \right);$$

$$t = 5,98 \text{ kg/mm}^2.$$

Fibrene ved C paavirkes altsaa ogsaa til Sammentryk-

ning. De stærkest sammentrykkede Fibrer i dette Eksempel paavirkes adskilligt mindre end i det foregaaende, men  $\Gamma$ -Jærnets Tværnsitsareal er 3340 mm<sup>2</sup>, medens Z-Jærnets kun er 1820 mm<sup>2</sup>, hvoraf man ser, hvor fordelagtigt det er at anvende det sidste fremfor det første. Dertil kommer, at Z-Jærnet langt lettere lader sig befæste end  $\Gamma$ -Jærnet. Vil man benytte  $\Gamma$ -Jærn, kan der være Anledning til at befæste dem saaledes, at Kroppen staar lodret.

Ønsker man i en Konstruktion at anvende Træbjælker, og det er umuligt at faa saadanne af tilstrækkelig stort Tværnsnit, maa man, som omtalt i Bygningskonstruktionslæren, benytte Trædragere, der bestaa af oven over hinanden liggende Bjælker, som ere indbyrdes fast forbundne. Bjælkerne kunne samles enten ved Fortanding eller ved Fordybling.

Fig. 121 viser en fortandet Drager og Fig. 122 og 123 fordyblede Dragere; paa Fig. 122 ligge Bjælkerne tæt opad hinanden, paa Fig. 123 med et Mellemrum. Fig. 124 angiver Tværsnittet af en fortandet og Fig. 125 af en fordyblet Drager.

Med de paa Fig. 124 anførte Betegnelser vil man have

$$W = \frac{J}{y} = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{M_b}{k}, \text{ hvoraf man, naar } b = 0,42 h,$$

$$\text{faar} \quad h = \sqrt[3]{14,3 \frac{M_b}{k}}. \quad (39)$$

$b_o$  sættes til  $0,8 h$  à  $h$ ;  $t = 0,1 h$ ;  $d_o = 0,1 b$ .

For den fordyblede Dragers Vedkommende vil

$$W = \frac{J}{y} = \frac{\frac{1}{12} (b h^3 - b h_1^3)}{\frac{1}{2} h} = \frac{1}{6} b h^2 \left( 1 - \left( \frac{h_1}{h} \right)^3 \right) = \frac{M_b}{k}.$$

Man kan passende sætte  $h_1 = 0,14 h$ ;  $h' = 0,48 h$ ;  $h_o = 0,1 h'$ ;  $b = 0,36 h$ , og man vil da ved at løse Ligningen med Hensyn til  $h$  faa



$$h = \sqrt[3]{16,7 \frac{M_b}{k}} \quad (40)$$

$t$  bliver ved Understøtningerne  $0,14 h'$ , ved Midten af Drageren  $0,10 h'$  og midt imellem disse Steder  $0,12 h'$ .  
 $b_o = 3,0 t + 0,09 b$ .  $d_o = 0,1 b$ .

I (39) og (40) angiver  $M_b$  det største Bøjningsmoment.

Endnu skal særligt omtales Fodplader eller Fundamentplader for Søjler. Disse Plader, som paavirkes til Bøjning, dannes af Støbejern med eller uden Ribber, og kunne have kvadratiske, rektangulære eller cirkulære Grundflader, hvis Størrelse afhænger af den Modstand, som det i Fundamentet indgaaende Materiale, der kan være Mursten, Sandsten, Kalksten, Granit, m. m., kan yde mod Sammentrykning.

Ekspl. 94. En Træsøjle, der er  $2,65$  m høj og skal bære  $21000$  kg, har kvadratisk Tværnit. Siden i Kvadratet vil da blive  $21$  cm. Antages Søjleens Fodplade at hvile paa et Fundament af gode Mursten i cementblandet Kalkmørtel, kan  $k_t$  sættes til  $0,11$  kg/mm<sup>2</sup>. Pladens Grundflade  $A$  bliver altsaa lig med  $\frac{21000}{0,11}$ . Gøres den kvadratisk, bliver Kvadratsiden  $x = \sqrt{\frac{21000}{0,11}}$ ;  $x = 44$  cm.

Giver man Pladen den paa Fig. 126 viste Form, hvor den samlede Pladetykkelse er  $t$ , der fordeler sig saaledes, at Pladens prismatiske Del har Tykkelsen  $\frac{1}{3} t$ , og den pyramidale Del Tykkelsen  $\frac{2}{3} t$ , kan man finde  $t$  paa følgende Maade: Fodpladen betragtes som indspændt i Midten, hvor Søjlen hviler med sin kvadratiske Grundflade, medens Reaktionen fra Fundamentet fordeler sig jævnt over hele Grundfladen. Da Reaktionen virker opad, vil den søge at

bøje den i Midten indspændte Plade opad, og det farligste Tværsnit vil være Tværsnittet  $KL$ .

Bøjningsmomentet med Hensyn til dette vil blive Produktet af Reaktionen paa den med  $BCDE$  betegnede Del af Grundfladen og  $\frac{1}{2} BC$ , altsaa er

$$M_b = \frac{21000 \cdot 115 \cdot 115}{440 \cdot 2} = 315600 \text{ kgmm.}$$

Den Afstand, hvori Trapezets Tyngdepunkt  $T_1$  ligger fra dets største Side (se Side 33), er

$$a = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} t \cdot \frac{2 \cdot 240 + 440}{240 + 440} = 0,302 t.$$

Trapezets Areal  $A_1 = 227 t$  og Rektanglets Areal  $A_2 = 147 t$ .

Da Rektanglets Tyngdepunkt  $T_2$  ligger i Afstanden  $\frac{1}{6} t$  fra Tværsnittets underste Side, findes det fælles Tyngdepunkt  $T$ 's Afstand  $y$  herfra ved Ligningen

$$y(227 t + 147 t) = 227 t \cdot 0,635 t + 147 t \cdot 0,166 t,$$

hvoraf  $y = 0,446 t$ .

Trapezets Inertimoment med Hensyn til  $MM$  bliver ifølge Tabel V

$$J_t = \frac{240^2 + 4 \cdot 240 \cdot 440 + 440^2}{36(440 + 240)} \cdot \frac{2^3}{3^3} t^3 = 8,153 t^3,$$

og dets Inertimoment med Hensyn til Aksen  $XX$  gennem det fælles Tyngdepunkt

$$J'_t = 8,153 t^3 + 227 t (a + 0,333 t - y)^2 = 8,153 t^3 + 227 t (0,302 t + 0,333 t - 0,446 t)^2 = 16,263 t^3.$$

Rektanglets Inertimoment med Hensyn til Linien  $NN$  bliver

$$J_r = \frac{1}{12} \cdot 440 \cdot 0,333^3 t^3 = 1,353 t^3,$$

og dets Inertimoment med Hensyn til den neutrale Akse  $XX$  bliver

$$J'_r = 0,153 t^3 + 147 t (y - 1,66 t)^2 = 0,153 t^3 + 147 t (0,446 t - 0,166 t)^2 = 11,683 t^3.$$



Tværsnittet  $KL$ 's Inertimoment med Hensyn til  $XX$  bliver altsaa

$$J = J'_t + J'_r = 16,263 t^3 + 11,683 t^3 = 27,946 t^3.$$

Ved i Momentligningen  $M_b = k_s \cdot \frac{J}{y}$  at sætte

$$M_b = 343700, J = 27,95 t^3, k_s = 3 \text{ kg/mm}^2 \text{ og}$$

$$y = 0,446 t, \text{ faar man } 315600 = 3 \cdot \frac{27,95 t^3}{0,446 t},$$

hvoraf 
$$t = \sqrt[3]{\frac{315600 \cdot 0,446}{3 \cdot 27,95}} = 40,97 \text{ mm.}$$

$t$  kan passende gøres 50 mm, hvorved  $\frac{1}{3}t = 16,7$  mm.  $\frac{1}{3}t$  bør aldrig være under 16 mm.

Hvorvidt der maatte være Fare for, at Pladen brydes efter en Linie vinkelret paa en af Diagonalerne, kan let undersøges bagefter.

### 5. Vridning.

Naar et prismatisk Legeme er indspændt i et af dets Tværsnit, medens der i et andet Tværsnit paa en Arm gennem dets Tyngdepunkt virker to parallelle og lige-store Kræfter i modsatte Retninger, paavirkes Legemet til Vridning paa det Stykke, som ligger mellem Tværsnittene.

Paa Fig. 127 ville altsaa Kræfterne  $P$ , der virke i Tværsnittet ved  $C$  paa Armen  $R$ , paavirke det prismatiske Legeme  $BC$ , som er indspændt ved  $B$ , og hvis Længde er  $L$ , til Vridning paa Stykket mellem  $B$  og  $C$ . I Stedet for Indspændingen ved  $B$  kan der her virke et Kraftpar af samme Størrelse som Kraftparret i  $C$ , men i modsat Retning. Kraftparret i  $C$  vil søge at forskyde Legemets enkelte Tværsnit paa en saadan Maade i Forhold til hverandre, at deres Tyngdepunkter vedblive at ligge i Legemets Akse. Fig. 128 viser tre tæt ved hverandre liggende Tværsnit  $A$ ,  $B$  og  $C$ , hvor Afstanden mellem  $A$  og  $B$  for-

udsættes at være den samme som Afstanden mellem  $B$  og  $C$ . Antages  $a$ ,  $b$  og  $c$  at være tre Punkter i disse Tvær-snit, og at de, inden  $P$  begynder at virke, ligge i en med Aksen parallel Linie, ville Tværnittene under Kraftparrets Virkning drejes saaledes i Forhold til hverandre om Legemets Akse, af  $c$  flytter sig en vis Vinkel i Forhold til  $b$ , medens samtidig  $b$  flytter sig en ligesaa stor Vinkel i Forhold til  $a$ . Men paa den Maade vil  $c$  i Forhold til  $a$  være drejet en dobbelt saa stor Vinkel som  $b$  i Forhold til  $a$ . Punktet  $b$  er kommet til  $b'$  og  $c$  til  $c'$ . Ogsaa her forudsætter man ligesom ved Bøjning, at Tværnittene under Formforandringen vedblive at være plane. Da Tværnittenes Tyngdepunkter ikke forandre Plads, vil fremdeles den i Aksen liggende Fiber ikke modtage nogen Paavirkning.

Mod den Vridning, som Kraftparret saaledes frembringer, maa Materialets Sammenhængskraft yde Modstand, og saalænge Legemet vedbliver at forholde sig elastisk, og Paavirkningen altsaa ikke har overskredet Elasticitetsgrænsen, vil Legemet igen antage den oprindelige Form, naar Kraftparret ophører at virke. Da Formforandringen indtræder derved, at Tværnittene forskydes paa hverandre, maa Materialet yde Modstand mod Forskydning, og man har derfor ved Beregningen af Tværsnitsdimensionerne af prismatiske Legemer tidligere altid benyttet Værdierne for den tilladelige Paavirkning  $k_f$  for Forskydning. Ved Undersøgelser, der senere ere foretagne over Materialernes Modstandsevne mod forskellige Paavirkninger, har det vist sig, at nogle Materialer anstrænges mere ved at paavirkes til Vridning end ved at udsættes for almindelig Forskydning. De tilladelige Paavirkninger  $k_v$  for Vridning findes for Smedejærns, Staals og Støbejærns Vedkommende angivne paa Tabel III.

Jo længere de enkelte Fiberelementer ligge fra Tyngdepunktet, desto mere ville de, naar Legemet vrides, fjernes



fra deres oprindelige Plads, og Formforandringen vil altsaa være størst i de fra Legemets Akse fjernest liggende Fibre. Men jo større Formforandringen er, desto større er ogsaa Modstanden, og denne sidste vil altsaa blive proportional med Afstanden ind til Legemets Akse.

Paa Fig. 129 er der vist et Tværnsnit af Legemet, i hvilket forskellige Fiberelementers Arealer ere betegnede ved  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , medens deres Afstande fra Tværnsnittets Tyngdepunkt  $T$  kaldes  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n$ . Betegnes fremdeles de Modstande, som Fibrene ville yde pr. Arealenhed, ved  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ , har man

$$\frac{s_1}{\rho_1} = \frac{s_2}{\rho_2} = \frac{s_3}{\rho_3} = \dots = \frac{s_n}{\rho_n} = \frac{s}{\rho},$$

hvor  $s$  er den Modstand, som de yderste i Afstanden  $\rho$  fra Tyngdepunktet  $T$  liggende Fibre yde pr. Arealenhed.

Af disse Ligninger faar man:

$$s_1 = \frac{s\rho_1}{\rho}; \quad s_2 = \frac{s\rho_2}{\rho}; \quad s_3 = \frac{s\rho_3}{\rho}; \quad \dots; \quad s_n = \frac{s\rho_n}{\rho}.$$

De Modstande, som Arealerne  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  yde, blive altsaa henholdsvis

$$\frac{a_1 s \rho_1}{\rho}; \quad \frac{a_2 s \rho_2}{\rho}; \quad \frac{a_3 s \rho_3}{\rho}; \quad \dots; \quad \frac{a_n s \rho_n}{\rho},$$

og Momenterne af disse Modstande med Hensyn til  $T$  blive derefter

$$\frac{a_1 s \rho_1^2}{\rho}; \quad \frac{a_2 s \rho_2^2}{\rho}; \quad \frac{a_3 s \rho_3^2}{\rho}; \quad \dots; \quad \frac{a_n s \rho_n^2}{\rho};$$

For at der skal indtræde Ligevægt, maa Summen af disse Momenter være lig med Kraftparrets Moment, altsaa

$$\begin{aligned} P \cdot R &= \frac{sa_1\rho_1^2}{\rho} + \frac{sa_2\rho_2^2}{\rho} + \frac{sa_3\rho_3^2}{\rho} + \dots + \frac{sa_n\rho_n^2}{\rho} \\ &= \frac{s}{\rho} (a_1\rho_1^2 + a_2\rho_2^2 + a_3\rho_3^2 + \dots + a_n\rho_n^2). \end{aligned}$$

Den indenfor Parentesen staaende Størrelse har en Form, som er ganske analog med det under Sammen-trykning nærmere omtalte Inertimoment.

Det kaldes Tværnsnittets polære Inertimoment, fordi det er Inertimomentet med Hensyn til en Pol eller et Punkt, nemlig Tværnsnittets Tyngdepunkt, og ikke med Hensyn til en Linie. Det betegnes ved  $J_p$ .

Ligevægtsligningen bliver altsaa, idet Vridningsmomentet  $P.R$  betegnes ved  $M_v$ , til

$$M_v = \frac{s \cdot J_p}{p}.$$

Den største Værdi, som man i Konstruktioner tør give  $s$ , betegnes, som foran omtalt, ved  $k_v$ , og Ligningen bliver derved til

$$M_v = k_v \cdot \frac{J_p}{p}. \quad (41)$$

Kender man et Areal's Inertimoment med Hensyn til to paa hinanden vinkelrette Akser, kan man ved Hjælp af disse Inertimomenter finde det polære Inertimoment.

Fig. 130 viser et Areal, hvis Inertimomenter med Hensyn til  $XX$  og  $YY$  antages bekendte. For et Arealelement, hvis Størrelse er  $a_1$ , og hvis Afstand fra  $T$  er  $p_1$ , medens dets Afstande fra  $XX$  og  $YY$  betegnes ved henholdsvis  $y_1$  og  $x_1$ , har man  $p_1^2 = x_1^2 + y_1^2$ .

Ved at multiplicere paa begge Sider af Lighedstegnet med  $a_1$ , faar man  $a_1 p_1^2 = a_1 x_1^2 + a_1 y_1^2$ .

For et Arealelement af Størrelse  $a_2$ , beliggende i Afstandene  $x_2$  fra  $YY$ ,  $y_2$  fra  $XX$  og  $p_2$  fra  $T$ , har man paa samme Maade  $a_2 p_2^2 = a_2 x_2^2 + a_2 y_2^2$ .

For et tredje Arealelement faar man  $a_3 p_3^2 = a_3 x_3^2 + a_3 y_3^2$ .

For det  $n$ te Arealelement:  $a_n p_n^2 = a_n x_n^2 + a_n y_n^2$ .



Ved at addere alle disse Ligninger faar man

$$\Sigma a p^2 = \Sigma a x^2 + \Sigma a y^2,$$

men  $\Sigma a p^2$  er det polære Inertimoment  $J_p$ ,  $\Sigma a y^2$  er Inertimomentet  $J_x$  med Hensyn til  $XX$  og  $\Sigma a x^2$  er Inertimomentet  $J_y$  med Hensyn til  $YY$ . Følgelig er

$$J_p = J_x + J_y. \quad (42)$$

Ved Hjælp af denne Ligning kan man finde det polære Inertimoment for alle Tværsnit, forsaavidt de kunne antages under Legemet's Vridning at forblive plane, og dette er som nævnt i Almindelighed tilladeligt.

For Cirklen faar man saaledes

$$J_p = \frac{\pi}{4} r^4 + \frac{\pi}{4} r^4 = \frac{\pi}{2} r^4 = \frac{\pi}{32} d^4,$$

naar  $r$  og  $d$  ere henholdsvis Radius og Diameter i Cirklen. Afstanden  $p$  fra Tyngdepunktet  $T$  til de yderste Fibre bliver  $\frac{d}{2}$ .

For Cirkelringen bliver  $J_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$ , naar  $D$  og  $d$  betegne den største og mindste Diameter i Cirkelringen.  $p = \frac{D}{2}$ .

For Kvadratet er  $J_p = 2 \cdot \frac{1}{12} a^4 = \frac{1}{6} a^4$ , naar  $a$  er Kvadratsiden.  $p = \frac{a}{\sqrt{2}}$ .

(42) kan ikke anvendes ved et rektangulært Tværsnit, naar der er stor Forskel paa Størrelsen af Rektanglets to Sider, da Tværsnittet i saa Fald ikke kan antages at forblive plant under Vridningen.

Det er navnlig ved Bestemmelsen af Tværsnitsdimensionerne af Aksler, at der bliver Anvendelse for Vridningsteorien. Ere Akslerne korte og paavirkede de, foruden til Vridning, ikke tillige i væsentlig Grad til Bøjning, kan man bestemme deres Tværsnit ved Hjælp af Formel (41).

Ere Akslerne derimod lange, vil det Tilfælde kunne indtræde, at de to Tværsnit, mellem hvilke Vridningen finder Sted, selv om Akslen maatte være stærk nok, ville drejes mere end tilladeligt i Forhold til hinanden. Denne Snoning af Akslerne maa holdes indenfor en passende Grænse, og det kan kun opnaas ved at bestemme Tværnittet, ikke af Hensyn til Styrken, men af Hensyn til Stivheden.

Som bemærket ville efter hinanden følgende Tværsnit, der ligge tæt opad hinanden og i ligestore indbyrdes Afstande, forskydes det samme Stykke i Forhold til hinanden, hvad enten Tværnittene ligge paa det ene eller det andet Sted af det prismatiske Legeme. Denne Forskydning af to Nabortværsnit i Forhold til hinanden er meget ringe, men da Forskydningerne opsummere sig, kunne de to Tværsnit, i hvilke de ydre Kræfter angribe, blive drejede et kendeligt Stykke i Forhold til hinanden. Den Vinkel, som det ene Tværsnit drejes i Forhold til det andet, kaldes Vridningsvinklen. Den udtrykkes i Grader og betegnes ved  $\delta$  (se Fig. 131). Længden  $\alpha$  af den til  $\delta$  svarende Cirkelbue, hvis Centrum ligger i Tyngdepunktet og hvis Radius er 1, findes af Proportionen

$$\frac{\alpha}{2\pi \cdot 1} = \frac{\delta}{360}, \text{ hvoraf } \alpha = \frac{\pi \delta}{180}.$$

De yderste Fiberelementer, som ligge i Afstanden  $p$  fra  $T$ , ville altsaa drejes en Buelængde

$$p\alpha = \frac{\pi \delta p}{180}.$$

Vridningsvinklen vil foruden af Afstanden mellem de to omtalte Tværsnit i høj Grad afhænge af Materialets Art og Beskaffenhed, og man maa derfor ogsaa her ligesom ved Strækning og Sammentrykning indføre den saakaldte Elasticitetskoefficient. Ved Elasticitetskoefficienten for Forskydning  $G$  forstaar man den Kraft



i kg, som, hvis Materialet var fuldstændig elastisk, vilde forskyde den ene Ende af en prismatisk Stang af Tværsnit  $1 \text{ mm}^2$  et Stykke netop saa stort som Legemet's Længde i Forhold til den anden Ende. Paa Grund af Proportionaliteten mellem Paavirkning og Formforandring vil man, da de i Afstanden  $p$  fra  $T$  liggende Fiberelementer drejes et Stykke  $p\alpha$ , have

$$\frac{p\alpha}{L} = \frac{k_v}{G}, \text{ hvoraf } \frac{k_v}{p} = \frac{\alpha G}{L}.$$

Indsætter man denne Værdi af  $\frac{k_v}{p}$  i (41), faar man

$$M_v = \frac{\alpha G J_p}{L}, \quad (43)$$

men  $\alpha = \frac{\pi \delta}{180}$  vil, indsat i (43), give  $\frac{\pi \delta}{180} \cdot \frac{G J_p}{L} = M_v$ ,

$$\text{hvoraf } \delta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M_v L}{G J_p}. \quad (44)$$

Ved Aksler regner man, at Vridningsvinklen ikke bør være mere end  $0,25^{\circ}$  for hver Meters Længde.

Ekspl. 95. Paa en Smedejærns Borestang med kvadratisk Tværsnit, hvis Side er 32 mm, virke to Mænd hver med et Tryk af 16 kg paa en Arm af  $0,8 \text{ m}$  Længde.

Hvilken Paavirkning faa Stangens yderste Fibre?

Til Bestemmelse heraf maa man benytte Ligningen

$$M_v = s \cdot \frac{J_p}{p},$$

hvor  $s$  er ubekendt.  $M_v = 800 \cdot 2 \cdot 16$ ,  $J_p = \frac{1}{6} \cdot 32^4$   
og  $p = \frac{32}{\sqrt{2}}$ , altsaa  $800 \cdot 32 = s \cdot \frac{1}{6} \cdot 32^3 \cdot \sqrt{2}$ , hvoraf  
 $s = 3,315 \text{ kg/mm}^2$ .

Ekspl. 96. Hvor stor maa Kvadratsiden i den i Ekspl.

95 omtalte Borestang være, naar man ønsker at byde Materialet i det højeste  $2,4 \text{ kg/mm}^2$ .

Kaldes Kvadratsiden  $x$ , har man

$$800 \cdot 32 = 2,4 \cdot \frac{1}{6} x^3 \sqrt{2}, \text{ hvoraf } x = 35,64 \text{ mm.}$$

Ekspl. 97. En Cylinder af blødt Staal af Længde 2 m er indspændt i den ene Ende og paavirkes til Vridning ved en i den anden Ende anbragt Kraft paa 300 kg, som virker paa en Arm af Længde  $0,6 \text{ m}$ . Hvilken Diameter maa man give Cylindren, naar  $k_v = 2,4 \text{ kg/mm}^2$ ? Hvor stor bliver Vridningsvinklen?

$$G = 8000 \text{ kg/mm}^2, M_v = 300 \cdot 600 = 180000 \text{ kgmm.}$$

Ved Formel (41) faar man

$$180000 = 2,4 \cdot \frac{\pi}{16} d^3 = \frac{2,4}{5} d^3, \text{ hvoraf } d = 72,11 \text{ mm.}$$

Hvis man giver Cylindren en Diameter af 73 mm, bliver Vridningsvinklen

$$\delta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{180000 \cdot 2000 \cdot 32}{8000 \cdot 73^4 \cdot \pi} = \text{ca. } 0,925^\circ.$$

Paa en Længde af 2 m tillader man imidlertid kun en Snoning af  $0,5^\circ$ , og Diametren maa altsaa beregnes efter Stivhedshensynet.

Indsætter man  $\delta = 0,5$  i Ligning (44), faar man

$$0,5 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{180000 \cdot 2000}{8000 \cdot \frac{\pi}{32} d^4}; \quad d = 85,5 \text{ mm.}$$

Giver man Cylindren denne Diameter, ville de yderste Fibre faa en Paavirkning  $s$ , som findes af  $M_b = \frac{s}{\rho} \cdot J_\rho$ .

$$180000 = \frac{s \cdot 85,5^3}{5}, \text{ hvoraf } s = 1,446 \text{ kg/mm}^2.$$



## 6. *Sammensatte Paavirkninger.*

### a) *Tværsnittet paavirkes samtidig til Bøjning og Forskydning.*

Naar en Konstruktionsdel paavirkes til Bøjning, vil den i de fleste Tværsnit samtidig paavirkes til Forskydning. Hertil er der under Afsnittet om Bøjning ikke taget noget Hensyn, fordi Forskydningen i Almindelighed ikke spiller nogen stor Rolle i Sammenligning med Bøjningen, blandt andet fordi den ofte er mindst for det Tværsnit, for hvilket Bøjningen er størst. Imidlertid er Forskydningen dog undertiden størst for det Tværsnit, med Hensyn til hvilket Bøjningsmomentet er størst, og i saa Fald kan der være nogen Grund til at tage Hensyn til den. Man kan gøre det paa den Maade, at man beregner, hvor stort et Areal der behøves til at modstaa Forskydningen, og dette Areal tænker man sig borte med Halvdelen paa hver Side af den neutrale Akse, eftersom Fibrene her kun i ringe Grad paavirkes til Bøjning. Derefter undersøger man, om den Del af Tværsnittet, som bliver tilbage, er tilstrækkelig stor til at modstaa Bøjningen. Dette skal blive nærmere oplyst ved et Eksempel, hvorved man tillige vil kunne faa et Indtryk af, hvilken Indflydelse det faar paa Tværsnittets Størrelse, om man tager Hensyn til Forskydningen eller ikke.

Ekspl. 98. En Støbejernsdrager, der er indspændt i den ene Ende, har et fritliggende af 1 m og belastes af en jævnfordelt Vægt paa 1350 kg. Dragerens Tværsnit skal være et Rektangel, saaledes at Bredden af dette gennem hele Dragerens Længde er konstant, nemlig 70 mm, medens Højden varierer saaledes, at Tværsnittene netop yde tilstrækkelig Modstand mod de i dem virkende Spændinger.

Hvis man ikke tog Hensyn til Forskydningen, vilde Drageren blive et tresidet Prisme af den paa Fig. 118

viste Form. Tværnittets Højde  $y$  ved Indspændingen vil i saa Fald, da Bøjningsmomentet med Hensyn hertil er  $\frac{1}{2} \cdot 1350 \cdot 1000 = 670000$  kgmm og  $k_s = 3$  kg/mm<sup>2</sup>, faas af Ligningen

$$670000 = 3 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{70y^3}{\frac{1}{2}y}; \quad y = 138,4 \text{ mm.}$$

Vil man tage Forskydningen, som vokser ganske jævnt fra 0 i den frie Ende indtil 1350 kg ved Indspændingen, med i Betragtning, maa man gaa frem paa følgende Maade:

Regner man  $k_f = 2,3$  kg/mm<sup>2</sup>, vil der til at modstaa Forskydningen fordres et Areal af Størrelse  $\frac{1350}{2,3}$  mm<sup>2</sup>. Det bliver et Rektangel, hvis Højde, da Bredden er 70 mm, vil blive

$$\frac{1350}{2,3 \cdot 70} = 8,4 \text{ mm.}$$

Giver man nu Dragerens Tværnsnit ved Indspændingen en Højde af 140 mm i Stedet for 138,4 mm, og tænkes det Rektangel, som skal modstaa Forskydningen, borttaget ved den neutrale Akse, vil Resten af Tværnittet, som altsaa skal modstaa Bøjningen, blive det paa Fig. 132 skraverede Areal. Da  $M_b = 670000$  kgmm og  $k_s = 3$  kg/mm<sup>2</sup>, vil

$$\frac{M_b}{k_s} = 223333 \text{ mm}^3.$$

For det skraverede Areal skal  $\frac{J}{y}$  i det mindste have denne Værdi.  $J = \frac{1}{12} \cdot 70 (140^3 - 8,4^3) = 18000000$  mm<sup>4</sup>;

$$y = 70 \text{ mm}; \quad \text{altsaa} \quad \frac{J}{y} = 228600 \text{ mm}^3.$$

Tværnittet bliver saaledes stærkt nok, uagtet Højden kun er forøget med 1,6 mm.

Hvor Forskydning forekommer samtidig med andre Paavirkninger, kan man bære sig ad paa lignende Maade og altsaa tænke sig et saa stort Areal af Tværnittet



borte ved den neutrale Akse eller omkring Tyngdepunktet, som vil behøves til at modstaa Forskydningen.

b) *Tværsnittet paavirkes samtidig til Bøjning og Vridning.*

Man finder i saa Fald først, som angivet Side 68, det ideelle Bøjningsmoment

$$M_i = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + M_v^2},$$

og man beregner dernæst Konstruktionsdelen for Bøjning alene, idet man benytter Ligningerne (32) eller (33), hvor  $M_i$  træder i Stedet for  $M_b$ . Man vil i dette Tilfælde komme til at regne med en Sikkerhed, som svarer til den, man vilde opnaa, naar man for Vridning benyttede  $k_f$ .

Vil man derimod for det cirkulære Tværsnit regne med en Sikkerhed, som svarer til den, der opnaas ved Benyttelse af  $k_v$ , maa man sætte

$$M_i = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + (\alpha M_v)^2},$$

hvor  $\alpha$  er en Koefficient, som angiver Forholdet mellem den for Materialet fastsatte tilladelige Paavirkning for Bøjning og  $\frac{5}{4}$  af den tilladelige Paavirkning  $k_v$  for Vridning.

c) *Tværsnittet paavirkes til Bøjning og samtidig enten til Sammentrykning eller til Strækning.*

Paa et Tværsnit, hvis Areal betegnes ved  $A$ , og hvis Inertimoment er  $J$ , antages der at virke et Bøjningsmoment  $M_b$ , medens Tværsnittet tillige paavirkes af en sammentrykkende Kraft  $T$ . Denne sidste vil paa hver af Tværsnittets Arealenheder udøve et Tryk  $\frac{T}{A}$ . Paa Grund af Bøjningen ville de yderste Fiberelementer i Tværsnittet paa Legemets konvekse Side modtage en Paavirkning til Strækning, som ifølge Afsnittet om Bøjning vil være  $\frac{M_b \cdot y_s}{J}$ , hvor  $y_s$  betegner Afstanden fra den neutrale Akse

til de stærkest strakte Fibre. Da den paa disse Fiberelementer virkende strækkende Paavirkning  $\frac{M_b \cdot y_s}{J}$  modvirkes af Trykket  $\frac{T}{A}$ , vil den samlede Paavirkning, som de

faa til Strækning, være  $\frac{M_b \cdot y_s}{J} - \frac{T}{A}$ . Denne Størrelse maa være mindre eller i det højeste lig med den tilladelige Paavirkning for Strækning  $k_s$ . Sættes de to Størrelser ligestore, faar man

$$\frac{M_b \cdot y_s}{J} - \frac{T}{A} = k_s, \text{ hvoraf } M_b = \left(k_s + \frac{T}{A}\right) \frac{J}{y_s}. \quad (45)$$

De yderste Fiberelementer paa Legemets konkave Side ville foruden Trykket  $\frac{T}{A}$  tillige paa Grund af Bøjningen modtage et Tryk  $\frac{M_b \cdot y_t}{J}$ , hvor  $y_t$  er Afstanden fra den neutrale Akse til de stærkest trykkede Fibre. Det samlede Tryk paa disse Fiberelementer bliver altsaa

$$\frac{M_b \cdot y_t}{J} + \frac{T}{A},$$

som i det højeste maa være lig med den tilladelige Paavirkning  $k_t$  for Sammentrykning. For denne Grænseværdi faar man altsaa

$$\frac{M_b \cdot y_t}{J} + \frac{T}{A} = k_t, \text{ hvoraf } M_b = \left(k_t - \frac{T}{A}\right) \frac{J}{y_t}. \quad (46)$$

Til Dimensionsbestemmelsen maa man benytte den af de to Formler (45) og (46), som i vedkommende Tilfælde giver den største Værdi.

Paavirkes et Tværsnit foruden til Bøjning tillige til Strækning af en Kraft  $S$ , faar man i de yderste Fiberelementer paa den konvekse Side dels en Paavirkning  $\frac{S}{A}$



til Strækning hidrørende fra  $S$ , dels en Paavirkning  $\frac{M_b \cdot y_s}{J}$  ligeledes til Strækning og hidrørende fra Bøjningsmomentet  $M_b$ . Sættes den samlede Paavirkning til Strækning lig med  $k_s$ , faar man

$$\frac{M_b \cdot y_s}{J} + \frac{S}{A} = k_s, \text{ hvoraf } M_b = \left( k_s - \frac{S}{A} \right) \frac{J}{y_s}. \quad (47)$$

De yderste Fiberelementer paa Legemet's konkave Side ville paavirkes til Sammentrykning af ialt

$$\frac{M_b \cdot y_t}{J} - \frac{S}{A}$$

Sættes denne Størrelse lig med  $k_t$ , faar man

$$\frac{M_b \cdot y_t}{J} - \frac{S}{A} = k_t, \text{ hvoraf } M_b = \left( k_t + \frac{S}{A} \right) \frac{J}{y_t}. \quad (48)$$

Her maa man ved Dimensionsbestemmelsen benytte den af Formlerne (47) og (48), som giver den største Værdi.

Ekspl. 99. Paa den i Ekspl. 42 (se Side 78) omtalte armerede Bjælke virker der i  $B$  2400 kg og i  $C$  1800 kg, begge lodret nedad. Disse Tryk forudsættes at hidrøre dels fra en over hele Bjælken  $AD$  jævnfordelt Belastning af 5400 kg, dels fra et enkelt Tryk af 600 kg i  $B$ .

Betragtes Stykket  $BC$ , ser man, at dette dels vil paavirkes til Sammentrykning af 7400 kg og dels til Bøjning af en Belastning paa 1800 kg jævnfordelt over Bjælkens fritliggende, der er 3 m.

Da Belastningen er jævnfordelt, findes det farligste Tværsnit i Bjælkens Midte. Bøjningsmomentet med Hensyn til dette Tværsnits Tyngdepunkt bliver  $M_b = \frac{1}{8} \cdot 1800 \cdot 3000 = 675000$  kgmm. Skal Bjælken være af Egetræ, hvor  $k_s = 1,2$  kg/mm<sup>2</sup> og  $k_t = 0,80$  kg/mm<sup>2</sup>, vil man for de stærkest strakte Fibres Vedkommende ifølge (45) faa

$$675000 = \left(1,2 + \frac{7400}{x^2}\right) \frac{1}{6} x^3,$$

og for de stærkest trykkede Fibre ifølge (46)

$$675000 = \left(0,80 - \frac{7400}{x^2}\right) \frac{1}{6} x^3.$$

Den sidste af disse Ligninger vil give størst Værdi for  $x$  og maa altsaa benyttes. Den kan omformes til

$$4050000 = 0,80 x^3 - 7400 x, \text{ eller}$$

$$5062500 = x^3 - 9250 x.$$

Ved at prøve sig frem, finder man  $x = 190$  mm.

Ekspl. 100. Det midterste Stykke af den Bjælke, som indgaar i det paa Fig. 67 viste Hængeværk, har et fritliggende af  $2,5$  m og paavirkes af en jævnfordelt Belastning paa 2000 kg, medens det samtidig paavirkes til Strækning af en Kraft paa 5400 kg. Antager man, at Bjælken skal tildannes af Fyrretømmer med kvadratisk Tværsnit, vil man, da  $k_s = 0,9$  kg/mm<sup>2</sup> og  $k_t = 0,63$  kg/mm<sup>2</sup>, ifølge (47) for de stærkest strakte Fibre faa

$$\frac{1}{8} \cdot 2000 \cdot 2500 = \left(0,9 - \frac{5400}{x^2}\right) \frac{1}{6} x^3,$$

og ifølge (48) for de stærkest trykkede Fibre

$$\frac{1}{8} \cdot 2000 \cdot 2500 = \left(0,63 + \frac{5400}{x^2}\right) \frac{1}{6} x^3,$$

hvor  $x$  angiver den søgte Kvadratside. Disse Ligninger kunne omformes til henholdsvis

$$4167000 = x^3 - 6000 x \text{ og } 5940000 = x^3 + 8572 x.$$

Den første af Ligningerne giver størst Værdi for  $x$ , nemlig 173.  $x$  kan altsaa af Hensyn til Styrken passende sættes til 175 mm.

Ekspl. 101. Det paa Fig. 76 viste Spærfag ACE paa-



virkes lodret nedad af en jævnfordelt Belastning paa 8000 kg. Derved vil Stykket  $AB$  sammentrykkes af 6400 kg, som er Summen af den paa  $AC$  jævnfordelte Belastnings Komposanter efter Spærets Længde. Dens Komposanter vinkelret paa Spæret ville desuden paavirke  $AB$  til Bøjning med en jævnfordelt Belastning, som er  $2000 \cos v$ , naar  $v$  er Spærets Vinkel med en vandret Linie.

For Midten af  $AB$ , hvor det farligste Tværsnit findes, er  $M_b = \frac{1}{8} \cdot 2000 AB \cos v = \frac{1}{8} \cdot 2000 \cdot 2250 = 562500$  kgmm.

Spæret tænkes dannet af et valset  $\Gamma$ . Regnes  $k_s = k_t = 9$  kg/mm<sup>2</sup>, vil Profil Nr.  $^{12}/_{12}$  for de stærkest sammentrykkede og de stærkest strakte Fibre give henholdsvis

$$\left(k_t - \frac{T}{A}\right) \frac{J}{y_t} = \left(9 - \frac{6400}{2960}\right) \cdot \frac{3660000}{32,8} = 763200 \text{ kgmm og}$$

$$\left(k_s + \frac{T}{A}\right) \frac{J}{y_s} = \left(9 + \frac{6400}{2960}\right) \cdot \frac{3660000}{87,2} = 468500 \text{ kgmm.}$$

Forsaaavdt vedkommende Jærnbjælke skulde kunne benyttes, maatte begge disse Størrelser være større end  $M_b = 562500$  kgmm. Den sidste af dem er imidlertid mindre, og man maa derfor forsøge, om det følgende Nr., nemlig  $^{14}/_{14}$ , er stærkt nok.

Anvendes dette, hvis Inertimoment er 6600000 og hvis Areal er 3990 mm<sup>2</sup>, medens Afstanden til de stærkest strakte Fibre er 102 mm, vil man af Ligning (45), ved at løse den med Hensyn til  $k_s$ , kunne finde den Paavirkning, som de stærkest strakte Fibre faa. Den bliver 7,09 kg/mm<sup>2</sup>, medens de stærkest sammentrykkede Fibre, idet  $y_t$  er 38 mm, ville faa en Paavirkning af kun 4,84 kg/mm<sup>2</sup>. Denne Jærnbjælke er altsaa tilstrækkelig stærk, men da Paavirkningerne ere langt mindre end den tilladelige Paavirkning af 9 kg/mm<sup>2</sup>, kunde der være god Anledning til slet ikke at benytte en Jærnbjælke af  $\Gamma$ -Form, men derimod f. Eks. to indbyrdes forbundne Vinkeljærn.

Virker der paa et Tværsnit Vridning i Forbindelse med en eller flere af de andre Paavirkninger, kan man omforme Vridningsmomentet til et ideelt Bøjningsmoment og derefter benytte det foran udviklede.

### III. Stenkonstruktioner.

Stenkonstruktioner henhøre under de saakaldte løse Systemer, fordi deres enkelte Dele tænkes liggende løse paa hverandre uden Forbindelse. De forekommer dels som Hvælvinger, dels som Mure. I Bygningskonstruktionslæren ere disse Konstruktioner nærmere omtalte, og man skal derfor her kun give en Fremstilling af, hvorledes Tværsnitsdimensionerne af en foreliggende Stenkonstruktion kan bestemmes under Forudsætning af, at den skal være i Stand til at modstaa givne ydre Paavirkninger. Fremgangsmaaden vil, hvad enten der er Tale om en Hvælving eller en Mur, i alt væsentligt være den samme, da en Mur kan betragtes som en Del af en Hvælving, hvis Radius er uendelig stor. Naar man derfor under den mere almindelige Udvikling taler om Hvælvinger, tænkes Mure medindbefattede herunder; hvad der specielt er at sige om Mure, vil nærmere fremgaa af Eksemplerne i det følgende.

De Belastninger, som virke paa saadanne Konstruktioner, bestaa ligesom ved Tagværker og Broer dels i en stadig og dels i en tilfældig Belastning. Den førstnævnte, der er Murværk, Jord o. l., skyldes dels Konstruktionens Egenvægt, dels Materialer, som trykke paa den. Den tilfældige Belastning er forskellig efter Konstruktionens Anvendelse, og kan saaledes være en Menneskemængde, al-



mindelige Vogne, Jærnbanevogne m. m. Ofte tænker man sig den samlede Belastning omsat i Murværk, da dette i mange Tilfælde vil lette Beregningerne. Da de enkelte Dele af Stenkonstruktionerne i Almindelighed forudsættes at ligge løse paa hverandre, tør man ikke udsætte nogen Del af dem for Træk, men alene for Tryk. En Undtagelse heri gør man dog undertiden, naar Cementmørtel anvendes som Bindemiddel, da dette Materiale kan taale en ringe Paavirkning til Strækning.

Da den lige cylindriske Tøndehvælving er den simpleste af de eksisterende Hvælvingsarter, skal den lægges til Grund for den følgende Udvikling. En saadan Tøndehvælving finder sin Understøtning i Vederlagene, og den er begrænset af en ydre og en indre Hvælvflade. Lægges et Plan igennem Hvælvingen vinkelret paa dennes Akse, ville Hvælvfladerne skæres i de saakaldte Hvælvlinier og Vederlagene i Fødselslinierne. Hvælvingen vil være tilstrækkelig stærk, naar Paavirkningen paa en hvilken som helst Liggeflade har en saadan Størrelse, Retning og Belliggenhed, at der

1) *ingen Knusning af Materialet finder Sted, hverken ved den indre eller den ydre Hvælvkant (de Linier, hvori Liggefladen skærer Hvælvfladerne),*

2) *ikke finder nogen Glidning Sted, hverken indad eller udad,*

3) *ikke finder Væltning Sted, hverken indefter om den indre Hvælvkant eller udefter om den ydre.*

Ved Undersøgelse af Hvælvinger (Mure) betragtes altid et Stykke af dem, som afskæres imellem to Planer, der i en Afstand af 1 Meter fra hinanden lægges vinkelret paa Hvælvingens Akse.

Alle de Tryk, som hidrørende fra den ydre Belastning komme til at virke paa Hvælvingens Liggeflader, ville ind-

gaa i den saakaldte Middeltryklinie, der allerede kortelig er omtalt Side 59—60. Den er som nævnt en Stangpolygon, konstrueret for en af Kraftpolygonens Vinkelspidser som Pol; det i enhver af dens Sider virkende Tryk vil være Resultanten af alle de Kræfter, som virke til den ene Side af vedkommende Stangpolygonside. Imidlertid vil man, eftersom Udgangspunkterne for Middeltryklinien ved Toppen og ved Vederlaget vælges paa forskellige Steder, faa Middeltryklinier, som baade i Form og Beliggenhed blive forskellige. Kan man i en Hvælving indlægge flere Middeltryklinier, hvis enkelte Kræfter alle opfylde de foran nævnte tre Betingelser, har Hvælvingen overflødig Styrke og altsaa ogsaa overflødig Materiale. Naar der i Hvælvingen kun indgaar det absolut nødvendige Materiale, kan der i Hvælvingstværsnittet kun indlægges een Middeltryklinie, som opfylder de tre angivne Betingelser, og denne Middeltryklinie vil da indeholde Tyngdepunkterne i alle Liggeflader. Et saa gunstigt Forhold vil kun indtræde, naar Hvælvingen formes efter Middeltryklinien. Dette gør man dog saa at sige aldrig i Praksis, men man gaar ud fra en bestemt Hvælvingensform, og Middeltryklinien vil saa nogle Steder nærme sig til den indre og andre Steder til den ydre Hvælplinie. Man indskrænker sig da til at finde en Middeltryklinie, som ligger saaledes, at der i en enkelt eller i et Par Liggeflader netop vil være tilstrækkeligt Materiale til Stede til at modstaa Paavirkningerne, medens der i de øvrige Liggeflader findes overflødig Materiale. Fremgangsmaaden ved Bestemmelsen af Hvælvinger vil derfor blive den, at man vælger en Hvælvingensform samt fastslaar Hvælvingens Tykkelse paa de forskellige Steder og derefter undersøger, om Hvælvingen kan modstaa Paavirkningerne. Viser den sig enten for svag eller for stærk, maa dens Tykkelse forandres og Undersøgelsen gentages. Forinden dette imidlertid oplyses



nærmere, skulle de foran nævnte tre Betingelser omtales noget mere indgaaende.

Betingelse 1. *Der maa ingen Knusning af Materialet finde Sted.*

Fig 133<sup>a</sup> og <sup>b</sup> forestille henholdsvis lodret og vandret Billede af et Snit i en Stenkonstruktion. Snittets Tyngdepunkt er betegnet ved  $T$ , og det Punkt, i hvilket den ydre Kraft  $P$  angriber, ved  $B$ . Fremdeles betegnes Afstanden  $BT$  ved  $a$ , Snittets Areal ved  $A$  og dets Inertimoment med Hensyn til Aksen  $XX$ , der er lagt gennem Tyngdepunktet vinkelret paa  $BT$ ; ved  $J$ , medens Afstanden mellem  $XX$  og de yderste Arealelementer til højre og venstre kaldes henholdsvis  $y$  og  $y'$ . I Punktet  $T$  kan man, uden at dette vil faa nogen Indflydelse paa Ligevægten, tilføje to Kræfter af Størrelse  $P$ , den ene virkende lodret opad, den anden lodret nedad. Den første af disse vil i Forbindelse med  $P$ , som virker i  $B$ , danne et Kraftpar med Moment  $Pa$ , og den ydre Krafts Virkning paa Snittet bestaar altsaa i et Moment  $Pa$  og en enkelt Kraft  $P$  virkende i Tyngdepunktet. Denne sidste vil fordele sig jævnt over hele Arealet, saa at der altsaa paa hver Arealenhed kommer et Tryk  $\frac{P}{A}$ . Momentet  $Pa$  vil ifølge Afsnittet om Bøjning bevirke, at de yderste Arealelementer til højre ville faa et Tryk, som er  $\frac{Pay}{J}$ , og de yderste Elementer til venstre et Træk af Størrelsen  $\frac{Pay'}{J}$ .

Den samlede Virkning vil saaledes paa de yderste Arealelementer til venstre blive  $\frac{P}{A} - \frac{Pay'}{J}$ , og paa de yderst til højre liggende  $\frac{P}{A} + \frac{Pay}{J}$ .

De sidste blive altid paavirkede til Sammentrykning,

medens de første ville paavirktes til Strækning eller til Sammentrykning, eftersom

$$\frac{P}{A} - \frac{P a y'}{J} < 0.$$

Er 
$$\frac{P}{A} - \frac{P a y'}{J} = 0, \quad (49)$$

blive de yderst til venstre liggende Fibre upaavirkede.

Anvendes dette paa en Liggeflade, hvis Figur er et Rektangel, se Fig. 134<sup>a</sup> og <sup>b</sup>, faar man ifølge (49)

$$\frac{P}{bh} - \frac{P a \cdot \frac{1}{2} h}{\frac{1}{12} b h^3} = 0, \text{ hvoraft } a = \frac{1}{6} h.$$

Trykket maa altsaa ikke komme den indre eller ydre Hvælvkant nærmere end  $\frac{1}{3}$  af Hvælvingens Tykkelse, hvis Strækning af Materialet skal undgaas.

I dette Tilfælde, altsaa naar  $a = \frac{1}{6} h$ , bliver Størrelsen

$$\frac{P}{A} + \frac{P a y}{J},$$

som angiver Paavirkningen i de stærkest sammentrykkede Arealelementer, til

$$t = \frac{P}{bh} + \frac{P \cdot \frac{1}{6} h \cdot \frac{1}{2} h}{\frac{1}{12} b h^3} = \frac{2P}{bh},$$

o: netop dobbelt saa stor, som den vilde blive, naar  $P$  angreb i Tyngdepunktet. Selv om Materialet ikke tør forudsættes at kunne taale Træk, tillader man dog, at Trykket virker nærmere ved en Hvælvkant end  $\frac{1}{3}$  af Hvælvingens Tykkelse, naar blot ikke den tilladelige Paavirkning pr. Arealenhed til Sammentrykning overskrides, idet man i saa Fald forudsætter, at de yderste Fibre paa den modsatte Side ikke yde nogen Modstand.

Paa Fig. 135<sup>a</sup> og <sup>b</sup> er  $P$  vist angribende i et Punkt  $C$ , der ligger i en Afstand  $c < \frac{1}{3} h$  fra den ene Kant. Forholdet vil da være det samme, som om Rektanglet af



Bredde  $b$  kun havde en Højde  $3c$ , idet den Del af dets Areal, som ligger til venstre for den punkterede Linie, vil blive uvirksomt. Paa de stærkest paavirkede Elementer vil der saaledes komme et Tryk  $\frac{2P}{3bc}$ .

Ifølge det foregaaende maa man altsaa til Bestemmelse af Paavirkningen  $t$  pr. Arealenhed af de stærkest sammentrykkede Partikler, naar  $P$  angriber i Afstanden  $\frac{1}{3}h$  fra en af Hvælvkanterne, benytte

$$t = \frac{2P}{bh}. \quad (50)$$

Er Afstanden fra  $P$ 's Angrebspunkt til Hvælvkanterne  $> \frac{1}{3}h$ , maa man benytte

$$t = \frac{P}{A} + \frac{P ay}{J} = \frac{P}{bh} \left( 1 + \frac{6a}{h} \right). \quad (51)$$

Et specielt Tilfælde heraf er det, hvor  $P$ 's Angrebspunkt falder i Arealets Tyngdepunkt  $T$ . I saa Fald er

$$t = \frac{P}{bh}. \quad (52)$$

Er Afstanden fra  $P$ 's Angrebspunkt til en af Hvælvkanterne  $< \frac{1}{3}h$ , benyttes Formlen

$$t = \frac{2P}{3bc}. \quad (53)$$

Værdien for  $t$  maa i intet Tilfælde overskride Værdien for den tilladelige Paavirkning  $k_t$  for vedkommende Materiale.

Betingelse 2. *Der maa ikke finde nogen Glidning Sted.*

$AB$  paa Fig. 136 forestiller en plan Flade af et Legeme, paa hvilken der ligger et andet Legeme  $L$ . Gennem dets Tyngdepunkt antages der at virke en Kraft  $P$  ind imod Planet, saaledes at Kraften danner en Vinkel  $\nu$  med den vinkelrette paa Planet. Opløser man nu  $P$  efter to Linier gennem Tyngdepunktet, den ene

parallel med  $AB$ , den anden vinkelret derpaa, vil den første, hvis Størrelse er  $P \sin v$ , søge at bevæge  $L$  henad  $AB$ , medens derimod den lodrette Komposant  $P \cos v$  vil trykke  $L$  ind imod  $AB$  og derved mellem de hinanden berørende Flader frembringe en Gnidningsmodstand (Frik-tionsmodstand), der vil modvirke  $L$ 's Bevægelse henad  $AB$ .

Størrelsen af denne Gnidningsmodstand er, som be- kendt fra Fysikken, proportional med det paa de be- rørende Flader vinkelrette Tryk, idet den er Produktet af dette Tryk og den saakaldte Gnidningskoefficient (Frik- tionskoefficient)  $f$ , hvis Størrelse afhænger af de Materialer, hvoraf de to Legemer bestaa, og af de berørende Fladers Beskaffenhed. Gnidningsmodstanden vil altsaa i det paa Fig. 136 viste Tilfælde være  $f \cdot P \cos v$ . Naar  $f \cdot P \cos v > P \sin v$  eller, hvad der er det samme, naar  $f > \operatorname{tg} v$ , vil det ene Legeme ikke glide paa det andet, men er  $f \cdot P \cos v < P \sin v$  eller  $f < \operatorname{tg} v$ , vil Glidning finde Sted.

Den mindste Vinkel, som  $P$  kan danne med Perpen- dikulæren, naar Glidning skal kunne finde Sted, vil altsaa, naar denne Værdi af  $v$  betegnes ved  $g$ , være bestemt ved

$$f P \cos g = P \sin g, \text{ hvoraf } f = \operatorname{tg} g.$$

$g$  kaldes Gnidningsvinklen. Det er netop den Vinkel, som den plane Overflade af et Legeme, bestaaende af det ene Materiale, vil danne med det vandrette Plan i det Øjeblik, da et paa det liggende Legeme, dannet af det andet Materiale, vil begynde at glide nedad Fladen. Glidningen vil altsaa kun finde Sted, naar  $v \geq g$ .

Alle de Linier, som gennem Kraftens Angrebspunkt kunne anbringes saaledes, at de danne Vinklen  $g$  med den vinkelrette paa de berørende Flader, ville være Frem- bringere i den saakaldte Gnidningskegleflade (Frik-tions- kegleflade).

Gnidningskoefficienten  $f$  vil ved almindelig Murværk med Kalkmørtel ligge mellem  $0,6$  og  $0,75$ , hvortil svarer



$g = 31^{\circ}$  à  $37^{\circ}$ . Ved ganske frisk Mørtel kan Værdien for  $f$  synke ned til  $0,51$ , i hvilket Tilfælde  $g = \text{ca. } 27^{\circ}$ . En Undersøgelse om, hvorvidt Betingelse 2 er opfyldt, bør altid finde Sted, med mindre Murværket, som f. Eks. Beton danner en aldeles fast Masse.

Betingelse 3. *Der maa ikke finde Væltning Sted om nogen Hvælokant.*

Saalænge Trykkets Angrebspunkt paa Liggefladen falder indenfor dennes Omkreds og samtidig Betingelse 1 er opfyldt, vil der aldrig være Fare for Væltning.

Hvad Hvælvingsformen angaar, afhænger denne ofte af særlige Forhold. Er dette ikke Tilfældet, skal man med Hensyn til Valget af en heldig Form bemærke følgende: Er Belastningen foroven begrænset af et vandret Plan, hvis Højde over Toppen er  $\frac{1}{3}$  à  $\frac{1}{6}$  af Vidden af den Aabning, som skal overhvelves, vil en flad Cirkelbue med Radius fra 3 til 5 Gange Belastningshøjden over Toppunktet være passende. Skal Hvælvingen ikke bære andet end sig selv, vil en Cirkelbue med i det mindste  $\frac{2}{3}$  af Spændvidden til Radius give en heldig Hvælvingsform. Medens Valget af disse Hvælvingsformer under de nævnte Belastningsforudsætninger saaledes vil medføre, at der kommer til at indgaa det mindst mulige Materiale i Hvælvingen, ville de være mindre heldige for Hvælvingsens Piller, som blive udsatte for store Sidetryk, der oven i Købet danne smaa Vinkler med den vandrette Linie. For Pillernes Vedkommende er blandt Cirkelbuer, foruden Spidsbuen, Halvcirklen den heldigste, men den sidste vil, naar Belastningen foroven er vandret begrænset, være mindre gunstig for Hvælvingsens Tykkelse, og dertil kommer, at den ofte vil fordrø en større Højde, end der kan skaffes til Veje. Hvor det er nødvendigt at benytte en Bue med lille Pil, anvendes derfor jævnlig med Held

den saakaldte Kurvehanksbue, som bestaar af flere Cirkelbuer med forskellige Centrere og som for Pillernes Vedkommende er gunstigere end den flade Cirkelbue.

Naar saavel Hvælvingen som dens Belastning ere symmetriske med Hensyn til et lodret Plan gennem Hvælvingens Akse, ville de to Halvdele, hvori dette lodrette Plan deler Hvælvingen, udøve lige store vandrette Tryk imod hinanden i Toppen, og man kan derfor i saa Fald ved Bestemmelsen af Hvælvingstykkelserne nøjes med at betragte den ene Halvdel af Hvælvingen. Paa denne vil der altsaa i Toppen virke en Modstand, hvis Retning man kender, men hvis Størrelse og Angrebspunkt ere ubekendte. Til at forhindre Hvælvingshalvdelen i at falde, vil der desuden virke en Modstand i Vederlaget, men saavel dennes Angrebspunkt som Størrelse og Retning ere ogsaa ubekendte. Middeltrykkliniens Form og Belliggenhed er saaledes ganske ubestemt. Den vil afhænge dels af Valget af Angrebepunkterne i Toppen og i Fødselslinien dels af Hvælvingens Form og Belastningsforhold. Som en mere almindelig Regel, hvorfra der dog jævnlig finder Afgivelser Sted, kan man angive, at Middeltryklinien ved Cirkelbuer, naar Belastningen er begrænset foroven af et vandret Plan, falder nærmest ydre Hvælplinie ved Toppen og Fødselslinierne, derimod nærmest den indre Hvælplinie noget fra Fødselslinierne. Spidsbuer have som oftest Middeltryklinien nærmest indre Hvælplinie ved Toppen og Fødselslinierne, men nærmest ydre Hvælplinie noget fra Toppen. Da Opgaven er saa yderst ubestemt, vil det altid være nødvendigt at foretage en foreløbig Beregning til Bestemmelse af Hvælvingens Tykkelse paa de forskellige Steder. Selv om de Tykkelser, man saaledes finder, ikke ved en mere nøjagtig Undersøgelse vise sig



ganske rigtige, vil man dog meget snart, ved at ændre lidt paa dem, komme til et tilfredsstillende Resultat.

Ekspl. 102. Paa Fig. 137<sup>a</sup> og <sup>b</sup> er der vist en saadan foreløbig Bestemmelse og paa Fig. 138<sup>a</sup> og <sup>b</sup> den dertil hørende endelige Undersøgelse af en cylindrisk Tøndehvælving, hvis indre Hvælvlade til Ledelinie har en Cirkelbue med Korde 7,5 m og Pil 1,25 m. Saavel Hvælvingen som dens Belastning antages at være Murværk, der foroven er begrænset af et vandret Plan i Afstanden 1 m fra den indre Hvælvladies Top.

Paa Figur 137<sup>a</sup> er den indre Hvælvladie delt i seks ligestore Dele. Antallet af disse Dele er vilkaarligt, men Bestemmelsen vil selvfølgelig blive desto nøjagtigere, jo flere Dele Hvælvladien deles i. Arealet  $abcd$ , der, som proportionalt med hele Belastningen, kan træde i Stedet for denne ved den grafiske Konstruktion, er dernæst ved lodrette Linier delt i seks Dele, som tilnærmelsesvis ere Trapezer.

$$abef = 1,1320 \text{ m}^2 = P_1,$$

$$fegh = 1,0350 \text{ m}^2 = P_2,$$

$$hgik = 0,9070 \text{ m}^2 = P_3,$$

$$kilm = 0,7980 \text{ m}^2 = P_4,$$

$$mlno = 0,7200 \text{ m}^2 = P_5,$$

$$oncd = 0,6900 \text{ m}^2 = P_6,$$

---


$$\text{altsaa er } abcd = 5,2820 \text{ m}^2 = R.$$

Efterat disse Trapezers Tyngdepunkter ere bestemte ad grafisk Vej, tænker man sig deres Arealer, som ere betegnede ved  $P_1, P_2, P_3 \dots$ , virkende i Tyngdepunkterne som Kræfter lodret nedad. Beliggenheden af deres Resultant er bestemt paa sædvanlig Maade ved paa Figur 137<sup>b</sup> at afsætte Kræfterne ved Siden af hverandre i en lodret Linie, vælge en vilkaarlig Pol  $O'$ , fra denne trække

Straaler til Kraftpolygonens Vinkelspidser og ved endelig paa Fig. 137<sup>a</sup> at danne den til disse Straaler svarende Stangpolygon *I II III . . . VI VII*. Resultantlinien *R* og Modstandslinierne ved Toppen og ved Fødselslinien skulle skære hverandre i eet Punkt, for at der kan være Ligevægt mellem de ydre Kræfter. Man vælger da først efter bedste Skøn et vilkaarligt Punkt *A* i Toppen til Angrebepunkt for den vandrette Modstandslinie, forlænger denne, som er betegnet ved *P*<sub>7</sub>, til Skæring med *R* i Punktet *B* og trækker endelig gennem *B* og et ligeledes paa Skøn tæt ved Fødselslinien valgt Punkt *C* den anden Modstandslinie *P*<sub>8</sub>. Skulde man komme til at vælge de omtalte Endepunkter for Middeltryklinien noget uheldigt, saaledes at denne f. Eks. for en Del faldt udenfor den indre Hvælvlinie, gør dette ikke noget, da det her væsentligst kommer an paa at faa et Skøn over Middeltrykliens omtrentlige Form samt en tilnærmelsesvis Bestemmelse af Modstandene i Toppen og Vederlaget. Størrelsen af disse to Modstande *P*<sub>7</sub> og *P*<sub>8</sub> ere fundne paa Figur 137<sup>b</sup> ved Linier fra Endepunkterne af *R* parallelle med Modstandslinierne *P*<sub>7</sub> og *P*<sub>8</sub> paa Fig. 137<sup>a</sup>. Vælger man nu Vinkelspidserne *O* i den paa Fig. 137<sup>b</sup> af *P*<sub>1</sub>, *P*<sub>2</sub>, *P*<sub>3</sub>, *P*<sub>4</sub>, *P*<sub>5</sub>, *P*<sub>6</sub>, *P*<sub>7</sub> og *P*<sub>8</sub> dannede Kraftpolygon til Pol, og trækkes der Straaler herfra til Polygonens Vinkelspidser, ser man, at Kraften *P*<sub>13</sub> er Resultant af *P*<sub>6</sub> og *P*<sub>7</sub>, *P*<sub>12</sub> Resultant af *P*<sub>5</sub>, *P*<sub>6</sub> og *P*<sub>7</sub> o. s. v.; den ved Linier parallelle med disse Polstraaler dannede Stangpolygon vil altsaa blive en Middeltryklinie, hvis Vinkelspidser ere angivne paa Fig. 137<sup>a</sup> ved *I*, *II*, *III* o. s. v. Da den her fundne Middeltryklinie næsten har ganske samme Form som den indre Hvælvlinie, kan man i dette Tilfælde gaa ud fra, at Angrebepunkterne for *P*<sub>7</sub> og *P*<sub>8</sub> passende kunne vælges midt imellem den indre og ydre Hvælvlinie. Betragter man nu et Stykke af Hvælvingen og dens Belastning, som er 1 m langt i Retning vinkel-



ret paa Tegneplanet, vil der, idet  $P_7 = 7,74 \text{ m}^2$ , i  $A$  virke et Tryk  $T_7 = 7,74 \cdot 1600 = 12400 \text{ kg}$ , naar  $1 \text{ m}^3$  Murværk antages at veje  $1600 \text{ kg}$ .

Det er ikke ganske rigtigt, naar man til Bestemmelse af Trykkene paa de enkelte Liggeflader benytter  $P_7$ ,  $P_8$ ,  $P_9$  o. s. v. i Stedet for disses Komposanter vinkelret paa Liggefladen, men da Kræfternes Retninger gerne kun afvige meget lidt fra de vinkelrette, ser man i Almindelighed bort fra denne Unøjagtighed og bruger Kræfterne selv, da det simplificerer Fremgangsmaaden en hel Del, og man tilmed derved bestandig holder sig paa den sikre Side.

Ved Benyttelse af (52) findes Hvælvingens Tykkelse i Toppen ved Hjælp af Ligningen  $\frac{12400}{1000 \cdot h} = 0,06$ , idet Murværket forudsættes at kunne taale et Tryk af  $0,06 \text{ kg/mm}^2$ .  $h$  bliver derved lig med ca.  $200 \text{ mm}$ . Da  $P_8 = 9,3 \text{ m}^2$ , bliver Trykket  $T_8$  ved Fødselslinien

$$T_8 = 9,3 \cdot 1600 = \text{ca. } 14900 \text{ kg},$$

og Hvælvingens Tykkelse her

$$h_1 = \frac{14900}{0,06 \cdot 1000} = \text{ca. } 250 \text{ mm}.$$

Man vil altsaa passende kunne gøre Hvælvingen  $230 \text{ mm}$  eller  $1 \text{ Sten}$  tyk ved Toppen og  $350 \text{ mm}$  eller  $1\frac{1}{2} \text{ Sten}$  ved Vederlaget.

Paa Fig. 138<sup>a</sup> er Hvælvingen vist med disse Tykkelser. Den ydre Hvælvlinie, der er punkteret, er en Cirkelbue med vandret Tangent i Toppen. Ved den endelige Undersøgelse, hvor hele Belastningen er repræsenteret ved Arealet af Figuren *abefiknqv*, er den indre Hvælvlinie ligeledes delt i seks ligestore Dele, men gennem Delingspunkterne er der her trukket Radier, indtil de skære

den ydre Hvælvlinie, og gennem deres Skæringspunkter med den er der tegnet lodrette Linier. Hele Arealet deles derved i tolv Firkanter, hvoraf de seks kunne betragtes som Trapezer.

Disse Firkanters Arealer ere:

$$\begin{aligned}abcd &= 1,0620 \text{ m}^2; \quad befc = 0,2315 \text{ m}^2; \quad abefcd = 1,9235 \text{ m}^2 = P_1, \\degh &= 0,8925 \text{ m}^2; \quad cfig = 0,2135 \text{ m}^2; \quad defigh = 1,1060 \text{ m}^2 = P_2, \\hglm &= 0,7450 \text{ m}^2; \quad gikl = 0,1960 \text{ m}^2; \quad hgiklm = 0,9410 \text{ m}^2 = P_3, \\mlop &= 0,6225 \text{ m}^2; \quad lkno = 0,1870 \text{ m}^2; \quad mlknop = 0,8095 \text{ m}^2 = P_4, \\pors &= 0,5440 \text{ m}^2; \quad onqr = 0,1780 \text{ m}^2; \quad ponqrs = 0,7220 \text{ m}^2 = P_5, \\srut &= 0,4940 \text{ m}^2; \quad rqvu = 0,1690 \text{ m}^2; \quad srqvut = 0,6630 \text{ m}^2 = P_6.\end{aligned}$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = abefiknqvt = 5,5335 \text{ m}^2 = R.$$

Efterat først Tyngdepunkterne for de tolv Figurer ere bestemte, finder man let det fælles Tyngdepunkt for  $abcd$  og  $befc$ , for  $degh$  og  $cfig$  o. s. v., da Afstandene mellem Tyngdepunkterne kunne maales paa Tegningen og Figurerens Arealer i Forvejen ere bestemte.

Gennem disse sidst fundne seks Tyngdepunkter tegnes derefter Kraftlinierne for Kræfterne  $P_1, P_2, \dots, P_6$ , og nu bestemmer man paa Fig. 138<sup>b</sup> Beliggenheden af deres Resultant  $R$  ved Hjælp af Kraftpolygonen  $P_1, P_2, \dots, P_6$ , samt ved Straalerne fra den vilkaarligt valgte Pol  $O'$  og den hertil svarende Stangpolygon  $I' II' \dots VII'$ . Gennem  $A$  (Fig. 138<sup>a</sup>) 115 mm fra  $v$  er Kraftlinien for  $P_7$  tegnet, og gennem Skæringspunktet  $B$  mellem den og  $R$  er  $P_8$  trukket hen til Punkt  $C$ , som ligger 175 mm fra  $e$ . Paa Fig 138<sup>b</sup> er endelig Størrelsen af  $P_7$  og  $P_8$  samt af de øvrige i Middelttryklinien  $I II III IV V VI B$  virkende Kræfter fundne.

$$P_7 = 6,92 \text{ m}^2, \quad \text{altsaa } T_7 = 6,92 \cdot 1600 = \text{ca. } 11500 \text{ kg.}$$

Paavirkningen ved Toppen bliver derved til

$$t = \frac{11500}{1000 \cdot 230} = 0,05 \text{ kg/mm}^2.$$



$$P_8 = 8,9 \text{ m}^2, \text{ altsaa } T_8 = 8,9 \cdot 1600 = \text{ca. } 14240 \text{ kg.}$$

Ved Vederlaget bliver Paavirkningen derefter

$$t = \frac{14240}{1000 \cdot 350} = \text{ca. } 0,041 \text{ kg/mm}^2.$$

Anstiller man en lignende Undersøgelse for de øvrige Tværsnits Vedkommende, vil det vise sig nødvendigt at give Hvælvingen en Tykkelse af  $1\frac{1}{2}$  Sten indtil Snit *on* og først derfra til Toppen gøre den 1 Sten tyk. I Facadeskifterne vil man selvfølgelig gøre Hvælvingen overalt  $1\frac{1}{2}$  Sten. Man har nu set, at Hvælvingen opfylder den første Betingelse, idet der intetsteds er Fare for Knusning, og der vil som Følge heraf og af Middeltrykkliniens Belliggenhed heller ikke være Fare for Væltning.

Undersøger man Hvælvingen for Glidnings Vedkommende i de syv Snit, vil man se, at Vinklerne, som de enkelte Kræfter danne med en paa vedkommende Snit vinkelret Linie, alle ville være mindre end Friktionsvinklen.

Ekspl. 103. Paa Fig. 139<sup>a</sup> og <sup>b</sup> er der vist, hvorledes man kan bestemme en af de Piller, som bære den i Fig. 138 behandlede Hvælving. Trykket  $P_1$  er her af samme Størrelse og Retning som  $P_8$  paa Fig. 138<sup>b</sup>, men Kraftpolygonen paa Fig. 139<sup>b</sup> er for Pladsens Skyld kun tegnet i den halve Størrelse. Pillens Murværk tænkes ført op til samme Højde som Murværket over Hvælvingen. Murens Højde indtil Vederlaget er  $3,25$  m og til dens øverste Flade altsaa  $5,50$  m. Man maa her prøve sig frem, indtil man finder en passende Murtykkelse. En Mur som den paa Fig. 139<sup>a</sup> viste, hvor Tykkelsen i Grundfladen er  $2,63$  m, vil opfylde de tre Betingelser. Efterat have udregnet, at

$$\begin{aligned}
 abcd &= 4,770 \text{ m}^2 = P_2, & dcfe &= 0,750 \text{ m}^2 = P_3. \\
 efgh &= 1,710 \text{ m}^2 = P_4, & hgki &= 1,710 \text{ m}^2 = P_5, \\
 iklm &= 1,710 \text{ m}^2 = P_6, & mlon &= 1,710 \text{ m}^2 = P_7, \\
 nopq &= 1,710 \text{ m}^2 = P_8,
 \end{aligned}$$

har man ved Hjælp af disse Kræfter og  $P_1$ , som er lig med  $8,9 \text{ m}^2$ , paa Fig. 139<sup>b</sup> tegnet den af Kræfterne dannede Kraftpolygon.

$O$  er valgt til Pol og den dertil svarende Middeltryklinie bestemt. De fleste af dennes Sider ville imidlertid gaa gennem eet Punkt, eftersom de fleste af Kraftlinierne, nemlig  $P_4, P_5, \dots P_8$  falde i samme Linie. De Punkter, i hvilke Middeltrykliniens Sider  $P_{14}, P_{13}, P_{12}$  o. s. v. træffe de Fuger, paa hvilke de virke, ere bestemte ved Forlængelse af de respektive Kraftlinier til den ene eller den anden Side og ere derefter forbundne ved en krum Linie, der kaldes Støttelinien. Ved Betragtning af Figuren vil man indse, at der vil være størst Fare for Knusning ved Grundfladen, da den virkende Kraft her er størst samtidig med, at dens Angrebspunkt falder nærmest Kanten. For Knusnings Vedkommende behøver man altsaa kun at anstille en Undersøgelse her. Den lodrette Komposant af  $P_9$  er  $19,5 \text{ m}^2$ , hvorved Trykket  $T_9$ , naar man betragter et Stykke af Pillen, der er 1 m langt og opmuret af almindelige brændte Sten, vil blive

$$T_9 = 19,5 \cdot 1600 = 31200 \text{ kg.}$$

$T_9$  angriber i en Afstand fra den ene Kant, som er mindre end  $\frac{1}{3}$  af Murens Tykkelse, hvorfor Formel (53) maa benyttes til Bestemmelse af Paavirkningen pr.  $\text{mm}^2$ . Denne vil blive

$$t = \frac{2 \cdot 31200}{3 \cdot 1000 \cdot 400} = 0,052 \text{ kg/mm}^2.$$

Da der saaledes ikke er Fare for Knusning, og Støttelinien falder indenfor Murens Begrænsning, er der heller



ikke Fare for Væltning. For Glidnings Vedkommende vil der være størst Fare i Fugen *ef*, fordi den derpaa virkende Kraft  $P_{14}$  danner en større Vinkel med Perpendikulæren end nogen af de andre Kræfter. Da Vinklen imidlertid er ca.  $33^0$  og saaledes er beliggende indenfor de foran angivne Grænseværdier, tør man forudsætte, at Glidning ikke vil finde Sted, naar blot Mørtelen ikke er ganske frisk.

Den foreliggende Hvælvingspille er meget svær, hvilket ligger i, at Trykket  $P_1$  danner en temmelig stor Vinkel med den lodrette Linie. Jo fladere Cirkelbuen bliver, desto større bliver Sidetrykket paa Pillen, og desto sværere maa den gøres, da det, for at undgaa Glidning i det Vederlaget nærmeste Skifte, vil være nødvendigt at skaffe et stort Tryk til Veje oven over dette Skifte. Man vilde straks kunne faa et omtrentligt Skøn over Pillens Tykkelse, naar man (se Fig. 139<sup>b</sup>) fra *O* trak  $P_{14}$  saaledes, at den med den lodrette Linie dannede en Vinkel ligestor med Gnidningsvinklen. Derved bestemmes  $P_2 + P_3$ , og da Højden *ae* er bekendt, finder man let Afstanden *ab*. En anden og lettere Maade at undgaa Faren for Glidning paa er den, at man gør de nærmest Vederlaget liggende Skifter hældende.

Ekspl. 104. Figurerne 140<sup>a</sup> og <sup>b</sup> og 141<sup>a</sup> og <sup>b</sup> vise henholdsvis foreløbig og endelig Bestemmelse af en cylindrisk Hvælvning, hvor Ledelinien for den indre Hvælvflade er en Halvcirkel med Diameter 5 m. Hvælvingen tænkes belastet med Murværk indtil en Højde af 1,25 m over den indre Hvælvlinies Top. Da Fremgangsmaaden her er fuldstændig analog med den paa Fig. 137<sup>a</sup> og <sup>b</sup> og 138<sup>a</sup> og <sup>b</sup> anvendte, skal der kun gives en ganske kort Forklaring. Af den paa Fig. 140<sup>a</sup> fundne Middeltryklinie fremgaaer det, at det farligste Sted vil være omtrent ved *f*. Her virker der

et Tryk, som er repræsenteret ved  $P_{11} = 3,7 \text{ m}^2$ , og Tryk-  
ket  $T_{11}$  bliver altsaa

$$T_{11} = 3,7 \cdot 1600 = 5920 \text{ kg.}$$

Ønsker man, at Middeltryklinien paa dette Sted skal falde i en Afstand fra den indre Hvælvlinie af  $\frac{1}{3}$  af den Tykkelse, som Hvælvingen vil faa her, og kaldes denne Tykkelse  $h$ , vil man ifølge Ligning (50) have

$$0,06 = \frac{2 \cdot 5920}{1000 h}, \text{ hvoraf } h = \text{ca. } 200 \text{ mm, altsaa } \frac{1}{3} h = \text{ca. } 70 \text{ mm.}$$

Da denne Afstand paa Tegningen er ca. 90 mm, vil Middeltryklinien kunne rykke lidt nærmere til den indre Hvælvlinie, hvilket vilde kunne opnaas ved at lade  $P_8$  og  $P_{11}$  angribe noget nærmere ved den. Paa Fig. 140<sup>a</sup> angriber  $P_8$  i en Afstand af 550 mm fra den indre Hvælvlinie, og man kunde saaledes passende i Stedet for lade den træffe 474 mm derfra. Naar dens Angrebspunkt forudsættes at falde i en Afstand af  $\frac{1}{3}$  af Hvælvingens Tykkelse fra den ydre Hvælvkant, vil Hvælvingstykkelsen ved Vederlaget blive 710 mm eller 3 Sten. Ved Toppen ligger Angrebspunktet kun 230 mm fra den indre Hvælvlinie, og her tør man næppe gaa nærmere. Gøres Hvælvingen her  $1\frac{1}{2}$  Sten eller 350 mm tyk, vil Trykket netop falde i  $\frac{1}{3}$  af Hvælvingstykkelsen fra den ydre Hvælvkant. De fundne Hvælvingstykkelser af 710 mm ved Vederlaget og 350 mm ved Toppen tilligemed den angivne Beliggenhed af Angrebspunkterne for de paa disse Steder virkende Kræfter ere derefter lagte til Grund for den paa Fig. 141<sup>a</sup> og <sup>b</sup> foretagne Undersøgelse.

Det lodrette Tryk paa Vederlaget vil her, hvor  $P_8$ 's lodrette Komposant er  $7 \text{ m}^2$ , blive

$$T_8 = 7 \cdot 1600 = 11200 \text{ kg.}$$

$$t = \frac{2 \cdot 11200}{1000 \cdot 710} = \text{ca. } 0,03 \text{ kg/mm}^2.$$



Ved Toppen er  $P_7 = 2,55 \text{ m}^2$ , altsaa

$$T_7 = 2,55 \cdot 1600 = 4080 \text{ kg.}$$

Ifølge (50) vil  $t = \frac{2 \cdot 4080}{1000 \cdot 350} = \text{ca. } 0,023 \text{ kg/mm}^2$ .

Midt imellem  $mn$  og  $hi$  vil Trykket komme nærmest ved den indre Hvælmlinie, nemlig i en Afstand derfra af 105 mm. Den derpaa virkende Kraft vil være ca.  $4,1 \text{ m}^2$ , hvortil svarer

$$T = 4,1 \cdot 1600 = 6560 \text{ kg,}$$

altsaa ifølge (53)  $t = \frac{2 \cdot 6560}{1000 \cdot 3 \cdot 105} = \text{ca. } 0,042 \text{ kg/mm}^2$ .

Hvælvingen bør saaledes ikke gøres svagere end vist paa Fig. 141, hvor en passende Aftrapning i Hvælvingstykkelejerne tillige er angiven. For Væltning er der ingen Fare, og for Glidnings Vedkommende vil Faren være størst ved Vederlaget  $ae$ , hvor  $P_8$ 's Vinkel med den paa Snittet vinkelrette netop er lig med Friktionsvinklen. For de andre Snits Vedkommende ville de der virkende Tryk med de vinkelrette paa Snittene danne Vinkler, som ere mindre end Friktionsvinklen.

I de Hvælvinger, som hidindtil ere omtalte, var Reaktionen i Toppen vandret, fordi Hvælvingerne forudsattes at være symetriske med Hensyn til et lodret Plan gennem Toppen og tillige symetrisk belastede. Er dette ikke Tilfældet, kan man ikke forud vide, hvilken Retning Tangenten til Middeltryklinien i Toppen vil faa, eller med andre Ord, man kan ikke antage, at Reaktionen i Toppen er vandret. I Stedet for at forudsætte, at denne Reaktion er vandret, opstiller man da den Betingelse, at

Middeltryklinien skal gaa gennem tre Punkter, medens man i de foregaaende Tilfælde forud kun valgte to Punkter som Udgangspunkter for den, men man maa nu undersøge hele Hvælvingen under eet og kan ikke som forhen nøjes med kun at behandle den ene Halvdel af den. Som det tredie Punkt vil det være det naturligste at vælge et Punkt i det andet Vederlag, men af Hensyn til Konstruktionen er det paa ingen Maade nødvendigt at vælge det her. Det kan godt, ligesom de to andre Punkter, lægges ganske vilkaarligt. Den Opgave at lægge en Middeltryklinie gennem tre givne Punkter løses ved følgende Sætning om Stangpolygoner: Har man to Stangpolygoner til samme System af parallelle Kræfter, den ene med Siderne  $a_1, b_1, c_1$  o. s. v. og den anden med Siderne  $a_2, b_2, c_2$  o. s. v., da ville Skæringspunkterne imellem  $a_1$  og  $a_2$ ,  $b_1$  og  $b_2$ ,  $c_1$  og  $c_2$  o. s. v. alle ligge i en ret Linie, der vil være parallel med den Linie, som forbinder Polerne for de to Stangpolygoner. Denne Sætning er allerede et Sted i det foregaaende forudsat gældende, uagtet den ikke er nævnt med Ord, idet Linien  $AN$  paa Fig. 52<sup>a</sup> i Ekspl. 32 i Beviset er forudsat parallel med Forbindelseslinien mellem de to Poler  $p$  og  $Q$  paa Fig. 52<sup>b</sup>.

Paa Fig. 142<sup>a</sup> danne  $P_a, P_b, \dots P_k$  et givet Kraftsystem, og  $A, B$  og  $C$  betegne de tre Punkter, hvorigennem Middeltryklinien skal lægges. Efterat man paa Fig. 142<sup>b</sup> har dannet den til Kraftlinierne svarende Kraftpolygon, har man fra et vilkaarligt Punkt  $O_1$  som Pol tegnet Polstraalerne til Kraftpolygonens Vinkelspidser. Parallele med disse Polstraaler tegnes dernæst Siderne  $a_1, b_1, c_1$  o. s. v. af en gennem  $A$  gaaende Stangpolygon. En Stangpolygon gennem  $A$  og  $B$  med Siderne  $a_2, b_2, c_2$  o. s. v. faar Skæringspunktet mellem  $a_1$  og  $a_2$  liggende i  $A$ , og gennem dette Punkt maa da den Linie, som indeholder Skæringspunkterne mellem de tilsvarende Sider



i de to Stangpolygoner, gaa. Denne Linie  $AD$ 's Retning vælges vilkaarligt, og gennem  $O_1$  tegnes en Linie parallel med den; paa denne sidste Linie maa da Polen  $O_2$  findes. Punktet  $B$  ses paa Fig. 142<sup>a</sup> at ligge saaledes, at  $d_2$  i den søgte Stangpolygon vil gaa gennem det. Man forlænger da blot Siden  $d_1$  til Skæring med Linien  $AD$ , og Skæringspunktet  $E$  forbindes med  $B$ ;  $EB$  er da Stangpolygonsiden  $d_2$ , og man tegner derefter paa Fig. 142<sup>b</sup> den til  $d_2$  svarende Polstraale. Skæringspunktet  $O_2$  mellem denne Polstraale og den gennem  $O_1$  med  $AD$  parallelt trukne Linie vil saa være Polen for Stangpolygonen med Siderne  $a_2, b_2, c_2$  o. s. v.

En Stangpolygon gennem  $A, B$  og  $C$  med Siderne  $a_3, b_3, c_3$  o. s. v. maa have Skæringspunktet mellem  $a_2$  og  $a_3$  liggende i  $A$  og Skæringspunktet mellem  $d_2$  og  $d_3$  i  $B$ . Linien  $AB$  maa altsaa indeholde alle Skæringspunkterne mellem tilsvarende Sider i de to sidstnævnte Stangpolygoner. Punktet  $C$  ligger saaledes, at Siden  $g_3$  vil komme til at gaa derigennem. Man forlænger derfor Siden  $g_2$ , indtil den skærer  $AB$  i  $F$ , og trækker en ret Linie fra  $F$  til  $C$ . Linien  $CF$  bliver da  $g_3$ . Den med  $g_3$  parallelle Polstraale tegnes, og Skæringspunktet mellem denne Polstraale og en Linie, der gennem  $O_2$  er tegnet parallel med  $AB$ , vil da være Polen  $O_3$  for den søgte Stangpolygon, hvis Sider ere  $a_3, b_3, c_3$  o. s. v., og som vil gaa gennem de tre givne Punkter  $A, B$  og  $C$ .

Polstraalerne gennem  $O_3$  angive Størrelsen og Retningen af de i de tilsvarende Dele af Hvelvingen virkende Tryk; Reaktionen i Vederlagene angives ved første og sidste Polstraale. Undersøgelsen angaaende de fornødne Hvelvingstykkelser m. m. vil iøvrigt være ganske analog med, hvad der er udviklet i det foregaaende.

Blandt de særlige Anvendelser, der gøres af Mure, skal man omtale deres Benyttelse til at forhindre en Jord-

masse i at skride ud og danne en Skraaning. Saadanne Mure kaldes Beklædningsmure. De maa være saa svære, at de kunne modstaa de Tryk, som den bagved dem liggende Jordmasse udøver paa dem. Fremdeles maa en saadan Mur hverken glide ved Grundfladen eller i noget Skifte. Kender man Størrelsen af Jordtrykket samt den Retning, hvorefter det virker, og det Punkt af Muren, hvori Jordtrykket angriber, vil Fremgangsmaaden ved Bestemmelsen af Murtykkelserne være ganske analog med den ved Hvælvingspiller omtalte.

### *Jordmassers Sidetryk.*

Naar en Jordmasse ikke begrænses, vil den danne en Skraaning, hvis Hældning mod det vandrette Plan er bestemt ved Jordartens Gnidningsvinkel. Begrænses den derimod af en Mur eller paa anden Maade, vil Jordmassen have en Tilbøjelighed til at revne efter et Plan, det saakaldte Skilleplan, og det vil da være den mellem Muren og Skilleplanet liggende Jordmasse, som vil trykke paa Muren. Er Jordens Overflade vandret i Højde med Murens øverste Flade, kan dette Skilleplan, idet der ikke tages Hensyn til den Gnidningsmodstand, som opstaar mellem Muren og Jordpartiklerne, findes paa følgende Maade (se Fig. 143): Betegner  $AB$  den ind mod Jordmassen vendende Murflade, tegner man først gennem  $B$  en Linie  $BD$ , som med den vandrette Linie  $BC$  danner Vinklen  $g$ , der er vedkommende Jordarts Gnidningsvinkel, og derefter halverer man Vinklen  $ABD$ . Vinklens Halveringslinie  $BE$  angiver da Skilleplanet, og det vil altsaa være Jordprismet med Grundflade  $AEB$  og Højde 1 m, som paa et 1 m langt Stykke af Muren vil udøve Tryk af Størrelse

$$T = \frac{1}{2} \rho a^2 \sin v, \quad (54)$$

hvor  $\rho$  er Vægten af 1 m<sup>3</sup> Jord,  $v = \angle ABC$ , Murfladens



Vinkel med den vandrette Linie og  $a = AE$ . Trykket  $T$ 's Retning bliver vinkelret paa Murens Bagside, og dets Angrebspunkt falder i Afstanden  $\frac{1}{3} AB$  fra Punktet  $B$ .

Hviler der ovenpaa den i Højde med Murens øverste Flade vandret planerede Jordmasse en Vægt  $q$  pr. Arealenhed, konstrueres Skilleplanet paa samme Maade som ovenfor. Tænkes Vægten  $q$  erstattet ved en Jordmasse af samme Art, som den bagved Muren liggende, og antages denne Jordmasses Højde over  $AD$  at blive  $h$  (se Fig. 144), vil Jordmassen udøve et Sidetryk vinkelret paa  $AB$  af Størrelse

$$T = \frac{1}{2} p \left( 1 + \frac{2h}{BF} \right) a^2 \sin v, \quad (55)$$

og dette Tryks Angrebspunkt vil ligge i en Afstand fra  $B$ , som er bestemt ved

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{BF + 3h}{BF + 2h} \cdot AB. \quad (56)$$

Sætter man i disse sidste Størrelser  $h = 0$ , faar man Udtrykkene for Sidetrykket og dets Angrebspunkts Afstand fra  $B$ , naar Jordmassen er ubelastet.

For nogle almindeligt forekommende Jordarter har Gnidningsvinklen følgende Værdier:

|                              |           |
|------------------------------|-----------|
| Sandet Ler paa sandet Ler    | ∠ g.      |
| i tør Tilstand.....          | 30°       |
| i fugtig Tilstand.....       | 45°       |
| i meget fugtig Tilstand..... | 17°       |
| Rent Sand paa rent Sand      |           |
| i tør Tilstand.....          | 26°       |
| i fugtig Tilstand.....       | 32°       |
| Almindelig Jord.....         | 33° à 39° |

Staa to Mure  $AB$  og  $CD$  (Fig. 145) tæt opad hinanden, og fyldes der løs Jord imellem dem, vil Jordtrykket

paa enhver af Murene blive det samme, som om den anden Mur ikke fandtes. Dette indses saaledes:  $AE$  betegner Skilleplanet for det Jordprisme med Grundflade  $ABE$ , som vilde trykke paa  $AB$ , hvis  $CD$  ikke fandtes. Af dette Prisme vil, naar Muren  $CD$  staar som paa Figuren, et Prisme med Grundflade  $CEF$  bortskæres. Et ligesaa stort Jordprisme med Grundflade  $FCG$  vil imidlertid trykke mod Muren  $CF$ , og denne maa herimod yde en ligesaa stor Reaktion, der vil forplante sig gennem Jordmassen og sammen med Prismet  $AFCB$  udøve et Tryk paa  $AB$  af samme Størrelse som det Tryk, Prismet  $AEB$  vilde udøve.

Ekspl. 105. En Beklædningsmur er 1,25 m høj og har foroven en Bredde af 0,32 m. Den har paa Forfladen en Hældning af  $\frac{1}{2}$  og paa Bagfladen af  $\frac{1}{5}$ . Muren skal begrænse en Jordmasse, som bestaar af rent fugtigt Sand. Ovenpaa denne Jordmasse hviler der en tilfældig Belastning af 1000 kg/m<sup>2</sup> (Fig. 146<sup>a</sup> og <sup>b</sup>).

Gnidningsvinklen for Sandet kan regnes til 32°. Skilleplanet bliver  $EB$ . Sandets Vægt er 1600 kg/m<sup>3</sup>. Den tilfældige Belastning vil altsaa svare til en Sandhøjde af 0,625 m.  $AE = a = 0,8$  m;  $v = 101,4^\circ$ .

Man har først behandlet Muren i dens fulde Højde. Jordmassen vil ifølge (55) udøve et Tryk vinkelret paa  $AB$  af Størrelse

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot 1600 \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot 0,625}{1,25} \right) 0,8^2 \sin 101,4^\circ = \text{ca. } 1000 \text{ kg,}$$

som vil angribe i  $L$  i en Afstand fra  $B$ , der er

$$BL = \frac{1}{3} \cdot \frac{1,25 + 1,875}{1,25 + 1,25} \cdot 1,275 = 0,53 \text{ m.}$$

Muren antages at skulle være af Granit. Et 1 m langt Stykke af den vil da veje



$$P_1 = \frac{1,25}{2} (0,32 + 0,67) \cdot 2700 = \text{ca. } 1675 \text{ kg.}$$

Størrelse og Retning af  $T_1$ 's og  $P_1$ 's Resultant  $R_1$  ere fundne paa Fig. 146<sup>b</sup>, medens dens Beliggenhed paa Fig. 146<sup>a</sup> er bestemt ved, at den skal gaa gennem  $T_1$ 's og  $P_1$ 's Skæringspunkt. Paa samme Maade har man behandlet de Dele af Muren, som ligge ovenover de i Højderne 1', 2' og 3' anbragte vandrette Snit. De respektive Resultanter ere betegnede ved  $R_2$ ,  $R_3$  og  $R_4$ ; deres Størrelser og Retninger ere fundne paa Fig. 146<sup>b</sup> og deres Beliggenhed paa Fig. 146<sup>a</sup>, hvorefter man har tegnet Støttelinien gennem de Punkter, i hvilke Resultanterne skære Grundfladerne for de betragtede Stykker af Muren. Man vil af Figurerne se, at der ved Murens Grundflade  $KB$  vil være størst Fare saavel for Væltning som for Glidning.  $R_1$ 's lodrette Komposant er ca. 1900 kg, og den angriber i en Afstand 50 mm fra Kanten  $K$ . Trykket i Partiklerne ved  $K$  bliver altsaa ifølge (53)

$$t_1 = \frac{2 \cdot 1900}{3 \cdot 1000 \cdot 50} = \text{ca. } 0,0253 \text{ kg/mm}^2,$$

der er mindre end den Paavirkning, man tør byde god Byggegrund, og Faren for Væltning er derved udelukket.  $R_1$ 's Vinkel med den lodrette Linie er ca. 28°, saaledes at der heller ikke er Fare for Glidning.

## INDHOLD.

|                                                                                                                                                                                                      | Side.      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Indledning . . . . .                                                                                                                                                                                 | 5          |
| <b>I. Ligevægtslæren . . . . .</b>                                                                                                                                                                   | <b>6</b>   |
| 1. <i>Sammensætning og Oplosning af Kræfter</i> . . . . .                                                                                                                                            | 6          |
| a. Kræfterne virke i samme rette Linie . . . . .                                                                                                                                                     | 6          |
| b. Kræfterne gaa gennem samme Punkt i Planet, men virke i forskellige Retninger . . . . .                                                                                                            | 7          |
| c. Momenter . . . . .                                                                                                                                                                                | 15         |
| d. Kræfterne virke gennem flere fast forbundne Punkter i forskellige Retninger . . . . .                                                                                                             | 17         |
| Tyngdepunktsbestemmelser . . . . .                                                                                                                                                                   | 29         |
| Simpsons Formel . . . . .                                                                                                                                                                            | 36         |
| 2. <i>Understøtningspunkter og disses Modstande</i> . . . . .                                                                                                                                        | 39         |
| 3. <i>Bjælker og Aksler</i> . . . . .                                                                                                                                                                | 42         |
| a. Konstruktionsdelen paavirkes af Kræfter, som ligge i Plan indbyrdes og med dens Akse . . . . .                                                                                                    | 44         |
| b. Konstruktionsdelen er understøttet i to Punkter og paavirkes af Kræfter, som skære dens geometriske Akse og som ere vinkelrette paa den. Kræfterne ligge derimod ikke alle i samme Plan . . . . . | 64         |
| c. Konstruktionsdelen er understøttet i to Punkter og paavirkes af Kræfter, som staa vinkelrette paa dens geometriske Akse. En Del af Kræfterne eller slet ingen af dem skære Aksen. . . . .         | 66         |
| d. Konstruktionsdelen er understøttet i flere Punkter og paavirkes af en jævnfordelt Belastning. . . . .                                                                                             | 70         |
| 4. <i>Ledsystemer</i> . . . . .                                                                                                                                                                      | 71         |
| a. Enkelte lukkede Ledsystemer . . . . .                                                                                                                                                             | 72         |
| b. Enkelte aabne Ledsystemer . . . . .                                                                                                                                                               | 74         |
| c. Sammensatte Ledsystemer . . . . .                                                                                                                                                                 | 76         |
| <b>II. Styrkelæren . . . . .</b>                                                                                                                                                                     | <b>101</b> |
| 1. <i>Strækning</i> . . . . .                                                                                                                                                                        | 104        |
| 2. <i>Sammentrykning</i> . . . . .                                                                                                                                                                   | 110        |
| Inertimomenter . . . . .                                                                                                                                                                             | 112        |
| Søjler . . . . .                                                                                                                                                                                     | 116        |



|                                                                                                            | Side. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 3. Forskydning . . . . .                                                                                   | 119   |
| Nitninger . . . . .                                                                                        | 121   |
| Bolte . . . . .                                                                                            | 130   |
| 4. Bøjning . . . . .                                                                                       | 133   |
| 5. Vridning . . . . .                                                                                      | 154   |
| 6. Sammensatte Paavirkninger . . . . .                                                                     | 162   |
| a. Tværsnittet paavirkes samtidig til Bøjning og Forskydning . . . . .                                     | 162   |
| b. Tværsnittet paavirkes samtidig til Bøjning og Vridning . . . . .                                        | 164   |
| c. Tværsnittet paavirkes til Bøjning og samtidig enten til Sammentrykning<br>eller til Strækning . . . . . | 164   |
| <br>                                                                                                       |       |
| III. Stenkonstruktioner . . . . .                                                                          | 169   |
| Hvælvinger og Hvælvingsspiller . . . . .                                                                   | 189   |
| Beklædningsmure . . . . .                                                                                  | 189   |
| Jordmassers Sidetryk . . . . .                                                                             | 189   |

Plan 1.

Fig. 1.

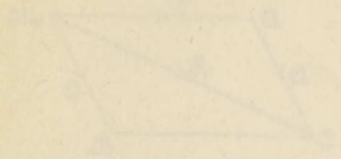


Fig. 2.

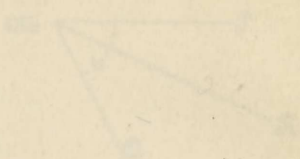


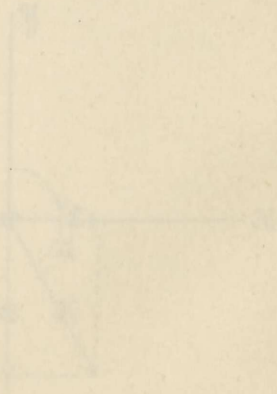
Fig. 3.



Fig. 10.



Fig. 11.







# Plan 1.

Fig. 3.

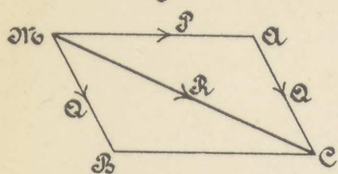


Fig. 4 a.

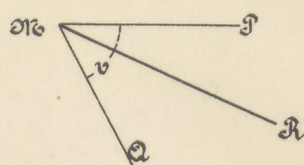


Fig. 4 b.

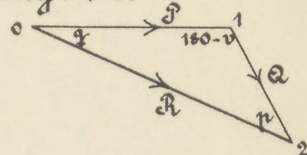


Fig. 10.

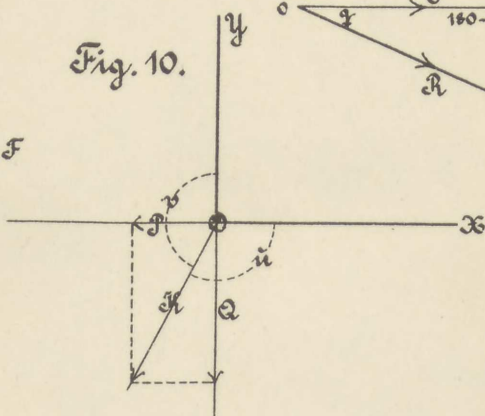


Fig. 11.

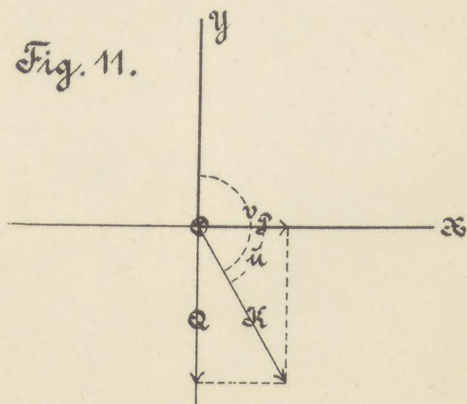
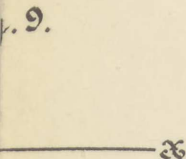
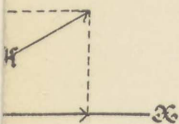
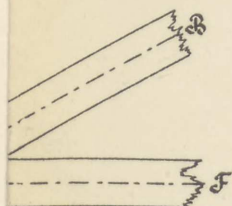


Fig. 1-11.







Plan 1.

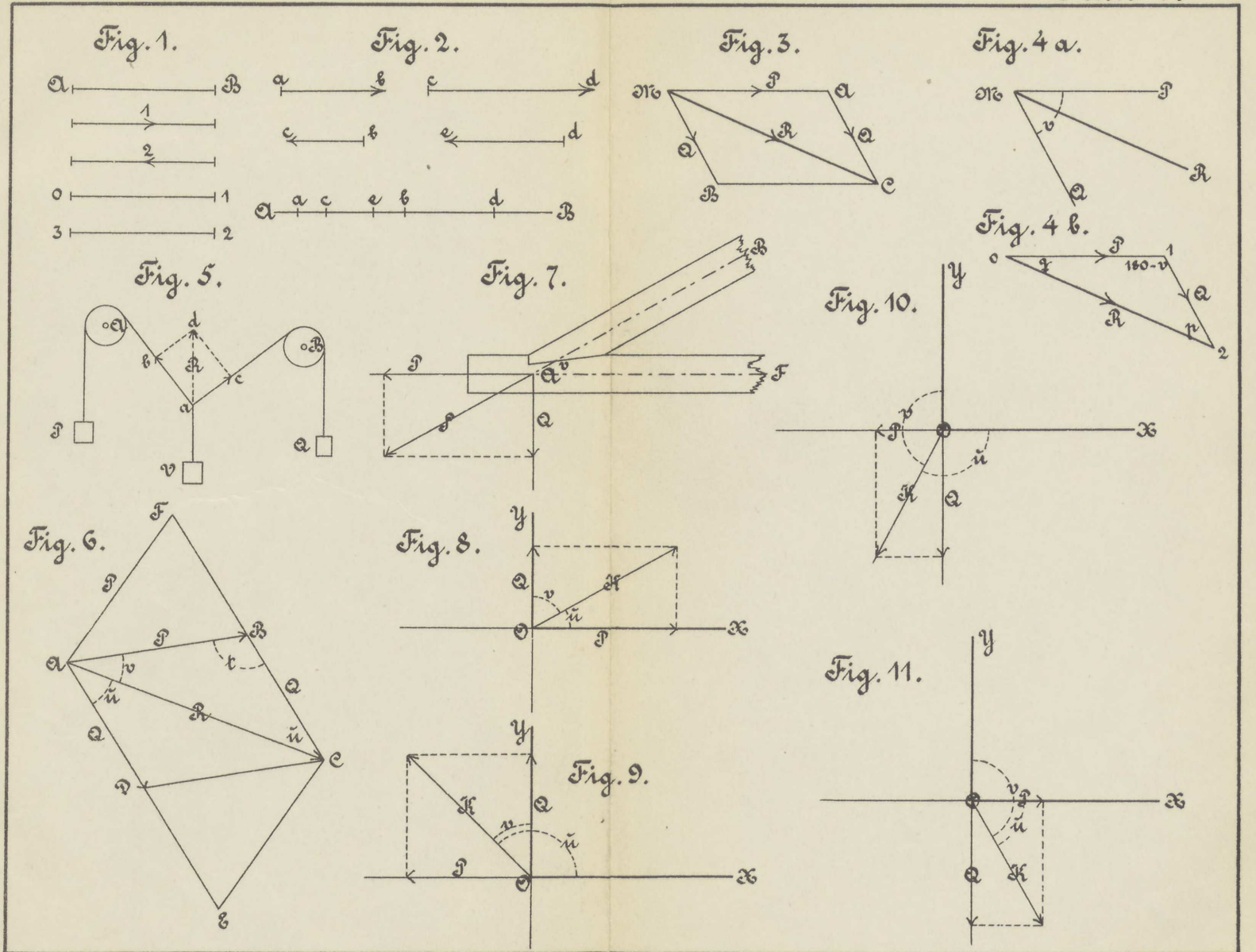
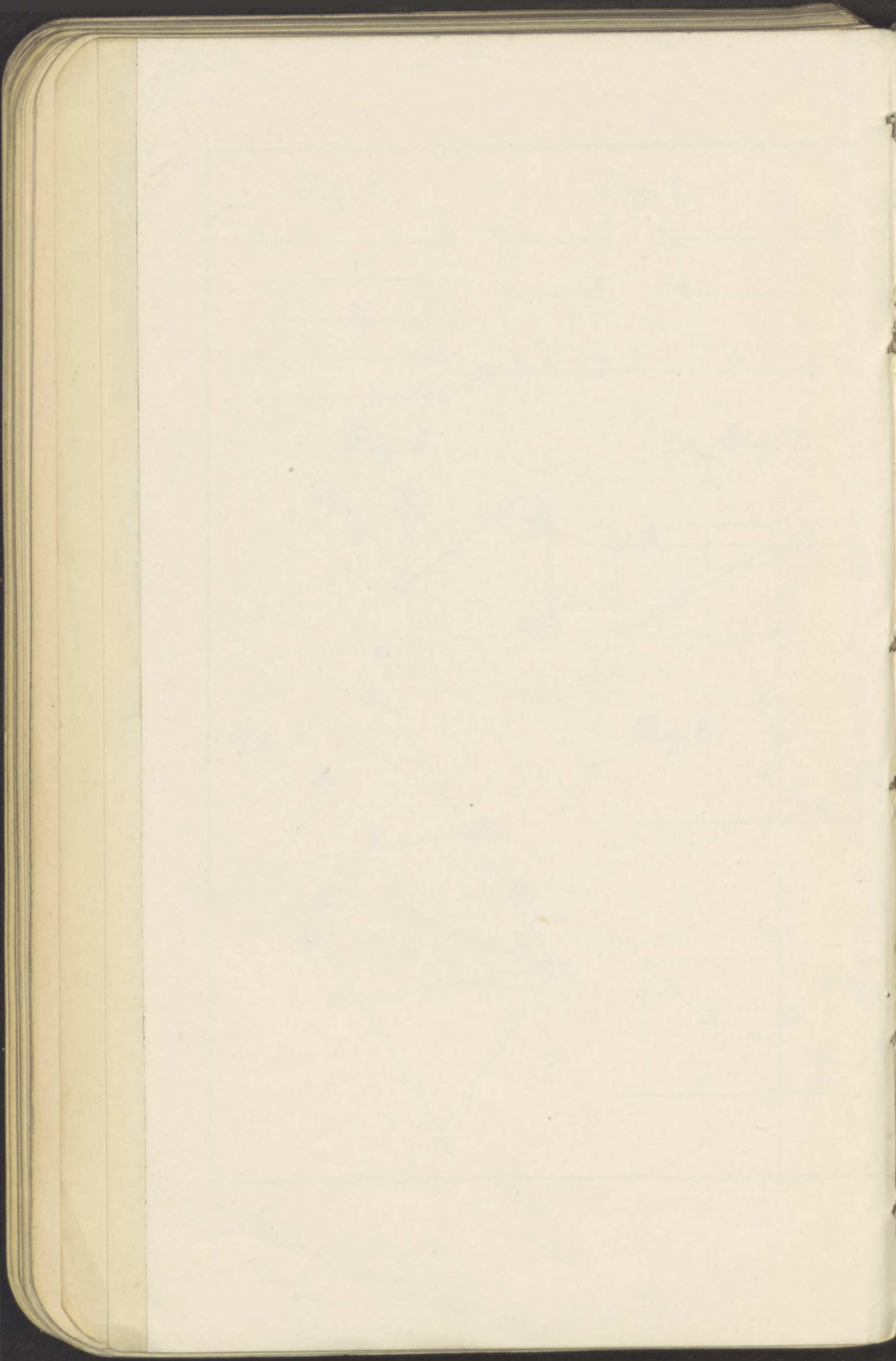


Fig. 1-11.





Plan 2.

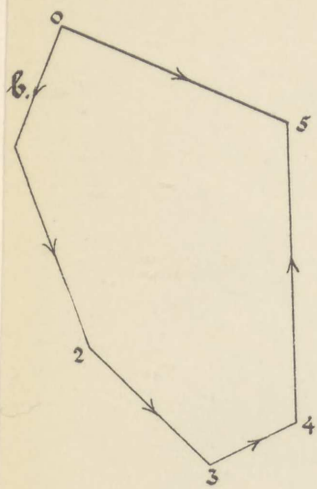


Fig. 15.

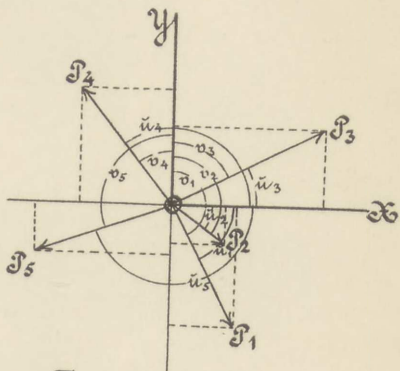


Fig. 16.

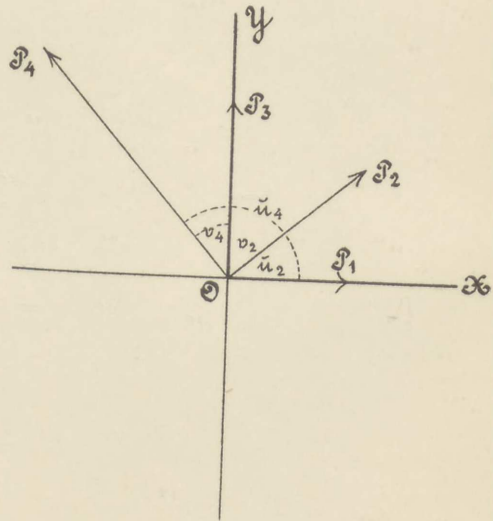


Fig. 18.

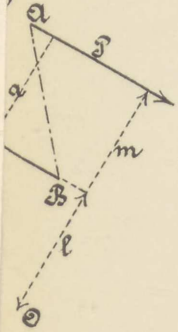


Fig. 12 - 18.



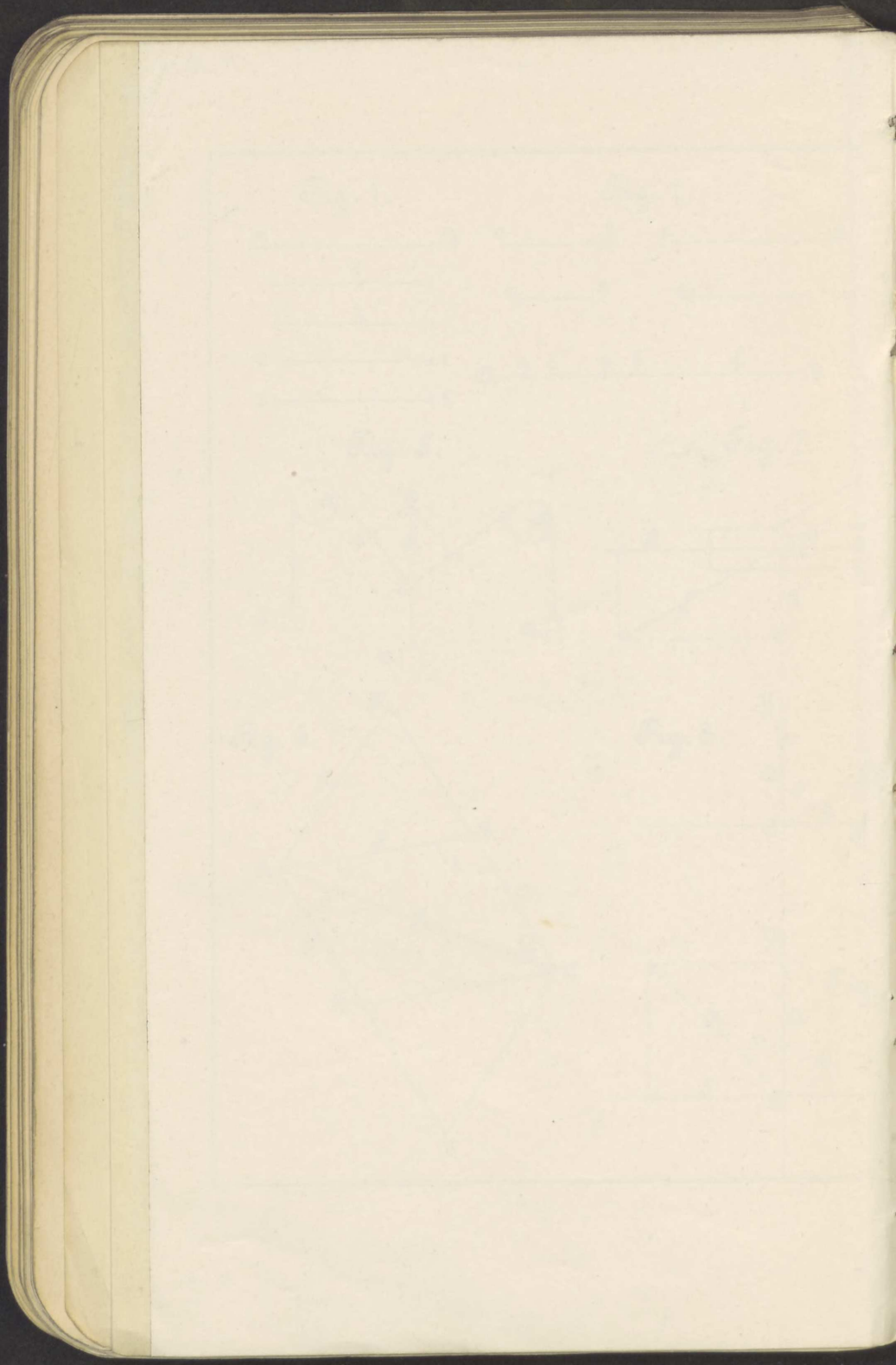


Fig. 12.

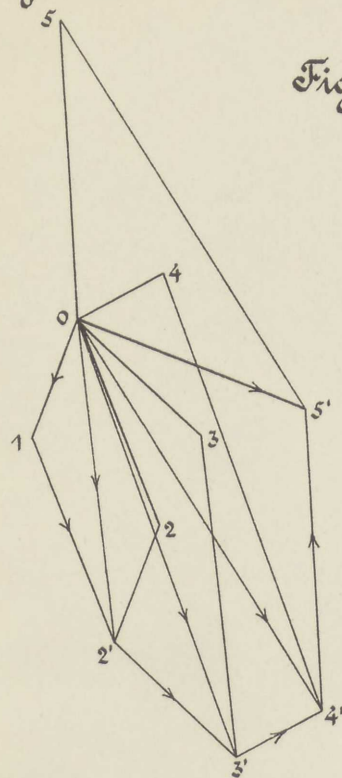


Fig. 17.

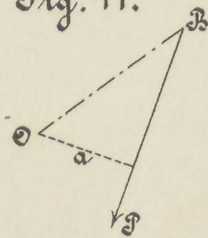


Fig. 13 a.

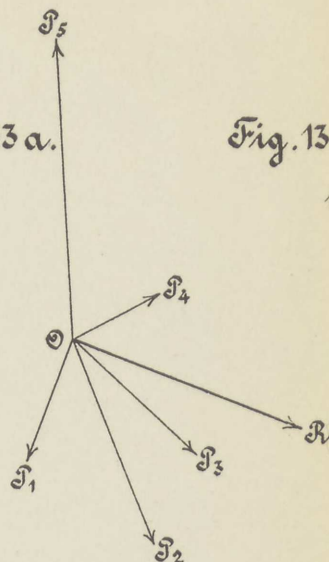


Fig. 13 b.

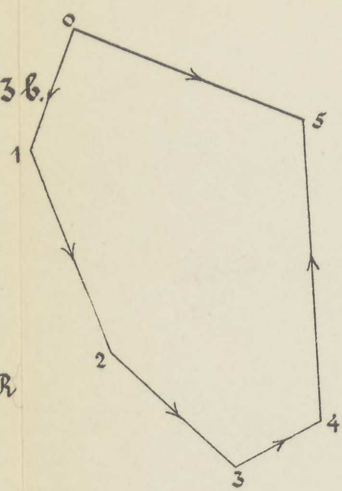


Fig. 14.

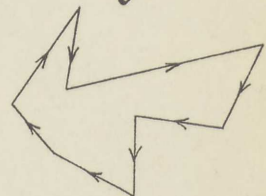


Fig. 18.

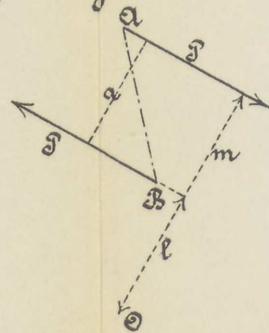


Fig. 15.

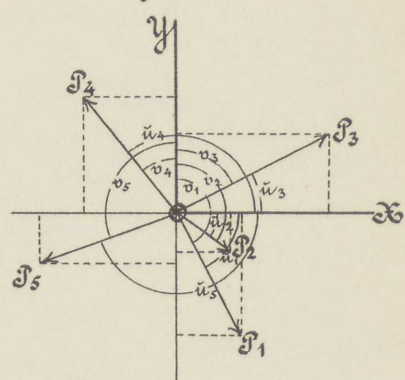


Fig. 16.

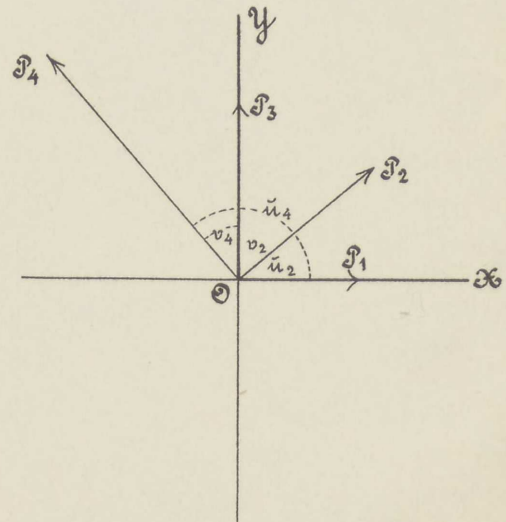
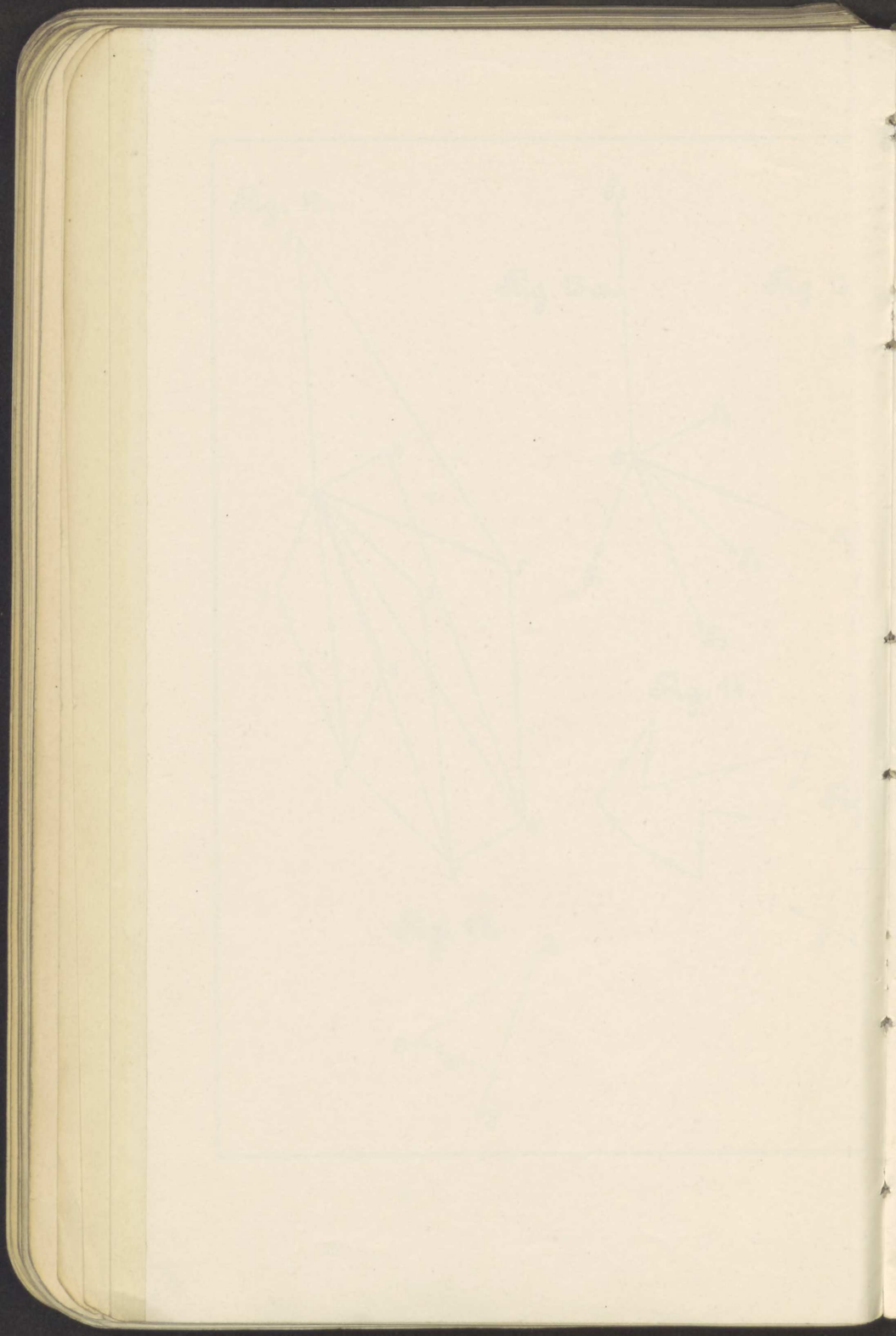


Fig. 12 - 18.





Plan 3.

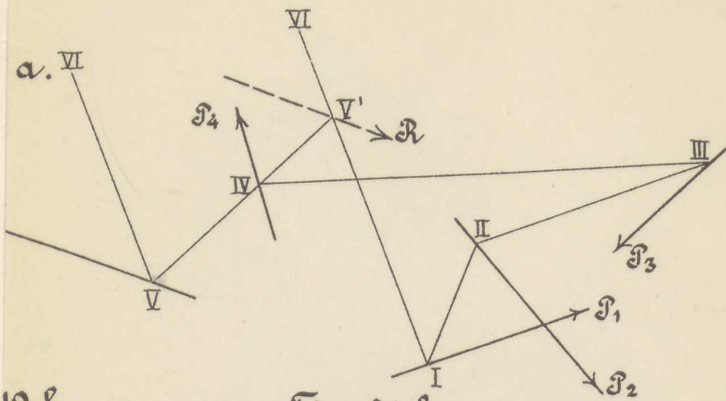


Fig. 21 b.

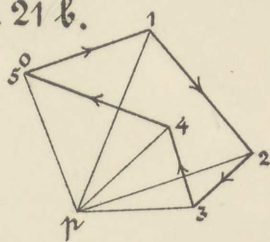
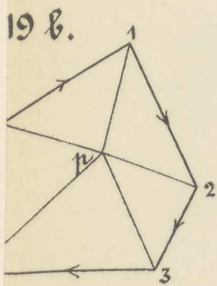


Fig. 22 a.

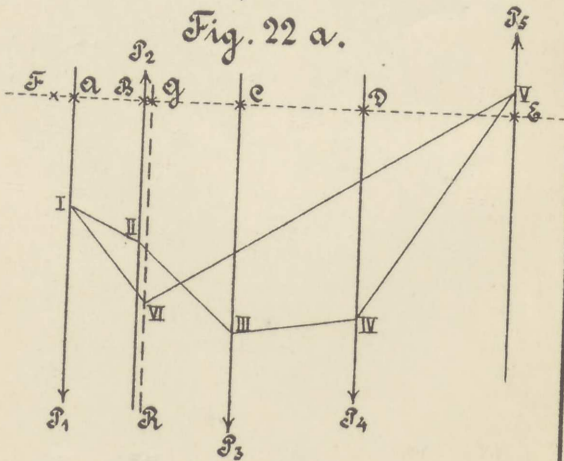
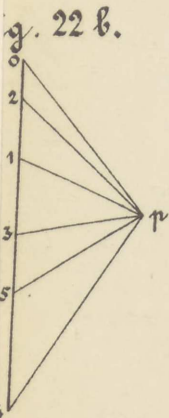
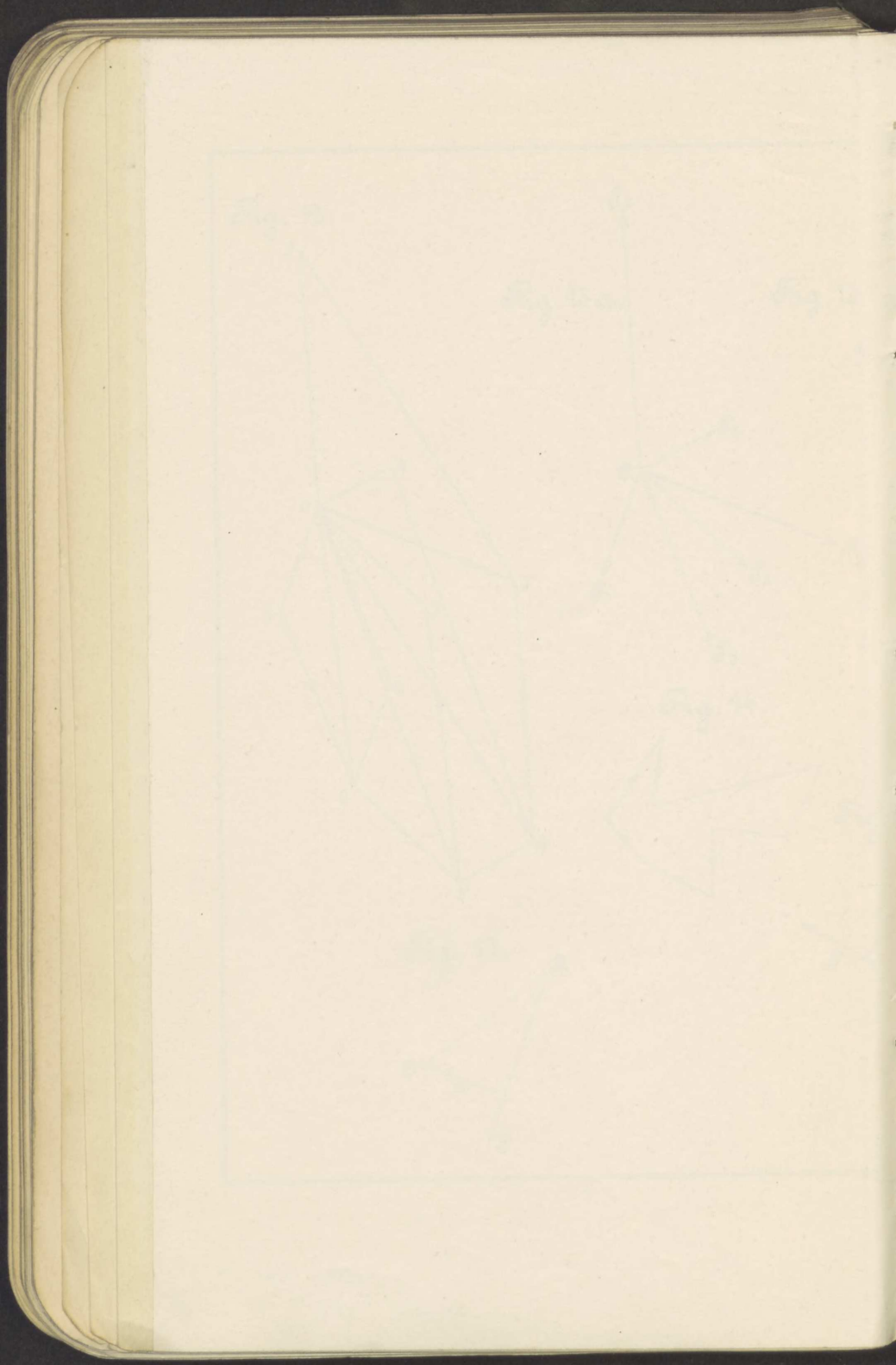
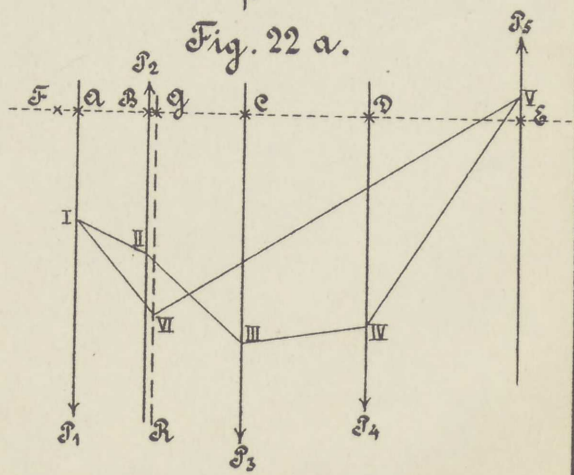
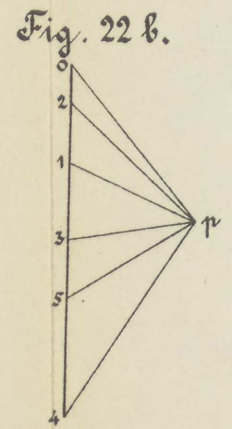
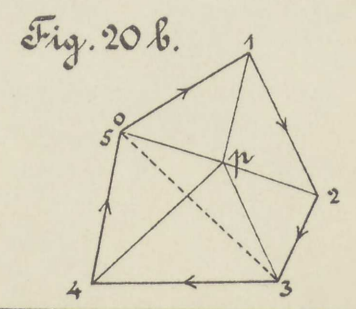
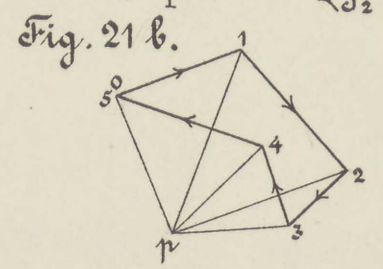
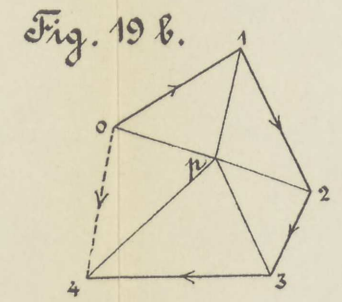
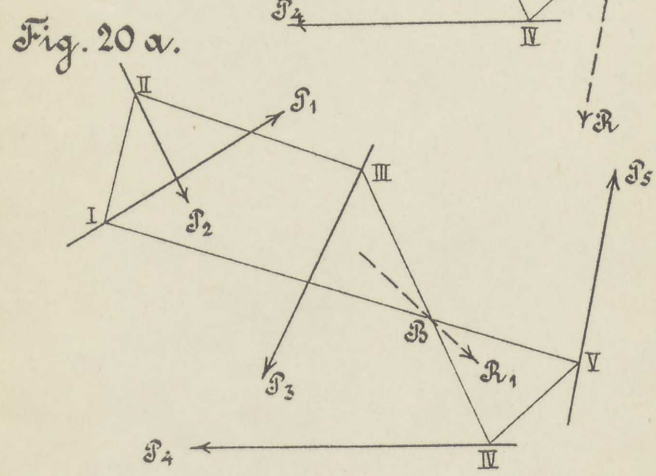
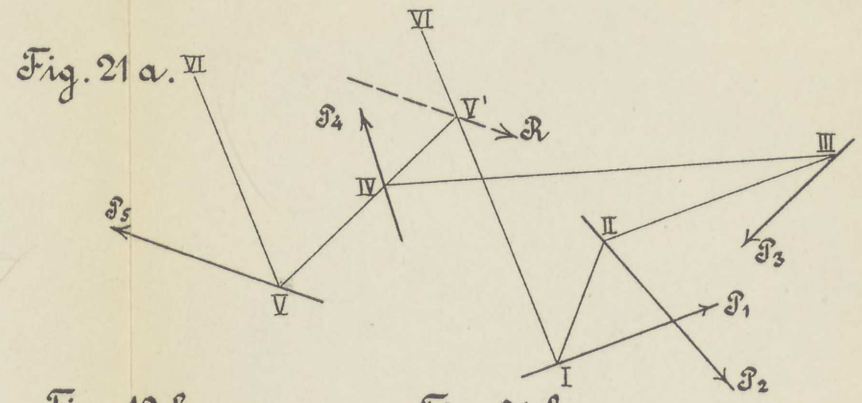
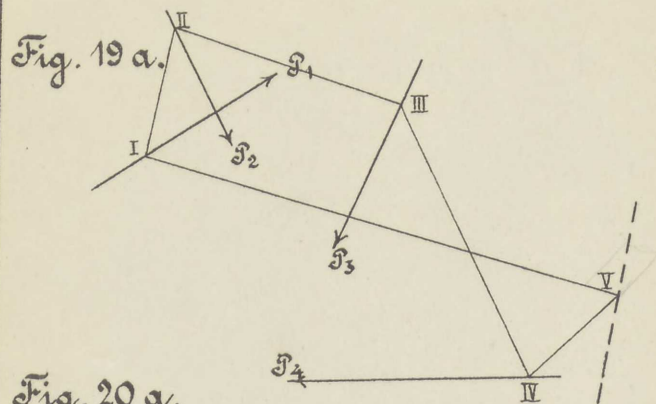


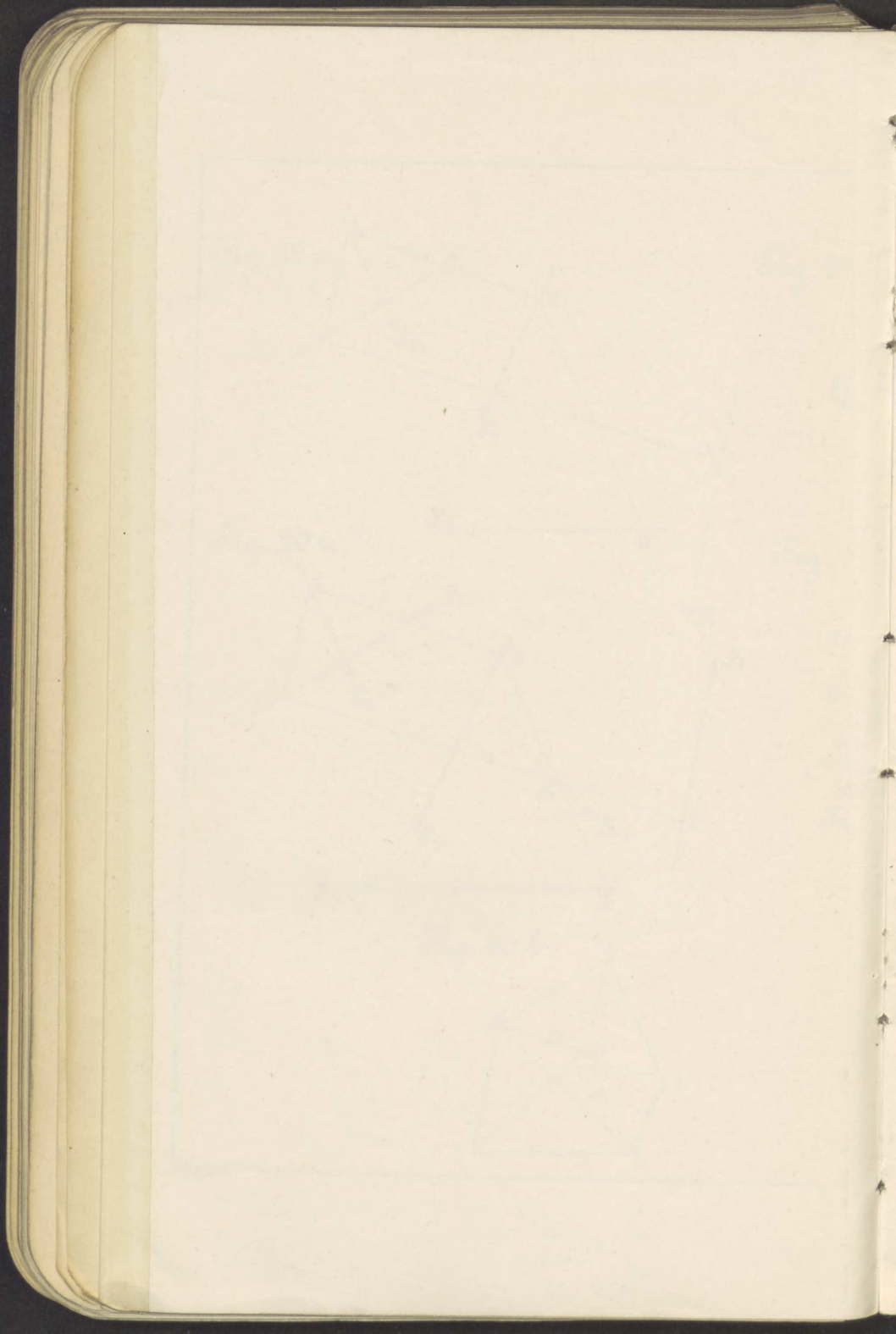
Fig. 19 - 22.











# Plan 4.

Fig. 24.

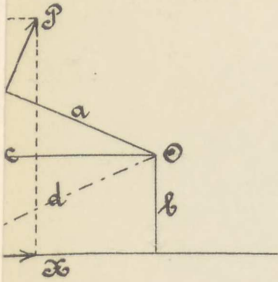


Fig. 26.

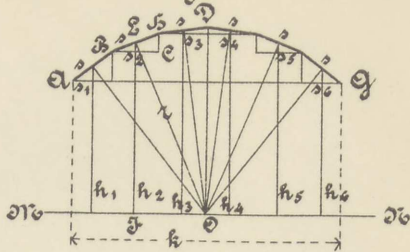


Fig. 30.

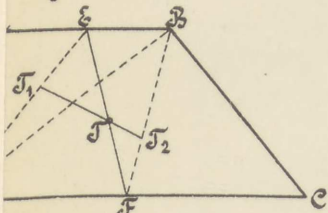


Fig. 27.

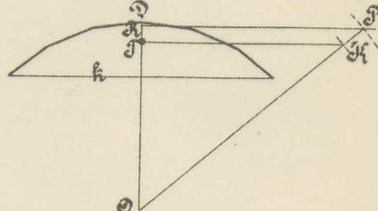


Fig. 31.

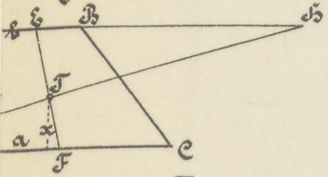


Fig. 28.

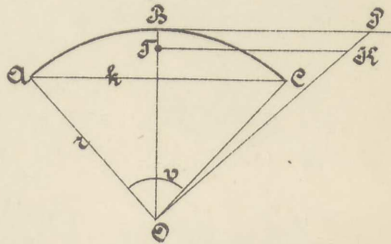


Fig. 32.

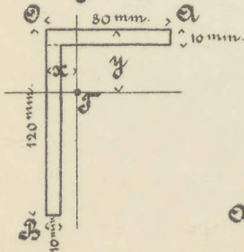


Fig. 29.

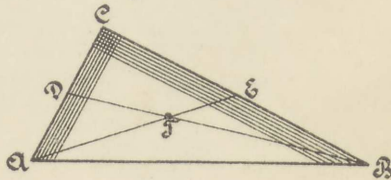
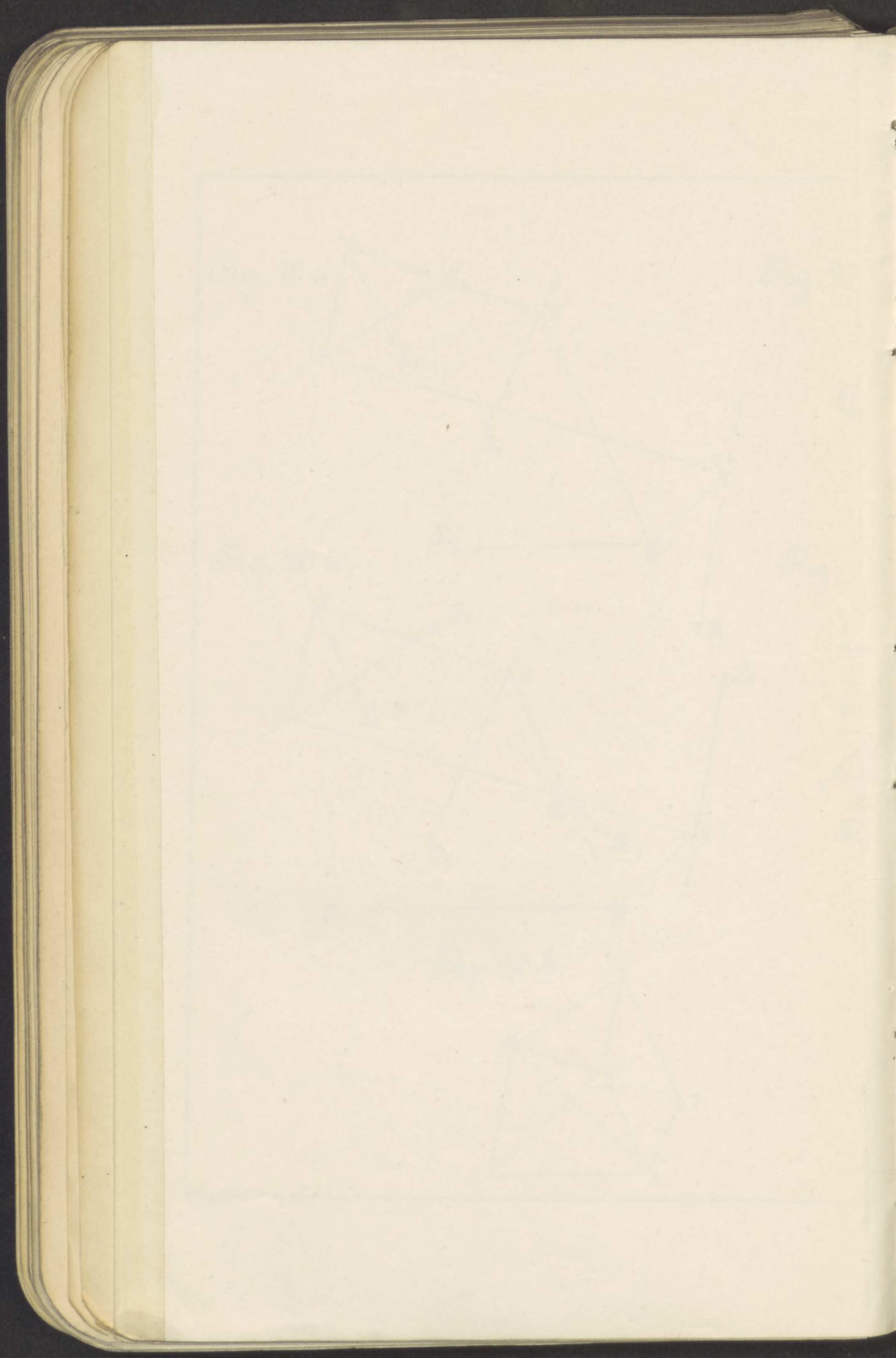


Fig. 23 - 34.





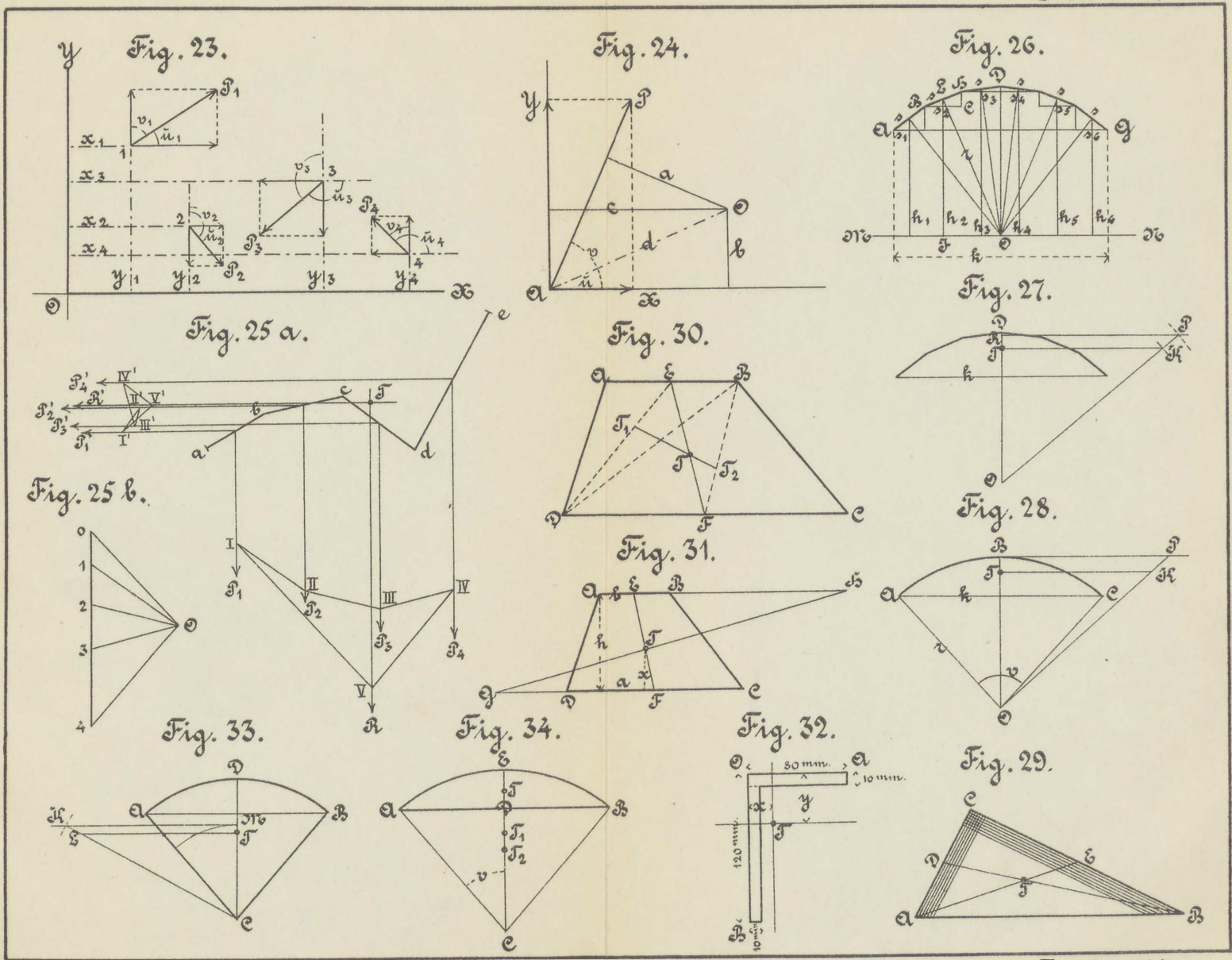
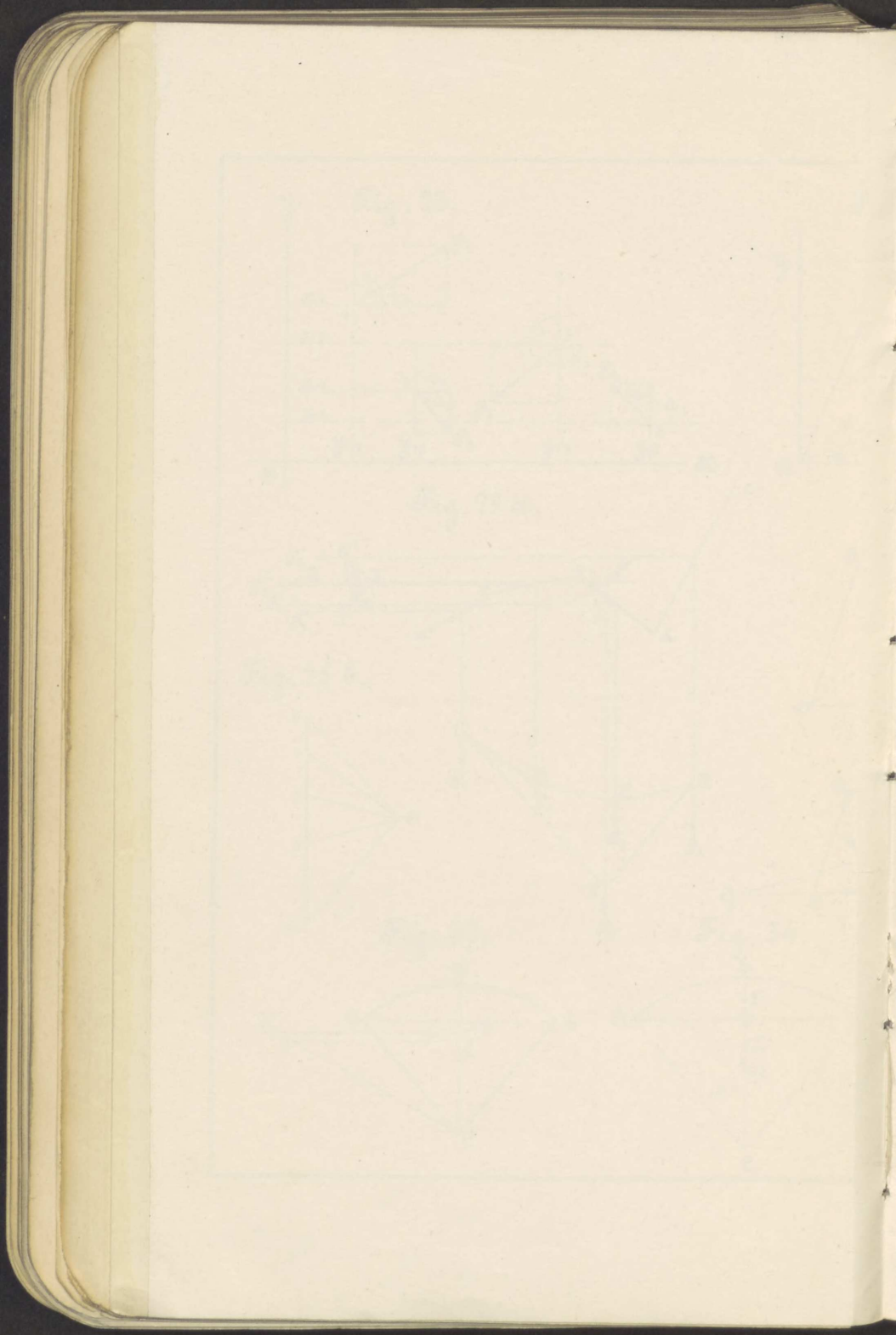


Fig. 23 - 34.





# Plan 5.

Fig. 38 a.

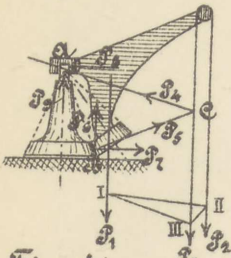


Fig. 38 b.

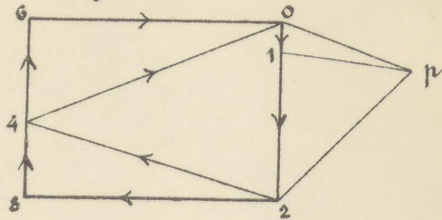


Fig. 41 a.

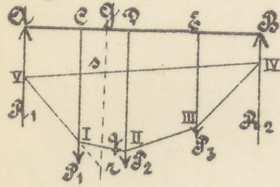


Fig. 41 b.

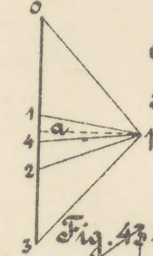


Fig. 43 a.

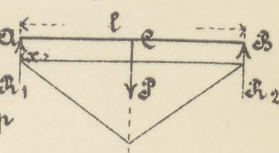


Fig. 41 c.

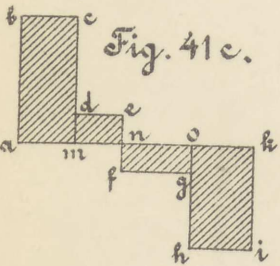


Fig. 43 b.

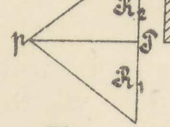


Fig. 43 c.

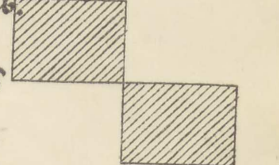


Fig. 45 a.

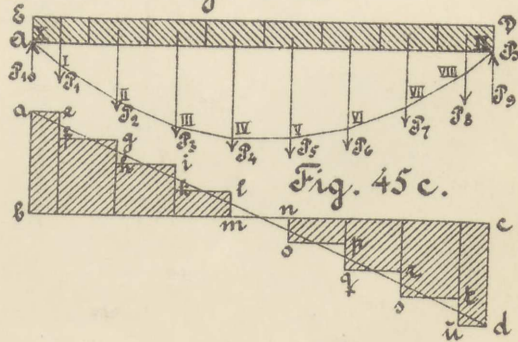


Fig. 45 b.

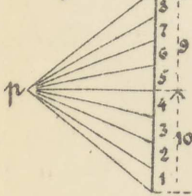
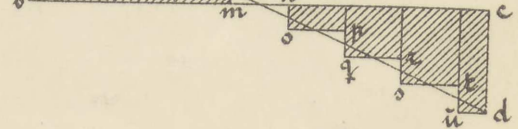


Fig. 45 c.





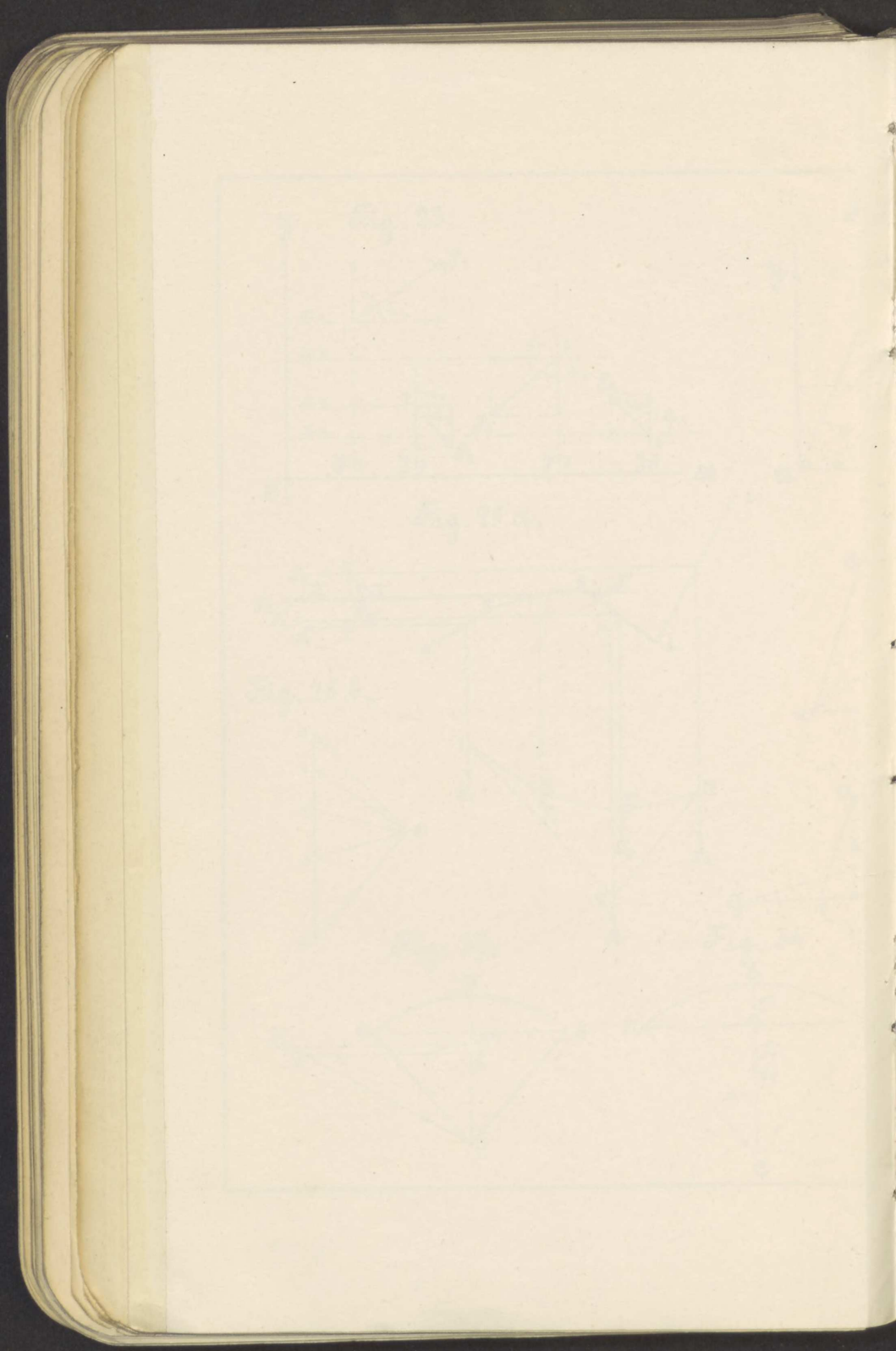


Fig. 35.

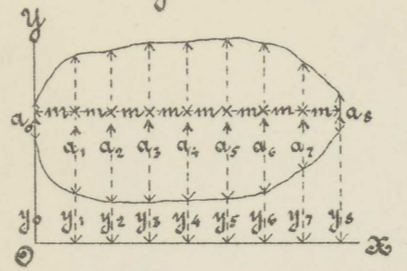


Fig. 39.

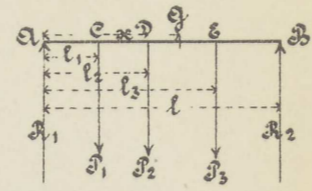


Fig. 38 a.

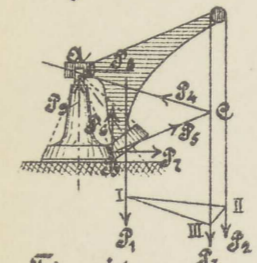


Fig. 38 b.

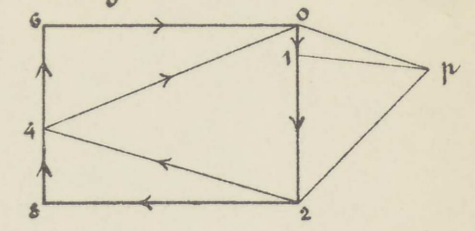


Fig. 42.

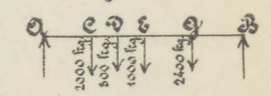


Fig. 44.

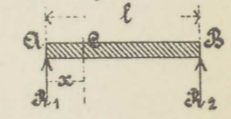


Fig. 40 b.

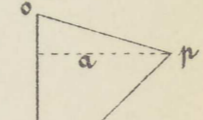


Fig. 40 a.

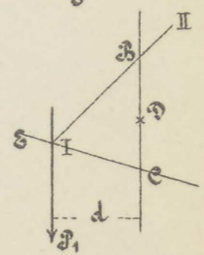


Fig. 36 a.

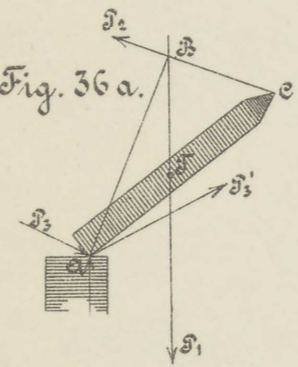


Fig. 36 b.

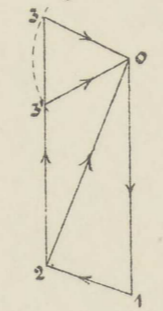


Fig. 37 a.

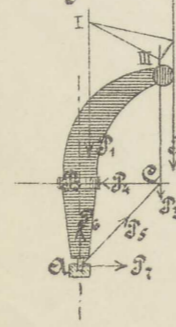


Fig. 37 b.

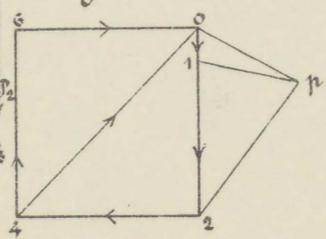


Fig. 41 a.

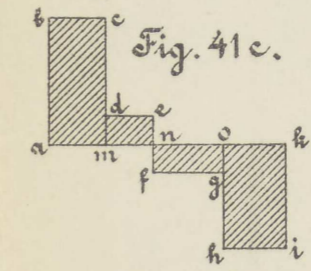
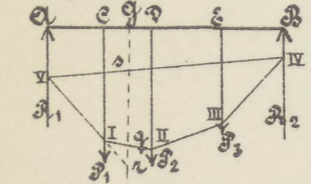


Fig. 41 c.

Fig. 41 b.

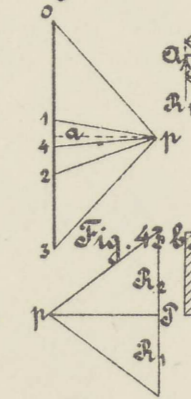


Fig. 43 a.

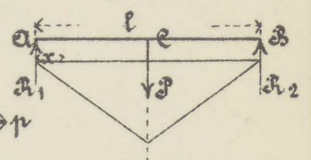


Fig. 43 c.

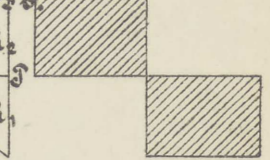


Fig. 45 a.

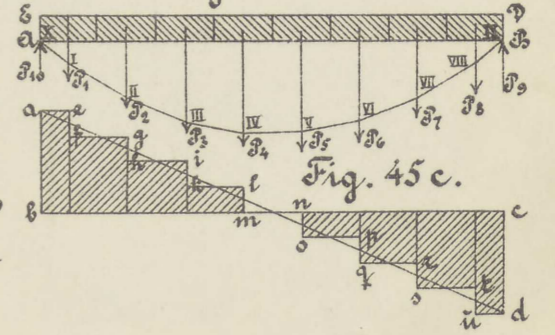


Fig. 45 b.

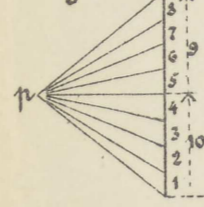
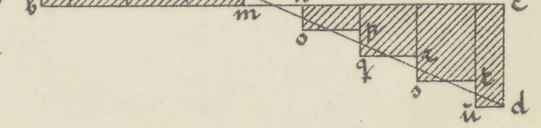
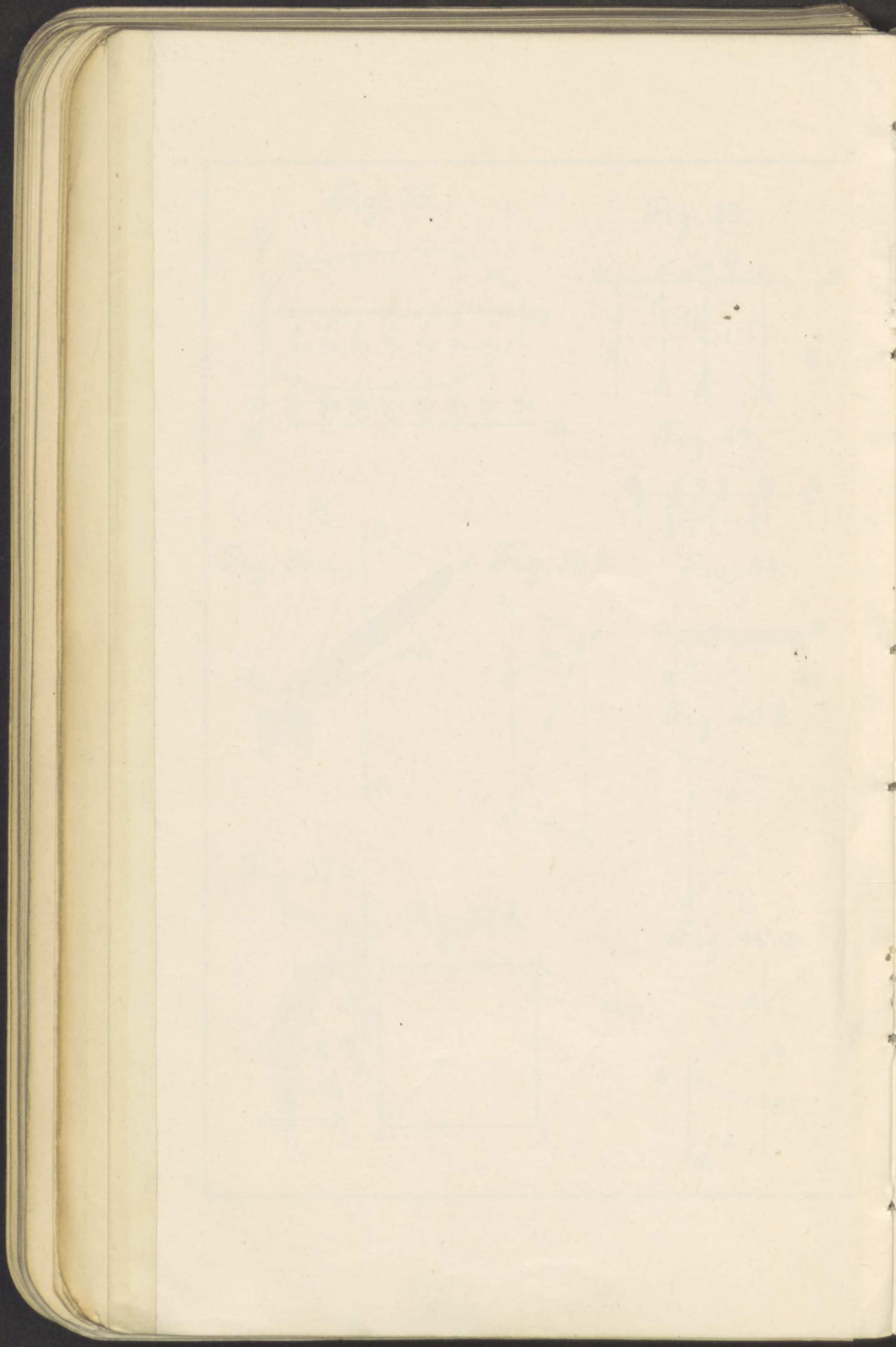


Fig. 45 c.







# Plan 6.

Fig. 52 a.

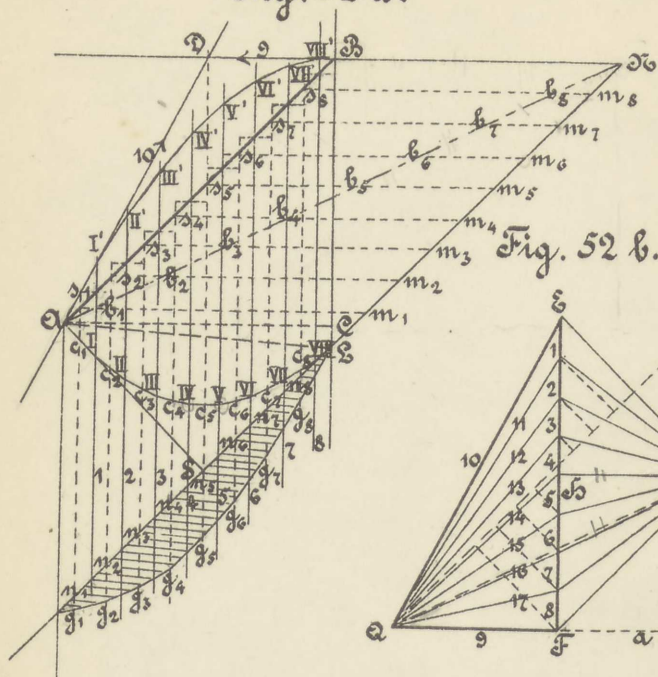


Fig. 52 b.

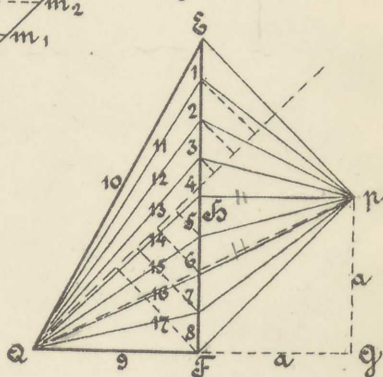
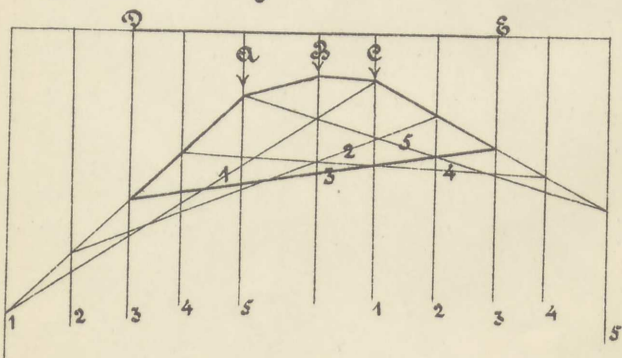


Fig. 51 a.





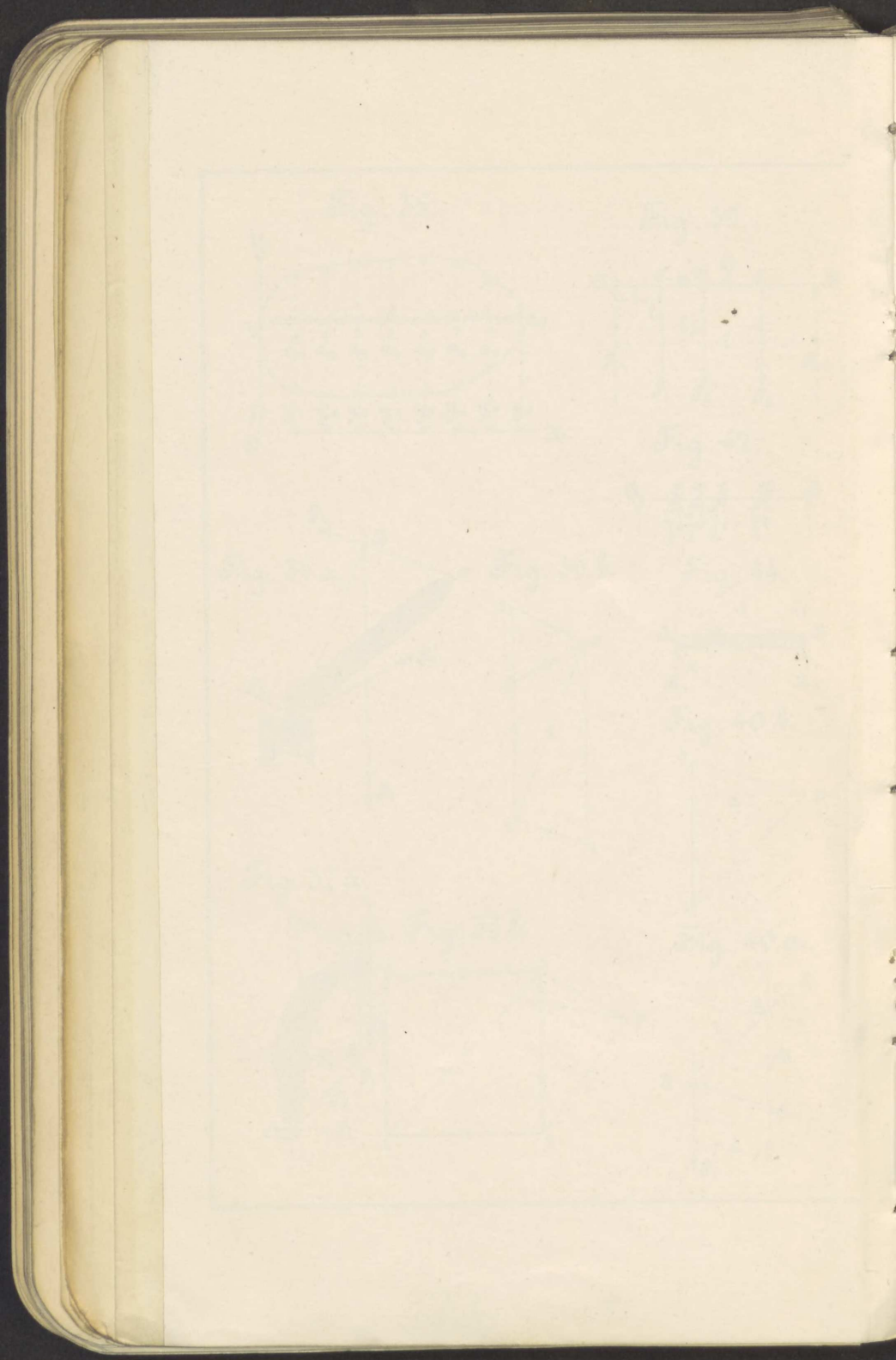


Fig. 46 a.

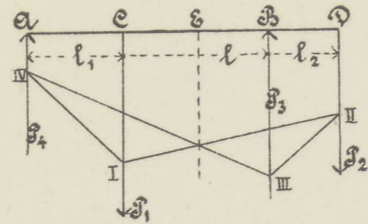


Fig. 46 b.

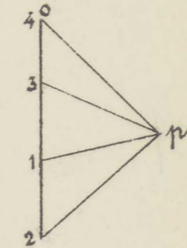


Fig. 47.

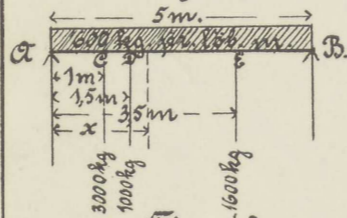


Fig. 48.

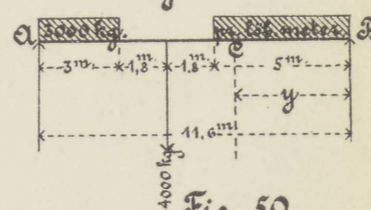


Fig. 49 a.

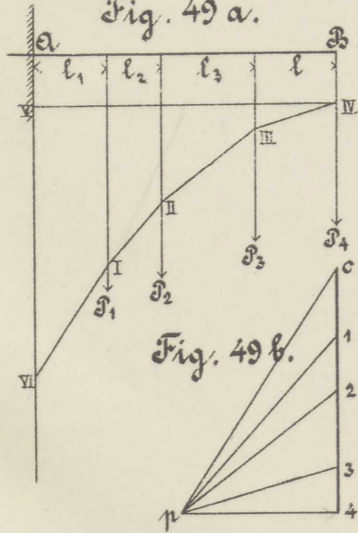


Fig. 50.

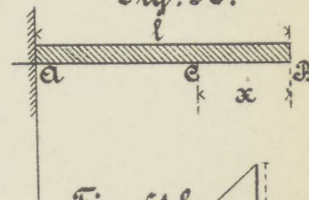


Fig. 51 b.

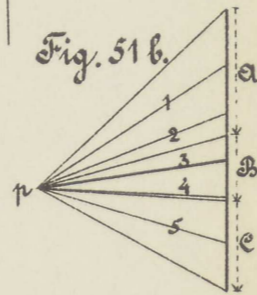


Fig. 49 b.

Fig. 52 a.

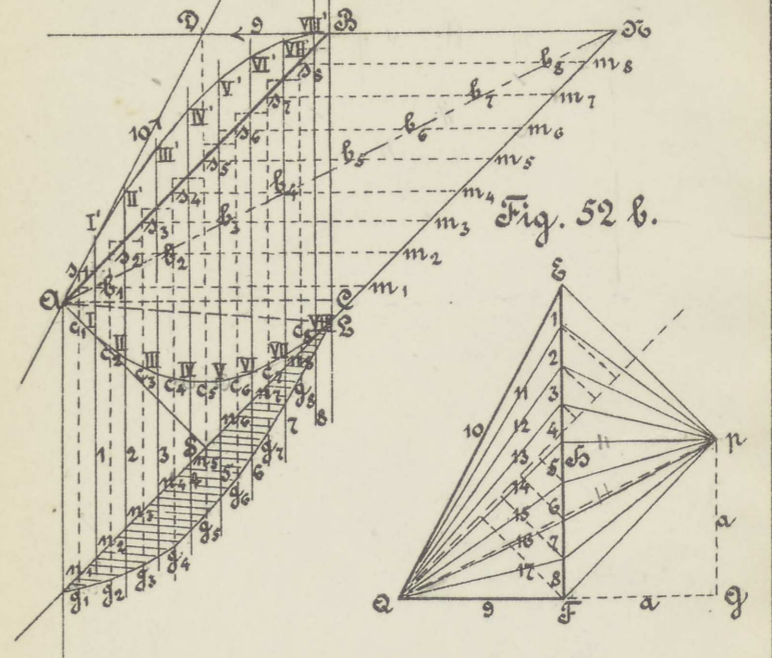


Fig. 52 b.

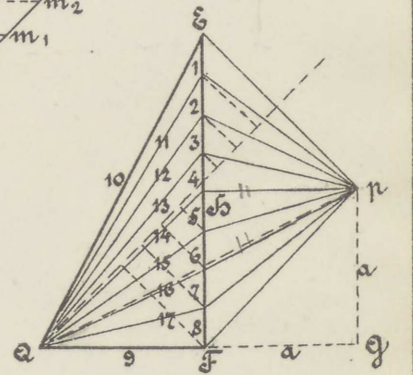
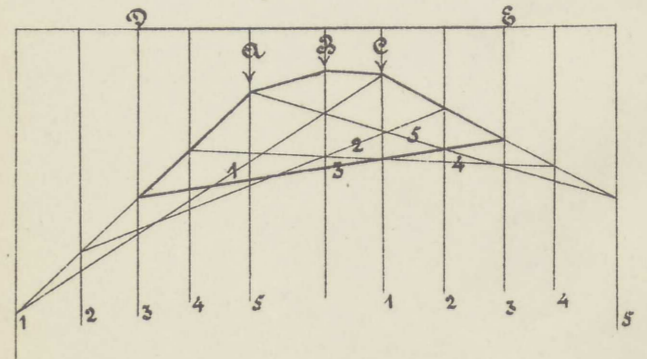
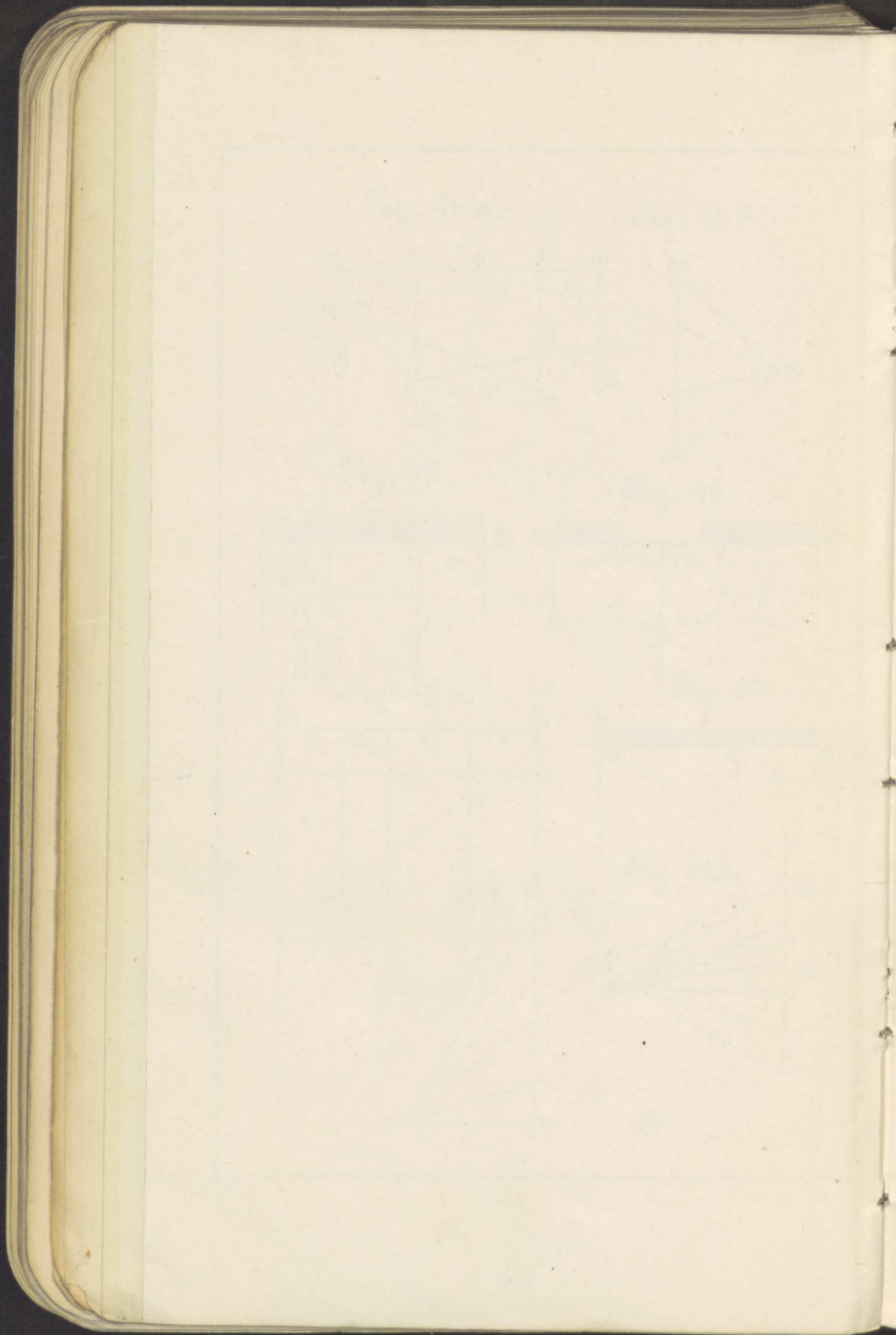


Fig. 51 a.







# Plan 7.

Fig. 54 b.

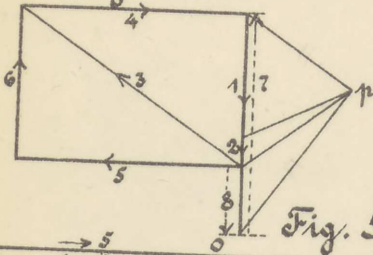


Fig. 55.

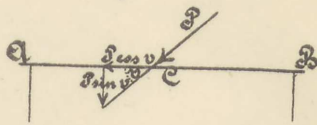


Fig. 54 c.

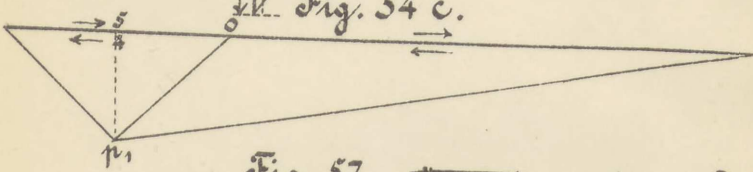


Fig. 57.

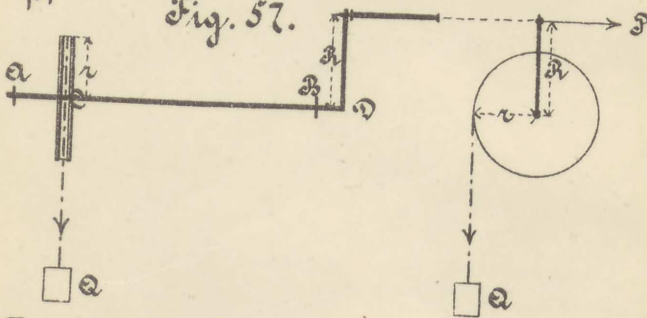


Fig. 58 a.

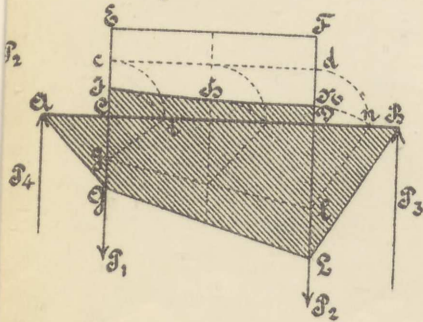


Fig. 58 b.

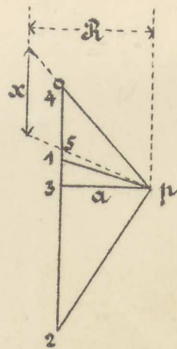
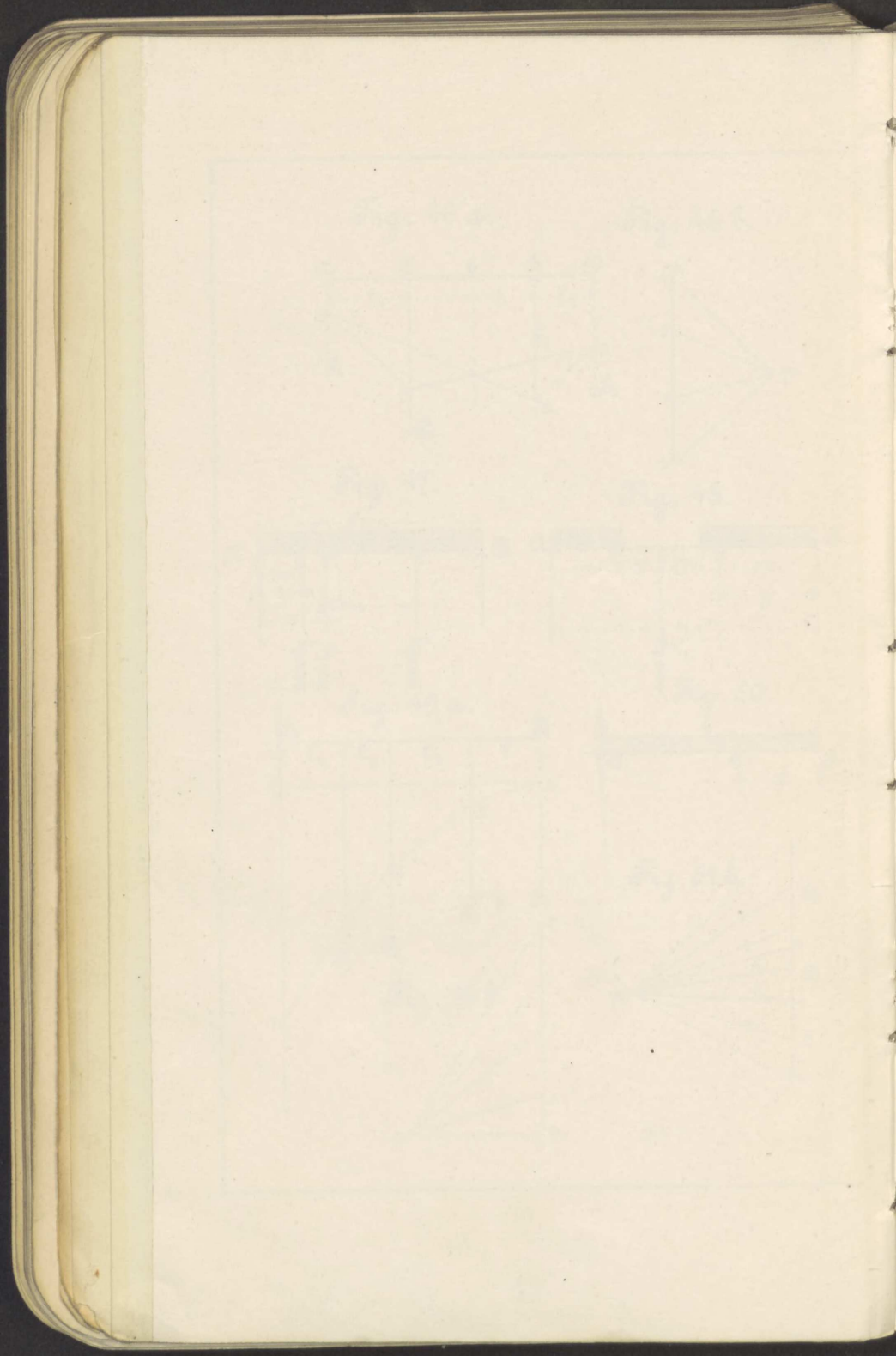


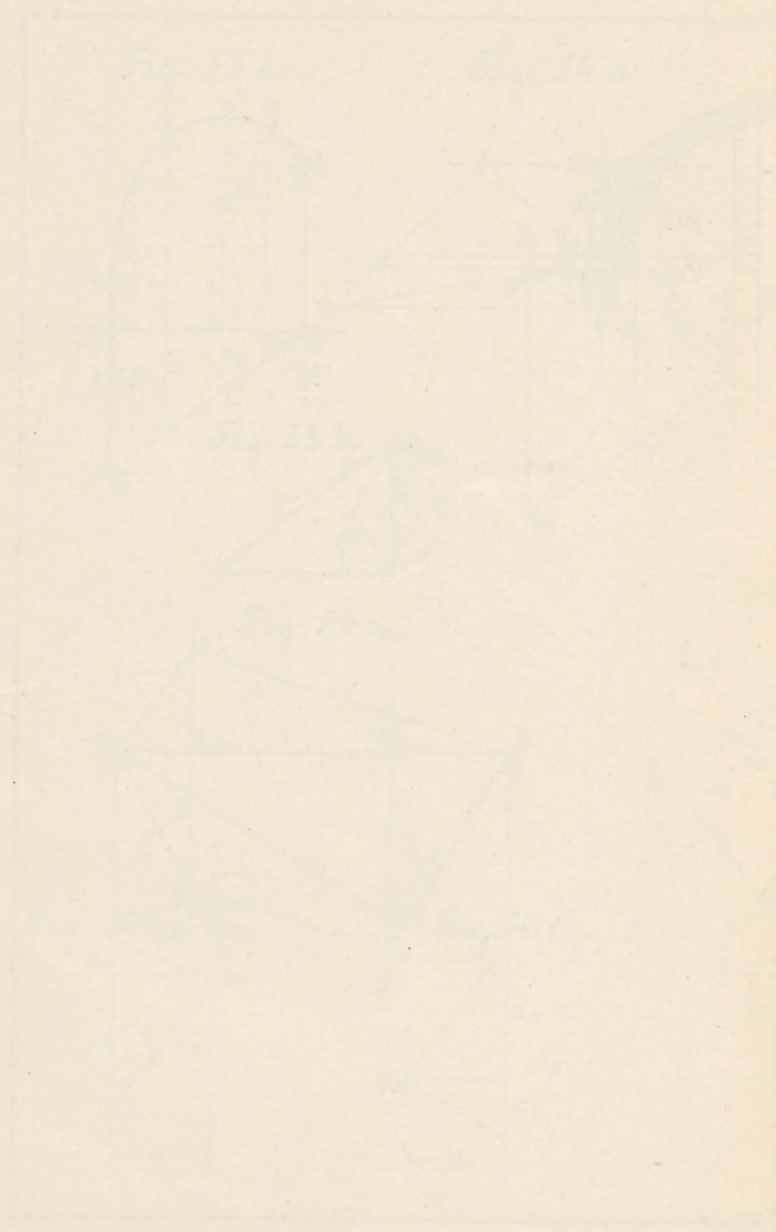
Fig. 53-58.





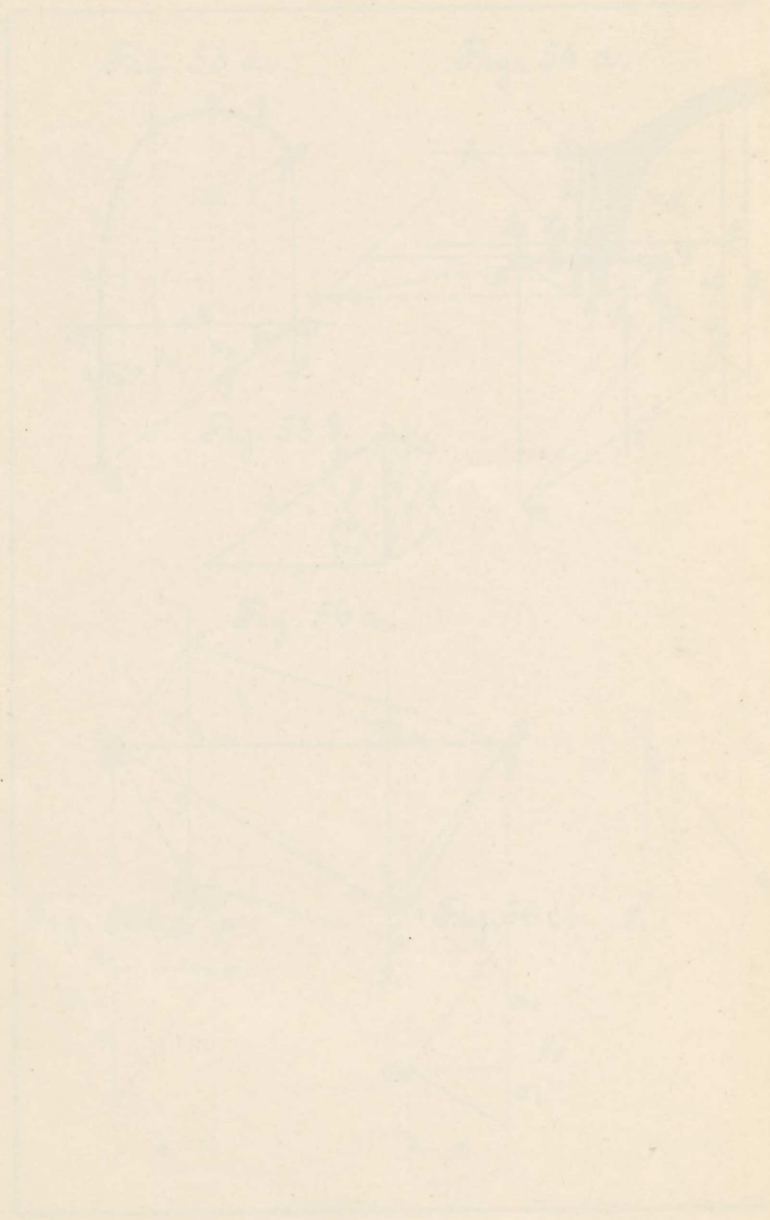


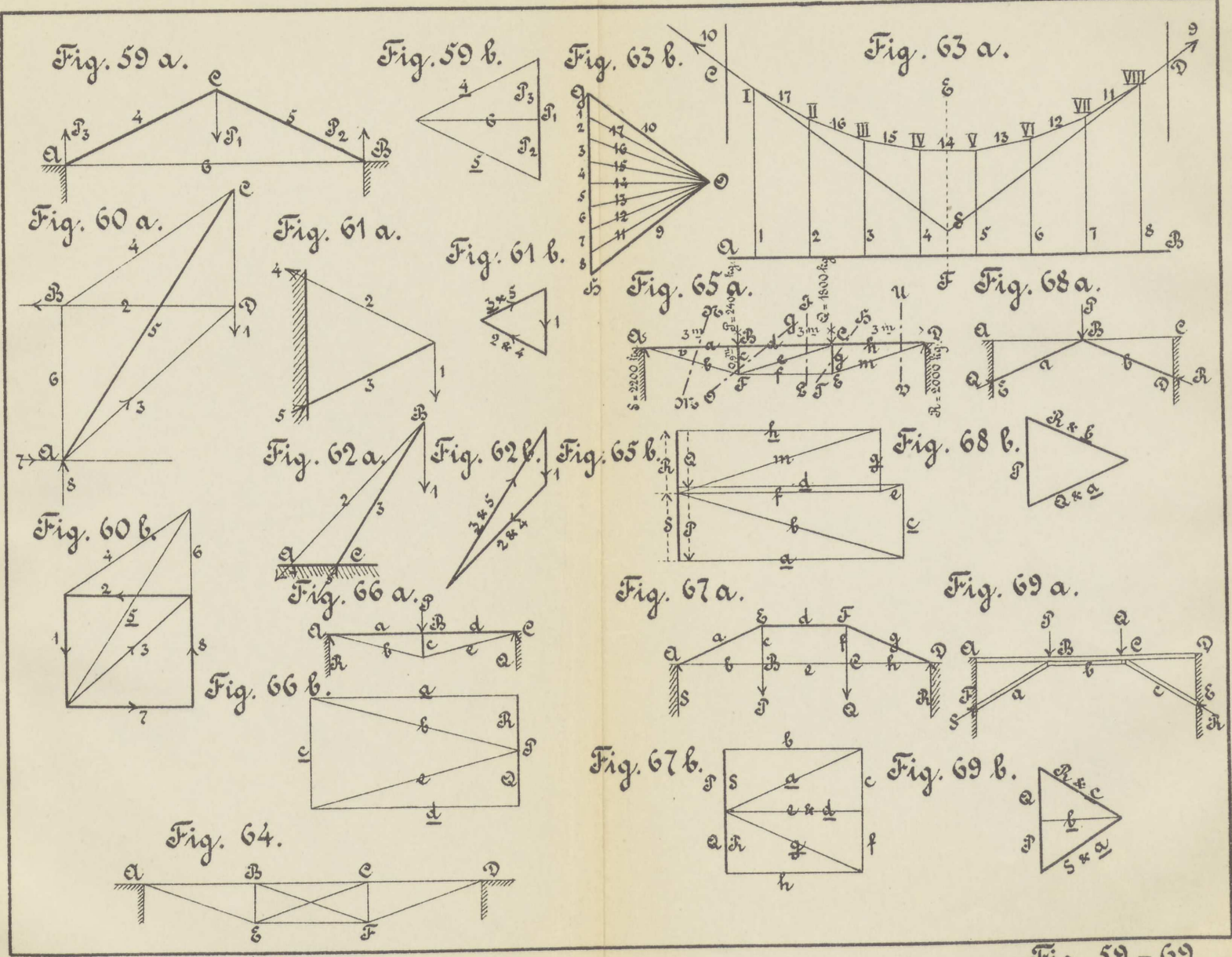




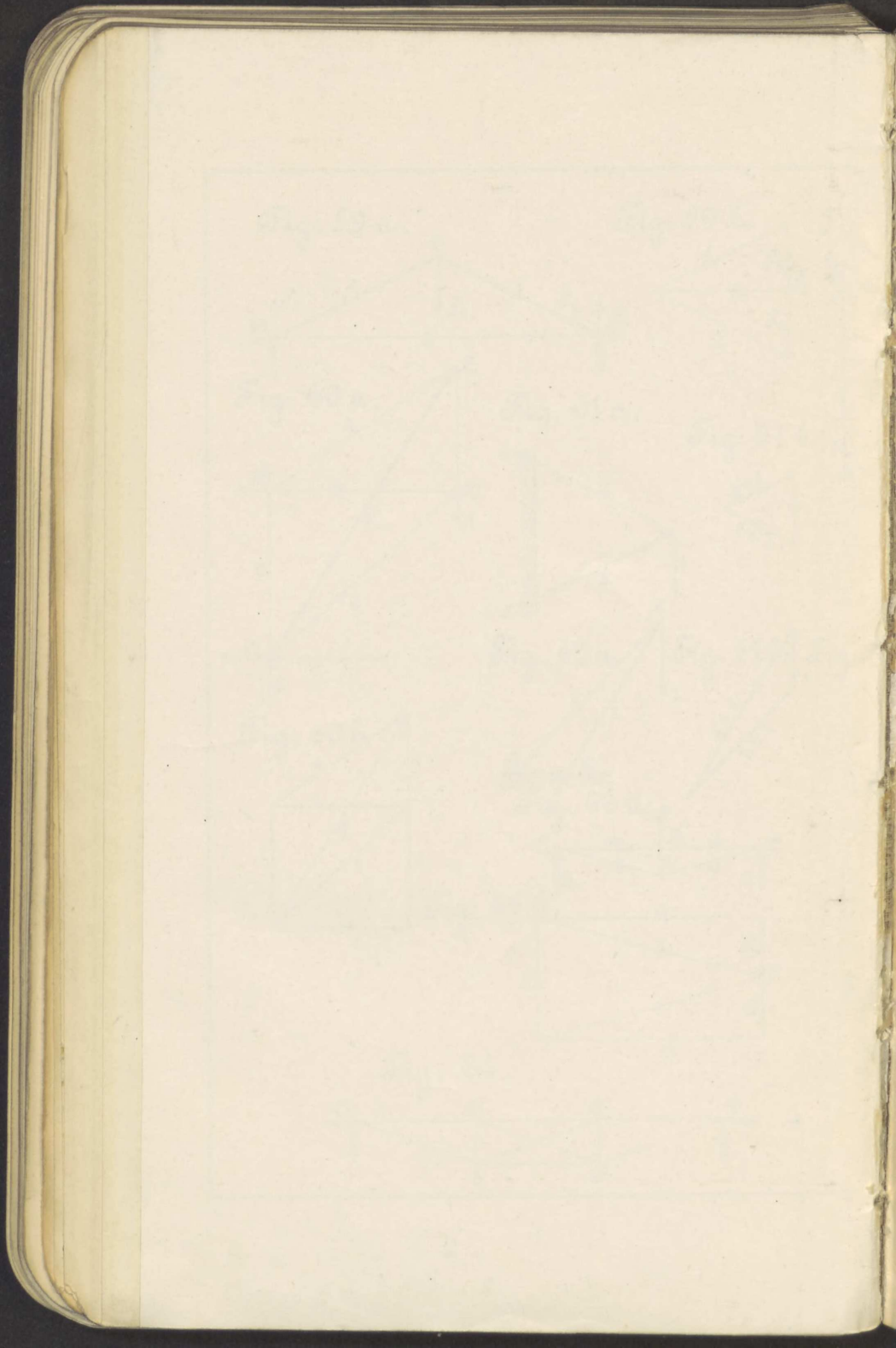












# Plan 9.

Fig. 72 a.

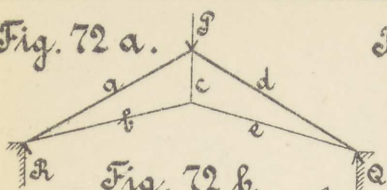


Fig. 72 b.

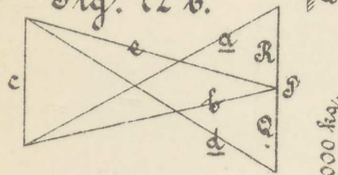


Fig. 74 a.

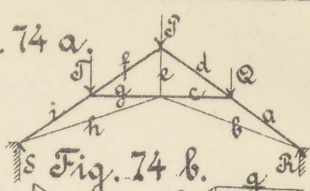


Fig. 74 b.

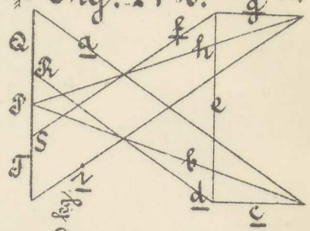


Fig. 76 a.

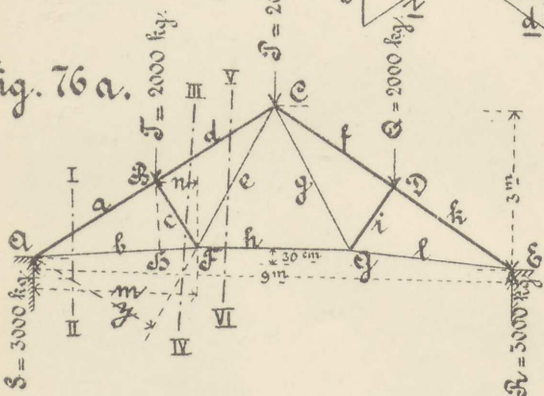


Fig. 75 a.

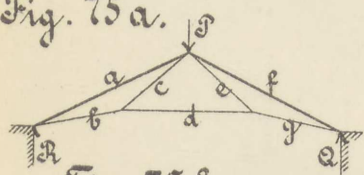


Fig. 75 b.

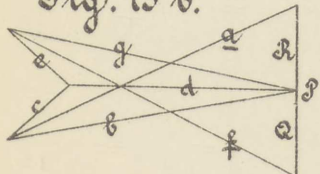
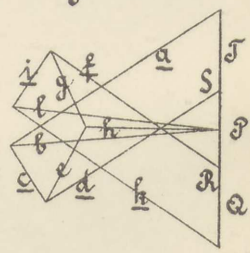
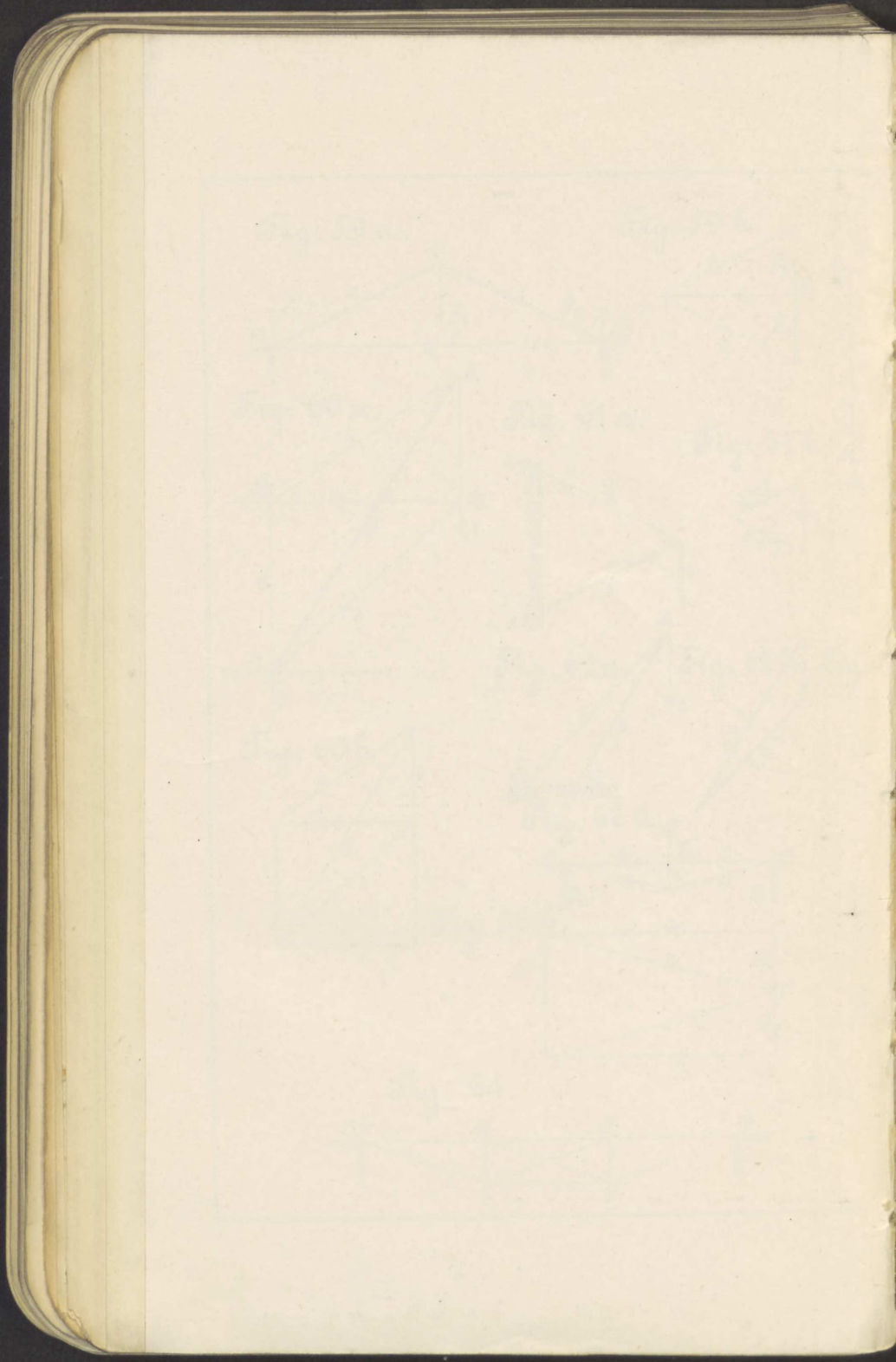


Fig. 76 b.







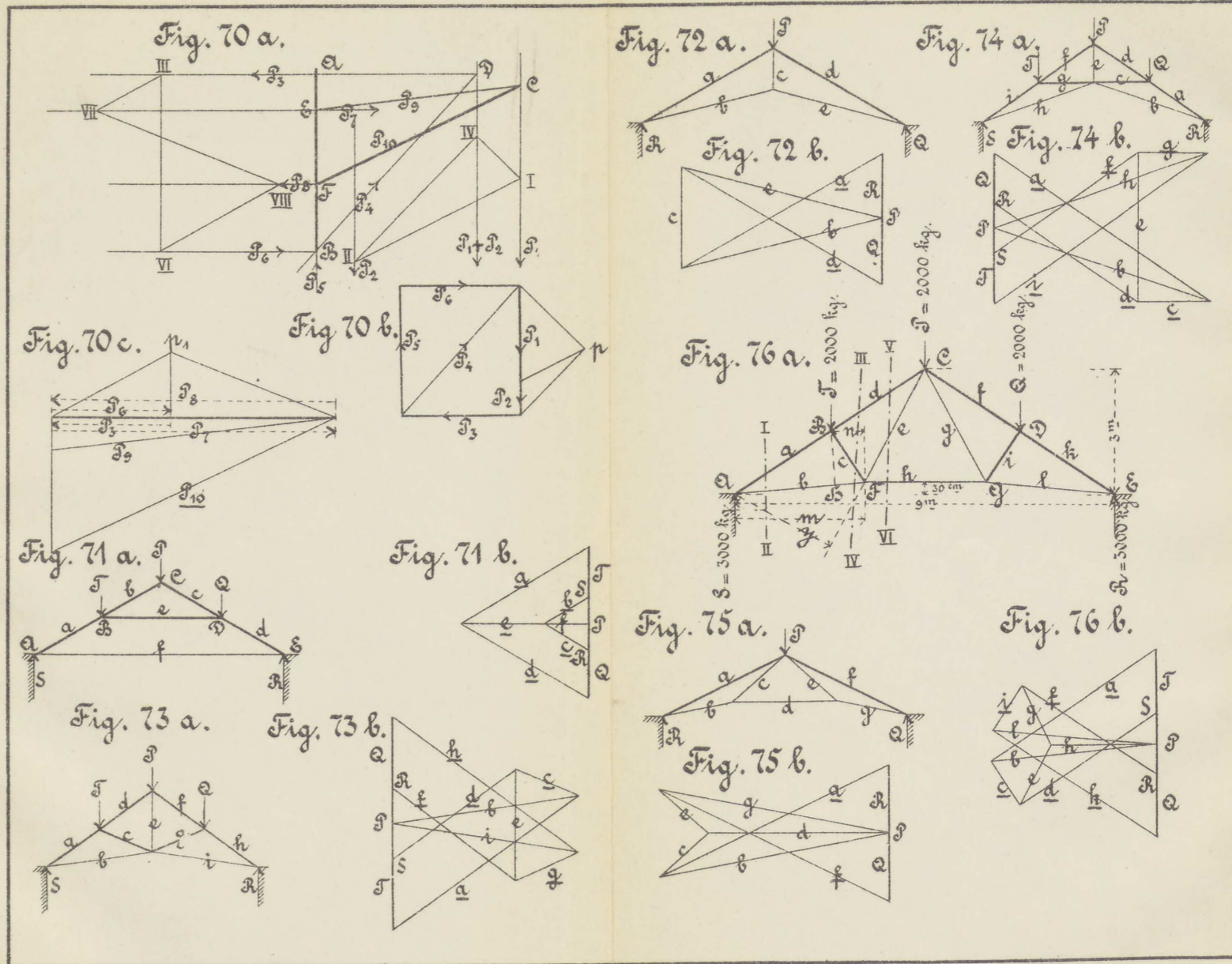
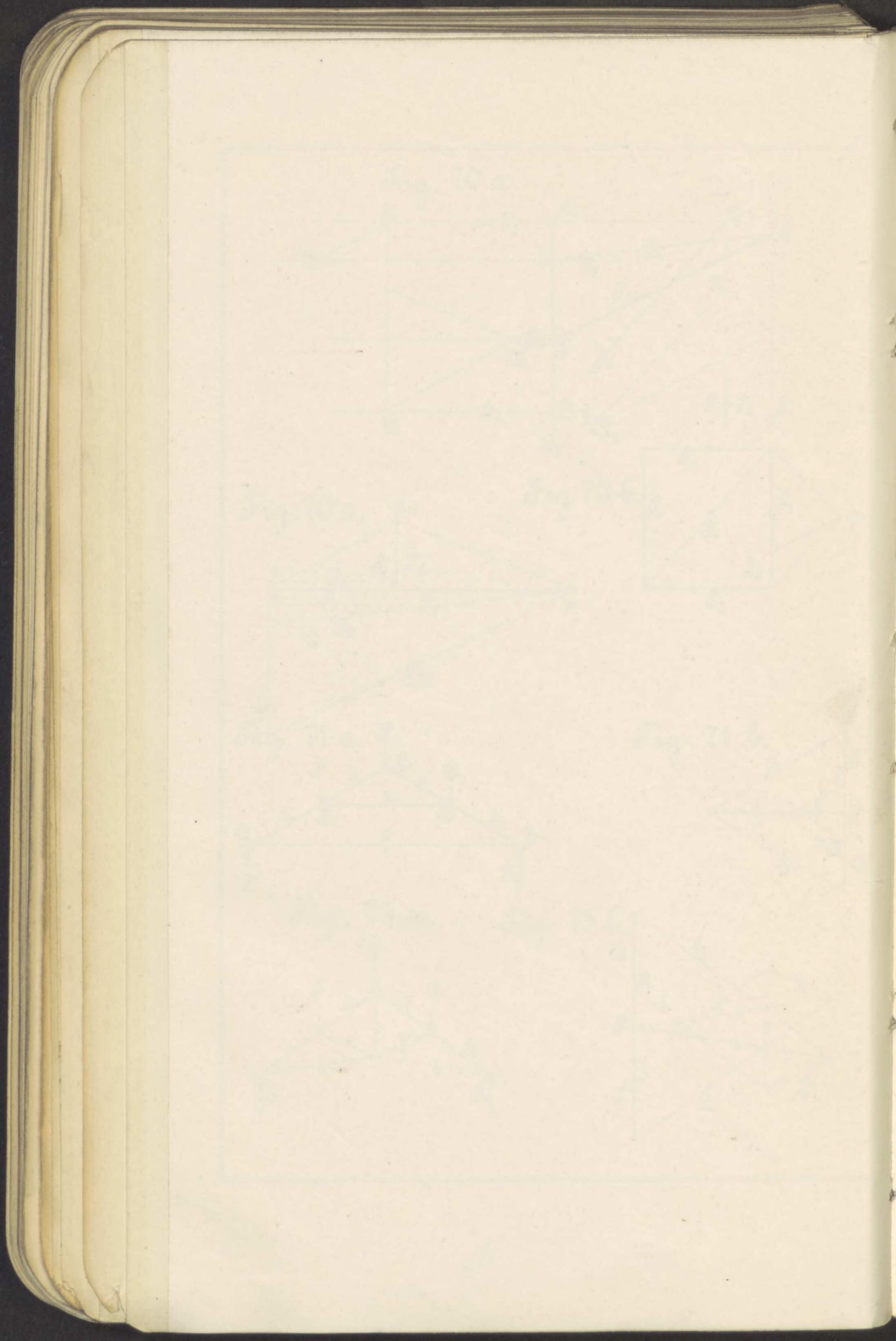


Fig. 70 - 76.





Plan 10.

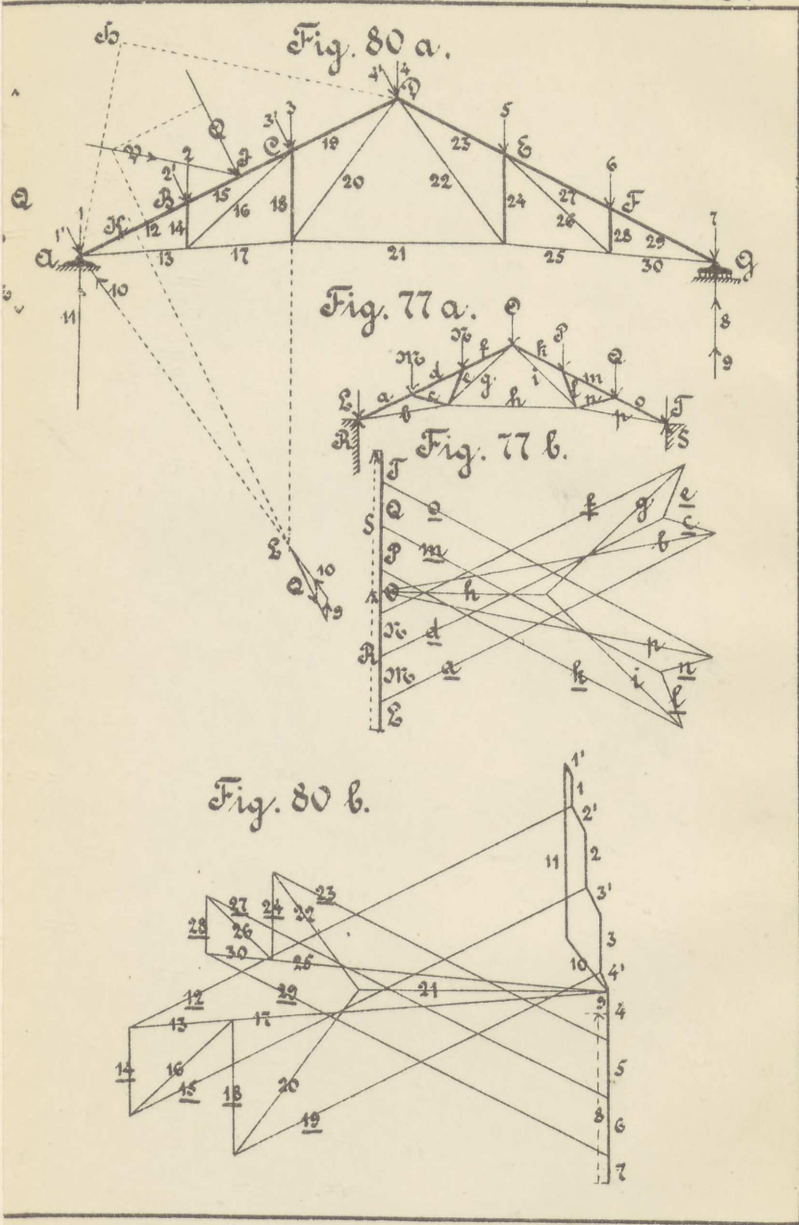
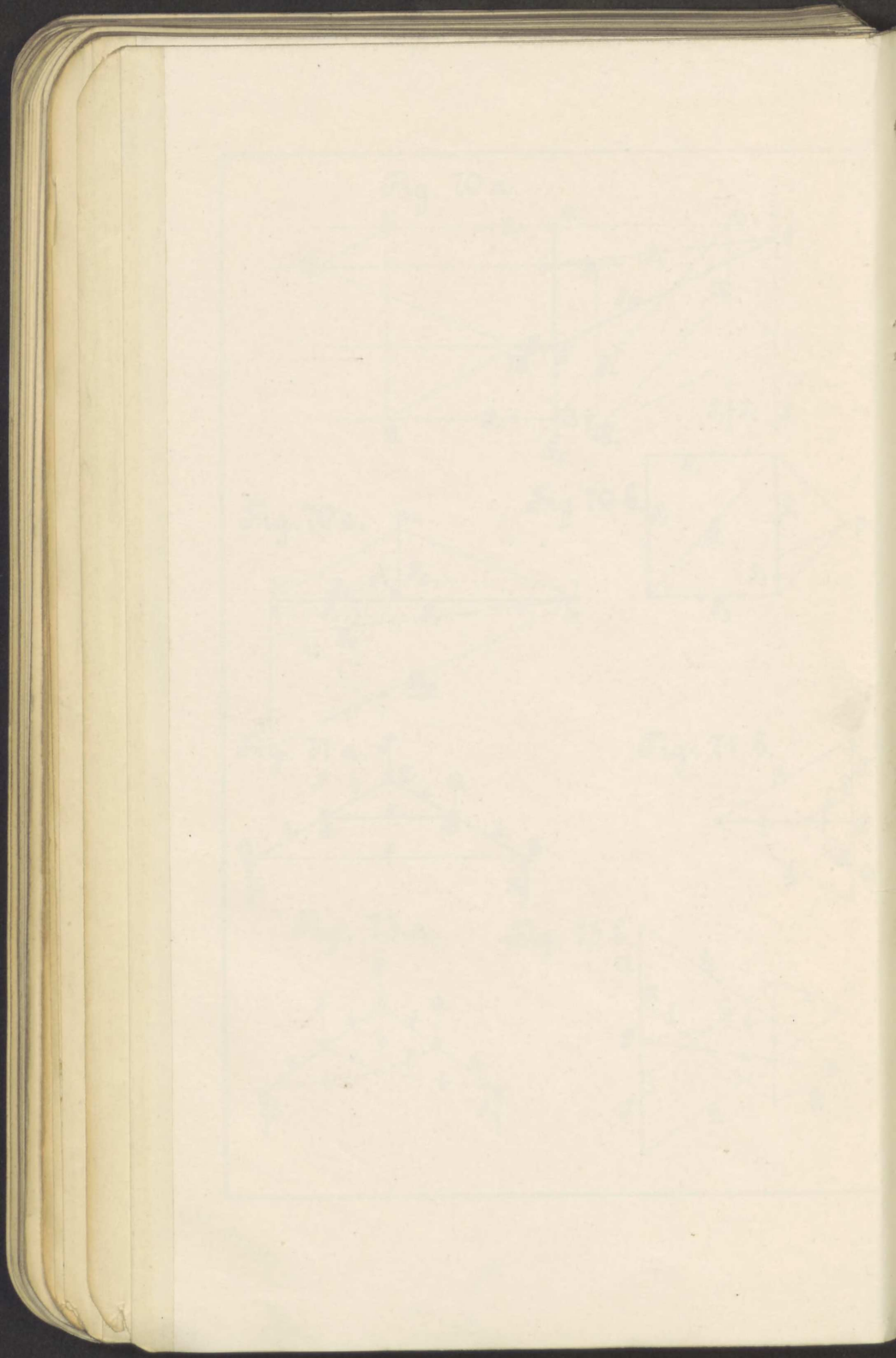


Fig. 77 - 80.





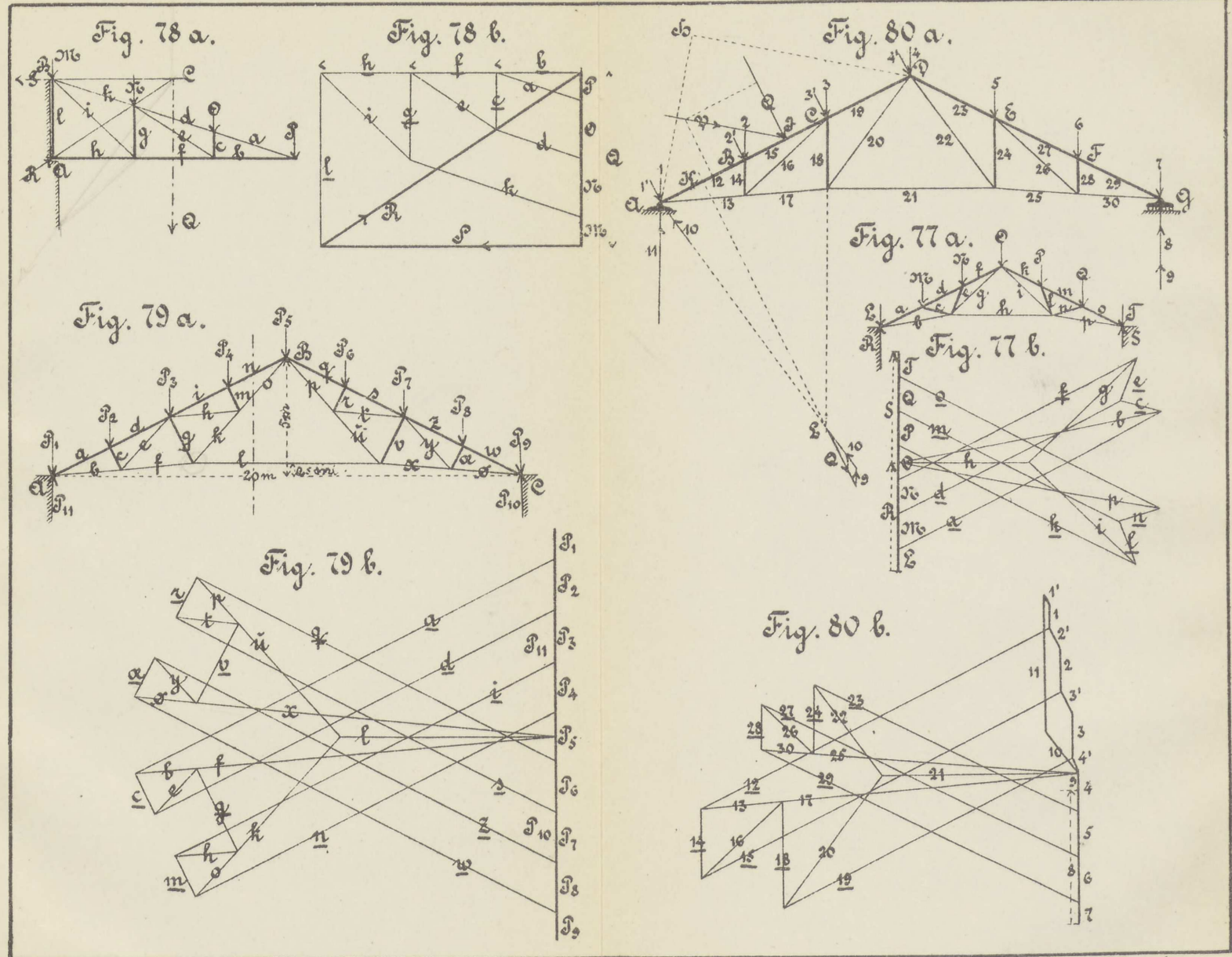
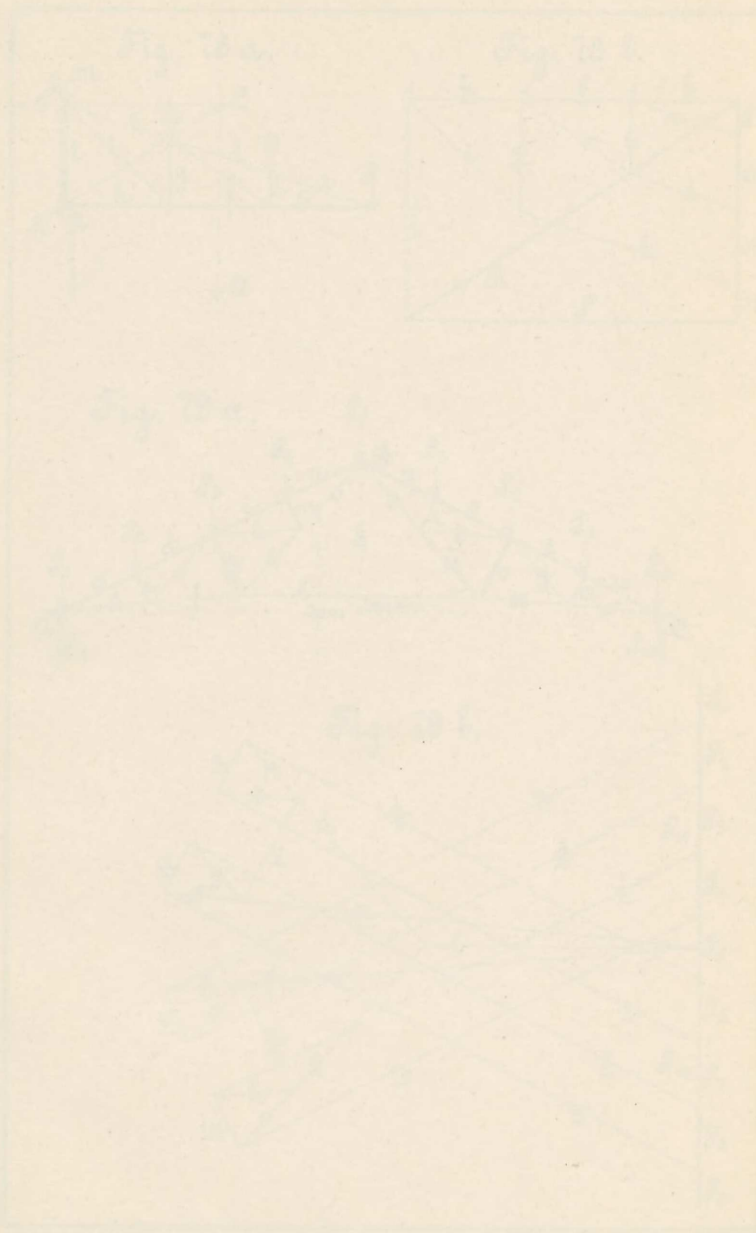


Fig. 77 - 80.



# Plan 11.

Fig. 83 a.

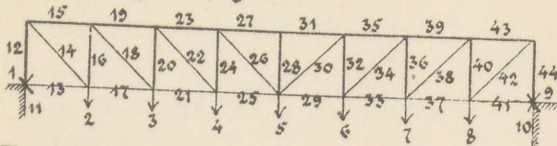


Fig. 83 b.

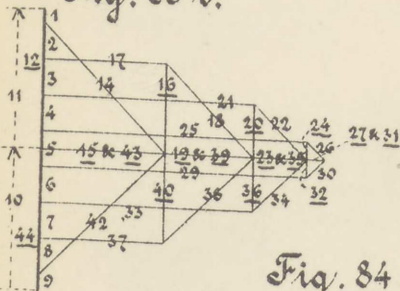


Fig. 84 b.

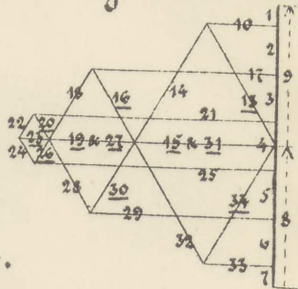


Fig. 84 a.

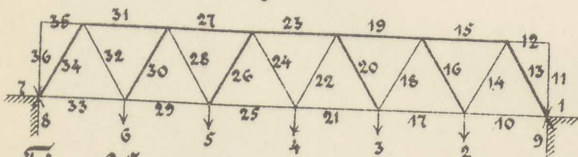


Fig. 85 a.

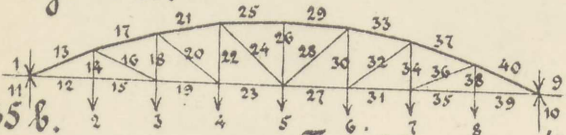


Fig. 85 b.

Fig. 86.

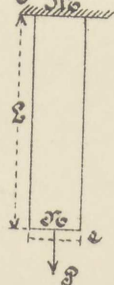


Fig. 87.

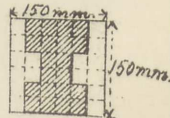
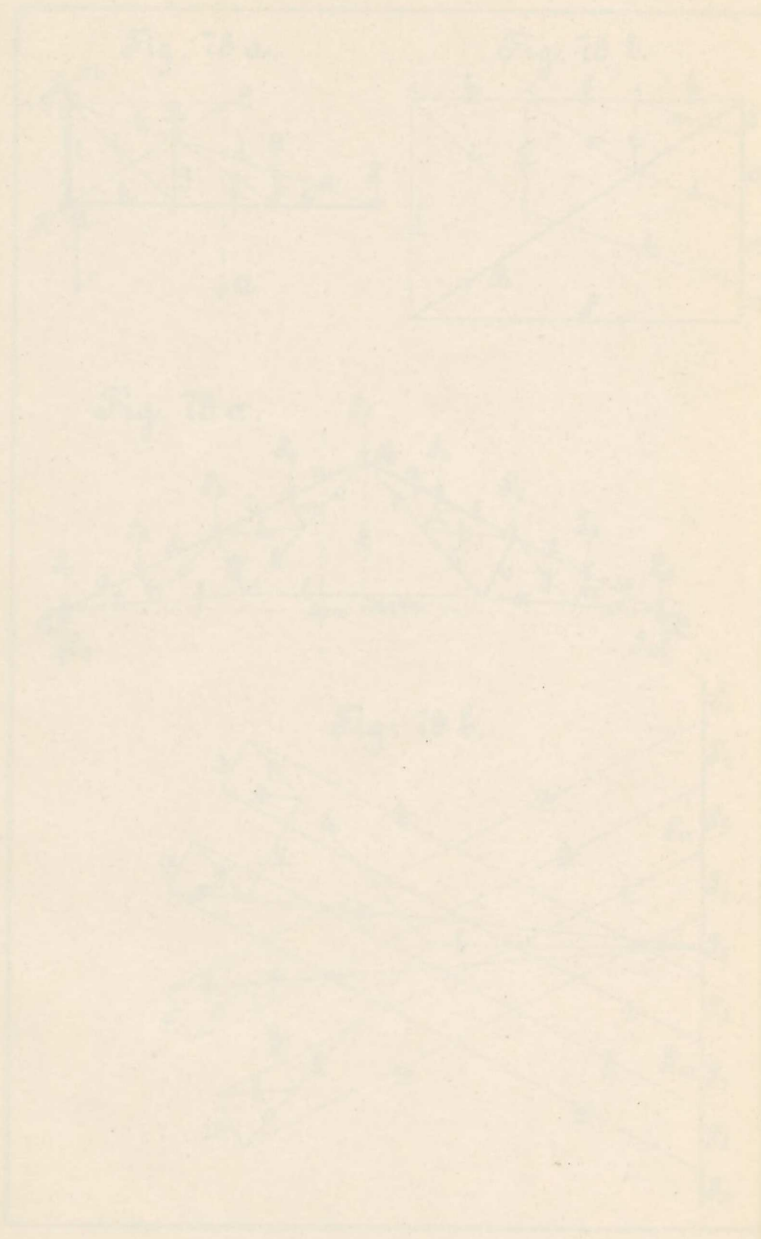
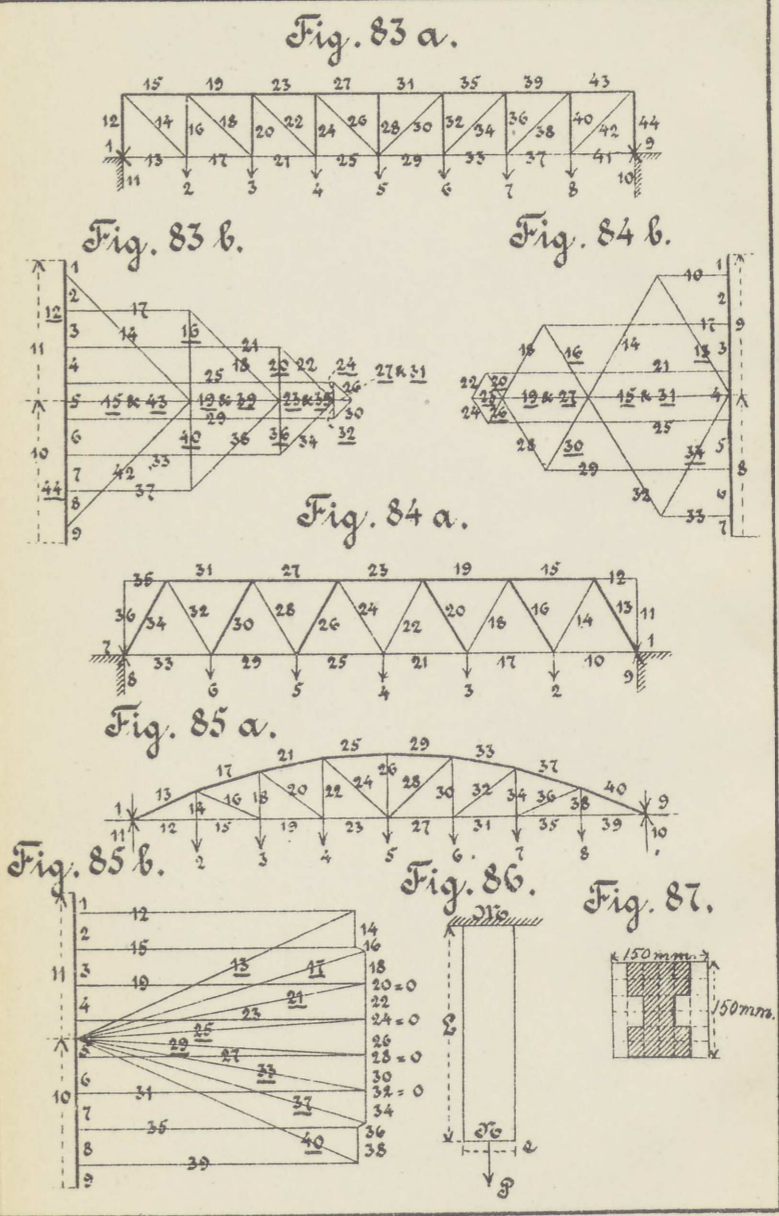
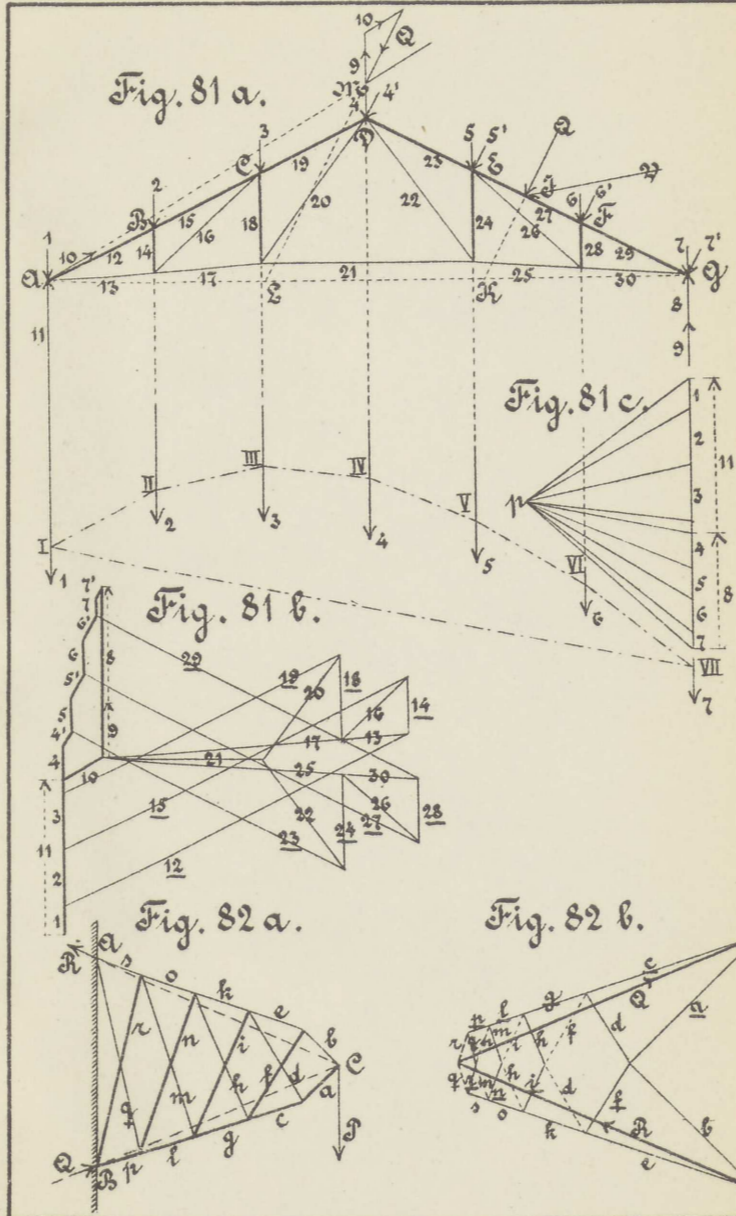
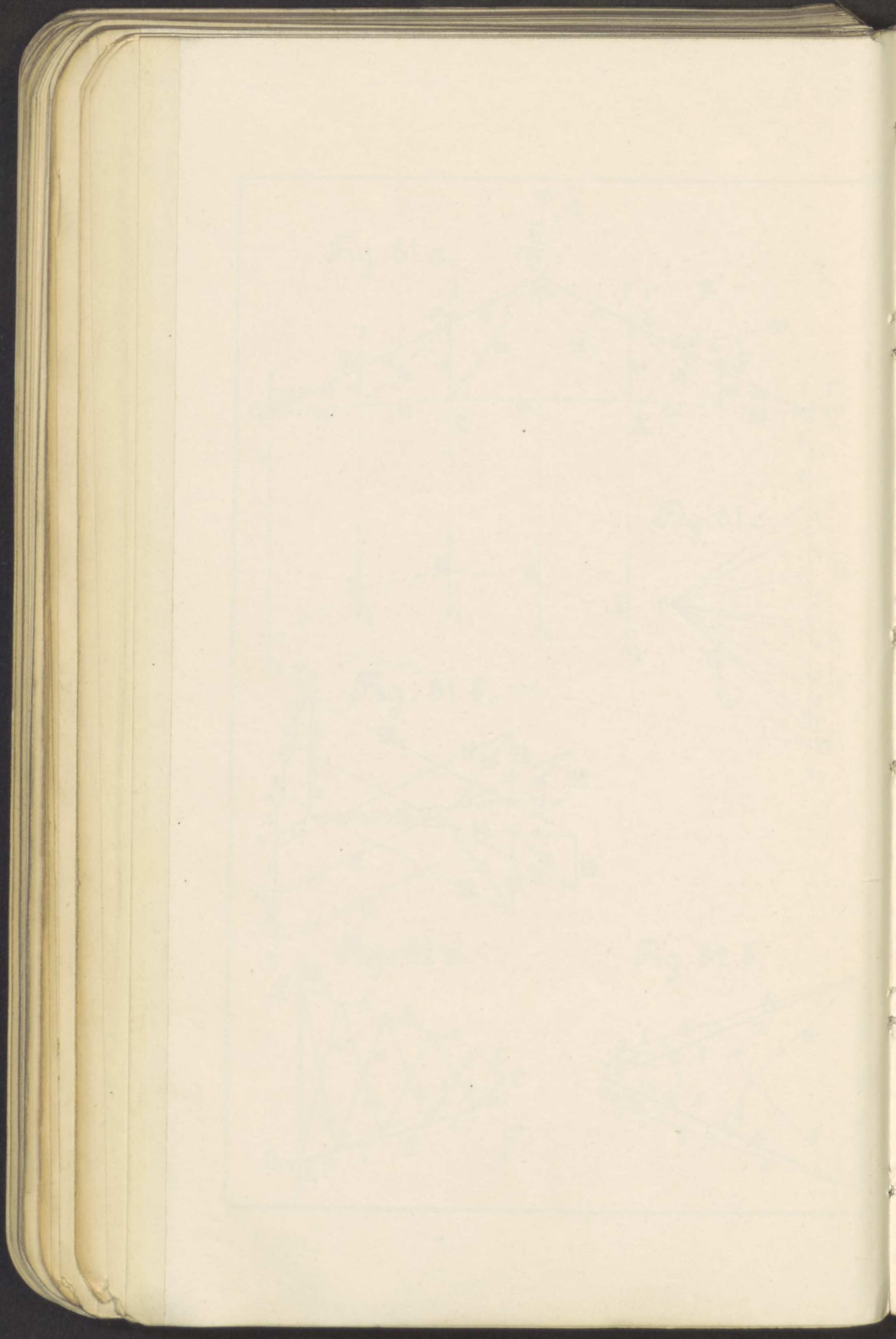


Fig. 81 - 87.











# Plan 12.

Fig. 102.

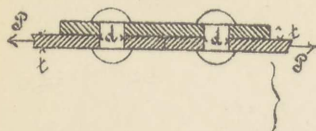
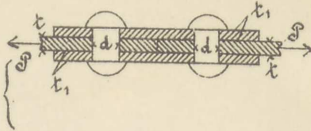
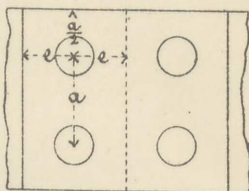
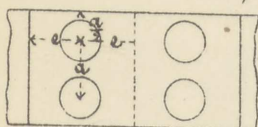


Fig. 103.



X



Z

Fig. 104.

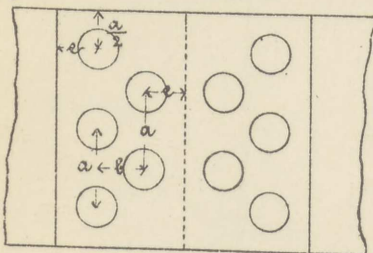
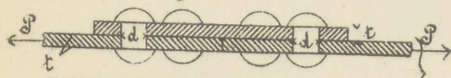


Fig. 106.

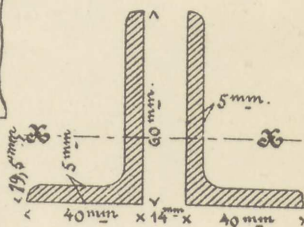


Fig. 105.

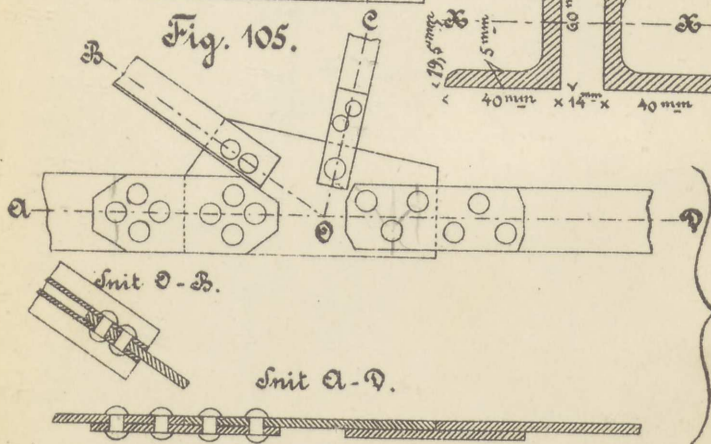
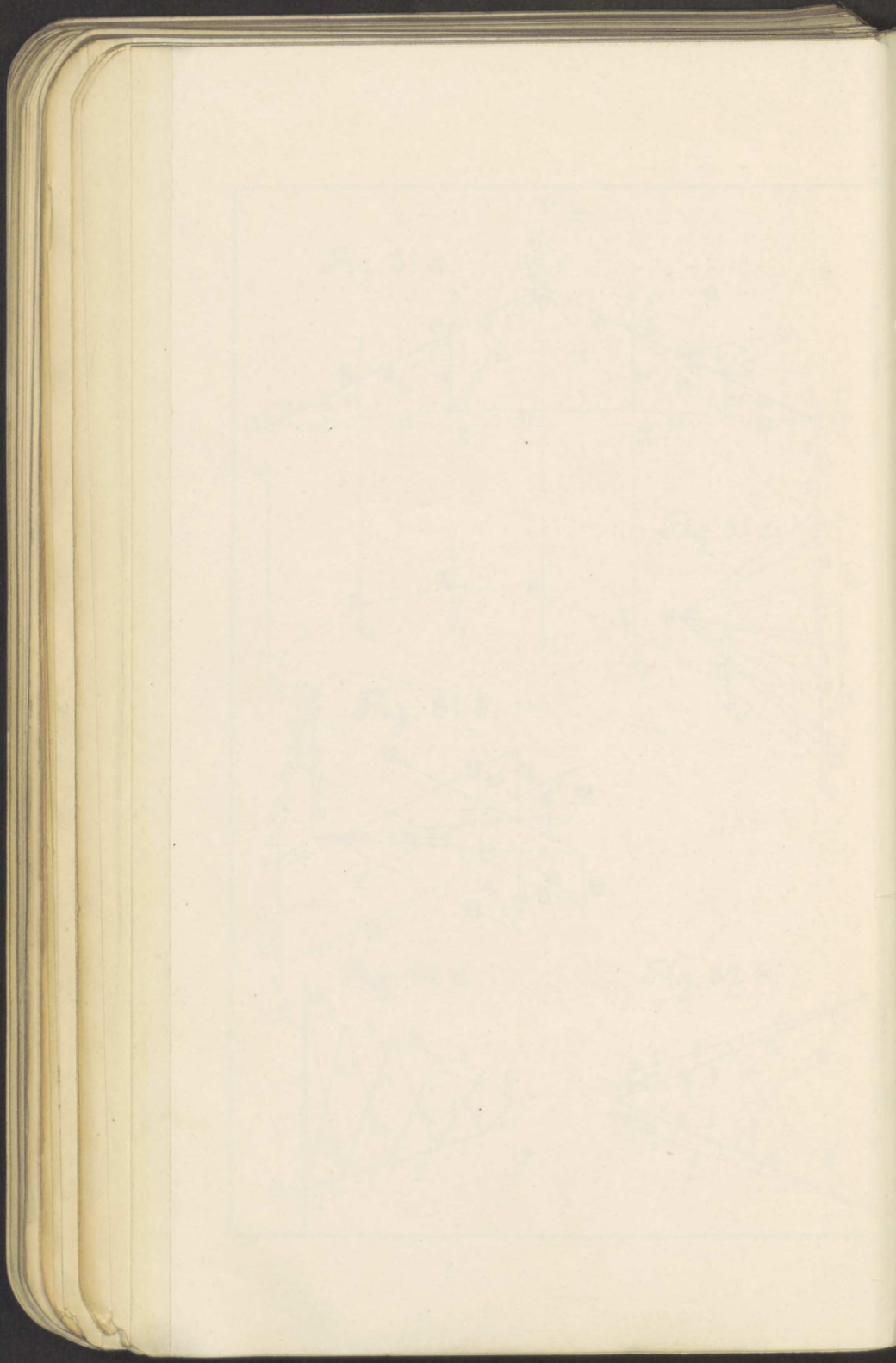


Fig. 88 - 106.





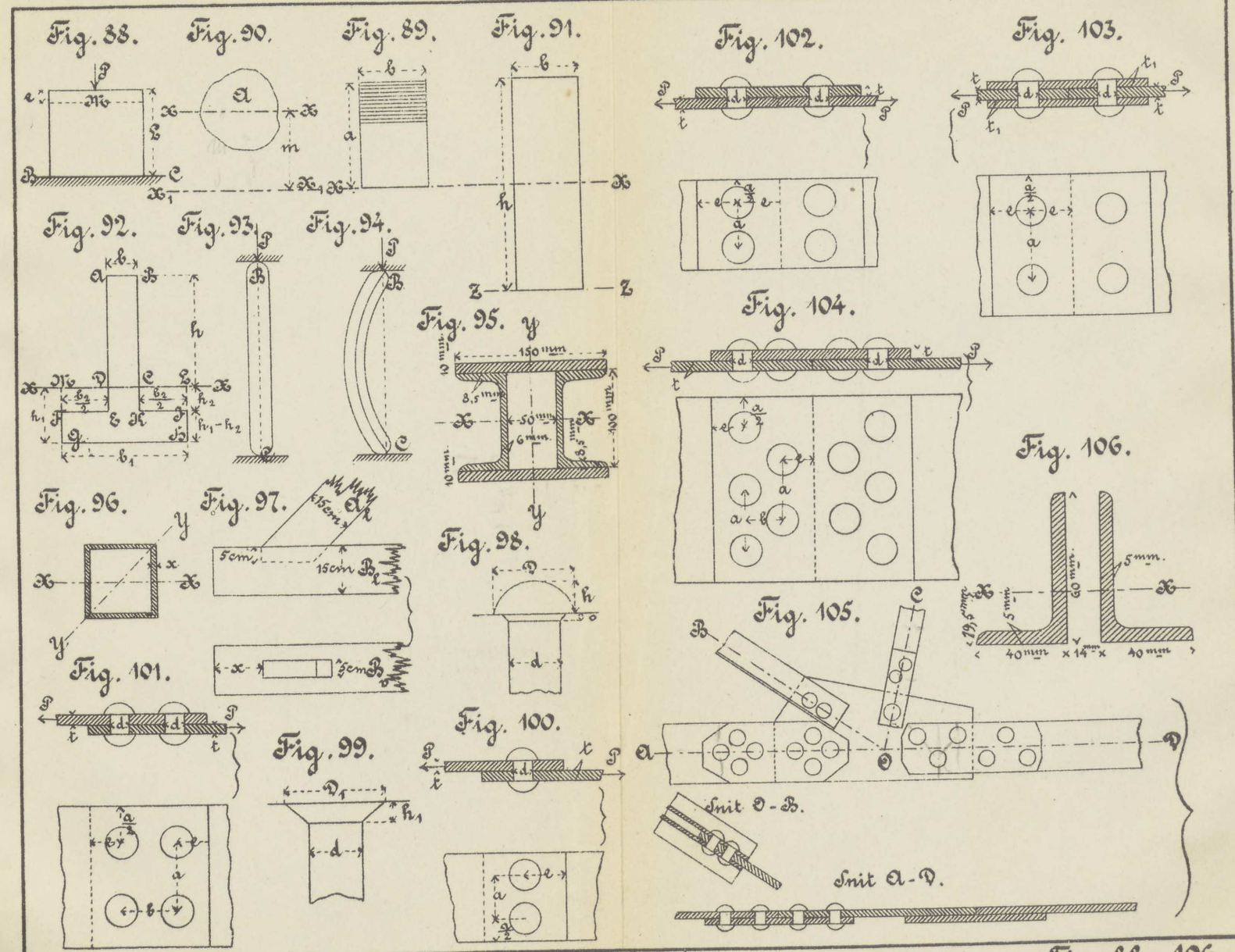
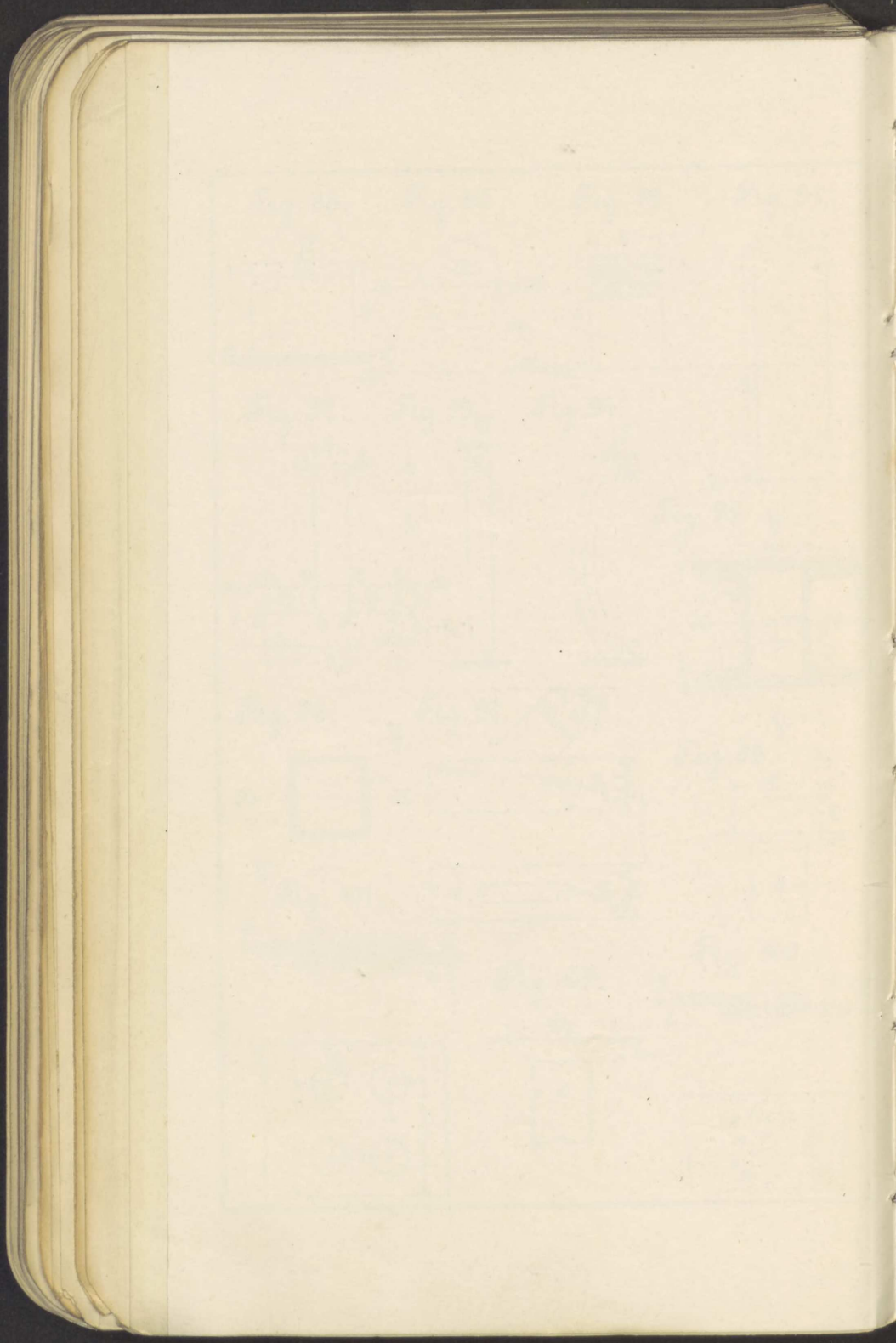


Fig. 88 - 106.





# Plan 13.

Fig. 107 b.  
Snit B - C.

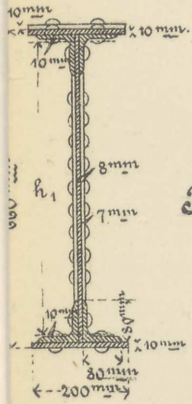


Fig. 111 a.

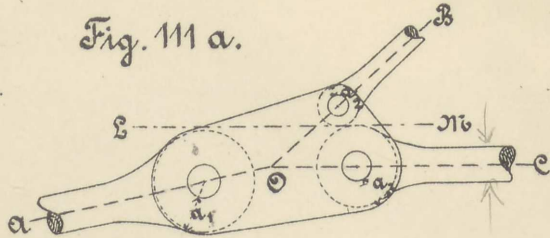


Fig. 111 b. Snit L - M6.

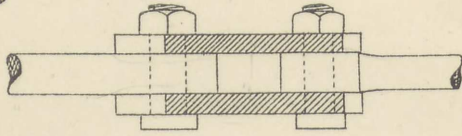


Fig. 112 a.

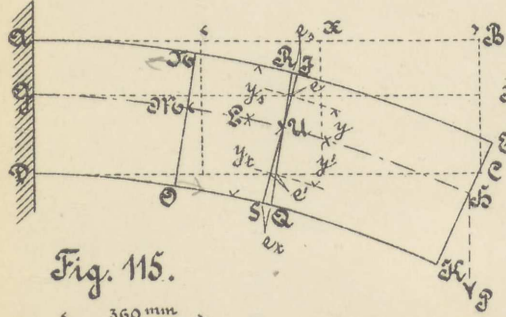


Fig. 112 b.

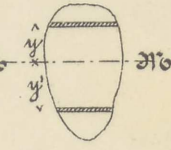


Fig. 115.

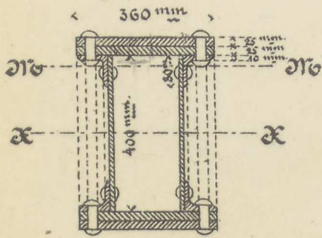


Fig. 113.

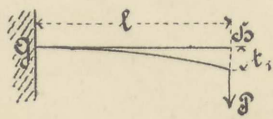


Fig. 107 - 115.

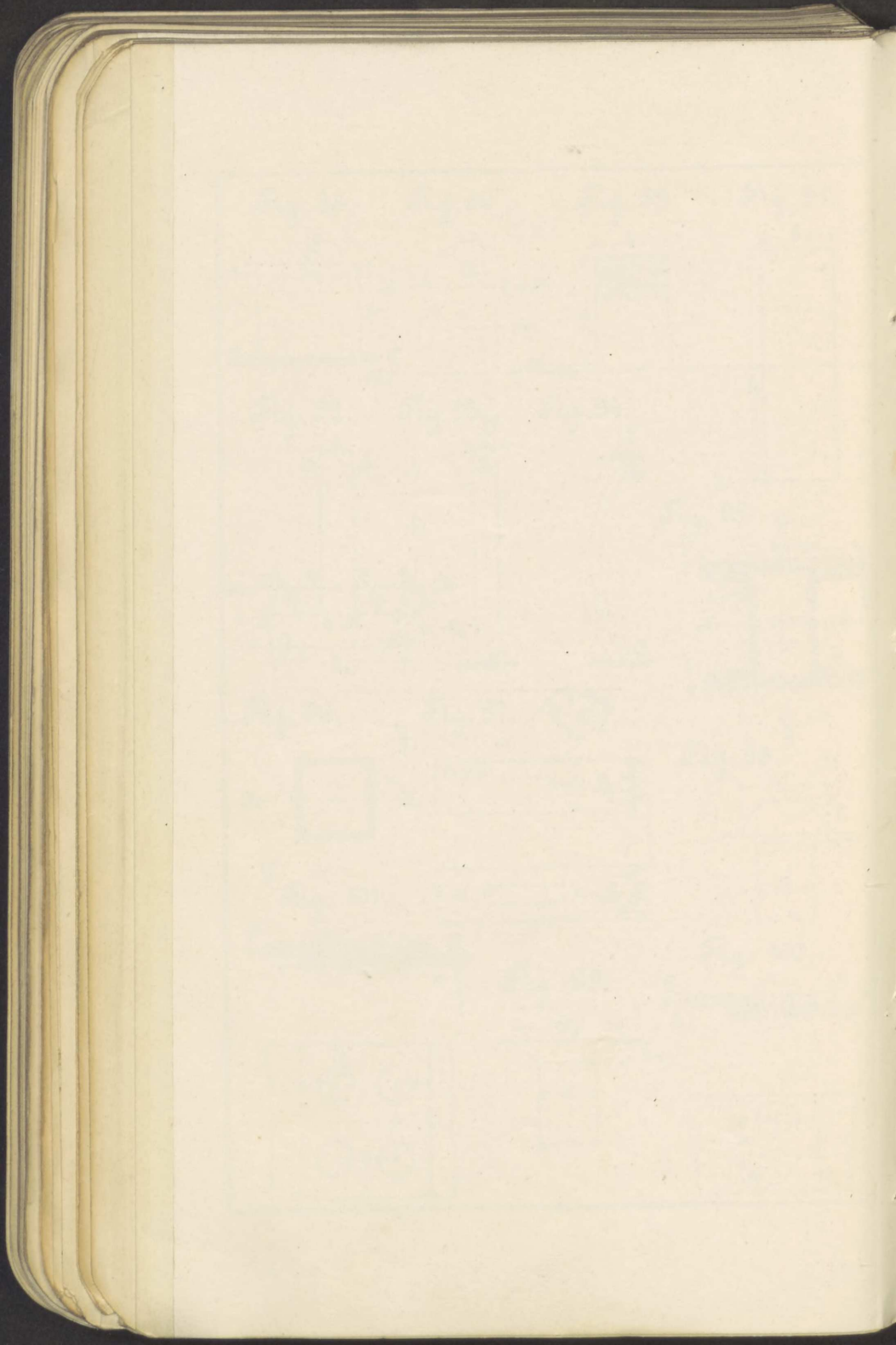




Fig. 107 a.

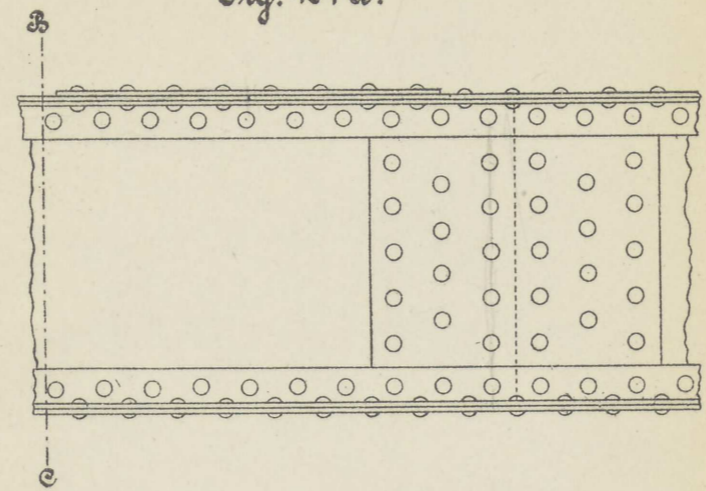


Fig. 107 b.  
Snit B-C.

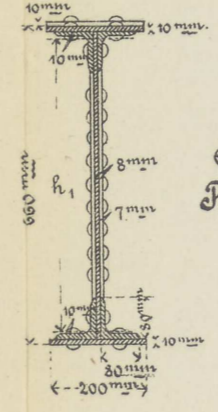


Fig. 111 a.

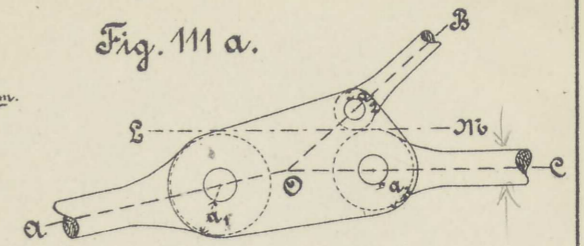


Fig. 111 b. Snit L-b.

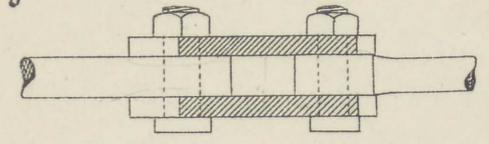


Fig. 108 a.

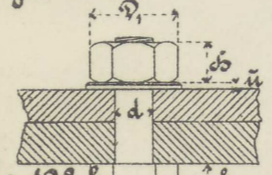


Fig. 108 b.

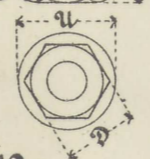


Fig. 110 a.

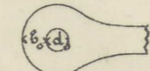


Fig. 110 b.

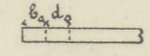


Fig. 109 a.

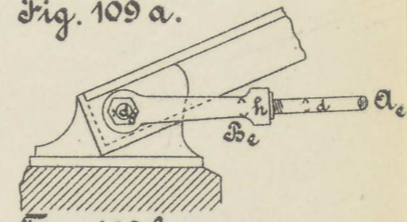


Fig. 109 b.

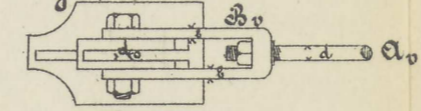


Fig. 114.

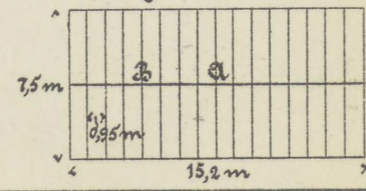


Fig. 112 a.

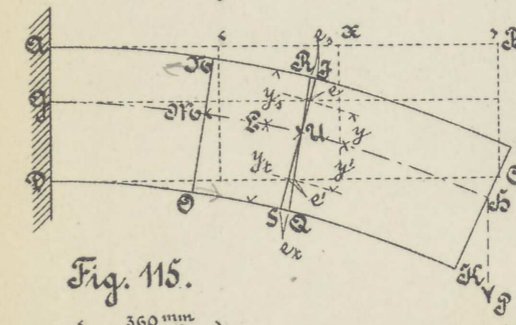


Fig. 112 b.

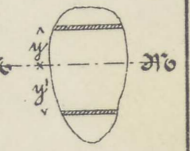


Fig. 115.

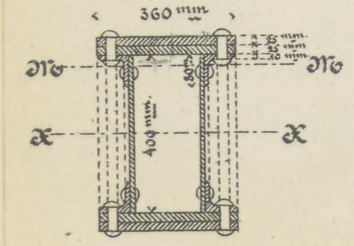
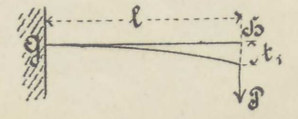
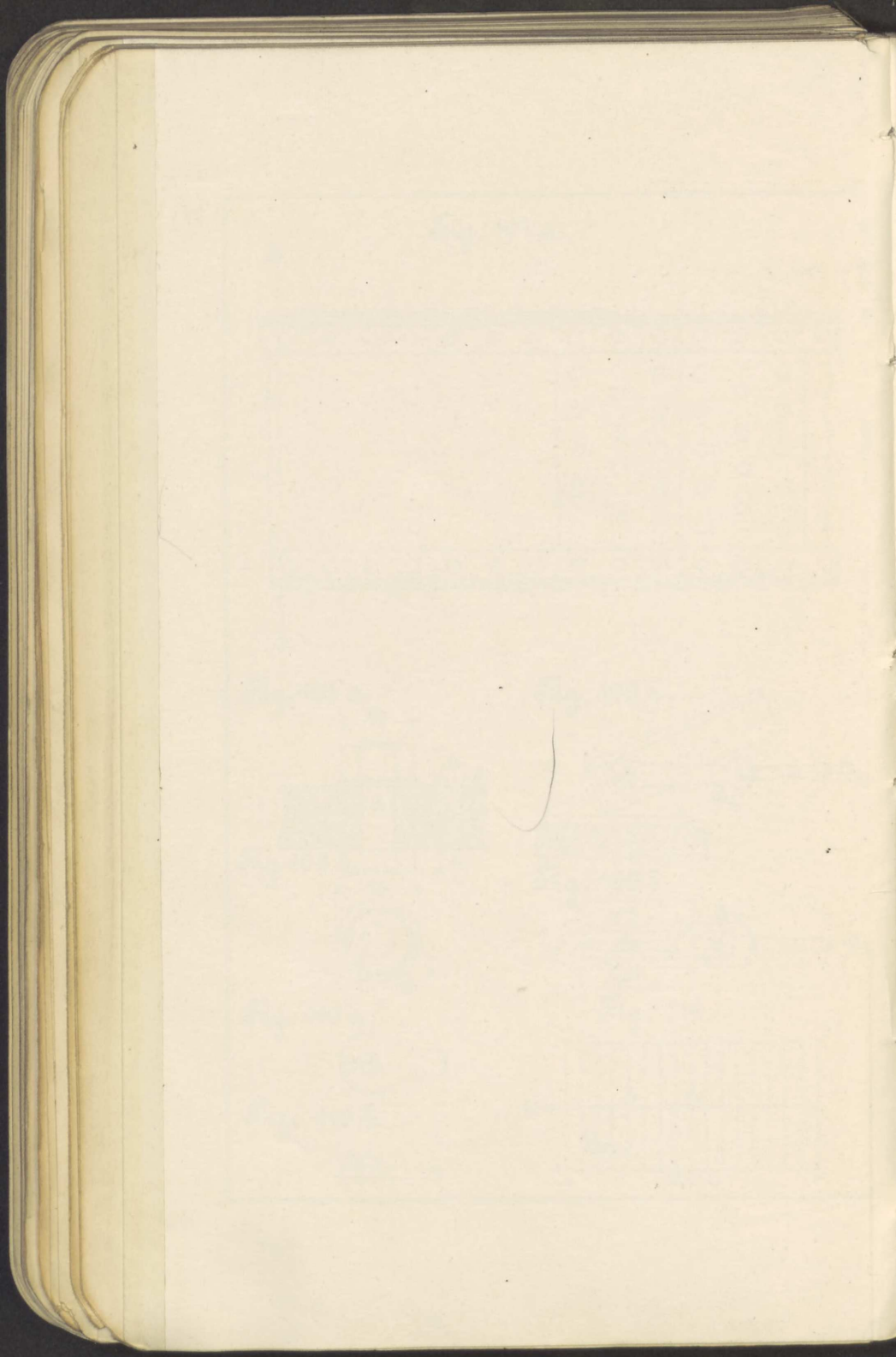


Fig. 113.







# Plan 14.

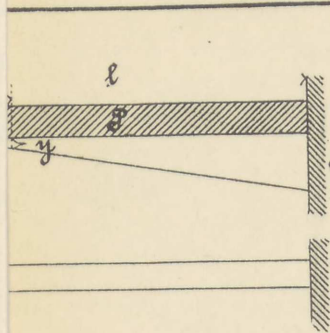


Fig. 121.

Fig. 126

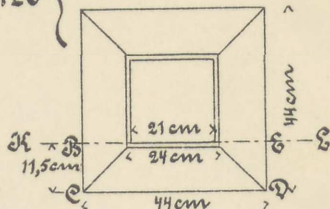
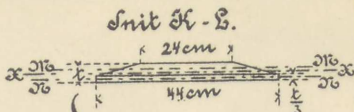


Fig. 122.

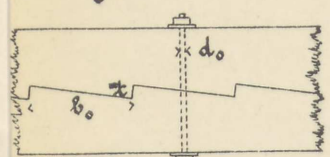


Fig. 123.

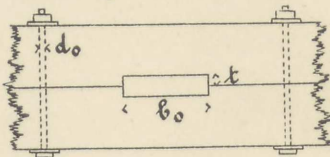


Fig. 124.

Fig. 125.

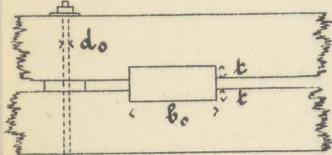


Fig. 127.

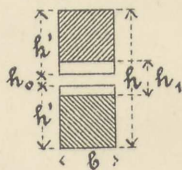
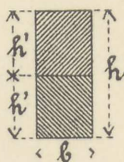


Fig. 128.

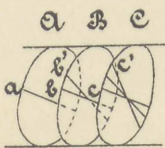
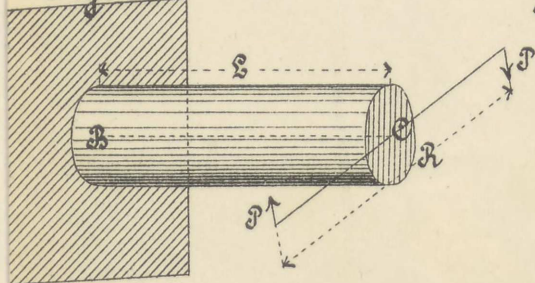
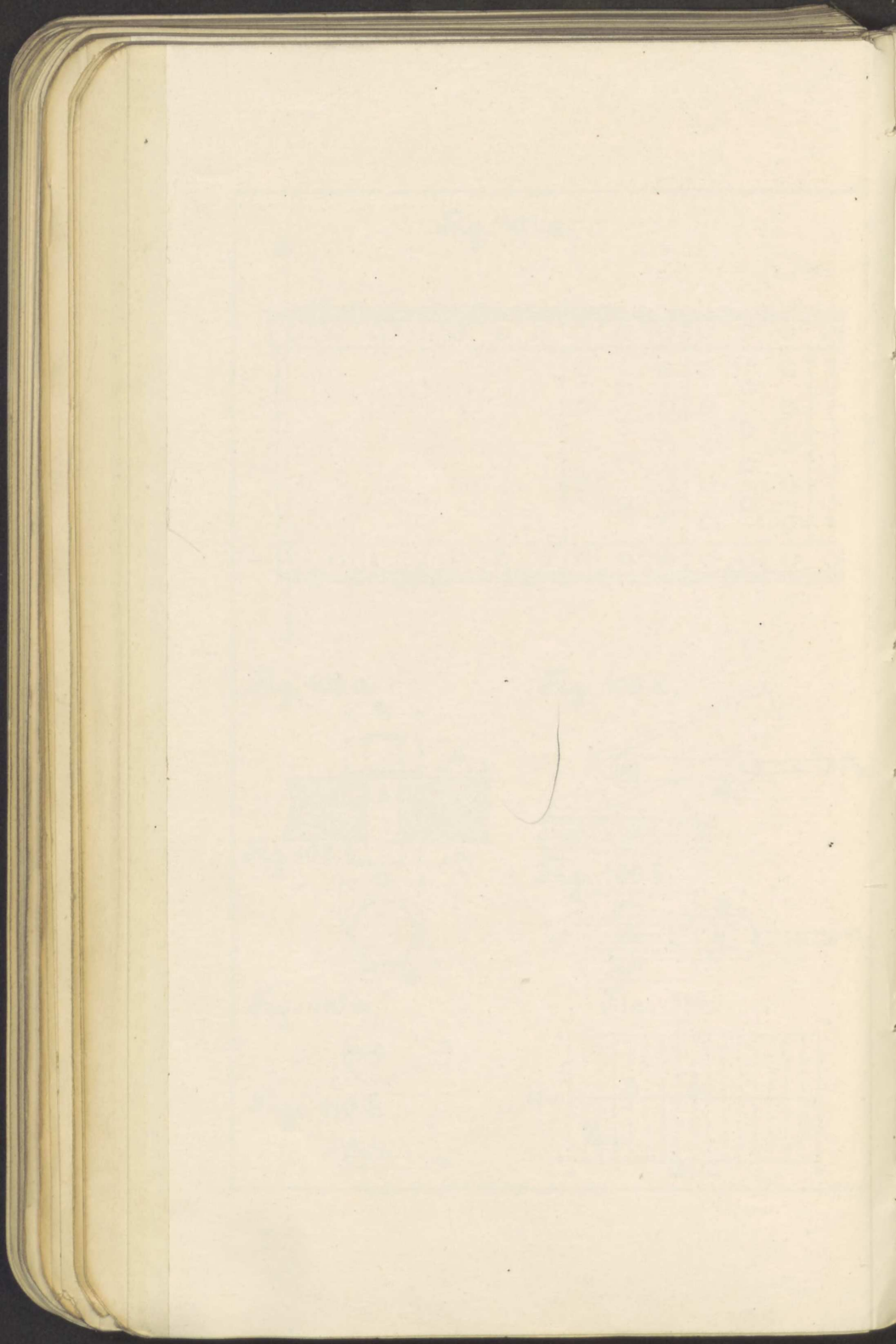


Fig. 116 - 128.





Plan 14.

Fig. 116. F

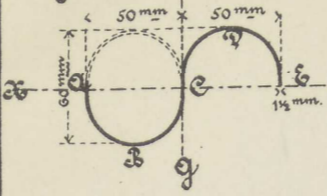


Fig. 117.

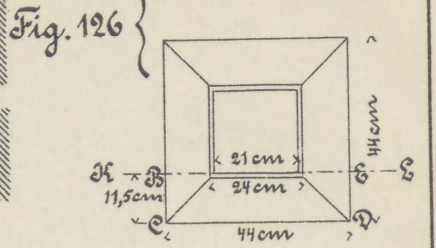
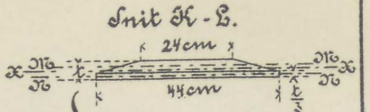
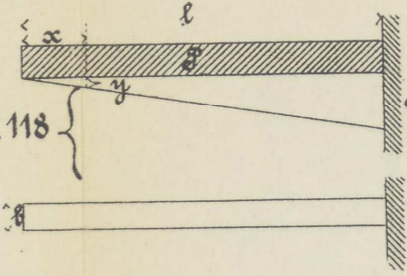
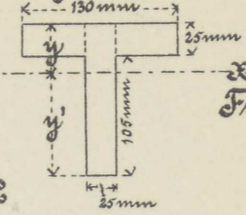


Fig. 119.

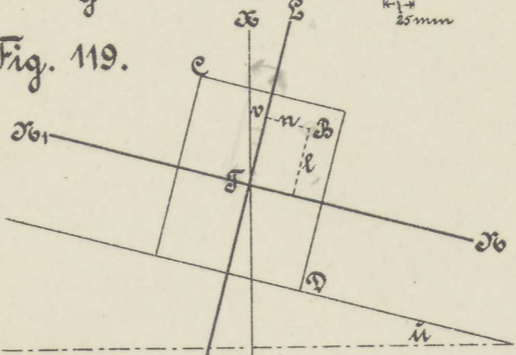


Fig. 120.

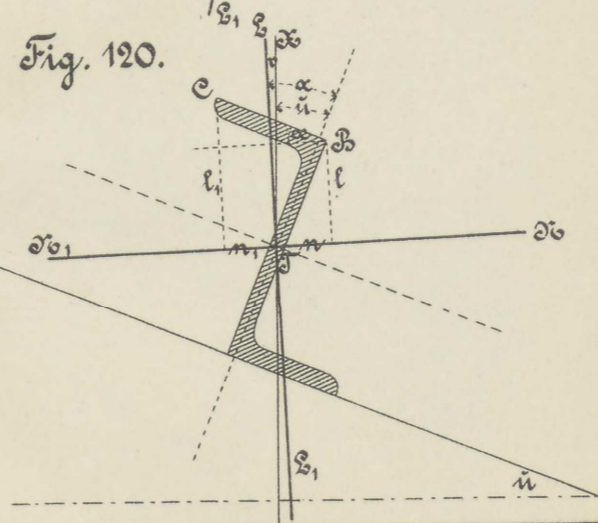


Fig. 121.

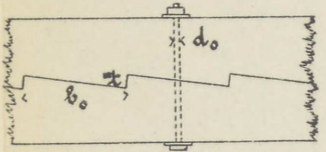


Fig. 123.

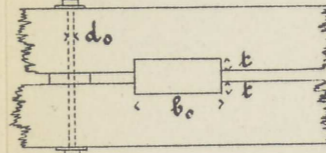


Fig. 124.

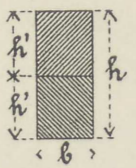


Fig. 125.

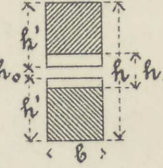


Fig. 127.

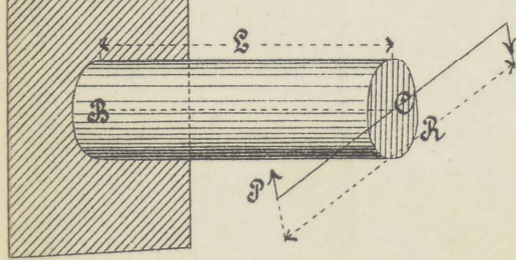
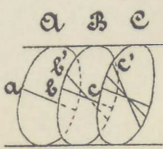
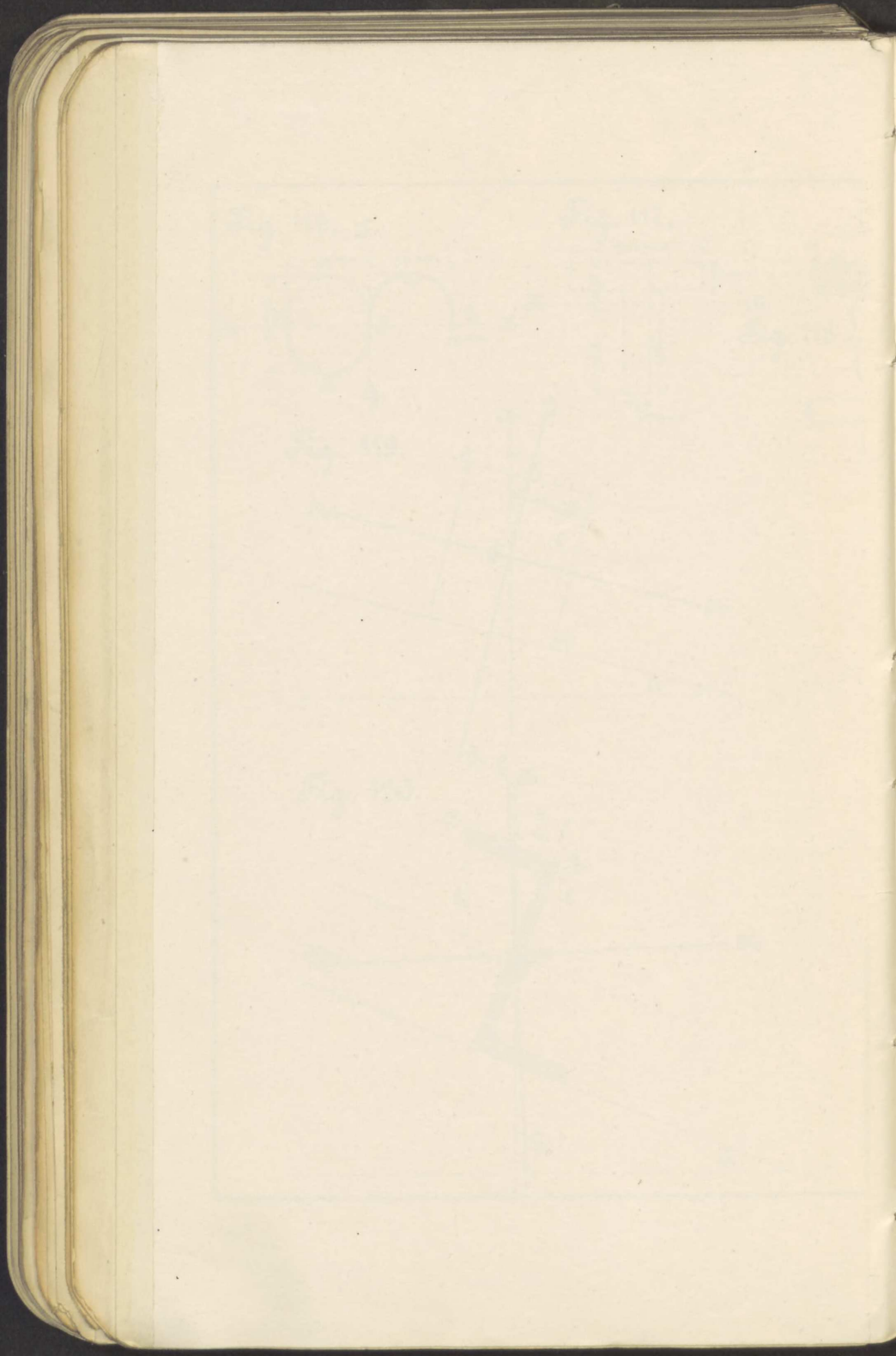


Fig. 128.







# Plan 15.

Fig. 134 a.

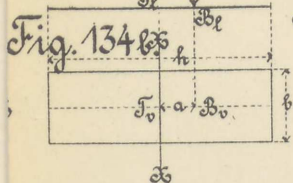


Fig. 135 a.

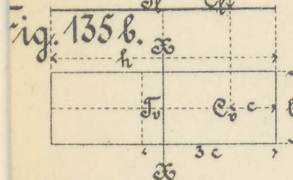


Fig. 138 a.

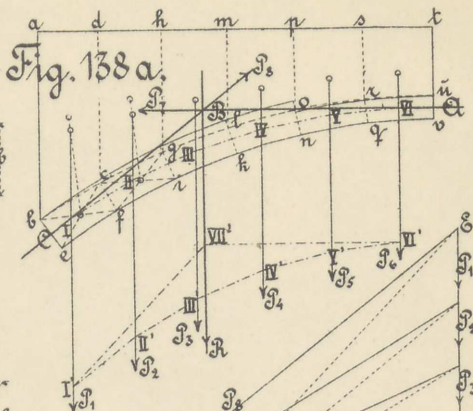


Fig. 138 b.

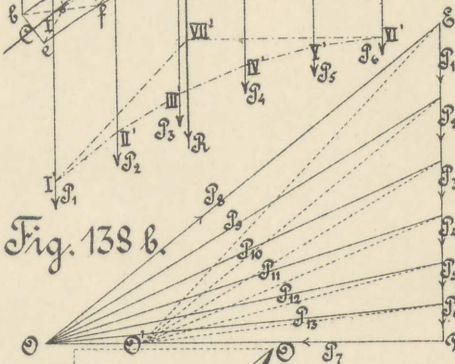


Fig. 139 a.

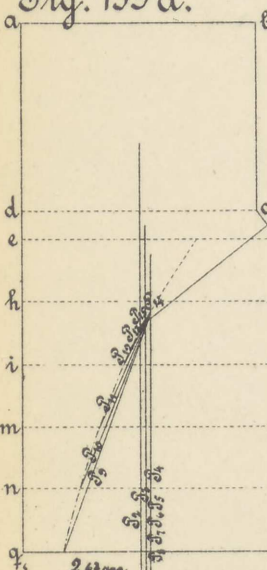


Fig. 139 b.

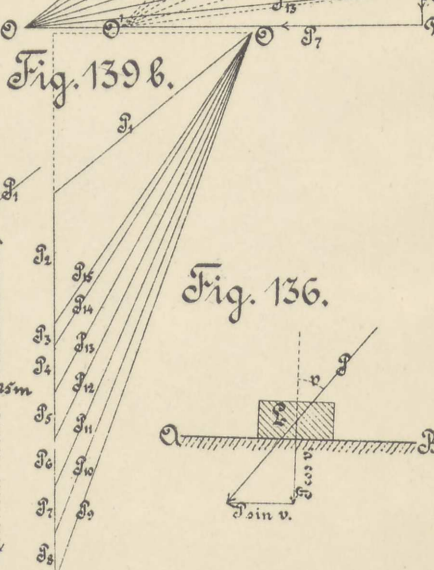
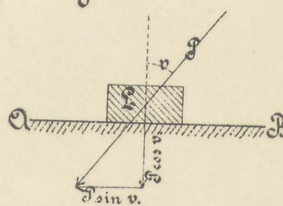
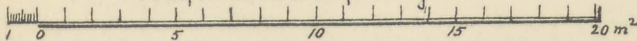
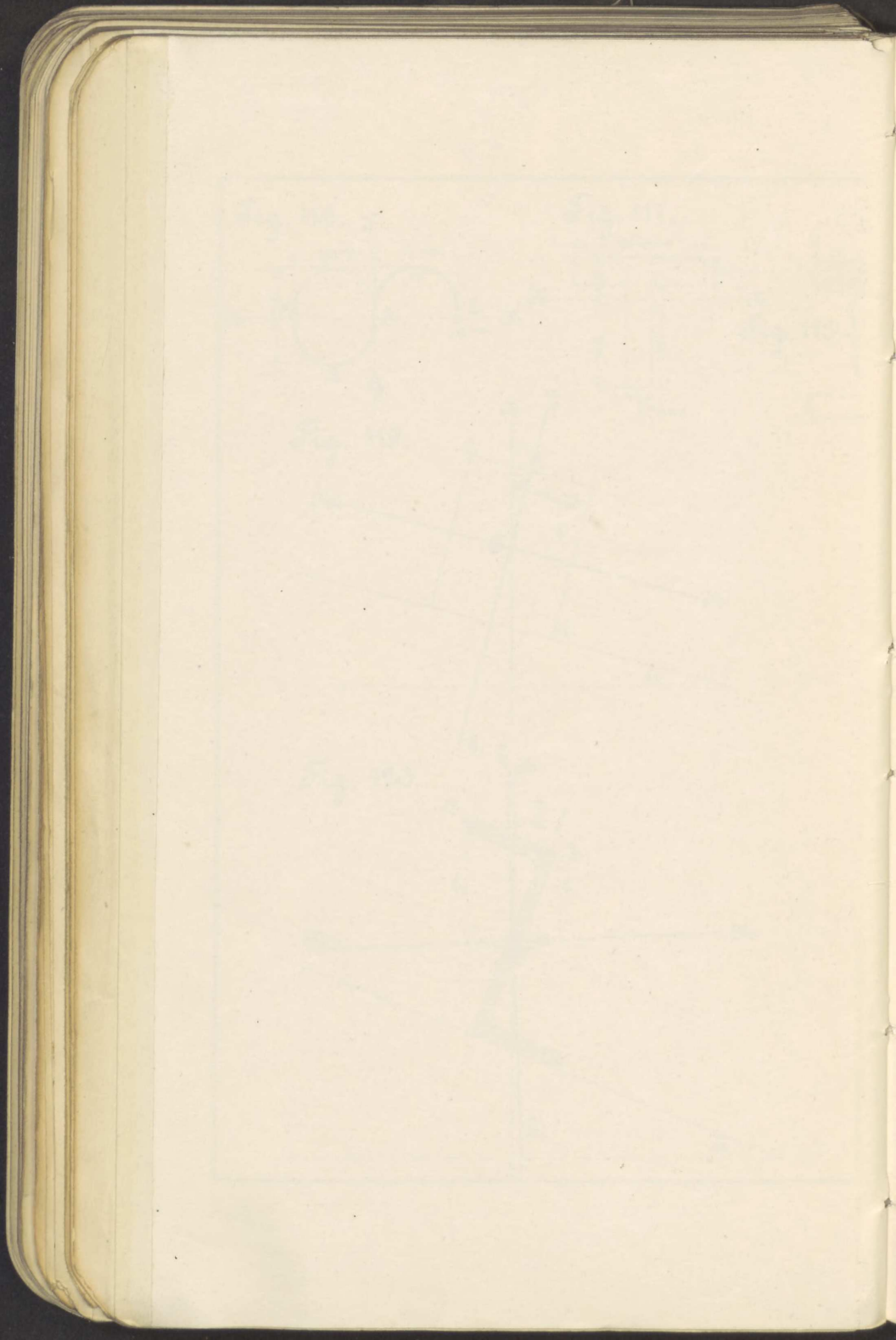


Fig. 136.



Kraftmaales to k for Fig. 139.







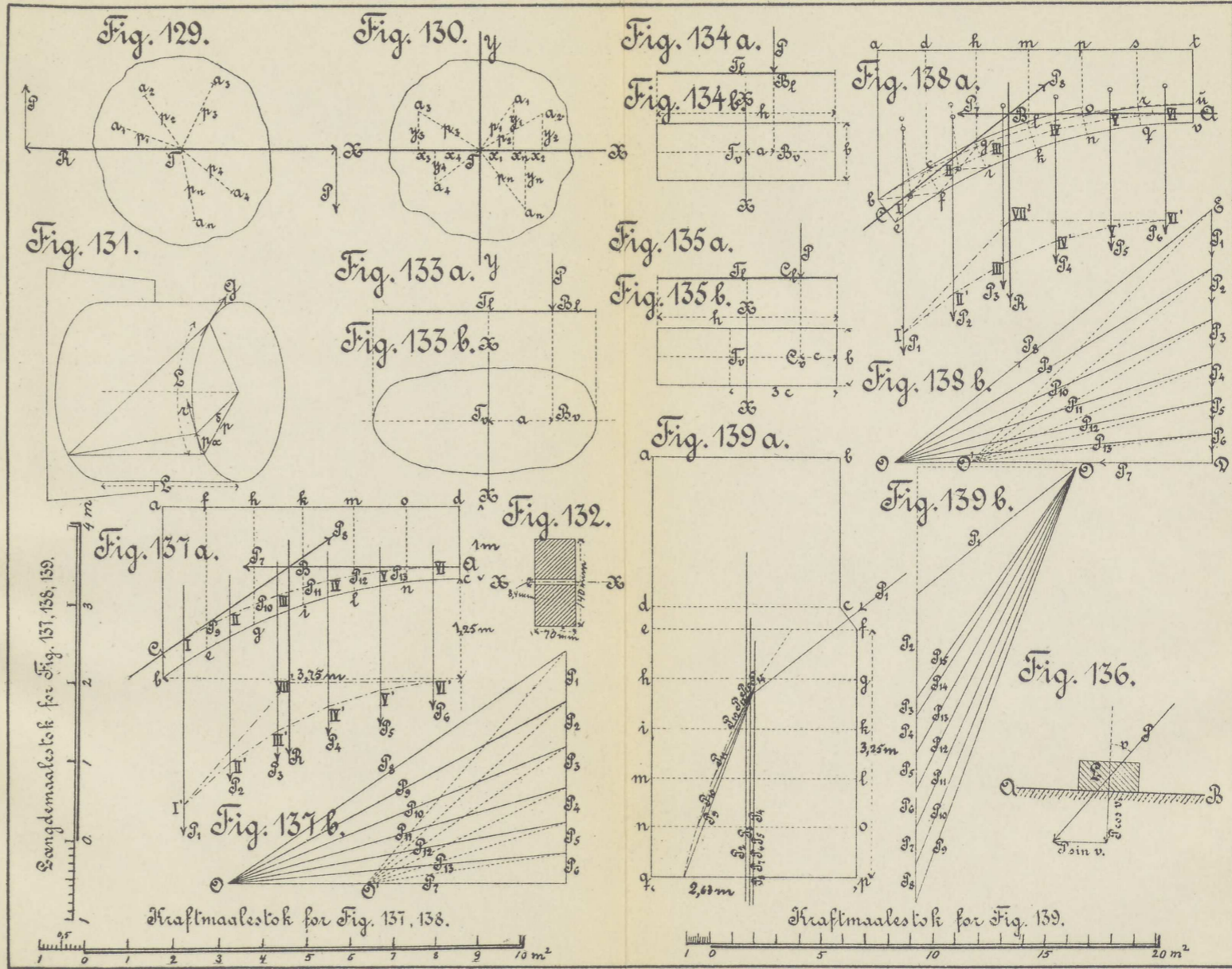
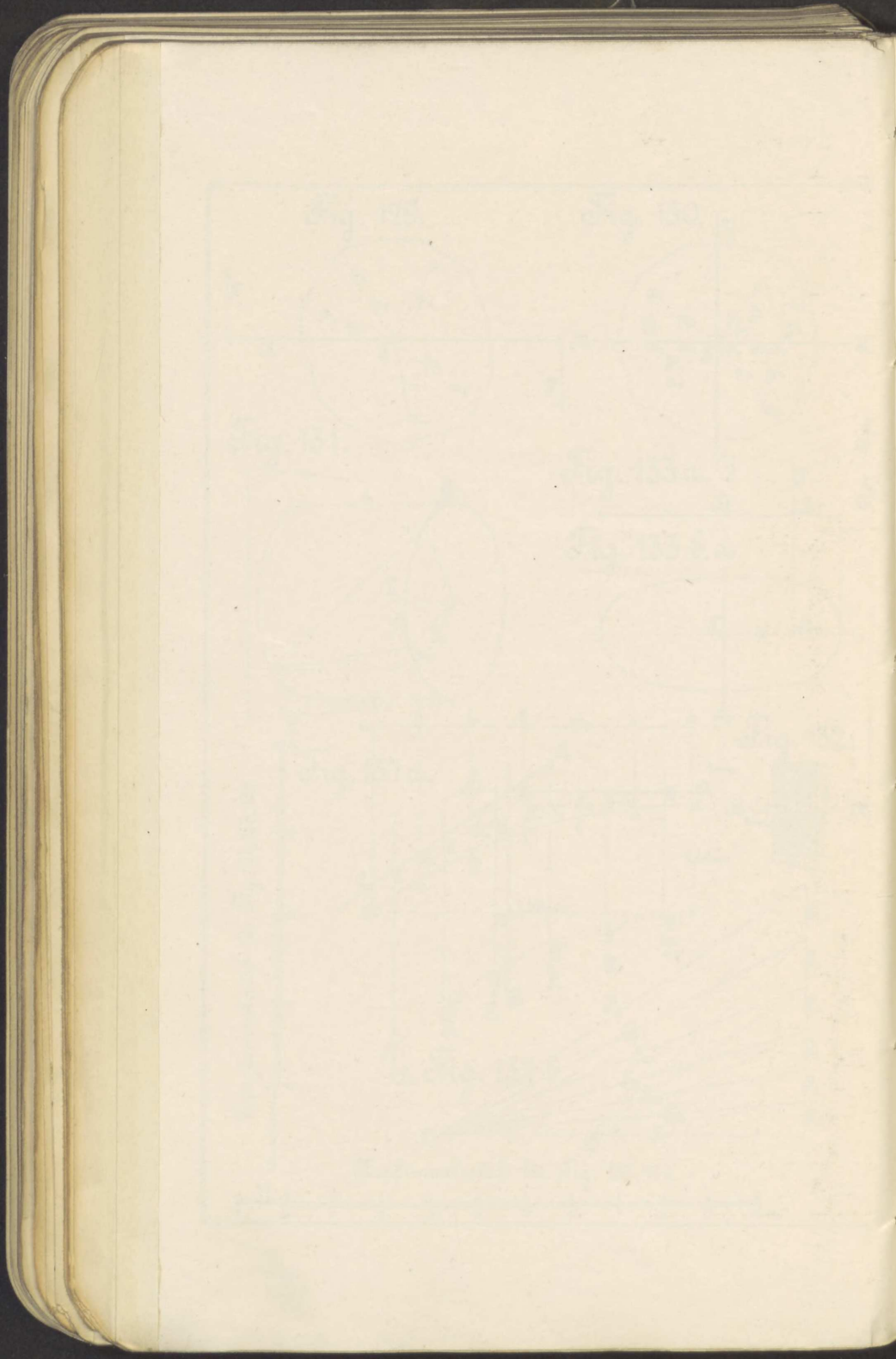


Fig. 129 - 139.





# Plan 16.

Fig. 142 a.

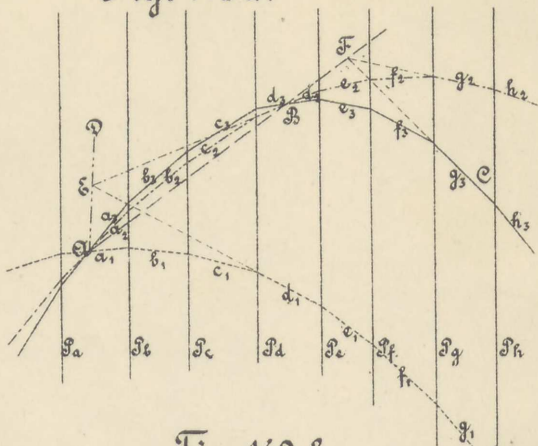


Fig. 145.

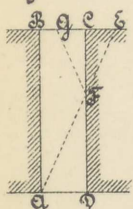


Fig. 142 b.

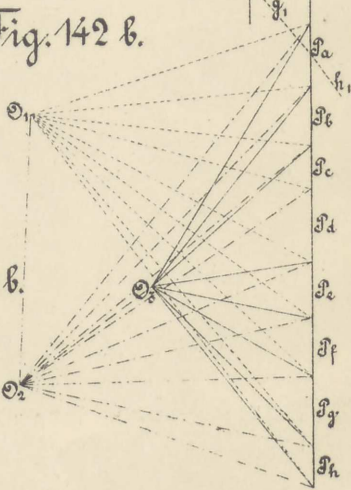


Fig. 146 a.

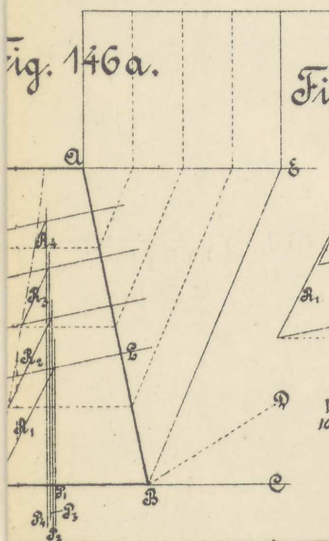
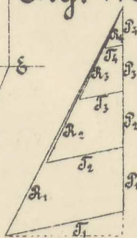
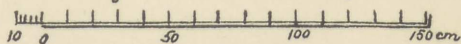


Fig. 146 b.



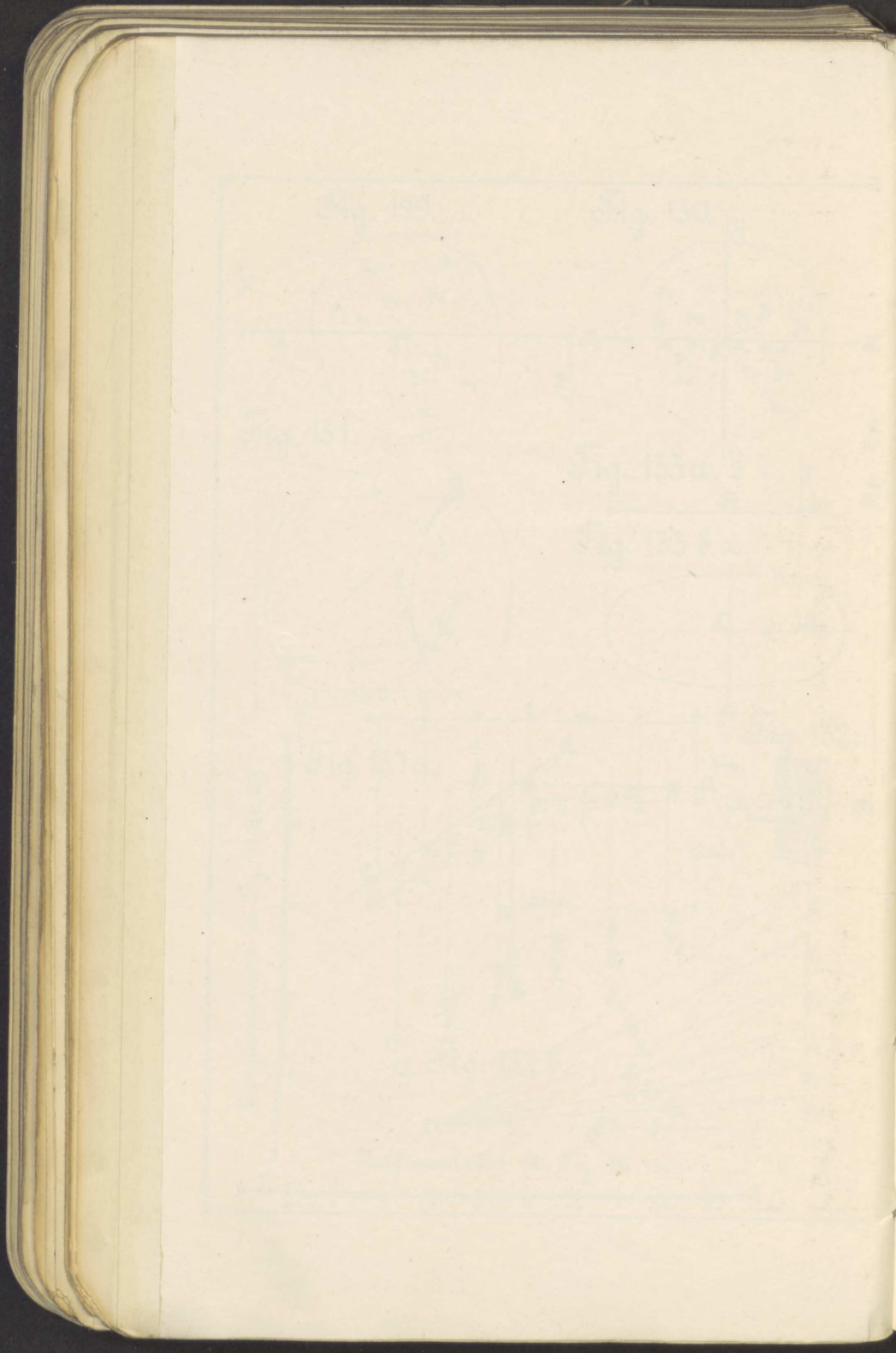
Længdemaalestok for Fig. 146.



Kraftmaalestok for Fig. 146.



Fig. 140 - 146.





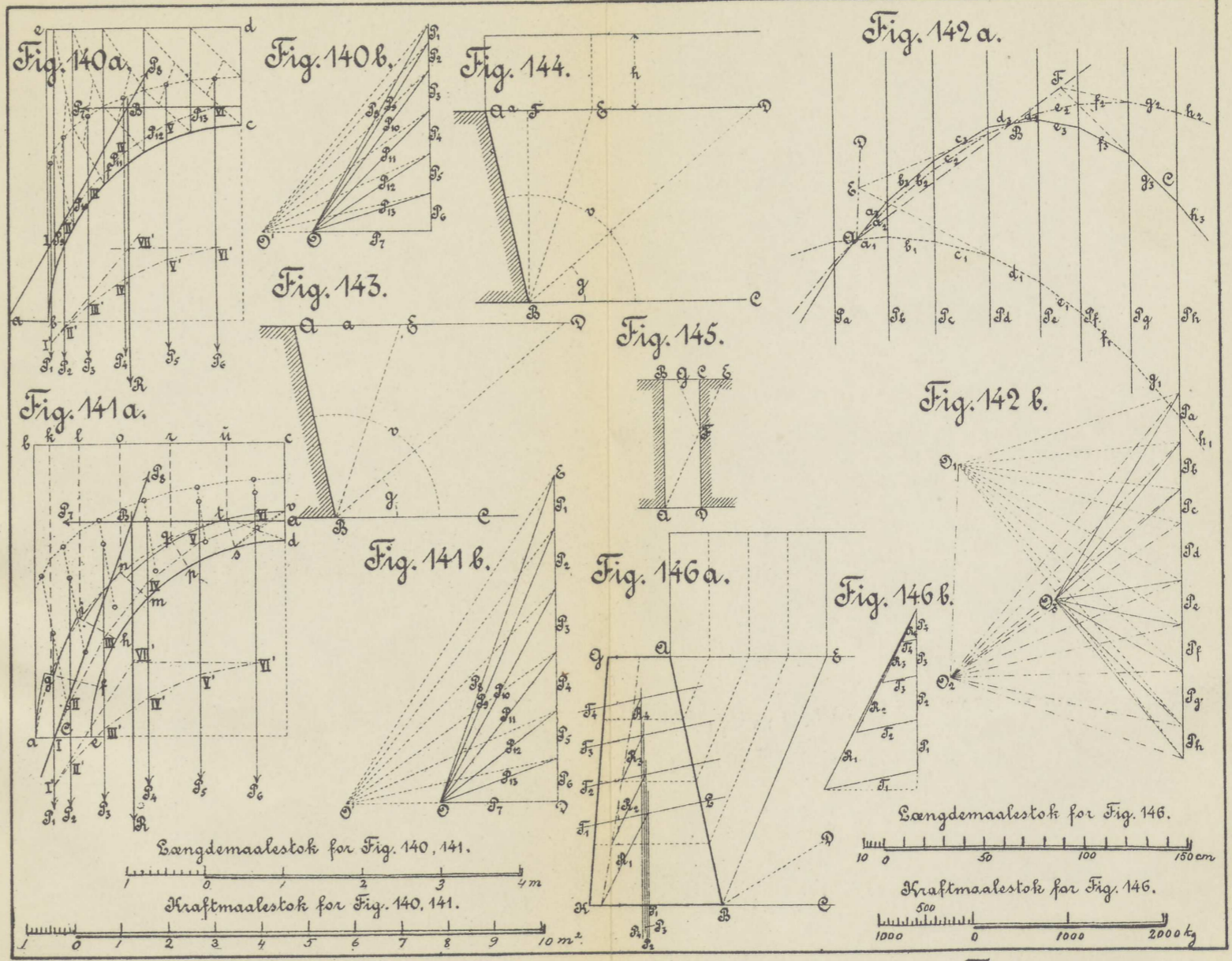


Fig. 140 - 146.

