DTU Bibliotek

Denne fil er downloadet fra

Danmarks Tekniske Kulturarv

www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på *www.tekniskkulturarv.dk/about*

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

517



517

TB Gl.
517 Boh
1918 Afsn. 3

DANMARKS
TEKNISKE BIBLIOTEK

Lærebog

i

Matematisk Analyse

3dje Afsnit

Af

Harald Bohr og Johannes Mollerup

Jul. Gjellerups Forlag — København
1918.

3die Afsnit.

Gransepocesser.

Indledning.

Vi skal i dette Afsnit gøre en udvidet Brug af Ordet „uendelig", idet vi skal beskæftige os med Begreber som Sum af uendelig mange Led, Produkt af uendelig mange Faktorer og Integral udstrakt over et uendelig stort Interval. Til disse Begreber kommer vi paa naturlig Maade ved Hjælp af Operationen Grænseovergang udføre de tilsvarende kendte Begreber: Sum af et endeligt Antal Led, Produkt af et endeligt Antal Faktorer og Integral udstrakt over et endeligt Interval. Vi skal her i Indledningen angive Definitionerne paa de vigtigste af de saaledes almindeliggjorte Begreber, som vi i dette Afsnit skal beskæftige os med; ved at stille disse Definitioner sammen opnaar vi, at den karakteristiske Lighed, der er imellem dem, træder tydeligt frem, og at det bliver klart, at det er den samme Ide, der ligger til Grund for dem alle. For at sikre Forstaaelsen af de nye Begreber og gøre Læseren fortrolig med dem skal vi imidlertid ikke nøjes med at anføre selve Definitionerne, men skal allerede her i Indledningen belyse dem ved karakteristiske Eksempler og ved kort at omtale nogle særlig simple og vigtige Sætninger om dem.

1. Uendelig Række. Ved en uendelig Række forstaas en uendelig Talfølge, hvor der mellem paa hinanden følgende Elementer er skrevet et Plus, altsaa et Udtryk af Formen

(1) $$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

Elementerne $u_1, u_2, \ldots$ kaldes Leddene i den uendelige Række. Ved det n^{te} Afsnit i den givne uendelige Række (1) forstaar man Summen af de n første Led i Rækken, altsaa Størrelsen

$$A_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n .$$

Vi skelner nu mellem to Tilfælde: 1) Er den af Afsnittene dannede Talfølge $A_1, A_2, A_3 \ldots$ konvergent, d. v. s. nærmer det n^{te} Afsnit A_n sig til en endelig og bestemt Grænseværdi A for $n \to \infty$, siger vi om den givne uendelige Række (1), at den er konvergent med Summen A, og skriver

$$A = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots .$$

2) Er derimod den af Afsnittene dannede Talfølge $A_1, A_2, \ldots$ divergent (ikke konvergent), d. v. s. nærmer A_n sig ikke til nogen endelig og bestemt Grænseværdi for $n \to \infty$, siger vi om den givne uendelige Række (1), at den er divergent og tillægger den ikke nogen bestemt Sum, d. v. s. opfatter den ikke som fremstillende et bestemt Tal.

Vi ser af denne Definition, at det at undersøge, hvorvidt en given uendelig Række er konvergent eller divergent, er fuldkommen ensbetydende med at afgøre Konvergens eller Divergens af en uendelig Talfølge, nemlig af den Talfølge, hvis Elementer simpelthen er Afsnittene i den givne uendelige Række.

Eks. For at afgøre Konvergens eller Divergens af Kvotientrækken

(2) $$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \cdots ,$$

hvor q er et vilkaarligt (reelt) Tal, betragter vi det n^{te} Afsnit

$$A_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

Er her $\underline{q \neq 1}$, er i Følge en bekendt Formel

$$A_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} .$$

Af dette Udtryk for Afsnittet A_n følger umiddelbart: 1) Er $|q| < 1$, vil $A_n \to \frac{1}{1-q}$ for $n \to \infty$ (fordi $q^n \to 0$). 2) Er $|q| > 1$, vil $|A_n| \to \infty$ for $n \to \infty$ (fordi $|q^n| \to \infty$). 3) Er $q = -1$, vil A_n være lig 0 for n lige, 1 for n ulige, saaledes at Talfølgen $A_1, A_2, \ldots A_n \ldots$ her (ligesom i det forrige Tilfælde) er divergent. Betragter vi endelig 4) Tilfældet $q = 1$, hvor alle Leddene q^n er 1, er her aabenbart $A_n = n$, altsaa $A_n \to \infty$ for $n \to \infty$. Sammenfatter vi disse Resultater, har vi fundet følgende Sætning: <u>Kvotientrækken (2) er konvergent for $|q| < 1$ med Summen $A = \frac{1}{1-q}$, medens den er divergent for $|q| \geq 1$.</u> Vi gør til Orientering opmærksom paa den forskellige „Art af Divergens", der finder Sted f. Eks. i Tilfældene $q = 1$ og $q = -1$; i det første af disse Tilfælde (hvor $q = +1$), vil $A_n \to \infty$ for $n \to \infty$, medens i det andet Tilfælde (hvor $q = -1$) Talfølgen $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ er begrænset, men uden at være konvergent, idet jo her A_n skiftevis er 0 og 1.

<u>Eks.</u> Betragter vi en Kvotientrække, hvori 1ste Led ikke (som i det foregaaende Eksempel) specielt er antaget at være 1, altsaa en uendelig Række af Formen

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

hvor a er et vilkaarligt Tal, finder vi (ordnet som før), at

hvis $\underline{a \neq 0}$, er Rækken konvergent for $|q|<1$ med Summen $\frac{a}{1-q}$, medens den er divergent for $|q| \geqq 1$. Er derimod specielt $\underline{a = 0}$, er Kvotientrækken konvergent for $\underline{\text{ethvert}}$ q med Summen 0, idet jo for ethvert fast q alle Rækkens Led (og følgelig ogsaa alle Rækkens Afsnit) er 0.

$\underline{\text{Eks.}}$ Som et Eksempel af speciel Karakter betragter vi den uendelige Række

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

Idet $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, finder vi umiddelbart det n^{te} Afsnit A_n bestemt ved

$$A_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

hvoraf straks følger, at $A_n \to 1$ for $n \to \infty$, altsaa at den givne uendelige Række er konvergent med Summen 1.

Lad den uendelige Række (1) være konvergent med Summen A; vi har da $A_n \to A$ for $n \to \infty$ og naturligvis ogsaa $A_{n-1} \to A$ for $n \to \infty$. Heraf følger, at

$$u_n = A_n - A_{n-1} \to A - A = 0 \qquad \text{for } n \to \infty.$$

Hermed er bevist, at det for enhver konvergent Række (1) gælder, at det n^{te} Led $u_n \to 0$ for $n \to \infty$, eller anderledes udtrykt: $\underline{\text{For at en uendelig Række (1) skal være konvergent, er det en nødvendig Betingelse, at}}$

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0.$$

Vi tilføjer straks, at denne (nødvendige) Betingelse ikke er en tilstrækkelig Betingelse for Konvergens, d. v. s. at der eksisterer uendelige Rækker, for hvilke $\lim u_n = 0$, men som dog ikke er konvergente. Som et yderst simpelt Eksempel paa en saadan Række nævner vi Rækken

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots ;$$

her er $\lim u_n = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, men Rækken er dog divergent, fordi

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to \infty .$$

Vi gaar nu over til at udlede en Betingelse, der er saavel nødvendig som tilstrækkelig for en Rækkes Konvergens; denne Betingelse maa følgelig indeholde Betingelsen $u_n \to 0$, men maa kræve mere, fordi $u_n \to 0$ jo kun var nødvendig men ikke tilstrækkelig. Den søgte Betingelse udleder vi umiddelbart udfra en kendt nødvendig og tilstrækkelig Betingelse for Konvergensen af en Talfølge, nemlig den Betingelse, vi indenfor Læren om Talfølger har kaldt det almindelige Konvergensprincip. Vi betragter den Talfølge, der bestaar af Ms-summerne i den givne uendelige Række (1), altsaa Talfølgen

$$A_1 = u_1, \; A_2 = u_1 + u_2, \; A_3 = u_1 + u_2 + u_3, \; \ldots .$$

I Følge det almindelige Konvergensprincip bestaar den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at denne Talfølge er konvergent (eller, hvad der jo kommer ud paa det samme; for at den uendelige Række (1) er konvergent) deri, at der til ethvert $\varepsilon > 0$ skal eksistere et tilsvarende helt positivt

Tal $N = N(\varepsilon)$, saaledes at Uligheden $|R_{n+p} - R_n| < \varepsilon$ er opfyldt for $n \geq N$ og ethvert p. Idet imidlertid

$$R_{n+p} - R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p},$$

har vi hermed bevist, at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at Rækken (1) er konvergent, bestaar deri, at der til ethvert (vilkaarligt lille) $\varepsilon > 0$, svarer et helt positivt Tal $N = N(\varepsilon)$, saaledes at Uligheden

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

gælder for $n \geq N$ og ethvert p; med andre Ord: den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for en uendelig Rækkes Konvergens er den, at Summen af en hvilkensomhelst Samling paa hinanden følgende Led $u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}$ skal være numerisk vilkaarlig lille, naar blot n er tilstrækkelig stor, d. v. s. naar vi er gaaet tilstrækkelig langt frem i Rækken.

Af den fundne nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for en Rækkes Konvergens fremgaar umiddelbart, at den Egenskab ved en uendelig Række at være konvergent ikke forandres selv om vi (paa vilkaarlig Maade) forandrer et hvilketsomhelst endeligt Antal Led i Rækken, f. Eks. naar vi sletter de første 1000 Led, eller tilføjer 1000 Led, eller erstatter de første 1000 Led med vilkaarlige andre Tal. — Rigtigheden af denne Bemærkning kan vi iøvrigt ogsaa umiddelbart udlede udfra selve Definitionen paa en Rækkes Konvergens. Lad os f. Eks. betragte den uendelige Række $u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots$, der fremkommer af en given uendelig Række $u_1 + u_2 + \cdots$ ved i denne at slette de N første Led; betegner

vi det $n$te Afsnit i den oprindelige Række $u_1 + u_2 + \cdots$ med S_n og det $n$te Afsnit i den nye Række $u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots$ med V_n (hvor altsaa $V_n = u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots u_{N+n}$), gælder det øjensynlig for ethvert n, at

$$V_n = S_{N+n} - S_N ,$$

hvoraf følger for $n \to \infty$ (idet $S_{N+n} \to S$), at $V_n \to S - S_N$, d. v. s. <u>den uendelige Række, der fremkommer af en given konvergent Række $u_1 + u_2 + \cdots$ ved i denne at slette de N første Led, er paany konvergent, og dens Sum er lig med Summen S af den givne Række minus det N^{te} Afsnit $S_N = u_1 + u_2 + \cdots + u_N$.</u> Dette Tal $S - S_N$ kaldes ofte <u>det til Afsnittet S_N hørende Restled i den givne uendelige Række $u_1 + u_2 + \cdots$</u> og betegnes med R_N. Af Formlen $R_N = S - S_N$ (eller $S = S_N + R_N$) følger umiddelbart, idet $S_N \to S$ for $N \to \infty$, <u>at Restleddet $R_N \to 0$ for $N \to \infty$.</u> Vi tilføjer til Orientering, at dersom den givne uendelige Række $u_1 + u_2 + \cdots$ er <u>divergent</u>, har det ingen Mening at tale om Restleddet R_N, idet jo her Rækken $u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots$ ligeledes er divergent og følgelig ikke fremstiller noget bestemt Tal.

<u>Eks.</u> Som et Eksempel paa Anvendelsen af den fundne (nødvendige og tilstrækkelige) Betingelse, vil vi bevise, <u>at den saakaldte „harmoniske" Række</u>

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n} + \cdots$$

<u>er divergent.</u> Vi har nemlig for <u>ethvert</u> n (og idet vi specielt vælger $p = n$), at

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} ;$$

men heraf følger jo straks, at den omhandlede Betingelse ikke er opfyldt. Vi tilføjer, at den harmoniske Række er et nyt Eksempel paa en uendelig Række, der er divergent, men hvori dog $u_n \to 0$ for $n \to \infty$.

Ved den senere ret udførlige Behandling af de uendelige Rækkers Teori skal vi undersøge, hvilke af de Regneregler, der gælder for Regning med endelige Rækker, d. v. s. Rækker, der kun indeholder et endeligt Antal Led, der kan udvides til ogsaa at gælde for uendelige Rækker, altsaa for Rækker med uendelig mange Led. Som det simplest mulige Eksempel paa en Sætning, der umiddelbart indses ligesaavel at gælde for Rækker med uendelig mange Led som for Rækker med et endeligt Antal Led, skal vi allerede her nævne, at hvis Rækken

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

er konvergent med Summen U, da er Rækken

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$$

hvor $v_n = -u_n$, ligeledes konvergent og med Summen $V = -U$; thi af $U_n = u_1 + \cdots + u_n \to U$ følger jo

$$V_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = -(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = -U_n \to -U.$$

Vi skal sluttelig nævne et Eksempel paa en Sætning om endelige Rækker, der (i Modsætning til den forrige) ikke paa simpel Maade kan almindeliggøres til at gælde for alle uendelige Rækker, nemlig Sætningen om, at Leddenes Orden

er ligegyldig. Vi skal nemlig senere se, at hvis

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

og

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$$

er to uendelige Rækker, der bestaar af de samme Led, men i en anden Orden (d. v. s. hvor $v_1 = u_{n_1}$, $v_2 = u_{n_2}$, $v_3 = u_{n_3}$, . . . , idet Talfølgen $n_1, n_2, n_3, \ldots$ er en eller anden Permutation af Talfølgen 1, 2, 3, . . .), da gælder det ikke altid, at hvis den ene af de to Rækker er konvergent, er den anden det ogsaa, ligesom det kan indtræffe, at begge de to Rækker er konvergente, men at de har forskellige Summer A og V. Vi skal senere komme udførligt ind paa dette Problem, og skal da bl. a. indenfor Omraadet af samtlige uendelige Rækker bestemme den Klasse af uendelige Rækker, for hvilke det gælder, at Leddenes Orden er ligegyldig, hvilke sidste Rækker netop paa Grund af denne Egenskab er særlig bekvemme at regne med og derfor særlig vigtige.

2. Uendeligt Produkt. Ved et uendelig Produkt forstaas en uendelig Talfølge, hvor der er sat Multiplikationstegn imellem paa hinanden følgende Elementer, altsaa et Udtryk af Formen

$$(3) \qquad a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot \cdots .$$

Ved det n^{te} Afsnit i det uendelige Produkt (3) forstaar vi Produktet af de n første Faktorer

$$A_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n .$$

Vi opstiller her følgende Definition: Det uendelige Produkt (3) siges at være konvergent med Værdien A, dersom den af Afsnittene dannede Talfølge

$$A_1 = a_1,\ A_2 = a_1 a_2,\ A_3 = a_1 a_2 a_3,\ \ldots$$

er konvergent med en Grænseværdi $A \neq 0$, altså dersom $A_n \to A \neq 0$ for $n \to \infty$. Er derimod den af Afsnittene dannede Talfølge divergent, eller er denne Talfølge konvergent med Grænseværdien 0, siger vi om det uendelige Produkt, at det er divergent, og tillægger det ikke nogen bestemt Værdi, d. v. s. opfatter det ikke som fremstillende noget bestemt Tal.

Vi tilføjer straks til Orientering, at Grunden til, at vi, for at Produktet (3) skal siges at være konvergent, har krævet ikke blot, at den af Afsnittene dannede Talfølge skal være konvergent, men yderligere, at Grænseværdien for denne Talfølge skal være $\neq 0$ (hvori naturligvis er indeholdt, at ingen af de enkelte Faktorer a_n er 0), hænger nøje sammen med, at vi da kan opstille følgende for Regning med uendelige Produkter fundamentale Sætning: Er det uendelige Produkt $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots$ konvergent med Værdien A, da er det uendelige Produkt $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \ldots$, hvor $b_n = \frac{1}{a_n}$, konvergent med Værdien $B = \frac{1}{A}$. Denne Sætning, hvis Rigtighed umiddelbart følger udfra ovenstaaende Definition, er det umiddelbare Analogon til den for uendelige Rækker gældende Sætning, at hvis den uendelige Række $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ er konvergent med Summen M, da er Rækken $(-u_1) + (-u_2) + (-u_3) + \ldots$ konvergent med Summen $-M$.

Ligesom vi for en uendelig Række (1) fandt, at $u_n \to 0$

var en nødvendig (men ikke tilstrækkelig) Betingelse for Konvergens, gælder det for et uendeligt Produkt (3), at $a_n \to 1$ er en nødvendig (men ikke tilstrækkelig) Betingelse for Konvergens; thi af $A_n \to A$ og $A_{n-1} \to A$, hvor $A \neq 0$, følger straks, at

$$a_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} \to \frac{A}{A} = 1 \qquad \text{for } n \to \infty.$$

Ved Undersøgelser over uendelige Produkter er det ofte bekvemt at kunne sige det n^{te} Element a_n skrevet paa Formen $1 + u_n$, altsaa det uendelige Produkt skrevet paa Formen

$$(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\ldots(1+u_n)\ldots.$$

Den foregaaende nødvendige Betingelse for Konvergens ($a_n \to 1$) udtrykkes da her ved $u_n \to 0$. Vi skal senere vise, hvorledes der bestaar en nøje Sammenhæng mellem de to i sig væsensforskellige Problemer: 1) at undersøge Konvergensen af det uendelige Produkt $(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\ldots$, og 2) at undersøge Konvergensen af den „tilsvarende" uendelige Række $u_1+u_2+u_3\ldots$. Vi betragter slutteligt nogle simple Eksempler paa uendelige Produkter.

Eks. Lad $a_1 \cdot a_2 \ldots a_n \ldots$ være et uendeligt Produkt, om hvilket det er givet, at alle Faktorerne a_n fra et vist Trin af (d. v. s. for $n > N$) opfylder Uligheden $|a_n| < k$, hvor k er en positiv Konstant < 1. Idet det jo her ikke gælder, at $a_n \to 1$ for $n \to \infty$, er Produktet divergent. Vi vil bevise, at dets Divergens er af den Art, at Afsnittet $A_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \to 0$ for $n \to \infty$. Dette følger umiddelbart ud fra den for $n > N$ gældende Ulighed

$$|A_m| = |a_1 \cdot a_2 \ldots a_m| < |a_1 \cdot a_2 \ldots a_N| \cdot k^{m-N} = c \cdot k^m,$$

hvor $c = |a_1 \cdot a_2 \ldots a_N| \cdot k^{-N}$ er en Konstant, d. v. s. er uafhængig af n; thi idet $ck^n \to 0$ for $n \to \infty$, viser jo denne Ulighed, at $|A_n| \to 0$ for $n \to \infty$. Som et specielt Tilfælde af den herved beviste Sætning nævner vi, at dersom det for det uendelige Produkt $a_1 \cdot a_2 \ldots a_n \ldots$ gælder, at $a_n \to 0$ for $n \to \infty$, vil ogsaa det n^{te} Afsnit $A_n \to 0$ for $n \to \infty$.

Eks. Lad $a_1 \cdot a_2 \ldots a_n \ldots$ være et uendeligt Produkt, hvis Faktorer alle er $\neq 0$, og om hvilket det er givet, at alle Faktorerne a_n fra et vist Trin af (d. v. s. for $n > N$) opfylder Uligheden $|a_n| > K$, hvor K er en positiv Konstant > 1. Idet det jo her ikke gælder, at $a_n \to 1$ for $n \to \infty$, er Produktet divergent. Vi vil bevise, at dets Divergens er af den Art, at Afsnittet $A_n = a_1 \cdot a_2 \ldots a_n$ opfylder Betingelsen $|A_n| \to \infty$ for $n \to \infty$. Dette følger umiddelbart ud fra den for $n > N$ gældende Ulighed

$$|A_n| = |a_1 \cdot a_2 \ldots a_n| > |a_1 \cdot a_2 \ldots a_N| \cdot K^{n-N} = c \cdot K^n,$$

hvor $c = |a_1 \cdot a_2 \ldots a_N| \cdot K^{-N}$ er en Konstant, d. v. s. er uafhængig af n; thi idet $cK^n \to \infty$ for $n \to \infty$, viser denne Ulighed jo, at $|A_n| \to \infty$ for $n \to \infty$. Som et specielt Tilfælde af den herved beviste Sætning nævner vi, at dersom det for et uendeligt Produkt $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, hvori ingen af Faktorerne er 0, gælder, at $|a_n| \to \infty$ for $n \to \infty$, vil ogsaa $|A_n| = |a_1 \ldots a_n| \to \infty$ for $n \to \infty$. Vi tilføjer til Orientering, at Resultaterne i dette sidste Eksempel naturligvis umiddelbart kunde være udledt udfra Resultaterne i det forrige Eksempel, ved blot i Stedet for det givne Produkt $a_1 \cdot a_2 \ldots a_n \ldots$ at betragte Produktet $\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \ldots \frac{1}{a_n} \ldots$

Eks. I det uendelige Produkt

$$(1+1)\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\left(1+\tfrac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\ldots$$

er det n^te Afsnit A_n bestemt ved

$$A_n = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\ldots\frac{n+1}{n} = n+1.$$

Vi har følgelig $A_n \to \infty$, d. v. s. Produktet er divergent.
Eks. I det uendelige Produkt

$$\left(1-\tfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\tfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\tfrac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\ldots$$

er det n^te Afsnit bestemt ved

$$A_n = \frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\ldots\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = \frac{3\cdot 1}{2^2}\cdot\frac{4\cdot 2}{3^2}\cdot\frac{5\cdot 3}{4^2}\ldots\frac{(n+2)\cdot n}{(n+1)^2}$$

altsaa

$$A_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot 5^2\ldots(n-1)^2 n^2\cdot(n+1)(n+2)}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2\ldots(n-1)^2 n^2\cdot(n+1)^2} = \frac{1\cdot(n+2)}{2(n+1)} = \frac{1+\frac{1}{n+1}}{2}.$$

Vi har følgelig $A_n \to \frac{1}{2}$ $(\neq 0)$ for $n \to \infty$, d. v. s. det uendelige Produkt er konvergent med Værdien $\frac{1}{2}$.

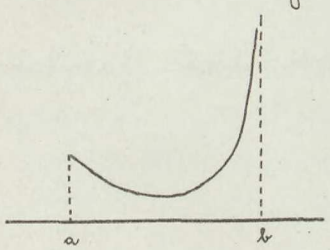
3. Ubegrænset Integrale. Lad $f(x)$ være kontinuert i det til højre aabne Interval $a \leqq x < b$ samt have en hævelig Diskontinuitet i Endepunktet b, d. v. s. lad $f(x)$ nærme sig til en endelig og bestemt Grænseværdi $f(b-)$ for $x \to b$. For en saadan Funktion $f(x)$ har vi i 2^det Afsnit 95 definieret det bestemte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$, nemlig ved Ligningen

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx,$$

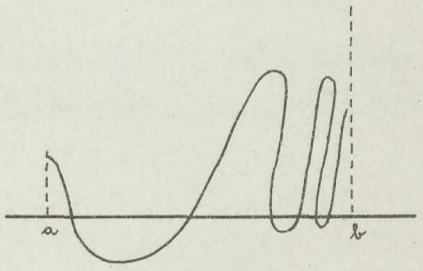
hvor $g(x)$ er den i det lukkede Interval $a \leqq x \leqq b$ kontinuerte Funktion, der er bestemt ved $g(x) = f(x)$ for $a \leqq x < b$ og $g(b) = f(b-)$. Vi beviste endvidere i 95, at for en saadan Funktion $f(x)$ var Integralet $\int_a^\xi f(x)\,dx$ en kontinuert Funktion af ξ i det lukkede Interval $a \leqq \xi \leqq b$, altsaa specielt kontinuert fra venstre Side i Endepunktet b, d. v. s. $\int_a^\xi f(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$ for $\xi \to b$. Heraf følger, at den ovennævnte Definition af Integralet $\int_a^b f(x)\,dx$ ojensynlig ogsaa kunde have været formet saaledes: Lad $f(x)$ være kontinuert i det til højre aabne Interval $a \leqq x < b$, og lad $f(x)$ nærme sig til en endelig og bestemt Grænseværdi for $x \to b$. Da vil det bestemte Integral $F(\xi) = \int_a^\xi f(x)\,dx$, hvor $a < \xi < b$, nærme sig til en endelig og bestemt Grænseværdi A for $\xi \to b$, hvilken Grænseværdi A betegnes med $\int_a^b f(x)\,dx$.

Udfra denne sidste Form for Definitionen af $\int_a^b f(x)\,dx$ i det Tilfælde, hvor $f(x)$ har en havelig Diskontinuitet i højre Endepunkt b, føres vi naturligt til følgende almindeligere Definition, hvorved foretages en yderligere Udvidelse af Begrebet bestemt Integral: Lad $f(x)$ være kontinuert i det til højre aabne Interval $a \leqq x < b$, medens vi (i Modsætning til før) intet forudsætter om, hvorvidt $f(x)$ nærmer sig til en endelig og bestemt Grænseværdi eller ej for $x \to b$ (d. v. s. $f(x)$ kan f. Eks. $\to \infty$ for $x \to b$ (som paa Fig. 1) eller $f(x)$ behøver hverken at nærme sig til en endelig Grænseværdi eller at gaa mod ∞ (som antydet paa Fig. 2)). Vi betragter nu „Afsnittet" $F(\xi) = \int_a^\xi f(x)\,dx$, hvor $a < \xi < b$, og skelner mellem to forskellige Tilfælde. [1]) Nærmer Afsnittet $F(\xi)$

sig til en endelig og bestemt Grænseværdi A for $\xi \to b$, siger vi om Integralet $\int_a^b f(x)\,dx$, at det er konvergent med Værdien A og skriver $\int_a^b f(x)\,dx = A$. [2] Nærmer Arealet $F(\xi)$ sig derimod ikke til nogen endelig bestemt Grænseværdi A for $\xi \to b$, siger vi om Integralet $\int_a^b f(x)\,dx$, at det er divergent, og tillægger det ikke nogen bestemt Værdi, d. v. s. opfatter det ikke som fremstillende noget bestemt Tal.



(Fig. 1).



(Fig. 2).

Eks. For den i det til højre aabne Interval $0 \leqq x < 1$ kontinuerte Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (for hvilken $f(x) \to \infty$ for $x \to 1$) er Arealet $F(\xi) = \int_0^\xi f(x)\,dx$ $(0 < \xi < 1)$ bestemt ved

$$F(\xi) = \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\operatorname{Arcsin} x]_0^\xi = \operatorname{Arcsin} \xi .$$

Heraf følger straks, at $F(\xi) \to \frac{\pi}{2}$ for $x \to 1$, d. v. s. at Integralet $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ er konvergent med Værdien $\frac{\pi}{2}$.

Eks. Som et Eksempel af alminndeligere Karakter vil vi betragte den i det til højre aabne Interval $a \leqq x < b$ kontinuerte Funktion $f(x) = \frac{1}{(b-x)^m}$. Her er for $m \neq 1$ Arealet $F(\xi) = \int_a^\xi f(x)\,dx$ $(a < \xi < b)$ bestemt ved

$$F(\xi) = \int_a^\xi \frac{dx}{(b-x)^m} = -\left[\frac{(b-x)^{-m+1}}{-m+1}\right]_a^\xi = \frac{1}{1-m}\,(b-a)^{1-m} - \frac{1}{1-m}\,(b-\xi)^{1-m} \quad ;$$

heraf følger straks, at for $n < 1$ er Integralet $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$ konvergent med Værdien $\frac{1}{1-n}(b-a)^{1-n}$ (idet jo her $(b-\xi)^{1-n} \to 0$ og følgelig $F(\xi) \to \frac{1}{1-n}(b-a)^{1-n}$ for $\xi \to b$), medens Integralet er divergent for $n > 1$ (idet jo her $(b-\xi)^{1-n}$ og dermed $F(\xi) \to \infty$ for $\xi \to b$). Betragter vi sluttelig Tilfældet $n = 1$, finder vi, idet

$$F(\xi) = \int_a^\xi \frac{dx}{b-x} = \left[-l\cdot(b-x)\right]_a^\xi = l\cdot(b-a) - l\cdot(b-\xi) \to \infty \quad (\text{for } \xi \to b),$$

at Integralet er divergent. — Vi har altsaa fundet det rigtige Resultat, at Integralet

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$$

er konvergent for $n < 1$, divergent for $n \geqq 1$.

Paa fuldkommen samme Maade som i det foregaaende Tilfælde definerer vi naturligvis Begreberne Konvergens og Divergens for et Integral $\int_a^b f(x)\,dx$, hvor $f(x)$ er kontinuert i det lil venstre aabne Interval $a < x \leqq b$. Vi betragter Afsnittet $F(\xi) = \int_\xi^b f(x)\,dx$, hvor $a < \xi < b$, og kalder $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent med Værdien A, dersom Afsnittet $F(\xi)$ nærmer sig til en endelig og bestemt Grænseværdi A for $a \leftarrow \xi$, medens vi kalder Integralet divergent og ikke opfatter det som fremstillende noget bestemt Tal, dersom Afsnittet $F(\xi)$ ikke nærmer sig til nogen endelig og bestemt Grænseværdi for $a \leftarrow \xi$.

Eks. For den i det lil venstre aabne Interval $a < x \leqq b$ kontinuerte Funktion $f(x) = \frac{1}{(x-a)^n}$ er for $n \neq 1$ Afsnittet $F(\xi) = \int_\xi^b f(x)\,dx$ $(a < \xi < b)$ bestemt ved

$$F(\xi) = \int_\xi^b \frac{dx}{(x-a)^n} = \left[\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}\right]_\xi^b = \frac{1}{1-n}(b-a)^{1-n} - \frac{1}{1-n}(\xi-a)^{1-n};$$

heraf følger, at for $n < 1$ er $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$ konvergent med Værdien $\frac{1}{1-n}(b-a)^{1-n}$ (idet jo her $(\xi-a)^{1-n} \to 0$ og følgelig $F(\xi) \to \frac{1}{1-n}(b-a)^{1-n}$ for $a \leftarrow \xi$), medens Integralet er divergent for $n > 1$ (idet her $(\xi-a)^{1-n}$ og dermed $F(\xi) \to \infty$ for $a \leftarrow \xi$). Betragter vi sluttelig Tilfældet $n = 1$, finder vi, idet

$$F(\xi) = \int_\xi^b \frac{dx}{x-a} = \left[l.(x-a)\right]_\xi^b = l.(b-a) - l.(\xi-a) \to \infty \qquad (\text{for } a \leftarrow \xi),$$

at Integralet er divergent. Vi har altså (ganske som ved det foregaaende, fuldkommen analoge Eksempel $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$) fundet det rigtige Resultat, at Integralet

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$$

er konvergent for $n < 1$, divergent for $n \geqq 1$

Idfra de to foregaaende Definitioner er det klart, hvorledes man skal behandle et Integral $\int_a^b f(x)\,dx$, hvor der er „noget i Vejen" i begge Endepunkter a og b, d. v. s. hvor $f(x)$ er kontinuert i det aabne Interval $a < x < b$, medens vi intet forudsætter om Funktionens Forhold for $x \to b$ og $a \leftarrow x$. Vi betragter her „Afsnittet" $\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx$, hvor $a < \xi_1 < \xi_2 < b$, og kalder Integralet $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent med Værdien A, dersom dette Afsnit nærmer sig til en endelig og bestemt Grænseværdi A for $a \leftarrow \xi_1$ og $\xi_2 \to b$, altså dersom $\int_{a+\varepsilon}^{b-\delta} f(x)\,dx \to A$, naar de positive Tal ε og δ (uafhængig af hinanden) gaar mod 0, medens vi kalder $\int_a^b f(x)\,dx$ divergent og ikke tillægger det nogen bestemt Værdi, dersom Afsnittet $\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx$ ikke nærmer sig til nogen endelig Grænseværdi for $a \leftarrow \xi_1$ og $\xi_2 \to b$. [Vi tilføjer til Orientering, at vi naturligvis ogsaa umiddelbart kunde have fort denne Definition tillige til de to foregaaende

ved at indskyde et (vilkaarlig valgt) Tal c mellem a og b, og da fastsætte, at $\int_a^b f(x)\,dx$ da og kun da skal siges at være konvergent med Værdien $A = A_1 + A_2$, dersom ethvert af de to Integraler $\int_a^c f(x)\,dx$ og $\int_c^b f(x)\,dx$ er konvergent med henholdsvis Værdierne A_1 og A_2].

Vi kan nu umiddelbart behandle et Integral $\int_a^b f(x)\,dx$, hvori Funktionen $f(x)$ er defineret og kontinuert i hele Intervallet (a,b) med Undtagelse af et endeligt Antal Punkter, hvoriblandt et eller begge Endepunkter kan befinde sig; antager vi f. Eks. at $f(x)$ er kontinuert i hele Intervallet $a \leqq x \leqq b$ med Undtagelse af Endepunktet a og to Punkter c_1 og $c_2 > c_1$ i det Indre af Intervallet (altsaa at $f(x)$ er defineret og kontinuert i ethvert af Intervallerne $a < x < c_1$, $c_1 < x < c_2$, $c_2 < x \leqq b$), fastsætter vi ved Definition, at $\int_a^b f(x)\,dx$ da og kun da skal siges at være konvergent (d. v. s. skal opfattes som fremstillende et bestemt Tal), naar ethvert af Integralerne $\int_a^{c_1} f(x)\,dx$, $\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx$, $\int_{c_2}^b f(x)\,dx$ er konvergent, og at Integralets Værdi i dette Tilfælde skal være bestemt ved Ligningen

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^b f(x)\,dx .$$

Vi tilføjer, at hvis Integralet $\int_a^b f(x)\,dx$ er konvergent, kan vi ejensynlig for ethvert X i Intervallet $a \leqq X \leqq b$ tale om Værdien af Integralet $\int_a^X f(x)\,dx$ (d. v. s. dette sidste Integral vil være konvergent for ethvert saadant X), og den ved $\int_a^X f(x)\,dx$ fremstillede Funktion $F(X)$ vil være kontinuert i hele Intervallet $a \leqq X \leqq b$ (hvorimod den i Almindelighed ikke vil være differentiabel i Diskontinuitetspunkterne for $f(x)$).

Eks. $\int_{-1}^{+1} x^{-\frac{2}{3}}\,dx$. Den under Integraltegnet staaende Funktion $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$ er defineret og kontinuert i hele Intervallet $-1 \leqq x \leqq 1$

med Undtagelse af Punktet 0. Idet (i Følge tidligere Eksempler) ethvert af de to Integraler $\int_{-1}^{0} x^{-\frac{2}{3}}\,dx$ og $\int_{0}^{1} x^{-\frac{2}{3}}\,dx$ er konvergent, er det foreliggende Integral $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ selv konvergent, og dets Værdi er bestemt ved

$$\int_{-1}^{1} x^{-\frac{2}{3}}dx = \int_{-1}^{0} x^{-\frac{2}{3}}\,dx + \int_{0}^{1} x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \left[3x^{\frac{1}{3}}\right]_{x=-1}^{x\to 0} + \left[3x^{\frac{1}{3}}\right]_{0\leftarrow x}^{x=1} = 3+3 = 6.$$

Eks. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$. Idet den under Integraltegnet staaende Funktion $f(x)=\frac{1}{x}$ er defineret og kontinuert i hele Intervallet $-1 \leqq x \leqq 1$ med Undtagelse af Punktet 0, skal vi betragte ethvert af de to Integraler $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x}$ og $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x}$ for sig. Disse Integraler er ikke begge konvergente (de er iøvrigt begge divergente), og følgelig er det foreliggende Integral $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ selv divergent.

Vi har i det foregaaende udvidet Begrebet bestemt Integral, idet vi ogsaa har tillagt et Integral $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ en Værdi i visse Tilfælde, hvor den under Integraltegnet staaende Funktion $f(x)$ var diskontinuert (eller ikke var defineret) i visse Punkter af Intervallet $a \leqq x \leqq b$. Vi gaar nu over til at foretage en noget andetartet Udvidelse af Begrebet bestemt Integral, idet vi ogsaa vil tillægge et Integral $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ en bestemt Værdi i visse Tilfælde, hvor Integrationsintervallet (a,b) er uendelig stort, d. v. s. enten er et Interval $a \leqq x < \infty$, der strækker sig i det Uendelige til højre Side, eller et Interval $-\infty < x \leqq b$, der strækker sig i det Uendelige til venstre Side, eller endelig er Intervallet $-\infty < x < \infty$, der strækker sig i det Uendelige til begge Sider. Vi skal nøjes med at betragte det første af disse Tilfælde, hvor det drejer sig om et Interval $a \leqq x < \infty$, idet de to andre Tilfælde ($-\infty < x \leqq b$ og $-\infty < x < \infty$) behandles paa fuldkommen tilsvarende Maade. Lad $f(x)$ være en i Inter-

vallet $a \leqq x < \infty$ (d. v. s. for $x \geqq a$) kontinuert Funktion. Vi betragter „Afsnittet" $F(\xi) = \int_a^\xi f(x)\,dx$, hvor $\xi > a$, og skelner mellem følgende to Tilfælde: 1) Dersom dette Afsnit $F(\xi)$ nærmer sig til en endelig og bestemt Grænseværdi A for $\xi \to \infty$, siger vi om Integralet $\int_a^\infty f(x)\,dx$, at det er konvergent med Værdien A og skriver $\int_a^\infty f(x)\,dx = A$. 2) Dersom Afsnittet $F(\xi) = \int_a^\xi f(x)\,dx$ ikke nærmer sig til nogen endelig bestemt Grænseværdi for $\xi \to \infty$, siger vi om Integralet $\int_a^\infty f(x)\,dx$, at det er divergent og tillægger det ikke nogen bestemt Værdi, d. v. s. opfatter det ikke som fremstillende noget bestemt Tal.

Eks. For at afgjøre Konvergens eller Divergens af Integralet $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ betragter vi Afsnittet

$$F(\xi) = \int_0^\xi \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{Arctg} x]_0^\xi = \operatorname{Arctg} \xi .$$

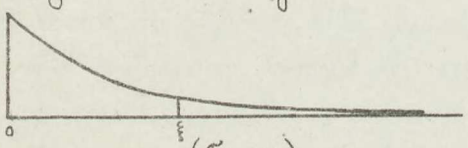
Idet $F(\xi) = \operatorname{Arctg} \xi \to \frac{\pi}{2}$ for $\xi \to \infty$, er $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ konvergent med Værdien $\frac{\pi}{2}$. Paa fuldkommen samme Maade finder vi, at $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$ er konvergent med Værdien $\frac{\pi}{2}$, idet Afsnittet

$$F(\xi) = \int_\xi^0 \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{Arctg} x]_\xi^0 = -\operatorname{Arctg} \xi \to -(-\tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{\pi}{2} \text{ for } -\infty \leftarrow \xi .$$

Eks. $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ har Afsnittet

$$F(\xi) = \int_0^\xi e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^\xi = 1 - e^{-\xi} .$$

Vi finder heraf $F(\xi) = 1 - e^{-\xi} \to 1$ for $\xi \to \infty$, altsaa $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$. Idet Afsnittet $F(\xi) = \int_0^\xi e^{-x}\,dx$ angiver det Areal (se Fig. 3), der begrænses af Kurven $y = e^{-x}$, Abscisseaksen $y = 0$ og Linierne $x = 0$



(Fig. 3).

og $x = \xi$, udsiger det fundne Resultat: $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$ anskueliggjort i geometrisk Formulering, at det mørkte Areal $F(\xi)$ nærmer sig til Grænseværdien 1 for $\xi \to \infty$. Man udtrykker sædvanligvis dette ved at sige, at det i det uendelige gaaende Område, der begrænses af Kurven $y = e^{-x}$, Abscisseaksen og Linien $x = 0$, har et bestemt Areal, nemlig Arealet 1.

Eks. Som et almindeligere Eksempel vil vi betragte Integralet $\int_a^\infty \frac{dx}{x^n}$, hvor a er et positivt Tal og n et vilkaarligt Tal. Vi betragter Afsnittet $F(\xi) = \int_a^\xi \frac{dx}{x^n}$ og finder for $n \neq 1$

$$F(\xi) = \int_a^\xi \frac{dx}{x^n} = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_a^\xi = \frac{\xi^{-n+1}}{-n+1} + \frac{a^{-n+1}}{n-1},$$

hvoraf straks følger, at $\int_a^\infty \frac{dx}{x^n}$ er konvergent for $n > 1$ med Værdien $\frac{1}{(n-1)\,a^{n-1}}$ (idet her $\xi^{-n+1} \to 0$ for $\xi \to \infty$), medens Integralet er divergent for $n < 1$ (fordi her $\xi^{-n+1} \to \infty$ for $\xi \to \infty$). I Tilfældet $n = 1$ finder vi

$$F(\xi) = \int_a^\xi \frac{dx}{x} = [l \cdot x]_a^\xi = l \cdot \xi - l \cdot a \to \infty \quad \text{for } \xi \to \infty,$$

d. v. s. Integralet er her divergent. Vi har hermed bevist den rigtige Sætning, at $\int_a^\infty \frac{dx}{x^n}$ er konvergent for $n > 1$ med Værdien $\frac{1}{(n-1)\,a^{n-1}}$, divergent for $n \leqq 1$. I geometrisk Formulering udsiger denne Sætning, at for $n > 1$ har det i det Uendelige gaaende Område, der begrænses af Kurven $y = \frac{1}{x^n}$, Abscisseaksen (Asymptoten) $y = 0$ og Linien $x = a$, et bestemt Areal, nemlig Arealet $\frac{1}{(n-1)\,a^{n-1}}$, medens dette Område for $n \leqq 1$ ikke har noget bestemt Areal (eller, som man undertiden siger, har Arealet $+\infty$, fordi $F(\xi)$ her $\to \infty$ for $\xi \to \infty$).

Om et bestemt Integral $\int_a^b f(x)\,dx$, der tilhører en af de Typer, vi har behandlet i de foregaaende Definitioner (d. v. s.

hvor enten Funktionen $f(x)$ har Diskontinuiteter i Punkter af Intervallet $a \leqq x \leqq b$, eller hvor Intervallet (a,b) strækker sig i det Uendelige til en eller begge Sider) benytter man undertiden Betegnelsen et „egentligt" Integral, idet man da forbeholder Betegnelsen: et „egentligt" Integral til de (oprindelig definerede) bestemte Integraler $\int_a^b f(x)\,dx$, hvor Integrationsintervallet (a,b) er endeligt og Funktionen $f(x)$ kontinuert i hele det lukkede Interval $a \leqq x \leqq b$.

Vi afslutter Indledningen med i næste Paragraf at udlede en nødvendig og tilstrækkelig Betingelse for Konvergensen af et egentligt Integral, nemlig en Betingelse, der fuldstændig svarer til den i 1 fundne nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for Konvergensen af en uendelig Række. Inden vi imidlertid kan udlede denne Betingelse, maa vi først opstille det saakaldte almindelige Konvergensprincip for Funktioner, hvilket Princip fuldstændig svarer til det i Indledningen til 2det Afsnit fundne almindelige Konvergensprincip for Talfølger.

4. Det almindelige Konvergensprincip for Funktioner. Svarende til det almindelige Konvergensprincip for en Talfølge $a_1, a_2, \ldots a_m, \ldots$, der jo udsiger, at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at Talfølgen er konvergent, bestaar deri, at dens Elementer afviger vilkaarlig lidt fra hinanden, naar vi er gaaet tilstrækkelig langt frem i Følgen, d. v. s. at $|a_m - a_n| < \varepsilon$ for m og $n > N = N(\varepsilon)$, gælder der følgende Sætning om Grænseovergang for Funktioner af en kontinuert Variabel, hvilken Sætning vi vil kalde det almindelige Konvergensprincip for en Grænseovergang $x \to b$.

Lad $F(x)$ være defineret i en vis Omegn til venstre for et Tal b, d. v. s. i et Interval $b - H < x < b$. Da bestaar den

nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at $F(x)$ nærmer sig til en endelig og bestemt Grænseværdi for $x \to b$, deri, at Funktionsværdierne i Punkter af det nævnte Interval til venstre for b afviger vilkaarlig lidt fra hinanden, naar Punkterne ligger tilstrækkelig nær ved b, d. v. s. i nøjagtig Formulering, at der til ethvert $\varepsilon > 0$ skal findes et tilsvarende Tal $h = h(\varepsilon) > 0$, saaledes at Uligheden $|F(x_1) - F(x_2)| < \varepsilon$ er opfyldt for ethvert Punktpar x_1, x_2 i Intervallet $b-h < x < b$. — Vi bemærker, at Betydningen af det almindelige Konvergensprincip naturligvis er den, at vi derigennem faar et Middel til at afgøre, hvorvidt en Funktion $F(x)$ nærmer sig til en bestemt Grænseværdi for $x \to b$, ved at sammenligne Funktionsværdierne indbyrdes, i Stedet for (som forlangt i Definitionen paa Begrebet Grænseovergang) at skulle sammenligne Funktionsværdierne med den (eventuelle) Grænseværdi.

Bevis: Vi vil først bevise, at Betingelsen er nødvendig, altsaa at hvis $F(x)$ nærmer sig til en endelig og bestemt Grænseværdi A for $x \to b$, da er Betingelsen opfyldt. Vi bestemmer hertil (hvad der er muligt, fordi $F(x) \to A$ for $x \to b$) til det vilkaarligt givne $\varepsilon > 0$ et Tal $h = h(\varepsilon) > 0$ saaledes, at Uligheden $|F(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ er opfyldt for ethvert x i Intervallet $b-h < x < b$; for dette $h = h(\varepsilon)$ er Betingelsen da øjensynlig opfyldt, idet det jo gælder for to vilkaarlige Punkter x_1 og x_2 indenfor Intervallet $b-h < x < b$, at

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leqq |F(x_1) - A| + |A - F(x_2)| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vi skal dernæst vise, at Betingelsen er tilstrækkelig, altsaa at hvis Betingelsen er opfyldt, vil $F(x)$ nærme sig til en bestemt Grænseværdi A for $x \to b$, eller (hvad der jo, som

vist i Indledningen til 2det Afsnit, kommer ud paa det samme) at det for <u>enhver</u> indenfor Intervallet $b-H < x < b$ forløbende Talfølge $b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$ med Grænseværdien b gælder, at den tilsvarende Følge af Funktionsværdier $F(b_1), F(b_2), \ldots F(b_n), \ldots$ er konvergent med en konstant (d. v. s. af Valget af Talfølgen $b_1, b_2, \ldots$ uafhængig) Grænseværdi A. At dette er Tilfældet indses saaledes: [1] Det er klart (i Følge det almindelige Konvergensprincip for <u>Talfølger</u>), at for enhver indenfor Intervallet $b-H < x < b$ forløbende Talfølge $b_1, b_2, \ldots$ med Grænseværdien b, vil den tilsvarende Følge af Funktionsværdien $F(b_1), F(b_2), \ldots$ være konvergent; thi bestemmer vi (hvad der er muligt, fordi Betingelsen er antaget opfyldt) til et vilkaarligt givet $\varepsilon > 0$ et tilsvarende $h = h(\varepsilon) > 0$ saaledes, at $|F(x_1) - F(x_2)| < \varepsilon$ for $b-h < x_1 < x_2 < b$, vil jo Uligheden $|F(b_m) - F(b_n)| < \varepsilon$ være opfyldt for $m > n > N(\varepsilon)$, naar blot N er valgt saa stor, at alle Elementerne $b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots$ ligger i Intervallet $b-h < x < b$. [2] Efter at vi saaledes har indset, at for <u>enhver</u> i Intervallet $b-H < x < b$ forløbende Talfølge $b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$, for hvilken $b_n \to b$, vil den tilsvarende Følge af Funktionsværdier $F(b_1), F(b_2), \ldots F(b_n), \ldots$ være konvergent, er det umiddelbart at vise, at Grænseværdien for denne sidste Talfølge $F(b_1), F(b_2), \ldots$ er <u>uafhængig</u> af, hvilken af de „tilladte" Talfølger $b_1, b_2, \ldots$ vi er gaaet ud fra; thi dersom dette <u>ikke</u> var Tilfældet, d. v. s. dersom to af de tilladte Talfølger $b_1', b_2', \ldots$ og $b_1'', b_2'', \ldots$ gav to konvergente Følger af Funktionsværdier $F(b_1'), F(b_2'), \ldots$ og $F(b_1''), F(b_2''), \ldots$ med <u>forskellige</u> Grænseværdier A_1 og A_2, vilde den Talfølge $b_1, b_2, \ldots$, hvis Elementer skifteris er taget fra den ene og den anden af de to fornævnte Talfølger $b_1', b_2', \ldots$ og $b_1'', b_2'', \ldots$, altsaa Talfølgen $b_1 = b_1'$, $b_2 = b_1''$, $b_3 = b_2'$, $b_4 = b_2''$, $\ldots$ jo være en Talfølge af den tilladte Art (d. v. s. som forløber i Intervallet $b-H < x < b$, og

for hvilken $b_m \to b$), hvis tilsvarende Følge af Funktionsværdier $F(b_1), F(b_2), \ldots$ ikke var konvergent (idet jo $F(b_{2m-1}) \to A_1$ og $F(b_{2m}) \to A_2 \neq A_1$) i Strid med, at det jo gælder for enhver af de tilladte Talfølger $b_1, b_2, \ldots$, at den tilsvarende Følge af Funktionsværdier $F(b_1), F(b_2), \ldots$ er konvergent. Hermed er Beviset fuldført.

Paa fuldkommen tilsvarende Maade (eller ved simpelthen at betragte Funktionen $F(-x)$ i Stedet for $F(x)$ selv, hvorved jo Grænseovergang til højre Side skifter over i Grænseovergang til venstre Side) beviser man det almindelige Konvergensprincip for en Grænseovergang $a \leftarrow x$, nemlig, at dersom $F(x)$ er definieret i et Interval $a < x < a+H$ til højre for Punktet a, bestaar den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at $F(x)$ nærmer sig til en endelig og bestemt Grænseværdi A for $a \leftarrow x$ deri, at der til ethvert $\varepsilon > 0$ findes et tilsvarende $h = h(\varepsilon) > 0$ saaledes, at Uligheden $|F(x_2) - F(x_1)| < \varepsilon$ er rigtig for to hvilkesomhelst Punkter x_1 og x_2 i Intervallet $a < x < a+h$.

Endvidere beviser man paa fuldkommen tilsvarende Maade (eller ved simpelthen at betragte Funktionen $F(\frac{1}{x})$ i Stedet for $F(x)$ selv, hvorved Grænseovergangen $x \to \infty$ skifter over i Grænseovergangen $0 \leftarrow x$) det almindelige Konvergensprincip for en Grænseovergang $x \to \infty$. Dette Princip udsiger: Lad $F(x)$ være definieret i et Interval $K < x < \infty$, der strækker sig i det Uendelige til højre Side; da bestaar den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at $F(x)$ nærmer sig til en endelig bestemt Grænseværdi A for $x \to \infty$, deri, at Funktionsværdierne afviger vilkaarlig lidt fra hinanden, naar vi fjerner os tilstrækkelig langt bort til højre Side, d. v. s. at der til ethvert $\varepsilon > 0$ findes et tilsva-

rende Tal $k = k(\varepsilon) > 0$, saaledes at Uligheden $|F(x_2) - F(x_1)| < \varepsilon$ er opfyldt for ethvert Punktpar x_1, x_2, for hvilket $x_1 > k$ og $x_2 > k$.

Vi skal sluttelig anvende det almindelige Konvergensprincip overfor et regentligt Integral $\int_a^b f(x)\,dx$, idet vi indskranker os til at betragte de Hovedtilfælde, hvor der enten er noget i "Vejen" med Funktionen $f(x)$ i et Intervalendepunkt f. Eks. i Punktet a, eller hvor Intervallets Længde er vendelig stor. Idet Betingelsen for, at et saadant regentligt Integral er konvergent, jo er den, at Afsnittet $F(\xi)$ nærmer sig til en endelig og bestemt Grænseværdi for $a \leftarrow \xi$ eller $\xi \to \infty$, og idet Differensen mellem to Afsnit $F(\xi_2) - F(\xi_1)$ jo er lig med $\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx$, finder vi umiddelbart ved Anvendelse af det almindelige Konvergensprincip paa Afsnittet $F(\xi)$ følgende vigtige Sætninger.

I: Er $f(x)$ kontinuert i det til venstre aabne Interval $a < x \leqq b$, da bestaar den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at $\int_a^b f(x)\,dx$ er konvergent, deri, at der til ethvert $\varepsilon > 0$ findes et tilsvarende $h = h(\varepsilon) > 0$, saaledes at

$$\left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \qquad \text{for } a < \xi_1 < \xi_2 < a + h.$$

II: Er $f(x)$ kontinuert i Intervallet $a \leqq x < \infty$, da bestaar den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at $\int_a^\infty f(x)\,dx$ er konvergent, deri, at der til ethvert $\varepsilon > 0$ findes et tilsvarende $k = k(\varepsilon) > 0$ saaledes, at

$$\left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \qquad \text{for } \xi_2 > \xi_1 > k.$$

Eks. Lad $f(x)$ være kontinuert i det til venstre aabne In-

terval $a < x \leqq b$, og lad os antage, at $f(x)$ holder sig begrænset under hele Grænseovergangen $a \leftarrow x$, d. v. s. at $|f(x)| \leqq K$ for $a < x \leqq b$ (medens vi ikke fordanger, at $f(x)$ skal nærme sig til nogen bestemt Grænseværdi for $a \leftarrow x$). Idet der her for ethvert Talpar ξ_1 og $\xi_2 > \xi_1$ i Intervallet $a < x < b$ gælder Uligheden

$$\left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx \right| \leqq K(\xi_2 - \xi_1),$$

viser den ovenfor fundne nødvendige og tilstrækkelige Betingelse I os umiddelbart, at Integralet $\int_a^b f(x)\,dx$ er konvergent, idet jo $K(\xi_2 - \xi_1)$ kan gøres vilkaarlig lille (d. v. s $< \varepsilon$) ved blot at vælge ξ_1 og ξ_2 tilstrækkelig nær ved a (d. v. s. for $a < \xi_1 < \xi_2 < a+h$). Eksempelvis er $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ konvergent, fordi $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ er kontinuert i Intervallet $0 < x \leqq 1$ og $|f(x)| \leqq 1$ i hele dette Interval (uden at $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ dog nærmer sig til nogen Grænseværdi for $0 \leftarrow x$).

Eks. Lad $f(x)$ være kontinuert i Intervallet $a \leqq x < \infty$, og lad os yderligere antage, at $f(x)$ nærmer sig til en bestemt Grænseværdi G for $x \to \infty$. Vi vil da bevise ved Hjælp af den ovenfor fundne Betingelse II, at for at Integralet $\int_a^\infty f(x)\,dx$ skal være konvergent, er det en nødvendig (men, som vi jo ved, f. Eks. fra Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$, ikke tilstrækkelig) Betingelse, at denne Grænseværdi G er 0. Er nemlig $G \neq 0$, f. Eks $G > 0$, gælder der for alle tilstrækkelig store x, d. v. s. for $x > K$, Uligheden $f(x) > \frac{1}{2} G$, og følgelig er for ethvert Talpar ξ_1, ξ_2, der opfylder Betingelsen $K < \xi_1 < \xi_2$,

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx > \frac{G}{2}(\xi_2 - \xi_1);$$

men heraf følger jo straks, at $\int_{\xi_2}^{\xi_2} f(x)\,dx$ ikke kan gøres vil-

kaarlig lille (d. v. s $< \varepsilon$) ved blot at vælge ξ_1 og ξ_2 tilstrækkelig store (d. v. s. for $\xi_2 > \xi_1 > k$), altsaa at Integralet $\int_a^\infty f(x)\,dx$ er <u>divergent</u>. Eksempelvis er $\int_0^\infty \operatorname{Arctg} x\,dx$ divergent, fordi $\operatorname{Arctg} x \to \frac{\pi}{2} \neq 0$ for $x \to \infty$.

<u>Opg. 1</u> Bevis, at Rakken $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots$ er konvergent, samt find Rakkens Sum.

<u>Opg. 2.</u> Bevis, at den uendelige Række $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$, hvor $u_n = \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}$ er konvergent og find Rakkens Sum. (Bestem først ved Induktion det $n$te Afsnit $R_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$).

<u>Opg. 3.</u> Er det uendelige Produkt $(1+\frac{2}{1})(1+\frac{2}{3})(1+\frac{2}{5}) \cdots \left(1+\frac{2}{2n-1}\right) \cdots$ konvergent eller divergent?

<u>Opg. 4</u> Bevis udfra Formlen $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7 \cdots 2n+1}$, at det uendelige Produkt $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n+1}\cdots$, d. v. s Produktet $(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7}) \cdots (1-\frac{1}{2n+1}) \cdots$ er divergent, idet det $n$te Afsnit $A_n = a_1 a_2 \cdots a_n \to 0$ for $n \to \infty$.

<u>Opg. 5</u> Vis, at Integralet $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$, hvor $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2-x}} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} + \frac{7}{\sqrt{x+1}}$, er konvergent og bestem Integralets Værdi.

<u>Opg. 6.</u> Bevis, at $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$ er konvergent, og find Integralets Værdi.

Opg. 7. Bevis, at Integralet

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x(l\cdot x)^n} \qquad (a>1)$$

er konvergent for $n>1$, divergent for $n \leqq 1$, og angiv for $n>1$ Integralets Værdi.

Opg. 8. Bevis, at Integralet $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2+3x^2}$ er konvergent, og find Integralets Værdi.

Opg. 9. Vis, at Integralet $\int_0^\infty (\cos e^x - e^{-x}\sin e^x)\,dx$ er konvergent (skønt den under Integraltegnet staaende Funktion ikke nærmer sig til Grænseværdien 0 for $x \to \infty$) og find Integralets Værdi.

Uendelige Rækker.

Den almindelige Teori.

5. Rækker med positive Led. Vi begynder det nærmere Studium af de uendelige Rækkers Teori med at betragte en særlig vigtig Klasse af Rækker, nemlig de Rækker $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$, der har lutter positive (eller rettere ikke negative) Led, hvor altsaa $u_n \geqq 0$ for alle n. For en uendelig Række $u_1 + u_2 + \cdots$ med positive Led er den af Afsnittene dannede Talfølge

$$R_1 = u_1 \ , \ R_2 = u_1 + u_2 \ , \ \cdots \ R_m = u_1 + u_2 + \cdots + u_m \ , \ \cdots$$

øjensynlig en stedse voksende (eller rettere aldrig aftagende) Talfølge, d. v. s. der gælder Ulighederne $R_1 \leqq R_2 \leqq R_3 \leqq \cdots$. For en saadan stedse voksende Talfølge $R_1, R_2, \cdots$ gælder der imidlertid (se 2det Afsnit 9) den Hovedsætning, at hvis Talfølgen blot er begrænset (eller, hvad der her er det samme, opadtil begrænset), altsaa $R_n < K$ for alle n, da er den altid konvergent, idet der jo for en stedse voksende Talfølge $R_1, R_2, \cdots$ kun er følgende to Muligheder: [1] Talfølgen er opadtil begrænset og da tillige konvergent med sin øvre Grænse R til Grænseværdi, og [2] Talfølgen er ikke opadtil begrænset, og da vil $R_n \to \infty$ for $n \to \infty$. Vi har herved fundet følgende vigtige Sætning:

Den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at en Række

med positive Led er konvergent, bestaar deri, at den af Afsnittene dannede Talfølge $S_1, S_2, \ldots$ er (opadtil) begrænset, og i Fald denne Talfølge er begrænset (og Rækken altsaa konvergent), er Rækkens Sum lig med Talfølgens øvre Grænse S.

[Vi tilføjer til Orientering, at for en vilkaarlig uendelig Række (d. v. s. en Række, om hvilken vi ikke forudsætter, at alle Leddene er positive) er Betingelsen $|S_n| < K$ vel en for Rækkens Konvergens nødvendig Betingelse (idet det jo for enhver konvergent Række gælder, at den af Afsnittene dannede Talfølge er konvergent og følgelig yderligere begrænset), men ikke nogen tilstrækkelig Betingelse, d. v. s. der findes uendelige Rækker, for hvilke den af Afsnittene dannede Talfølge er begrænset, men som dog er divergent; et simpelt Eksempel herpaa frembyder Rækken $1-1+1-1\ldots$, hvor $S_n = \begin{cases} 0 \text{ for } n \text{ lige} \\ 1 \text{ for } n \text{ ulige} \end{cases}$, altsaa $|S_n| \leqq 1$, men som dog er divergent, idet S_n ikke nærmer sig til nogen bestemt Grænseværdi for $n \to \infty$].

Udfra den foregaaende Sætning beviser vi umiddelbart følgende Hovedsætning, der danner Grundlaget for Undersøgelsen i næste Paragraf:

Lad

(1) $$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

og

(2) $$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots$$

være to uendelige Rækker med positive Led. Da gælder det, at hvis Rækken (1) er konvergent med Summen S, og hvis ethvert Led i Rækken (2) er $\leqq$ det tilsvarende Led i Rækken (1), altsaa $v_n \leqq u_n$ for alle n, da er Rækken (2) ligeledes konvergent, og dens Sum V er $\leqq$ Summen S af Rækken (1).

Rigtigheden af denne Sætning indses umiddelbart

saaledes: Betegner vi det n^{te} Afsnit i Rækken (1) med U_n og det n^{te} Afsnit i Rækken (2) med V_n, da er i Følge de gjorte Forudsætninger $V_n \leqq U_n$ og $U_n \leqq U$, altsaa $V_n \leqq U$ for ethvert n. Denne sidste Ulighed $V_n \leqq U$ viser imidlertid: 1) at den af Afsnittene V_n til Rækken (2) dannede Talfølge er begrænset, og 2) at denne Talfølges øvre Grænse V er $\leqq U$, men dette Resultat er jo ensbetydende med, at Rækken (2) er konvergent, og at dens Sum V er $\leqq U$, saaledes som det var Opgaven at vise.

Idet en Rækkes Konvergens eller Divergens jo ikke forandres, naar man forandrer et vilkaarligt endeligt Antal af Rækkens Led, kan vi aabenbart give den foregaaende Sætning følgende (i en vis Henseende lidt almindeligere) Formulering:

Er (1) en konvergent Række med positive Led og er (2) en anden Række med positive Led, om hvilken det er givet, at dens Led fra et vist Trin af er $\leqq$ de tilsvarende Led i (1), d. v. s. at der eksisterer et saadant helt Tal N, at Uligheden $v_n \leqq u_n$ er opfyldt for alle $n \geqq N$, da er Rækken (2) ligeledes konvergent (men om kan vi naturligvis ikke længer paastaa, at Summen V af Rækken (2) altid er $\leqq$ Summen U af Rækken (1)).

Udfra denne Sætning, der i sin Formulering udsiger, at dersom man i en konvergent Række med positive Led formindsker Leddene, forbliver Rækken konvergent, udleder man umiddelbart en tilsvarende Sætning om divergente Rækker, nemlig at hvis man i en divergent Række med positive Led forstørrer Leddene, forbliver Rækken divergent, d. v. s. i nøjagtig Formulering:

Er (1) og (2) to Rækker med positive Led, om hvilke det er givet, 1) at Rækken (1) er divergent, og 2) at Leddene i Rækken (2) fra et vist Trin af er $\geqq$ de tilsvarende Led i Rækken (1), altsaa at $v_n \geqq u_n$ for $n \geqq N$, da er Rækken (2) ligeledes

divergent.

Thi dersom Rækken (2) var konvergent, maatte jo i Følge den foregaaende Sætning (fordi $u_n \leqq v_n$ for $n \geqq N$) Rækken (1) ligeledes være konvergent, i Strid med Antagelsen.

Eks. Vi har tidligere bevist om begge de to Rækker med positive Led

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \quad \text{og} \quad \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots,$$

at de er divergente. Vi indser nu, hvorledes den sidste Rækkes Divergens er en umiddelbar Følge af den førstes, idet jo $\frac{1}{\sqrt{n}} \geqq \frac{1}{n}$ for alle $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Eks. Vi vil bevise, at Rækken

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

er konvergent. Hertil behøver vi blot at bemærke, at Leddene i denne Række, naar vi slette det første Led, er mindre end de tilsvarende Led i Rækken med positive Led

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots,$$

om hvilken sidste Række vi jo tidligere har vist, at den er konvergent.

6. Uegentlige Kvotientrækker. Vi skal i denne Paragraf benytte de i det foregaaende fundne Sætninger til at udlede nogle simple Kendetegn paa (d. v. s. tilstrækkelige Betingelser for) Konvergens og nogle tilsvarende simple Kendetegn paa Divergens for Rækker med positive Led. Skønt disse Kendetegn i en vis Forstand kan siges at være af meget speciel Karak-

ker, idet de f. Eks. ikke kan anvendes paa Rækker, hvis Led u_m varierer paa ret uregelmæssig Maade med m, er de dog overordentlig nyttige, idet de giver os Midler til for talrige af de Rækker, man møder ved Anvendelserne, umiddelbart at kunne afgøre, hvorvidt de er konvergente eller ej. — Saadanne Kendetegn paa Konvergens eller Divergens udleder man ved at sammenligne den vendelige Række, hvis Konvergens eller Divergens skal afgøres, med simple Typer paa Rækker med positive Led, hvis Konvergens eller Divergens paa Forhaand kendes. Idet vi her skal nøjes med at benytte den simplest mulige Type paa en vendelig Række, hvis Konvergens- og Divergensforhold vi behersker, nemlig Kvotientrækken

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^m + \cdots \qquad (q \geqq 0)$$

som Sammenligningsrække, indfører vi Begrebet: en regentlig Kvotientrække, idet vi kalder en vilkaarlig Række med positive Led $u_1 + u_2 + \cdots + u_m + \cdots$ for en regentlig Kvotientrække med Kvotienten q, dersom Forholdet mellem et Led og det nærmest foregaaende nærmer sig til en endelig og bestemt Grænseværdi q, naar vi fjerner os ud igennem Rækken, d. v. s.: dersom

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} \to q \qquad \text{for } m \to \infty .$$

Vi vil om saadanne regentlige Kvotientrækker bevise følgende vigtige Sætning, der svarer til den kendte Sætning om egentlige Kvotientrækkers Konvergens og Divergens, men som ikke er saa fuldstændig som denne, idet den ingen Oplysning giver os i det specielle Tilfælde $q = 1$.

Sætning: En uegentlig Kvotientrække $u_1 + u_2 + \cdots$ med Kvotienten q er konvergent, dersom $q < 1$, og divergent for $q > 1$.

Bevis. 1) For at bevise, at en uegentlig Kvotientrække er konvergent, hvis Kvotienten q er < 1, indskyder vi et Tal k imellem q og 1 (f. Eks. Tallet $k = \frac{1}{2}(1+q)$) og bemærker, at Forudsætningen $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to q$ for $n \to \infty$ umiddelbart medfører, at for alle tilstrækkelig store n, d. v. s. for $n \geqq N$, er $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k$. Af denne (for $n \geqq N$ gældende) Ulighed $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k$ finder vi successivt

$$u_{N+1} < k \cdot u_N \,,\; u_{N+2} < k\, u_{N+1} < k^2 u_N \,,\; u_{N+3} < k^3 u_N \,, \cdots u_{N+p} < k^p u_N \,, \cdots \,)$$

hvilke Uligheder umiddelbart viser, at Rækken

$$(3) \qquad u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots + u_{N+p} + \cdots$$

er konvergent (og dermed ogsaa, at den givne Række $u_1 + u_2 + \cdots$ er konvergent), idet de udsiger, at Leddene i Rækken (3) er mindre end de tilsvarende Led i den egentlige Kvotientrække

$$k\, u_N + k^2 u_N + \cdots + k^p \cdot u_N + \cdots \,,$$

der jo vides at være konvergent, fordi dens Kvotient k er < 1.
2) Vi skal dernæst bevise den anden Del af Sætningen, nemlig at en uegentlig Kvotientrække er divergent, hvis Kvotienten q er > 1. Vi indskyder her (ligesom før) et Tal k imellem 1 og q (f. Eks. Tallet $k = \frac{1}{2}(1+q)$), og bemærker, at Forudsætningen $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to q$ for $n \to \infty$ umiddelbart medfører, at der for alle tilstrækkelig store n, d. v. s. for $n \geqq N$, gælder Uligheden $\frac{u_{n+1}}{u_n} > k$. Heraf finder vi successivt

$$u_{N+1} > k u_N \;,\; u_{N+2} > k u_{N+1} > k^2 u_N \;,\; u_{N+3} > k^3 u_N \;, \cdots u_{N+p} > k^p u_N \;, \cdots)$$

hvoraf straks følger, at Rækken

$$u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots + u_{N+p} + \cdots$$

er divergent (og dermed ogsaa, at den givne Række $u_1 + u_2 + \cdots$ er divergent), idet jo Leddene i denne Række er større end de tilsvarende Led i den egentlige Kvotientrække

$$k u_N + k^2 u_N + \cdots + k^p u_N + \cdots ,$$

der jo vides at være divergent, fordi dens Kvotient k er > 1.– Vi har her først Beviserne for de to Dele af Sætningen paa fuldkommen analog Maade; vi tilføjer imidlertid til Orienteringen, at vi, hvad den sidste Del af Sætningen angaar, nemlig den, der udsiger at en regentlig Kvotientrække er divergent, hvis q er > 1, kunde have ført Beviset paa væsentlig simplere Maade, idet vi nemlig umiddelbart kunde have sluttet Rækkens Divergens deraf, at Forudsætningen $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to q > 1$ jo straks medfører, at $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ fra et vist Trin af, d. v. s. for $n \geq N$, altsaa at Rækkens Led er stedse voksende fra dette Trin af (d. v. s. der gælder Ulighederne $u_N < u_{N+1} < u_{N+2} \ldots$), saaledes at Rækken ikke engang opfylder den for Konvergens nødvendige Betingelse: $u_n \to 0$.

Vi tilføjer, at det undertiden er bekvemt ogsaa at indbefatte en Række med positive Led, for hvilken $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \infty$ for $n \to \infty$ under Betegnelsen: en regentlig Kvotientrække, idet vi da siger om den, at den har den (regentlige) Kvotient ∞. En saadan regentlig Kvotientrække med Kvotienten ∞ er

selvfølgelig divergent (idet dens Led jo fra et vist Trin af er stedse voksende), og vi kan derfor anbringe den i den foregaaende Gruppe under Tilfældet $q > 1$.

Eks. Rækken med positive Led

$$1 + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \cdots$$

er en regentlig Kvotientrække med Kvotienten $q = \frac{1}{2}$, idet jo for $n \to \infty$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n \cdot 2^n}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \to \frac{1}{2}.$$

Rækken er følgelig konvergent.

Eks. Rækken med positive Led

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

er en regentlig Kvotientrække med Kvotienten $q = 0$ og følgelig konvergent, idet jo for $n \to \infty$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Medens den fundne Sætning umiddelbart tillader os at afgjøre Konvergens eller Divergens af en vilkaarlig regentlig Kvotientrække, naar Kvotienten q ikke netop er 1, giver Sætningen os ingensomhelst Oplysning i dette Overgangstilfælde $q = 1$. Vi skal vise, at der i dette Tilfælde $q = 1$ i Virkeligheden ikke gælder nogen almengyldig Sætning, d. v. s. at der findes saavel regentlige Kvotientrækker med Kvotienten 1, der er konvergente, som ogsaa regentlige Kvotientrækker med Kvotienten 1, der er divergente. Simple Eksempler paa saadanne

Rækker har vi i de to Rækker med positive Led

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots \text{ og } 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots ,$$

der begge er uegentlige Kvotientrækker med Kvotienten 1, idet jo henholdsvis

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^2}{(n+1)^2}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^2\to 1 \text{ og } \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}\to 1 ,$$

men af hvilke den første er konvergent, den anden divergent.

Vi skal i næste Paragraf omtale en anden speciel Metode til Afgørelse af Konvergens eller Divergens for Rækker med positive Led. Denne Metode, der bygger paa en Sammenhæng mellem Konvergensen af en rendelig Række og af et tilsvarende uegentligt Integral, kan ofte anvendes med Fordel netop i saadanne Tilfælde, hvor den i denne Paragraf udviklede Metode svigter derved, at den foreliggende rendelige Række vel er en uegentlig Kvotientrække, men at dens Kvotient er lig med 1.

7. <u>Sammenhæng mellem rendelige Rækker og uegentlige Integraler.</u> Ved forskellige Konvergensundersøgelser saavel inden for Læren om rendelige Rækker $u_1+u_2+\cdots$ som inden for Læren om uegentlige Integraler af Formen $\int_a^\infty f(x)\,dx$ er det nyttigt at have følgende simple Sætning til Raadighed.

<u>Lad Funktionen $f(x)$ være kontinuert i et Interval, der strækker sig i det Rendelige til højre Side, f. Eks. i Intervallet $1\leqq x<\infty$, og lad $f(x)$ i hele dette Interval være positiv og stedse aftagende, d. v. s. der gælder Uligheder $f(x)>0$ for $1\leqq x<\infty$ og $f(x_2)<f(x_1)$ for $1\leqq x_1<x_2<\infty$. Da vil den rendelige Række</u>

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) + \cdots$$

og det uegentlige Integral

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

enten begge være konvergente eller begge være divergente.

Vi føre Beviset for denne Sætning ved Benyttelse af det almindelige Konvergensprincip for henholdsvis en rendelig Række og et uegentligt Integral, idet vi til Udgangspunkt benytte Uligheden

$$f(n) > \int_n^{n+1} f(x)\,dx > f(n+1)\,,$$

hvis Rigtighed umiddelbart følger deraf, at den aftagende Funktion $f(x)$ indenfor Intervallet $n \leqq x \leqq n+1$ antager sin største Værdi i venstre Endepunkt n og sin mindste Værdi i højre Endepunkt $n+1$. [1] Vi vil begynde med at bevise, at hvis Integralet $\int_1^\infty f(x)\,dx$ er konvergent, er Rækken $f(1) + f(2) + \cdots$ det ogsaa; vi benytte herfil Uligheden

$$f(n+1) + f(n+2) + \cdots + f(n+p) < \int_n^{n+1} f(x)\,dx + \int_{n+1}^{n+2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{n+p-1}^{n+p} f(x)\,dx = \int_n^{n+p} f(x)\,dx\,,$$

der jo umiddelbart viser, at Størrelsen $f(n+1) + \cdots + f(n+p)$ kan gøres vilkaarlig lille ($d.v.s. < \varepsilon$) ved blot at vælge n tilstrækkelig stor ($d.v.s.$ for $n \geqq N = N(\varepsilon)$), altsaa at Rækken $f(1) + f(2) + \cdots$ er konvergent, idet jo Forudsætningen om, at $\int_1^\infty f(x)\,dx$ er konvergent, medfører som Konsekvens, at $\int_n^{n+p} f(x)\,dx$ kan gøres vilkaarlig lille ved blot at vælge n tilstrækkelig stor. [2] Paa fuldkom-

mer tilsvarende Maade beviser vi den anvendte Sætning, nemlig, at hvis Rækken $f(1)+f(2)+\cdots$ er konvergent, da er Integralet $\int_1^\infty f(x)\,dx$ det ogsaa. Vi gaar her udfra et Integral $\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx$, hvor $\xi_2 > \xi_1\ (>1)$, og betegner med n det hele Tal, der er nærmest lavere end ξ_1 (altsaa $n \leqq \xi_1 < n+1$) og med $n+p$ det hele Tal, der er nærmest højere end ξ_2 (altsaa $n+p-1 < \xi_2 \leqq n+p$). Der gælder da øjensynlig Uligheden

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx \leqq \int_n^{n+p} f(x)\,dx = \int_n^{n+1} + \int_{n+1}^{n+2} + \cdots + \int_{n+p-1}^{n+p} < f(n) + f(n+1) + \cdots + f(n+p-1),$$

Denne Ulighed viser os umiddelbart, at $\int_1^\infty f(x)\,dx$ er konvergent, naar Rækken $f(1)+f(2)+\cdots$ er det; thi er Rækken konvergent, kan vi gøre Størrelsen paa højre Side af Uligheds-tegnet vilkaarlig lille (d. v. s. $< \varepsilon$) ved blot at vælge n tilstrækkelig stor (d. v. s. for $n \geqq N = N(\varepsilon)$), og heraf følger da straks, at Størrelsen $\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx$ kan gøres vilkaarlig lille ved blot at vælge ξ_1 tilstrækkelig stor, altsaa at $\int_1^\infty f(x)\,dx$ er konvergent.

Som et karakteristisk Eksempel paa Anvendelsen af denne Sætning vil vi benytte den til at undersøge Konvergensforholdene for Rækken med positive Led

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} + \cdots$$

hvor α er en variabel Parameter. Vi vil først fremsætte nogle Bemærkninger til foreløbig Orientering.[1]) For enhver Værdi af α er Rækken en regentlig Kvotientrække med Kvotienten 1, idet jo for ethvert fast α

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^\alpha \to 1 \quad \text{for } n \to \infty.$$

2) Rækken er øjensynlig <u>divergent for $\alpha \leqq 0$</u>, idet jo for ethvert saadant α Rækken ikke engang opfylder den for Konvergens nødvendige Betingelse $u_n \to 0$ for $n \to \infty$. 3) Idet det almindelige (n^{te}) Led $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ aftager, naar α vokser, gælder det om Rækken, at hvis den er konvergent for en vis Værdi af α, er den ogsaa konvergent for alle større Værdier af α, og ligeledes at hvis den er divergent for en vis Værdi af α, er den ogsaa divergent for alle mindre Værdier af α. Nu ved vi imidlertid fra tidligere Eksempler, at Rækken er <u>konvergent for $\alpha = 2$</u> og <u>divergent for $\alpha = 1$</u>; heraf slutter vi da, <u>at der maa eksistere et bestemt Tal A i Intervallet $1 \leqq A \leqq 2$</u> (bestemt f. Eks. som nedre Grænse for de Værdier af α, for hvilke Rækken er konvergent), <u>som „skiller" de Værdier af α, der giver Konvergens, fra dem, der giver Divergens, d. v. s. saaledes at Rækken er konvergent for $\alpha > A$, divergent for $\alpha < A$.</u> — Ved Hjælp af den foregaaende Sætning om Sammenhængen mellem en uendelig Række og et tilsvarende uegentligt Integral, skal vi nu bevise, <u>at dette Skillepunkt A netop er Tallet 1</u>, altsaa i lös Formulering, <u>at det blandt Rækkerne af Typen $\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} + \cdots$ netop er den harmoniske Række $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$</u> (der jo selv hører til paa den divergente Side) <u>der danner Grænsen mellem Konvergens og Divergens</u>. Den nævnte Sætning viser nemlig umiddelbart, <u>at den omhandlede Række $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots$ er konvergent for $\alpha > 1$, divergent for $0 < \alpha \leqq 1$</u>. Thi Funktionen $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ er jo, for ethvert fast positivt α, en i Intervallet $1 \leqq x < \infty$ kontinuert, positiv og aftagende Funktion, hvoraf følger, at Rækken

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} + \cdots$$

da og kun da er konvergent for et positivt α, naar det uegent-

lige Integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ er det, og om dette sidste Integral har vi jo tidligere bevist, at det er konvergent for $\alpha > 1$, divergent for $\alpha \leqq 1$.

Vi afslutter hermed vore Undersøgelser over Kendetegn paa Konvergens og Divergens og vender atter tilbage til den almindelige Teori for uendelige Rækker med positive Led.

8. I en uendelig Række med positive Led er Leddenes Ordenligegyldig. For en Række med positive Led $u_1 + u_2 + \cdots$ er det ofte bekvemt foruden Afsnittene $A_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ at betragte Rækkens „Partialsummer", idet vi ved en Partialsum P forstaar en Sum af et vilkaarligt endeligt Antal Led i Rækken (f. Eks. en Sum som $u_4 + u_7 + u_{100}$), hvor vi altsaa (i Modsætning til ved Afsnittene) ikke forudsætter, at de medtagne Led skal være paa hinanden følgende Led, eller at de skal begynde forfra i Rækken. Af Definitionen paa Begrebet Partialsum følger straks: 1) Ethvert Afsnit A_n er et specielt Tilfælde af en Partialsum P. 2) Til enhver given Partialsum P eksisterer der et Afsnit A_n, saaledes at $P \leqq A_n$; dette vil jo f. Eks. gælde, naar vi til Tallet n vælger det største Nærketal for de i den betragtede Partialsum indgaaende Led. Af disse to Bemærkninger fremgaar umiddelbart, at hvis det om en uendelig Række med positive Led er givet, at den af Afsnittene A_n dannede Mængde er opadtil begrænset med øvre Grænse A, vil den af Partialsummerne P dannede Mængde ligeledes være opadtil begrænset med samme øvre Grænse A, og omvendt. Nu har vi imidlertid i 5 bevist, at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at en Række med positive Led er konvergent med Summen A, bestaar deri, at den af Afsnittene dannede Mængde er opadtil begrænset med øvre Grænse A. Hermed har vi da fundet følgende Sætning:

Den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at en Række med positive Led er konvergent, består deri, at den af Rækkens Partialsummer dannede Mængde er opadtil begrænset; og er denne Mængde opadtil begrænset (og Rækken altså konvergent), vil Mængdens øvre Grænse M netop bestemme os Rækkens Sum.

Vi vil gøre nogle vigtige Anvendelser af denne Sætning. Vi bemærker da for det første, at medens det (som nævnt i Indledningen, og som vi i næste Paragraf skal komme udførligt tilbage til) ikke gælder for enhver rendelig Række, at Leddenes Orden er ligegyldig, kan vi ved Hjælp af den foregaaende Sætning umiddelbart vise, at dette altid er Tilfældet for en Række med positive Led, d. v. s. i nøjagtig Formulering:

Lad $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ være en vilkaarlig Række med positive Led, og lad os sætte

$$v_1 = u_{n_1}, \; v_2 = u_{n_2}, \; v_3 = u_{n_3}, \; \cdots,$$

hvor Talfølgen $n_1, n_2, n_3, \cdots$ er en vilkaarlig „Permutation" af Talfølgen $1, 2, 3, \cdots$ (d. v. s. Talfølgen $n_1, n_2, n_3, \cdots$ bestaar af lutter positive hele Tal, og saaledes at ethvert positivt helt Tal forekommer en og kun een Gang som Element). Da vil de to Rækker $u_1 + u_2 + \cdots$ og $v_1 + v_2 + \cdots$ enten begge være divergente, eller begge være konvergente med samme Sum.

Thi for de to Rækker $u_1 + u_2 + \cdots$ og $v_1 + v_2 + \cdots$ (hvis Afsnit M_n og V_m naturligvis er indbyrdes forskellige) gælder det øjensynlig, at den af Partialsummerne V_m dannede Talmængde er den samme for dem begge, idet Rækkerne jo bestaar af de samme Led blot i forskellig Orden. Er denne Talmængde

ikke opadtil begrænset, er i Følge den foregaaende Sætning begge Rækkerne divergente, og er denne Talmængde opadtil begrænset med øvre Grænse N, er begge de to Rækker konvergente med Summen N, hvormed Beviset er fuldført.

Lad $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ være en vilkaarlig uendelig Række; vi siger da om en anden uendelig Række $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$, at den er en „Delrække" til den første Række, hvis alle $v$erne findes iblandt $u$erne, d. v. s. hvis $v_1 = u_{n_1}$, $v_2 = u_{n_2}$, $v_3 = u_{n_3}$, $\cdots$, hvor Talfølgen $n_1, n_2, n_3, \cdots$ bestaar af lutter positive hele, indbyrdes forskellige Tal, men ikke nødvendigvis af samtlige positive hele Tal. — Som en anden Anvendelse af den ovennævnte Sætning om Partialsummerne til en given Række med positive Led, vil vi vise, at dersom en Række med positive Led $u_1 + u_2 + \cdots$ er konvergent, vil enhver Delrække $v_1 + v_2 + \cdots$ til denne Række ligeledes være konvergent, og Summen V af Delrækken $v_1 + v_2 + \cdots$ er $\leqq$ Summen N af den oprindelige Række $u_1 + u_2 + \cdots$.

Thi den af Partialsummerne til Delrækken $v_1 + v_2 + \cdots$ dannede Mængde M_1 vil øjensynlig være en Delmængde i den af Partialsummerne til den oprindelige Række $u_1 + u_2 + \cdots$ dannede Mængde M, idet jo enhver Partialsum til Delrækken tillige er Partialsum til den oprindelige Række, men heraf følger jo straks (udfra Forudsætningen om, at Mængden M er opadtil begrænset med øvre Grænse N), at Delmængden M_1 ligeledes er opadtil begrænset, samt at dens øvre Grænse V er $\leqq N$, hvad der jo netop betyder, at Rækken $v_1 + v_2 + \cdots$ er konvergent, og at dens Sum V er $\leqq N$.

Lad $u_1 + u_2 + \cdots$ være en vilkaarlig uendelig Række og $v_1 + v_2 + \cdots$ og $w_1 + w_2 + \cdots$ to Delrækker til denne Række. Vi siger da om de to Delrækker, at de tilsammen giver hele Rækken

$u_1 + u_2 + \cdots$, hvis Mangden af Led i de to Delrakker tilsammen netop indeholder samtlige Led i den givne Rakke $u_1 + u_2 + \cdots$ og hvert af disse Led kun een Gang. Ud fra det foregaaende kan vi nu umiddelbart bevise følgende Sætning, som vi vil gøre en vigtig Brug af i næste Paragraf.

Lad $u_1 + u_2 + \cdots$ være en vilkaarlig Rakke med positive Led og $v_1 + v_2 + \cdots$ og $w_1 + w_2 + \cdots$ to saadanne Delrakker til denne Rakke, som tilsammen giver hele Rakken $u_1 + u_2 + \cdots$. Da gælder det, [1] at hvis den oprindelige Rakke $u_1 + u_2 + \cdots$ er konvergent med Summen U, vil enhver af de to Delrakker $v_1 + v_2 + \cdots$ og $w_1 + w_2 + \cdots$ ligeledes være konvergent, og deres Summer V og W vil tilfredsstille Ligningen $V + W = U$, samt [2] at hvis de to Delrakker $v_1 + v_2 + \cdots$ og $w_1 + w_2 + \cdots$ begge er konvergente med henholdsvis Summen V og W, da vil den oprindelige Rakke $u_1 + u_2 + \cdots$ ligeledes være konvergent, og dens Sum U vil være bestemt ved $U = V + W$.

Bevis. Idet det jo gælder for en Rakke med positive Led, at ved saadanne Undersøgelser, hvor det drejer sig om at afgøre Konvergens eller Divergens, eller (i Tilfælde af Konvergens) at bestemme Rakkens Sum, er Leddenes Orden ligegyldig, kan vi ved Beviset for den omhandlede Sætning tænke os Leddene i enhver af de to Delrakker $v_1 + v_2 + \cdots$ og $w_1 + w_2 + \cdots$ ordnet, som det er os bekvemmest, og vi vil da tænke os dem taget i den Orden, hvori de forekommer i den oprindelige Rakke, d. v. s. vi vil tænke os de to Delrakker givet paa Formen $u_{m_1} + u_{m_2} + u_{m_3} + \cdots$ og $u_{n_1} + u_{n_2} + u_{n_3} + \cdots$, hvor $m_1 < m_2 < m_3 \cdots$ og $n_1 < n_2 < n_3 \cdots$. Betegner vi nu det $n$te Afsnit i de tre Rakker $u_1 + u_2 + \cdots$, $v_1 + v_2 + \cdots$ og $w_1 + w_2 + \cdots$ med henholdsvis U_n, V_n og W_n, er da øjensynlig

$$U_n = V_{n'} + W_{n''} ,$$

hvor $n' + n'' = n$, og hvor n' og n'' begge $\to \infty$ for $n \to \infty$. Efter at have forudskikket denne Bemærkning, kan vi umiddelbart føre Beviset for begge de to i Sætningen opstillede Paastande.[1] Er $u_1 + u_2 + \cdots$ konvergent med Summen U, vil enhver af de to Delrækker $v_1 + v_2 + \cdots$ og $w_1 + w_2 + \cdots$ ligeledes være konvergent, idet jo (i Følge den foregaaende Sætning) en hvilkensomhelst Delrække til en konvergent Række med positive Led selv er konvergent, og Summerne U, V og W af de tre (konvergente) Rækker $u_1 + u_2 + \cdots$, $v_1 + v_2 + \cdots$ og $w_1 + w_2 + \cdots$ vil være forbundet ved Ligningen $U = V + W$, hvad vi straks finder ved Grænseovergangen $n \to \infty$ udfra Ligningen $U_n = V_{n'} + W_{n''}$, idet jo $U_n \to U$, $V_{n'} \to V$ og $W_{n''} \to W$ for $n \to \infty$.[2] Vi antager dernæst, at de to Delrækker $v_1 + v_2 + \cdots$ og $w_1 + w_2 + \cdots$ begge er konvergente med henholdsvis Summerne V og W, og skal da bevise, at den oprindelige Række $u_1 + u_2 + \cdots$ ligeledes er konvergent og med Summen $U = V + W$, altsaa at Afsnittet $U_n \to V + W$ for $n \to \infty$. Dette følger imidlertid umiddelbart udfra Ligningen $U_n = V_{n'} + W_{n''}$, idet det jo her er givet, at $V_{n'} \to V$ og $W_{n''} \to W$ for $n \to \infty$.

Vi afslutter herved vor Gennemgang af Læren om Rækker med positive Led.

9. *Absolut konvergente Rækker.* Lad

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_m + \cdots \tag{4}$$

være en vilkaarlig uendelig Række, hvor vi ikke gør nogensomhelst Forudsætning om Leddenes Fortegn. Sammen med

denne Række vil vi betragte den tilsvarende Række med positive Led, der fremkommer af (4) ved at erstatte ethvert af Leddene u_m med Leddets numeriske Værdi $|u_m|$, altsaa Rækken

$$(5) \qquad |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_m| + \cdots .$$

Vi vil begynde med at bevise, at dersom Rækken (5) er konvergent, er Rækken (4) det ogsaa. Rigtigheden heraf fremgaar umiddelbart af Uligheden

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \leqq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p}| ;$$

thi er (5) konvergent, kan vi jo gøre Størrelsen paa højre Side af denne Ulighed vilkaarlig lille (d. v. s. $< \varepsilon$) ved blot at vælge n tilstrækkelig stor (d. v. s. for $n \geqq N = N(\varepsilon)$), og Uligheden viser jo da, at det samme er Tilfældet med Størrelsen paa venstre Side af Ulighedstegnet, altsaa at Rækken (4) er konvergent. Endvidere er det klart, at hvis Rækken (5) er konvergent og Rækken (4) altsaa ogsaa konvergent, da er Summen R af Rækken (4) numerisk $\leqq$ Summen R^* af Rækken (5); thi af Uligheden

$$|u_1 + u_2 + \cdots + u_n| \leqq |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|$$

følger jo umiddelbart ved Grænseovergangen $n \to \infty$, at $|R| \leqq R^*$.

Vi tilføjer straks, at den omvendte Sætning ikke gælder, d. v. s. at der eksisterer uendelige Rækker, der selv er konvergente, men hvor de Rækker med positive Led, der fremkommer af de oprindelige ved at erstatte Leddene med deres numeriske Værdier, er divergente. Som et simpelt Eksempel

paa en saadan Række nævner vi Rækken

$$1-1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n}+\cdots;$$

denne Række er øjensynlig <u>konvergent</u> med Summen 0, idet dens Afsnit $\mathfrak{A}_n$ er bestemt ved $\mathfrak{A}_{2n}=0$, $\mathfrak{A}_{2n-1}=\frac{1}{n}$, hvoraf følger $\mathfrak{A}_n\to 0$ for $n\to\infty$; derimod er den af Leddenes numeriske Værdier dannede Række

$$1+1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n}+\cdots$$

<u>divergent</u>, idet jo

$$1+1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n}=2\left(1+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{n}\right)\to\infty \qquad \text{for } n\to\infty.$$

Vi deler nu samtlige konvergente Rækker i <u>to Klasser</u>, idet vi i den ene af disse Klasser anbringer enhver Række, der ikke blot selv er konvergent, men hvor den Række, der fremkommer ved at erstatte Leddene med deres numeriske Værdier, ligeledes er konvergent, medens vi i den anden Klasse anbringer enhver konvergent Række (4), der ikke opfylder denne Betingelse, d. v. s. for hvilken den tilsvarende Række (5) er divergent. Vi kalder Rækkerne i den <u>første</u> Klasse for <u>absolut konvergente</u>, medens vi for Rækkerne i den <u>anden</u> Klasse benytter Betegnelsen <u>betinget konvergente</u> Rækker. Vi skal i denne Paragraf studere de absolut konvergente Rækker, der, som vi skal se, i flere Henseender har lige saa simple Egenskaber som Summer, der kun indeholder et <u>endeligt</u> Antal Led, og skal derefter i næste Paragraf undersøge de betinget konvergente Rækker, der frembyder langt mere indviklede

Forhold.

Lad (4) være en vilkaarlig konvergent Række; vi vil undersøge, hvad Betingelsen er for, at denne Række er absolut konvergent, altsaa for at Rækken (5) ligeledes er konvergent. Vi bemærker da for det første, at hvis alle Leddene u_n i den givne konvergente Række (4) er positive (eller rettere $\geqq 0$) paa nær et endeligt Antal, d. v. s. hvis der i Rækken (4) kun findes et endeligt Antal negative Led, da er Rækken øjensynlig absolut konvergent; thi Rækken (5) afviger jo her fra Rækken (4) for kun et endeligt Antal Leds Vedkommende, og Forandring af et endeligt Antal Led berører jo ikke en Rækkes Konvergens. Endvidere indser vi straks, at hvis alle Leddene i den givne konvergente Række (4) er negative (eller rettere $\leqq 0$) paa nær et endeligt Antal, altsaa hvis der i Rækken (4) kun findes et endeligt Antal positive Led, da er Rækken ligeledes absolut konvergent; thi idet Rækken $u_1 + u_2 + \cdots$ er konvergent, er Rækken $(-u_1) + (-u_2) + \cdots$ det ogsaa, og denne sidste Række afviger jo kun fra Rækken $|u_1| + |u_2| + \cdots$ for et endeligt Antal Leds Vedkommende. — Efter at vi har skilt os af med disse to specielle Tilfælde, hvor alle Leddene i Rækken (4) har samme Fortegn paa nær et endeligt Antal, vender vi os nu til det almindelige Tilfælde, hvor der i Rækken (4) findes saavel uendelig mange positive Led som ogsaa uendelig mange negative Led (idet vi regner eventuelle Led, der er 0, med f. Eks. til de positive Led). Lad os betegne de positive Led i den Orden, hvori vi møder dem, naar vi bevæger os udigennem Rækken, med $v_1, v_2, v_3, \ldots$, medens vi paa tilsvarende Maade betegner de negative Led i den Orden, hvori de forekommer i den givne Række (4) med $-w_1, -w_2, -w_3, \ldots$. Det n^{te} Afsnit R_n i den givne Række (4) kan da øjensynlig skrives paa Formen

$$U_n = V_{p_n} - W_{q_n} ,$$

hvor V_{p_n} og W_{q_n} betegner henholdsvis det p_n^{te} og det q_n^{te} Afsnit i de to Rækker med positive Led

$$(6^a) \qquad v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

og

$$(6^b) \qquad w_1 + w_2 + w_3 + \cdots ,$$

og hvor $p_n + q_n = n$, samt $p_n \to \infty$ og $q_n \to \infty$ for $n \to \infty$. Den fundne Ligning $U_n = V_{p_n} - W_{q_n}$ viser os umiddelbart, at naar Rækken (4) er konvergent (med Summen U), maa de to „tilsvarende" Rækker med positive Led (6^a) og (6^b) enten begge være konvergente eller begge være divergente; thi var f. Eks. Rækken (6^a) konvergent (med Summen V) og Rækken (6^b) divergent, vilde jo $V_{p_n} \to V$ og $W_{q_n} \to \infty$ for $n \to \infty$, altsaa $V_{p_n} - W_{q_n} \to -\infty$, i Strid med at $V_{p_n} - W_{q_n} = U_n$ skal nærme sig til den endelige og bestemte Grænseværdi U for $n \to \infty$. Endvidere viser Ligningen $U_n = V_{p_n} - W_{q_n}$ os umiddelbart, at dersom vi for en konvergent Række (4) har at gøre med det Tilfælde, hvor Rækkerne (6^a) og (6^b) begge er konvergente, og dersom vi betegner Summerne af disse to Rækker med henholdsvis V og W, da vil Summen U af den givne Række (4) være bestemt ved $U = V - W$.

Vi vil nu bevise, at af de nævnte to Muligheder for en konvergent Række (4) med uendelig mange positive og uendelig mange negative Led, nemlig [1] de to Rækker med positive Led (6^a) og (6^b) er begge konvergente, og [2] de to Rækker (6^a) og (6^b) er begge divergente, vil den første indtræffe, dersom Rækken (4) er absolut konvergent, medens den anden vil indtræffe, dersom Rek-

ken (4) er betinget konvergent. Vi vil nemlig bevise følgende Sætning:

Den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at en uendelig Række (4) med uendelig mange positive og uendelig mange negative Led er absolut konvergent, består deri, at den af de positive Led for sig dannede Række (6^a) og den af de numeriske Værdier af de negative Led for sig dannede Række (6^b) begge er konvergente.

Bevis: Det gælder om at vise, at Rækken med positive Led

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots \tag{5}$$

da og kun da er konvergent, naar Rækkerne (6^a) og (6^b) begge er det; dette er imidlertid en umiddelbar Følge af en i forrige Paragraf bevist Sætning om Rækker med positive Led, naar det bemærkes, at Rækkerne (6^a) og (6^b) jo er to saadanne Delrækker til (5), at de tilsammen netop giver hele Rækken (5).

Vi kan nu umiddelbart bevise følgende Hovedsætning: En absolut konvergent Række er Leddenes Orden ligegyldig, d. v. s. er $u_1 + u_2 + \cdots$ en absolut konvergent Række med Summen M, og er $u_1' + u_2' + \cdots$ en ny uendelig Række, der er fremkommen af $u_1 + u_2 + \cdots$ ved en (vilkaarlig) Omordning af Leddene, da vil denne nye Række $u_1' + u_2' + \cdots$ ligeledes være absolut konvergent og ligeledes have Summen M.

Bevis: I det Tilfælde, hvor den givne Række (4) bestaar af lutter positive Led, har vi allerede i forrige Paragraf bevist Sætningens Rigtighed, og heraf slutter man straks, at Sætningen ogsaa er rigtig i det lidt almindeligere Tilfælde, hvor alle Rækkens Led har samme Fortegn paa nær et

endeligt Antal. Vi kan derfor indskrænke os til at betragte Hovedtilfældet, hvor der i (4) findes saavel uendelig mange positive som ogsaa uendelig mange negative Led. Lad os for den givne Række $u_1 + u_2 + \cdots$ betegne den af de positive Led for sig og den af de numeriske Værdier af de negative Led for sig dannede Række med henholdsvis

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots \quad \text{og} \quad w_1 + w_2 + w_3 + \cdots ,$$

medens vi paa tilsvarende Maade for den nye Række $u_1' + u_2' + \cdots$ betegner den af de positive Led for sig og den af de numeriske Værdier af de negative Led for sig dannede Række med henholdsvis

$$v_1' + v_2' + v_3' + \cdots \quad \text{og} \quad w_1' + w_2' + w_3' + \cdots .$$

Idet (i Følge Forudsætning) Rækken $u_1 + u_2 + \cdots$ er absolut konvergent med Summen U, ved vi i Følge den foregaaende Sætning, at de to Rækker med positive Led $v_1 + v_2 + \cdots$ og $w_1 + w_2 + \cdots$ begge er konvergente, samt at deres Summer V og W tilfredsstiller Ligningen $U = V - W$. Det gælder nu at vise, at den ved Omordning af Leddene i $u_1 + u_2 + \cdots$ fremkomne Række $u_1' + u_2' + \cdots$ ligeledes er absolut konvergent med Summen U, altsaa (hvad der jo i Følge den foregaaende Sætning kommer ud paa det samme), at de to til denne nye Række svarende Rækker med positive Led $v_1' + v_2' + \cdots$ og $w_1' + w_2' + \cdots$ begge er konvergente, og at deres Summer V' og W' tilfredsstiller Ligningen $V' - W' = V - W$. Rigtigheden heraf følger imidlertid straks ud fra Sætningen nu, at for en Række med positive Led er Leddenes Orden ligegyldig; thi heraf følger jo, idet de to Rækker $v_1' + v_2' + \cdots$ og $w_1' + w_2' + \cdots$ er fremkomne af henholdsvis den ene og den

anden af de to konvergente Rækker med positive Led $v_1 + v_2 + \cdots$ og $w_1 + w_2 + \cdots$ ved Omordning af Leddene, at disse nye Rækker $v_1' + v_2' + \cdots$ og $w_1' + w_2' + \cdots$ ligeledes er konvergente, og at deres Summer V' og W' er bestemt ved $V' = V$ og $W' = W$, saaledes at $V' - W' = V - W$. Hermed er den opstillede Sætning bevist.

10. Betinget konvergente Rækker. Lad

$$u_1 + u_2 + \cdots \tag{4}$$

være en betinget konvergent Række, d. v. s. Rækken (4) er selv konvergent, men den tilsvarende Række med positive Led

$$|u_1| + |u_2| + \cdots \tag{5}$$

er divergent. Som det fremgaar af forrige Paragraf, er det en nødvendig (men naturligvis ikke tilstrækkelig) Betingelse for, at en Række (4) er betinget konvergent, at Rækken indeholder saavel uendelig mange positive som ogsaa uendelig mange negative Led, og at den af de positive Led for sig dannede Række $v_1 + v_2 + \cdots$ og den af de negative Led for sig dannede Række $(-w_1) + (-w_2) + \cdots$ begge er divergente.

I Modsætning til, hvad der er Tilfældet for en absolut konvergent Række, gælder det for en betinget konvergent Række (4), at Leddenes Orden ikke er ligegyldig, nøjagtigere talt, at Leddenes Orden „i saa høj Grad" ikke er ligegyldig, at man ved at omordne Leddene paa passende Maade kan opnaa, at Rækken bliver konvergent med et hvilketsomhelst forudopgivet Tal A til Sum, ligesom man ogsaa ved passende Omordning af Leddene kan faa Rækken til at blive divergent. Vi skal nøjes med at bevise den første Del af denne Sætning,

altsaa at man, idet (4) er en vilkaarlig betinget konvergent Række og A et vilkaarligt opgivet Tal, altid kan omordne Leddene i (4) saaledes, at den derved fremkomne Række bliver konvergent med Summen A.

Vi bemærker hertil for det første, at idet (4) er konvergent, maa $u_n \to 0$ for $n \to \infty$, eller (hvad der kommer ud paa det samme) det maa gælde, at saavel $v_n \to 0$ som ogsaa $w_n \to 0$ for $n \to \infty$. — Lad det givne Tal A være f. Eks. positivt. Vi begynder da at tage saa mange, n_1, af de positive Led $v_1, v_2, \ldots$, at Summen af disse Led netop er $> A$, d. v. s. at

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_{n_1} > A \geqq v_1 + v_2 + \cdots + v_{n_1 - 1}.$$

Derefter tager vi saa mange, n_2, af de negative Led $-w_1, -w_2 \ldots$, at vi, naar vi føjer dem til $v_1 + v_2 + \cdots + v_{n_1}$, lige netop kommer under A, d. v. s. at

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_{n_1} - w_1 - w_2 - \cdots - w_{n_2} < A \leqq v_1 + v_2 + \cdots v_{n_1} - w_1 - w_2 - \cdots w_{n_2 - 1}$$

Vi vender nu tilbage til de tilovers blevne positive Led $v_{n_1+1}, v_{n_1+2}, \ldots$ og føjer saa mange af disse Led til, at vi netop kommer over A igen; derefter griber vi igen til de tilbageblevne negative Led $-w_{n_2+1}, -w_{n_2+2}, \ldots$ og føjer saa mange af disse Led til, at vi netop kommer under A igen. Paa denne Maade fortsætter vi, hvad der er muligt, idet vi hele Tiden har (saavel positivt som negativt) „Materiale" nok at tage af, fordi Rækkerne med positive Led $v_1 + v_2 + \cdots$ og $w_1 + w_2 + \cdots$ begge er divergente. Den ved denne Proces fremkomne Række

$$u'_1 + u'_2 + u'_3 + \cdots + u'_n + \cdots,$$

der indeholder ganske de samme Led som den givne Række $u_1 + u_2 + \cdots$, d. v. s. som er fremkommen af denne ved Omordning af Leddene, vil da øjensynlig være konvergent med Summen A. Thi Afsnittene $A'_m = u'_1 + u'_2 + \cdots + u'_m$ „svinger" øjensynlig omkring A med mindre og mindre Udsving, og saaledes at $|A - A'_m| \to 0$ for $n \to \infty$.

Vi resumerer Resultaterne i denne og den foregaaende Paragraf paa følgende Maade: Medens det for en absolut konvergent Række gælder, at Rækkens Konvergens, og særlig Rækkens Konvergens med en bestemt Værdi for Summen, er Egenskaber, der tilkommer Mængden (Samlingen) af Led som saadan, uafhængig af Leddenes Orden, er derimod for en betinget konvergent Række Konvergens og Sumværdi Egenskaber, der er i højeste Grad afhængige af den Orden, hvori Leddene er givet os, hvad der, som vi har set, hænger sammen med, at de positive Led og de negative Led her hver for sig giver „uendelig store" Bidrag, og at Konvergensen kun skyldes, at de positive og negative Led kommer i en saadan Orden, at de „omtrentlig" hæver hinanden ved Summationen.

11. Rækker, hvis Led har skiftende Fortegn. Medens de (tidligere omtalte) Metoder til Afgørelse af, hvorvidt en foreliggt uendelig Række med positive Led er konvergent eller ikke, kan finde umiddelbar Anvendelse ved saadanne Undersøgelser over vilkaarlige uendelige Rækker $u_1 + u_2 + \cdots$, hvor det drejer sig om at afgøre, hvorvidt Rækkerne er absolut konvergente eller ej (idet det jo her netop kommer an paa at undersøge, hvorvidt Rækkerne med positive Led $|u_1| + |u_2| + \cdots$ er konvergente eller divergente), kan saadanne Metoder naturligvis (principielt) ikke benyttes ved Undersøgelser, der knytter sig til Begrebet betinget Konvergens, og det gælder i Sammenhæng hermed, at

der ofte kræves ret vanskelige Undersøgelser for at afgjøre, hvorvidt en forelagt ikke absolut-konvergent Række er betinget konvergent eller er divergent. Der gælder dog enkelte simple Sætninger, der ofte kan anvendes med Fordel ved saadanne Undersøgelser; et særlig simpelt og vigtigt Eksempel paa en saadan Sætning har vi i følgende Kendetegn paa Konvergens for Rækker, hvis Led har skiftende Fortegn.

Lad $u_1 + u_2 + \cdots$ være en uendelig Række, hvis Led har skiftende Fortegn, d. v. s. hvori hvert andet Led er positivt og hvert andet negativt. Da vil Rækken altid være konvergent, hvis den opfylder følgende to Betingelser: 1) Leddenes numeriske Værdier er stedse aftagende, d. v. s. der gælder Uligheder $|u_1| > |u_2| > |u_3| \cdots$ og 2) (hvad der ikke er indeholdt i den første Betingelse) $u_n \to 0$ for $n \to \infty$.

Bevis: Konvergensen af den omhandlede Række er øjensynlig bevist, naar vi har eftervist, at der for ethvert n og ethvert p gælder Uligheden

$$(7) \qquad |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < |u_{n+1}| ;$$

thi idet $u_n \to 0$ for $n \to \infty$, kan jo Størrelsen $|u_{n+1}|$ paa høire Side af Ulighedstegnet gøres vilkaarlig lille (d. v. s $< \varepsilon$) ved blot at vælge n tilstrækkelig stor (d. v. s. for $n \geqq N = N(\varepsilon)$). Ved Beviset for Uligheden (7) kan vi øjensynlig (af Symmetrigrunde) antage, at u_{n+1} er positiv. Idet vi da sætter $u_{n+2} = -v_{n+2}$, $u_{n+4} = -v_{n+4}$ $\cdots$, hvor $v_{n+2}, v_{n+4} \cdots$ alle er positive Tal, finder vi

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} = u_{n+1} - v_{n+2} + u_{n+3} - v_{n+4} \cdots + u_{n+p} ,$$

altsaa

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p} = (u_{n+1}-v_{n+2})+(u_{n+3}-v_{n+4})+\cdots+\begin{cases}0\\ u_{n+p}\end{cases}$$

og

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p} = u_{n+1}-(v_{n+2}-u_{n+3})-(v_{n+4}-u_{n+5})-\cdots-\begin{cases}v_{n+p}\\ 0\end{cases},$$

hvor i begge Ligninger det ene og det andet af de to i sidste Led antydede Tilfælde svarer henholdsvis til p lige og til p ulige. Idet samtlige Parentheser i de to Udtryk for $u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}$ er <u>positive</u> (fordi $u_{n+1} > v_{n+2} > u_{n+3} > v_{n+4} \cdot : \cdot$), finder vi af det første Udtryk Uligheden

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p} > 0,$$

medens det andet giver os Uligheden

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p} < u_{n+1}.$$

Hermed er den omhandlede Ulighed (7), og dermed Rækkens Konvergens bevist. — Vi tilføjer, at efter at vi har vist Rækkens Konvergens, finder vi umiddelbart ud fra Uligheden (7) ved i denne at lade $p \to \infty$ (medens n holdes konstant), at *Restleddet* $R_n = u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$ tilfredsstiller Uligheden

$$|R_n| \leqq |u_{n+1}|. \tag{8}$$

Vi udtrykker dette ved at sige, <u>at dersom vi i en vendelig Række af den omhandlede Art bortkaster Leddene efter det nte Led, vil den „Fejl", vi derved begaar (d. v. s. Restleddet R_n), være numerisk ≦ det første af de bortkastede Led u_{n+1}.</u>

Eks. Ved Anvendelse af den beviste Sætning paa Rækken

$$1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} \cdots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} - \frac{1}{(2n)^\alpha} + \cdots ,$$

finder vi umiddelbart, at Rækken er konvergent for $\alpha > 0$, idet jo for ethvert positivt α Rækkens Led er numerisk aftagende med Grænseværdien 0; derimod er Rækken divergent for $\alpha \leqq 0$, idet jo for ethvert saadant α Leddene $u_n = \frac{\pm 1}{n^\alpha}$ ikke opfylder den (for Konvergens nødvendige) Betingelse $u_n \to 0$. Idet endvidere den tilsvarende Række med positive Led

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots$$

er konvergent for $\alpha > 1$, divergent for $\alpha \leqq 1$, har vi herved bevist, at den givne Række $1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} \cdots$ er absolut konvergent for $\alpha > 1$, betinget konvergent for $0 < \alpha \leqq 1$ og divergent for $\alpha < 0$.

12. Regneregler for uendelige Rækker. Vi skal i denne Paragraf udlede nogle Regneregler for uendelige Rækker, der viser, hvorledes nogle af de kendte Egenskaber for Summer med et endeligt Antal Led kan almindeliggøres til ogsaa at gælde for Rækker med uendelig mange Led.

I: En konvergent Række kan man sætte Parentheser efter Behag, d. v. s. samler man i en konvergent Række (paa vilkaarlig Maade) Grupper af paa hinanden følgende Led til enkelte Led, vil den derved fremkomne nye Række atter være konvergent, og dens Sum vil være lig med Summen af den oprindelige Række.

Rigtigheden af denne Sætning følger umiddelbart deraf, at den af Afsnittene til den nye Række dannede Talfølge V_1, V_2, ... jo vil være en „Delfølge" i den af Afsnittene til den

oprindelige Rakke dannede Talfølge $S_1, S_2, \ldots$; thi idet $S_n \to S$ for $n \to \infty$, vil jo da (yderligere) $V_n \to S$ for $n \to \infty$. — Vi tilføjer til Orientering, at den omvendte Sætning ikke gælder, d. v. s. man har ikke altid Lov til at have Parentheser i en rendelig konvergent Rakke, eller, anderledes udtrykt, til at spalte de enkelte Led i Rækken op i Ledgrupper. Saaledes er f. Eks. Rækken $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$ konvergent med Summen 0 (idet jo alle Rækkens Led er 0); men hæver vi Parentheserne, kommer vi til en rendelig Række $1-1+1-1+1-1+\cdots$, der er divergent.

II: Er $u_1+u_2+\cdots$ konvergent med Summen S, og er k en vilkaarlig Konstant, vil Rækken $ku_1+ku_2+\cdots$ ligeledes være konvergent og med Summen kS.

Thi det n^{te} Afsnit i den nye Række er jo lig med kS_n, hvor S_n betegner det n^{te} Afsnit i den oprindelige Række, og idet $S_n \to S$ vil $k \cdot S_n \to kS$ for $n \to \infty$.

III: Er $u_1+u_2+\cdots$ og $v_1+v_2+\cdots$ to konvergente Rækker med henholdsvis Summerne S og V, da vil den ved ledvis Summation fremkomne Række $w_1+w_2+\cdots$ (hvor altsaa $w_n = u_n+v_n$) ligeledes være konvergent, og dens Sum W vil være lig med $S+V$.

Thi betegner vi det n^{te} Afsnit i de tre Rækker med henholdsvis S_n, V_n og W_n, er jo $W_n = S_n+V_n$ og idet $S_n \to S$ og $V_n \to V$, vil derfor $W_n \to S+V$, saaledes som det var Opgaven at vise.

Eks. Af de to Regneregler II og III følger, at hvis $u_1+u_2+\cdots$ og $v_1+v_2+\cdots$ er konvergente med henholdsvis Summerne S og V, og c og d to vilkaarlige Konstanter, da er Rækken

$$(cu_1+dv_1)+(cu_2+dv_2)+\cdots+(cu_n+dv_n)+\cdots$$

konvergent med Summen $cS+dV$.

Medens de foregaaende Regneregler gjaldt saavel for absolut

konvergente Rækker som for betinget konvergente Rækker, gaar vi nu over til at udlede en Regneregel, nemlig for Multiplikation af to rendelige Rækker, der kun gælder for absolut konvergente Rækker.

IV: Lad $u_1 + u_2 + \cdots$ og $v_1 + v_2 + \cdots$ være to absolut konvergente Rækker med henholdsvis Summerne U og V. Vi danner alle mulige Produkter $u_\alpha v_\beta$ bestaaende af et Led u_α fra Rækken $u_1 + u_2 + \cdots$ og et Led v_β fra Rækken $v_1 + v_2 + \cdots$, og ordner (paa vilkaarlig Maade) disse Produkter $u_\alpha v_\beta$ til Leddene i en rendelig Række $w_1 + w_2 + \cdots$. Da vil denne nye Række paany være absolut konvergent, og dens Sum W vil være lig med Produktet U·V af de to givne Rækkers Sum.

Bevis: Vi maa først vise, at det overhovedet er muligt at ordne de „dobbelt rendelig" mange Produkter $u_\alpha v_\beta$ til Led i en rendelig Række, altsaa at ordne dem som Elementer i en Talfølge; dette viser vi ved at angive en bestemt Maade at gøre det paa, f. Eks. saaledes:

$$u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1 + \cdots,$$

hvor vi først har taget det Led u_1v_1, for hvilket Summen af Mærketallene er 2, dernæst de to Led, u_1v_2 og u_2v_1, for hvilke Summen af Mærketallene er 3, dernæst de tre Led, u_1v_3, u_2v_2, u_3v_1, for hvilke Summen af Mærketallene er 4, o. s. v. — For derefter at vise, at Produktrækken $w_1 + w_2 + \cdots$ (ordnet paa vilkaarlig Maade) er absolut konvergent, altsaa at Rækken med positive Led $|w_1| + |w_2| + \cdots$ er konvergent, behøver vi (i Følge en Sætning om Rækker med positive Led) blot at eftervise, at den af Afsnittene i denne sidste Række dannede Talfølge $W_1' = |w_1|$, $W_2' = |w_1| + |w_2|$, $\cdots$ er begrænset, altsaa at der eksisterer en Konstant k, saaledes at

$$W'_n = |w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n| < k$$

for alle n. Vi betegner hertil med A det største af de Mærketal α, der findes iblandt de n Produkter $u_\alpha v_\beta$, som udgjør de første n Led i Produktrækken $w_1 + w_2 + \cdots$, medens vi paa tilsvarende Maade betegner det største af de Mærketal β, der forekommer blandt disse n Produkter $u_\alpha v_\beta$, med B. Da gælder der øjensynlig Uligheden

$$|w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n| \leqq (|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_A|)(|v_1| + |v_2| + \cdots + |v_B|);$$

men heraf følger jo straks, at $|w_1| + \cdots + |w_n|$ forbliver $\leqq$ en (af n uafhængig) Konstant, nemlig $\leqq U' \cdot V'$, hvor U' og V' betegner Summerne af de (i Følge Forudsætning) konvergente Rækker med positive Led $|u_1| + |u_2| + \cdots$ og $|v_1| + |v_2| + \cdots$. Efter at vi herved har bevist, at Produktrækken $w_1 + w_2 + \cdots$ er <u>absolut konvergent</u>, følger det, <u>at Summen W af denne Produktrække er uafhængig af, i hvilken Orden Produkterne $u_\alpha v_\beta$ tages</u>, idet jo i en absolut konvergent Række Leddenes Orden er ligegyldig. For nu sluttelig at vise, <u>at Produktrækkens Sum W virkelig er lig med $U \cdot V$</u>, er det derfor tilstrækkeligt at vise, at dette gælder for blot <u>een</u> bestemt Orden af Leddene i Produktrækken, eller (hvad der vil gøre Beviset endnu simplere) for een bestemt Orden af Leddene i Produktrækken, hvor vi yderligere har samlet Leddene paa hensigtsmæssig Maade i Grupper, hvilken sidste Operation jo ikke forandrer Rækkens Sum. Vi tænker os hertil Leddene $u_\alpha v_\beta$ ordnet saaledes og samlet saaledes i Grupper, at det n^{te} Led (den n^{te} Ledgruppe) i Produktrækken bestaar af alle de Produkter $u_\alpha v_\beta$, der findes i Produktet $U_n \cdot V_n = (u_1 + \cdots + u_m)(v_1 + \cdots + v_m)$,

men ikke i Produktet $U_{n-1} \cdot V_{n-1} = (u_1 + \cdots + u_{n-1})(v_1 + \cdots + v_{n-1})$; med andre Ord vi betragter Produktrakken

$$U_1 V_1 + (U_2 V_2 - U_1 V_1) + (U_3 V_3 - U_2 V_2) + \cdots$$

$$= u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_2 v_2) + (u_1 v_3 + u_2 v_3 + u_3 v_1 + u_3 v_2 + u_3 v_3) + \cdots .$$

For denne specielle Form for Produktrakken indser vi nemlig straks, at den har Summen $U \cdot V$, idet det n^{te} Hjørnit i denne Række jo simpelthen er lig med $U_n \cdot V_n$ og følgelig $\to U \cdot V$ for $n \to \infty$. — Vi tilføjer, at ved de fleste Anvendelser er det det bekvemmeste at skrive Produktrakken, ikke paa denne sidste (for Beviset hensigtsmæssige) Form, men derimod at benytte den anden ovenfor angivne specielle Form $u_1 v_1 + u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1 + \cdots$ eller rettere den Form, der fremkommer af denne sidste Række ved i denne at samle Leddene saaledes i Grupper, at den n^{te} Ledgruppe netop bestaar af de $n+1$ Produkter $u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots u_{n-1} v_2 + u_n v_1$, for hvilke Summen af Mærketallene er lig med $n+1$. Idet vi særlig fremhæver Gyldigheden for denne specielle Form for Produktrakken, har vi altsaa bevist:

<u>Er $u_1 + u_2 + \cdots$ og $v_1 + v_2 + \cdots$ to absolut konvergente Rækker med henholdsvis Summerne U og V, da vil Rækken $w_1 + w_2 + \cdots$, hvor</u>

$$w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_2 + u_n v_1 ,$$

<u>ligeledes være konvergent, og den vil have Summen $W = U \cdot V$.</u>

13. <u>Summable Rækker.</u> Vi har overalt i det foregaaende skarpt skelnet mellem to Slags Rækker, nemlig de <u>konvergente</u> og de <u>divergente</u>, idet vi sagde om en vilkaarlig Række $u_1 + u_2 + \cdots$, at den var konvergent med Summen U, dersom dens n^{te}

Afsnit $A_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ nærmede sig til en endelig og bestemt Grænseværdi A for $n \to \infty$, medens vi kaldte Rækken divergent og ikke tillagde den den Egenskab at fremstille noget bestemt Tal, dersom den af Afsnittene dannede Talfølge ikke var konvergent. Af Hensyn til visse senere Undersøgelser, særlig inden for Læren om de trigonometriske Rækker, er det imidlertid bekvemt at foretage en Udvidelse af Begrebet Konvergens, idet vi undertiden ogsaa vil tillægge visse divergente Rækker en bestemt Sum. Til denne Udvidelse af Begrebet Konvergens kommer vi paa følgende Maade.

Lad $u_1 + u_2 + \cdots$ være en vilkaarlig uendelig Række med Afsnittene $A_1, A_2, \ldots A_n \ldots$. Vi danner da udfra disse Afsnit en Talfølge af Afsnittenes Middelværdier, nemlig Talfølgen

$$G_1 = A_1, \quad G_2 = \frac{A_1 + A_2}{2}, \quad G_3 = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{3}, \quad \ldots \quad G_n = \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n}, \quad \ldots$$

Er denne nye Talfølge $G_1, G_2, \ldots G_n \ldots$ konvergent med Grænseværdien A, siger vi om den givne uendelige Række $u_1 + u_2 + \cdots$, at den er summabel med Summen A.

Vi tilføjer straks, at enhver konvergent Række med Summen A tillige er summabel med Summen A, altsaa at hvis den af Afsnittene dannede Talfølge $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ er konvergent med Grænseværdien A, er den af Afsnittenes Middelværdier dannede Talfølge $G_1, G_2, \ldots G_n \ldots$ ligeledes konvergent med Grænseværdien A; thi vi ved jo (se Opg. 16 Afsnit II), at $A_n \to A$ medfører $\frac{1}{n}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) \to A$. — For nu at vise, at Begrebet Summabilitet virkelig er en Udvidelse af Begrebet Konvergens (altsaa at de to Begreber ikke helt dækker hinanden), skal vi vise, at der eksisterer uendelige Rækker, der er summable uden at være konvergente. Et simpelt Ek-

sempel paa en saadan Række har vi i den allerede ofte som Eksempel benyttede Kvotientrække med Kvotienten -1

$$1-1+1-1+1-1\cdots\ ;$$

her er $\mathfrak{A}_{2m}=0$, $\mathfrak{A}_{2m+1}=1$, altsaa Rækken <u>divergent</u>; derimod er Rækken øjensynlig <u>summabel med Summen</u> $\frac{1}{2}$, idet jo Middeltallet

$$\mathfrak{S}_n=\frac{1}{n}(\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2+\cdots+\mathfrak{A}_n)=\begin{cases}\frac{n}{2}:n=\frac{1}{2} & \text{for } n \text{ lige}\\ \frac{n+1}{2}:n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n} & \text{for } n \text{ ulige}\end{cases}\to\frac{1}{2}\ \text{for}\ n\to\infty .$$

Vi skal i det Følgende søge at orientere os med Hensyn til Problemet om, <u>hvilke Rækker der er summable uden at være konvergente</u>, eller med andre Ord, for hvad Slags Rækker Summabilitetsbegrebets Indførelse medfører reel Fordel, derved at det tillader os at tillægge hidtil „ubrugelige" (d.v.s. divergente) Rækker den Egenskab at fremstille bestemte Tal. Vi bemærker da for det første, at for Rækker med lutter positive Led medfører Summabilitetsbegrebets Indførelse ingen Fordel, <u>idet der ikke findes nogen Række med positive Led, der er summabel uden tillige at være konvergent</u>; thi er $u_1+u_2+\cdots$ en divergent Række med positive Led, vil jo det n^{te} Afsnit $\mathfrak{A}_n\to+\infty$ for $n\to\infty$, og heraf slutter man let, at ogsaa Middeltallet $\mathfrak{S}_n=\frac{1}{n}(\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2+\cdots+\mathfrak{A}_n)$ vil $\to+\infty$ for $n\to\infty$, saaledes at Rækken heller ikke er summabel. Paa ganske tilsvarende Maade indser man det lidt almindeligere Resultat, at Summabilitetsbegrebets Indførelse intetsomhelst virkelig nyt giver os for Rækker med kun et <u>endeligt</u> Antal positive eller kun et <u>endeligt</u> Antal negative Led, idet der heller ikke blandt disse Rækker findes nogen, der er summabel

uden tillige at være konvergent. Det er altsaa kun for Rækker med <u>saavel uendelig mange positive som uendelig mange negative</u> Led, at vi overhovedet kan haabe at opnaa nogen virkelig Fordel ved at indføre det nye Begreb Summabilitet.

Vi har allerede nævnt et Eksempel (nemlig Rækken $1-1+1-1\cdots$) paa en Række med uendelig mange positive og uendelig mange negative Led, der var summabel uden at være konvergent. Inden vi fortsætter vore Betragtninger, skal vi nævne endnu nogle karakteristiske Eksempler herpaa. Fælles for disse Eksempler (ligesom for alle Eksempler paa summable, men ikke konvergente Rækker) er det, at „Grunden" til, at det er muligt ved Hjælp af den omhandlede Middelværdidannelse at bringe en bestemt Grænseværdi A frem som Rækkens Sum, ligger deri, at Afsnittene A_n, naar n vokser udover alle Grænser, udfører „nogenlunde regelmæssige" Svingninger omkring Tallet A (med større eller mindre Udsving). Vi opstiller for Tydelighedens Skyld disse Eksempler saaledes, at vi direkte opgiver <u>Afsnittene</u> $A_1, A_2, \ldots A_n \ldots$ og ikke selve Leddene $u_1, u_2, \ldots$; kender vi Afsnittene A_n, kan vi naturligvis derudfra umiddelbart finde Leddene u_n, nemlig ved Ligningerne $u_1 = A_1$, $u_2 = A_2 - A_1$, $\ldots$ $u_n = A_n - A_{n-1}$, $\ldots$.

<u>Eks.</u> Det første Eksempel vælger vi saaledes, at Afsnittene svinger <u>med store og hurtige Udsving</u>, idet vi bestemmer Afsnittene saaledes, at

$$A_1 = 1,\ A_2 = -1,\ A_3 = \sqrt{2},\ A_4 = -\sqrt{2},\ \ldots\ A_{2n-1} = \sqrt{n},\ A_{2n} = -\sqrt{n},\ \ldots$$

Her er Rækken $u_1 + u_2 + \cdots$ naturligvis <u>divergent</u>, idet A_n jo ikke nærmer sig til nogen endelig og bestemt Grænseværdi

for $n \to \infty$; derimod er Rakken <u>summabel med Summen 0</u>, idet

$$\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \cdots + \mathfrak{A}_m = \begin{cases} 0 \text{ for } n \text{ lige} \\ \sqrt{\frac{n+2}{2}} \text{ for } n \text{ ulige} \end{cases},$$

hvoraf straks følger

$$\mathfrak{S}_n = \frac{\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \cdots + \mathfrak{A}_n}{n} \to 0 \quad \text{for } n \to \infty .$$

Ved dette Eksempel gælder det øjensynlig, at $|u_n| = |\mathfrak{A}_n - \mathfrak{A}_{n-1}| \to \infty$ for $n \to \infty$.

<u>Eks.</u> Vi betragter dernæst et væsentlig andetartet Eksempel, nemlig et, hvor Afsnittene $\mathfrak{A}_n$ svinger <u>meget langsomt</u> (d.v.s. med meget lange „Svingningsperioder") og med forholdsvis <u>små Udsving</u>. Idet vi lader den n^{te} Svingningsperiode gaa fra $\mathfrak{A}_{2n^2}$ til $\mathfrak{A}_{2(n+1)^2}$, tænker vi os de $2(n+1)^2 - 2n^2 = 4n+2$ Afsnit $\mathfrak{A}_{2n^2}, \mathfrak{A}_{2n^2+1}, \mathfrak{A}_{2n^2+2}, \ldots \mathfrak{A}_{2(n+1)^2-1}$ givet ved Tallene

$$\overbrace{0, \tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}, \ldots \tfrac{n-2}{n}, \tfrac{n-1}{n}}^{n \text{ Tal}}, 1, \overbrace{\tfrac{n-1}{n}, \tfrac{n-2}{n}, \ldots \tfrac{2}{n}, \tfrac{1}{n}, 0}^{n \text{ Tal}}$$

$$\underbrace{0, -\tfrac{1}{n}, -\tfrac{2}{n}, \ldots -\tfrac{n-2}{n}, -\tfrac{n-1}{n}}_{n \text{ Tal}}, -1, \underbrace{-\tfrac{n-1}{n}, -\tfrac{n-2}{n}, \ldots -\tfrac{2}{n}, -\tfrac{1}{n}, 0}_{n \text{ Tal}}$$

Idet $\mathfrak{A}_n$ for $n \to \infty$ stedse svinger frem og tilbage (med langsommere og langsommere Svingninger) mellem $+1$ og -1, er Rakken <u>divergent</u>. Derimod er Rakken <u>summabel med Summen 0</u>; thi idet Summen af $\mathfrak{A}^{erne}$ taget over en Svingningsperiode (d.v.s. Summen $\mathfrak{A}_{2n^2} + \mathfrak{A}_{2n^2+1} + \cdots + \mathfrak{A}_{2(n+1)^2-1}$) jo er 0, finder vi (ved grov Regning), at der for $2n^2 \leqq m < 2(n+1)^2$ gælder Uligheden

$$|R_1+R_2+\cdots+R_m|=|R_{2n^2}+\cdots+R_m|<\left(2(n+1)^2-2n^2\right)\cdot 1=4n+2\,,$$

hvoraf straks følger

$$|S_m|=\frac{1}{m}\,|R_1+R_2+\cdots R_m|<\frac{4n+2}{2n^2}\to 0 \quad \text{for } n\to\infty.$$

Ved dette Eksempel gælder det øjensynlig, at $u_n=R_n-R_{n-1}\to 0$ for $n\to\infty$.

De to sidstnævnte Eksempler paa Rækker $u_1+u_2+\cdots$, der ex summable (iøvrigt begge med Summen 0) uden at være konvergente, er, som allerede ovenfor fremhævet, af ret forskellig Type; i det første Eksempel voksede Leddenes numeriske Værdier $|u_m|$ ud over alle Grænser for $n\to\infty$, og i Sammenhæng hermed udførte Afsnittene store og hurtige Svingninger; i det andet Eksempel derimod gjaldt det, at $u_n\to 0$ for $n\to\infty$, og i Sammenhæng hermed, at de Svingninger, som Afsnittene foretog omkring $R=0$, var meget langsomme. — Vi skal nu til Slut bevise to Sætninger, af hvilke den første viser, at der er en Grænse for, hvor store Afsnittenes Udsving kan være i en summabel Række, medens den anden Sætning viser, at der er en Grænse for, hvor langsomme Afsnittenes Svingninger kan være i en saadan Række.

Sætning I: En nødvendig (men naturligvis ikke tilstrækkelig) Betingelse for, at Rækken $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ er summabel, bestaar deri, at $\frac{u_m}{m}\to 0$ for $n\to\infty$, eller anderledes skrevet at $u_n=o(n)$, idet vi (i Overensstemmelse med den sædvanlige Brug af Bogstavet o) med $o(n)$ betegner enhver Funktion $f(n)$, som divideret med n har Grænseværdien 0 for $n\to\infty$.

Bevis. Vi antager Rækken $u_1+u_2+\cdots$ for summabel og skal

da bevise, at $u_n = o(n)$. Vi begynder hertil med at bemærke, at vi (hvad der vil lette Beviset uden at indskrænke dets Almindelighed) kan antage, at Summen af den summable Række $u_1 + u_2 + \cdots$ netop er Tallet 0; thi er Summen $M \neq 0$, behøver vi blot i Stedet for den givne Række $u_1 + u_2 + \cdots$ at betragte Rækken $(u_1 - M) + u_2 + u_3 + \cdots$ hvor vi har erstattet det første Led u_1 med Tallet $u_1 - M$; denne nye Række er nemlig summabel med Summen 0, fordi Afsnittene i den nye Række jo fremkommer af de tilsvarende Afsnit i den oprindelige Række ved fra disse at subtrahere Tallet M, og derfor ogsaa Afsnittenes Middelsummer i den nye Række fremkommer af Afsnittenes Middelsummer i den oprindelige Række ved at subtrahere Tallet M. — Forudsætningen om Rækken $u_1 + u_2 + \cdots$ er da, at

$$\sigma_n = \frac{M_1 + M_2 + \cdots M_n}{n} \to 0 \quad \text{for } n \to \infty ,$$

eller anderledes skrevet, at $M_1 + M_2 + \cdots + M_n = o(n)$. Heraf følger

$$M_n = (M_1 + M_2 + \cdots + M_n) - (M_1 + M_2 + \cdots + M_{n-1}) = o(n) - o(n-1) = o(n) ,$$

og heraf følger atter

$$u_n = M_n - M_{n-1} = o(n) - o(n-1) = o(n) ,$$

hvormed Sætningen er bevist.

Vi vender os dernæst til den anden af de omhandlede Sætninger.

Sætning II: Er $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ en vilkaarlig nemdelig Række, hvis Led gaar saa stærkt imod 0, at $|u_n| < \frac{k}{n}$, hvor k er en positiv Konstant, da kan Rækken ikke være summabel, med

mindre den er konvergent.

Bevis: Vi antager, at Rækken er summabel, og at den opfylder Betingelsen $|u_m| < \frac{k}{m}$, og skal da derudfra bevise, at den er konvergent. Ligesom ved Beviset for den forrige Sætning kan vi (uden at indskrænke Bevisets Almindelighed) antage, at Rækken er summabel netop med Summen 0, hvad der vil lette de følgende Regninger. Det drejer sig altsaa om ud fra de to Forudsætninger: $|u_m| < \frac{k}{m}$ og $S_m = \frac{1}{m}(R_1 + R_2 + \cdots + R_m) \to 0$ for $m \to \infty$ at bevise, at Rækken er konvergent (naturligvis med Summen 0), altsaa at $R_m \to 0$ for $m \to \infty$.

Vi begynder hertil med at bemærke, at dersom $n = n(m)$ er et af m afhængigt helt positivt Tal bestemt saaledes, at $\frac{n}{m} \to c$ for $m \to \infty$, hvor c er en positiv Konstant, da vil der for $m \to \infty$ gælde Ligningen

$$R_{m+1} + R_{m+2} + \cdots + R_{m+n} = \sigma(n);$$

thi vi har jo (idet n og m er af samme Størrelsesorden)

$$R_1 + R_2 + \cdots + R_n = \sigma(n) = \sigma(m) \text{ og } R_1 + R_2 + \cdots + R_{m+n} = \sigma(m+n) = \sigma(m),$$

hvoraf straks følger

$$R_{m+1} + R_{m+2} + \cdots + R_{m+n} = \sigma(m) - \sigma(m) = \sigma(m).$$

Vi fører Beviset for, at $R_m \to 0$ for $m \to \infty$, indirekte, d.v.s. vi antager, at dette ikke gælder, og skal da vise, at denne Antagelse fører til en Modsigelse. Gælder det nemlig ikke, at $R_m \to 0$, maa der eksistere en positiv Konstant d, saaledes at $|R_m| > d$ for uendelig mange Værdier af m, d.v.s. saaledes at

mindst en af de to Uligheder $U_n > d$ og $U_n < -d$, f. Eks. den første, er opfyldt for uendelig mange n. For ethvert saadant n, for hvilket $\underline{U_n \geq d}$, finder vi Ulighederne

$$U_{n+1} = U_n + u_{n+1} > d - \frac{k}{n+1} > d - \frac{k}{n} \,,$$

$$U_{n+2} = U_n + u_{n+1} + u_{n+2} > d - \frac{k}{n+1} - \frac{k}{n+2} > d - \frac{2k}{n} \,,$$

. . . . . .

$$U_{n+m} = U_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+m} > d - \frac{k}{n+1} - \cdots - \frac{k}{n+m} > d - \frac{mk}{n} \,,$$

altsaa, idet vi med $m = m(n)$ betegner det største hele Tal, for hvilket $\frac{mk}{n} < \frac{d}{2}$ (d. v. s. for hvilket $\frac{mk}{n} < \frac{d}{2} < \frac{(m+1)k}{n}$), Ulighederne

$$U_{n+1} > \frac{d}{2} \,,\ U_{n+2} > \frac{d}{2} \,,\ \cdots\ U_{n+m} > \frac{d}{2}$$

og følgelig yderligere Uligheden

$$U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots + U_{n+m} > m \cdot \frac{d}{2} \,,$$

hvor $\frac{m}{n} \to \frac{d}{2k} = c$ for $n \to \infty$, fordi $\frac{d}{2k} > \frac{m}{n} > \frac{d}{2k} - \frac{1}{n}$. Denne for $\underline{\text{uendelig mange}}$ Værdier af n gældende Ulighed strider imidlertid imod den ovenfor (netop under Forudsætning af, at $\frac{m}{n} \to$ en positiv Konstant c) fundne Grænseligning

$$U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots + U_{n+m} = o(m) \,,$$

hvormed Beviset er fuldført. [Vi tilføjer til Orientering, at Tankegangen i det ovenstaaende Bevis i lös Formulering

kan udtrykkes saaledes: Dersom R_n ikke $\to 0$ for $n \to \infty$, maatte R_n nemlig mange Gange fjerne sig et „endeligt" Stykke fra 0; men dette vilde medføre (idet Leddene u_n paa Grund af Uligheden $|u_n| < \frac{k}{n}$ er overmaade smaa for store Værdier af n), at R_n ikke kunde komme saa hurtigt tilbage i Nærheden af 0, som det maatte kræves for at Middeltallet $\frac{1}{n}(R_1 + R_2 + \cdots + R_n)$ skulde kunne gaa mod 0; med andre Ord: Svingningerne af R_n vilde blive for langsomme til, at de kunde „udjævnes" ved Middelværdidannelsen $S_n = \frac{1}{n}(R_1 + R_2 + \cdots + R_n)$.].

14. <u>Rækker med variable Led; ligelig Konvergens</u>. Lad der være givet en nemlig Række

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots ,$$

hvis Led alle er <u>Funktioner af en Variabel x indenfor et Interval $a \leq x \leq b$</u>. Vi siger om denne Række, at den er <u>konvergent i Intervallet $a \leq x \leq b$</u>, hvis den er konvergent for ethvert fast x i dette Interval, eller hvad der jo kommer ud paa det samme, dersom den af Hjælperne dannede <u>Funktionsfølge</u>

$$R_1(x) = u_1(x),\ R_2(x) = u_1(x) + u_2(x),\ \cdots\ R_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x), \cdots$$

er konvergent i dette Interval $a \leq x \leq b$. Er Rækken $u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ konvergent i et Interval $a \leq x \leq b$, vil Rækkens Sum ojensynlig være en <u>Funktion af x</u> i dette Interval, hvilken Funktion vi sædvanligvis vil betegne med $R(x)$

<u>Eks.</u> I Kvotientrækken

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

er de enkelte Led Funktioner af den uindskrænkede Variable x. Rækken er konvergent i Intervallet $-1 < x < 1$ (og divergent for alle andre Værdier af x), og Rækkens Sum i dette Interval $-1 < x < 1$ er bestemt ved $S(x) = \frac{1}{1-x}$.

Ved Undersøgelser over konvergente Rækker, hvis Led er Funktioner af en Variabel, spiller Begrebet ligelig Konvergens en fundamental Rolle. Til Begrebet: ligelig konvergent Række kommer vi umiddelbart udfra Begrebet ligelig konvergent Funktionsfølge gennem følgende Betragtning: Lad $u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ være en i et Interval $a < x < b$ konvergent Række med Summen $S(x)$, d. v. s. den af Hjælperne $S_n(x)$ dannede Funktionsfølge er konvergent i Intervallet $a < x < b$ med Grænsefunktionen $S(x)$; vi siger da om den givne Række, at den er ligelig konvergent i Intervallet $a < x < b$, dersom Funktionsfølgen $S_1(x), S_2(x), \cdots$ i dette Interval konvergerer ligeligt mod sin Grænsefunktion $S(x)$, altsaa dersom der til ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et (af x uafhængigt) Tal $N = N(\varepsilon)$, saaledes at Uligheden

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

er opfyldt for alle $n \geq N$ og ethvert x i Intervallet $a < x < b$. — Idet $S(x) - S_n(x)$ jo netop bestemmer os Restleddet $R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots$ i den (i Følge Antagelse) konvergente Række $u_1(x) + u_2(x) + \cdots$, kan denne Definition ijensynlig ogsaa udtrykkes saaledes:

Den i et Interval $a < x < b$ konvergent Række $u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ siges at være ligelig konvergent i dette Interval, dersom Restleddet $R_n(x)$ gaar ligeligt mod 0 for $n \to \infty$, d. v. s. dersom der til ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et (af x uafhængigt) Tal

$N = N(\varepsilon)$, saaledes at Uligheden

$$|R_n(x)| < \varepsilon$$

er opfyldt for alle $n \geqq N$ og ethvert x i Intervallet $a < x < b$.

Inden vi gaar over til gennem nogle Sætninger at vise Betydningen af Begrebet ligelig konvergent Række, vil vi først omtale et overordentlig simpelt og yndigt Kendetegn paa (d. v. s. tilstrækkelig Betingelse for) ligelig Konvergens, der kan anvendes med stor Fordel ved talrige Undersøgelser. Vi indføre hertil Begrebet Majorantrække til en given Række med variable Led $u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ i et givet Interval $a < x < b$, idet vi siger om enhver Række med konstante (d. v. s. af x uafhængige) positive Led

$$M_1 + M_2 + \cdots + M_n + \cdots ,$$

at den er en Majorantrække til den givne Række $u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ i det givne Interval $a < x < b$, dersom der indenfor hele dette Interval gælder Ulighederne

$$|u_1(x)| \leqq M_1 \ , \ |u_2(x)| \leqq M_2 , \cdots |u_n(x)| \leqq M_n , \cdots .$$

Det omhandlede Kendetegn paa ligelig Konvergens hedder da:

Er $u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ en vendelig Række, hvis Led er Funktioner af x i et Interval $a < x < b$, og eksisterer der (svarende til den givne Række i det givne Interval) en Majorantrække $M_1 + M_2 + \cdots$, der er konvergent, da er Rækken $u_1(x) + \cdots$ ligelig konvergent i Intervallet $a < x < b$.

Bevis. Vi beviser først, at Rækken $u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ overhovedet er konvergent, iøvrigt absolut konvergent i Intervallet $a < x < b$,

altsaa at Rækken med positive Led

$$|u_1(x)| + |u_2(x)| + \cdots + |u_n(x)| + \cdots$$

er konvergent for ethvert fast x i Intervallet $a < x < b$. Rigtigheden heraf følger straks deraf, at for ethvert saadant x er Rækkens Led $|u_n(x)|$ jo $\leqq$ de tilsvarende Led i den (i Følge Forudsætning) konvergente Majorantrække $M_1 + M_2 + \cdots$. Vi skal dernæst vise, at Rækken er ligelig konvergent i Intervallet $a < x < b$. Dette følger imidlertid straks udfra Uligheden

$$|R_n(x)| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots| \leqq |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \cdots \leqq M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots = R_n ,$$

hvor Størrelsen paa høire Side af Uligheds-tegnet, R_n, jo er saafhængig af x og gaar mod 0 for $n \to \infty$ (d. v. s. kan gjøres $< \varepsilon$ ved blot at vælge n tilstrækkelig stor), idet R_n jo er Restleddet i den konvergente Majorantrække.

Eks. Kvotientrækken $1 + x + x^2 + \cdots$ er ligelig konvergent i ethvert Interval $a < x < b$, der ligger helt indenfor Intervallet $-1 < x < 1$, d. v. s. for hvilket $-1 < a < b < 1$; thi betegner c det største af de to Tal $|a|$ og $|b|$, er jo Rækken med konstante positive Led $1 + c + c^2 + \cdots$ en konvergent Majorantrække til den givne Række i det givne Interval $a < x < b$. — Vi tilføjer, at Kvotientrækken $1 + x + x^2 + \cdots$ ikke er ligelig konvergent i hele Intervallet $-1 < x < 1$. Thi vi har jo for ethvert x i dette Interval

$$R_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + \cdots = \frac{x^{n+1}}{1-x} ,$$

og denne Funktion $R_n(x)$, der jo for ethvert fast x i Intervallet $-1 < x < 1$ gaar mod 0 for $n \to \infty$, gaar øjensynlig ikke ligelig

mod 0 i hele dette Interval $-1 < x < 1$, idet vi, for at faa Uligheden

$$|R_m(x)| = \left| \frac{x^{m+1}}{1-x} \right| < \varepsilon$$

opfyldt, maa valge n „uendelig stor", naar x ligger „uendelig tæt" til venstre for Punktet 1.

Eks. Rækken $1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \cdots$, som vi tidligere har bevist er konvergent for $x > 1$, er ligelig konvergent i ethvert Interval $x > k$, hvor Konstanten k er > 1 (derimod ikke i hele Intervallet $x > 1$). Thi vi har jo umiddelbart en konvergent Majorantrække til den givne Række i det givne Interval $k < x < \infty$ i Rækken $1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \cdots$

Vi tilføjer til Orientering, at det overfor fundne Kendetegn paa ligelig Konvergens naturligvis (principielt) kun kan anvendes overfor Rækker $u_1(x) + u_2(x) + \cdots$, der er absolut konvergent i det Interval $a < x < b$, som Talen er om; thi Eksistensen af en konvergent Majorantrække medfører jo som nødvendig Konsekvens, at den givne Række er absolut konvergent i hele Intervallet. Ved Undersøgelser over ledvist konvergente Rækker med variable Led, maa vi derfor benytte andre Metoder for at afgjøre, om de forelagte konvergente Rækker er ligelig konvergente eller ej. Vi skal her nøjes med at anføre et enkelt karakteristisk Eksempel herpaa.

Eks. Rækken

$$1 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} - \frac{1}{4^x} + \cdots$$

er, som vi tidligere har bevist, konvergent for $x > 0$, nemlig

absolut konvergent for $x>1$ og betinget konvergent for $0<x\leqq 1$. Vi vil bevise, at denne Række er ligelig konvergent i ethvert Interval $k<x<\infty$, hvor k er en vilkaarlig (d. v. s vilkaarlig lille) positiv Konstant. Vi benytter hertil, at idet Rækken for ethvert fast $x>0$ har [1] Led med skiftende Fortegn, og [2] Led, der er stedse aftagende i numerisk Værdi, og som aftager mod 0 for $n\to\infty$, gælder der for Restleddet $R_n(x)$ Uligheden

$$|R_n(x)| \leqq |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{(n+1)^x} \;;$$

thi heraf følger straks, at Rækken er ligelig konvergent i Intervallet $x>k$, idet der jo for alle x i dette Interval gælder Uligheden

$$|R_n(x)| < \frac{1}{(n+1)^k} \;,$$

hvor Leddet $\frac{1}{(n+1)^k}$ paa højre Side af Ulighedstegnet er uafhængig af x og gaar mod 0 for $n\to\infty$.

15. Regning med ligelig konvergente Rækker. Vi gaar nu over til at bevise nogle vigtige Sætninger om ligelig konvergente Rækker; disse Sætninger udledes umiddelbart ud fra tilsvarende kendte Sætninger om ligelig konvergente Funktionsfølger.

Sætning I: Er i Rækken $u_1(x)+u_2(x)+\cdots$ de enkelte Led $u_n(x)$ kontinuerte Funktioner af x i et Interval $a<x<b$, og er Rækken ligelig konvergent i dette Interval, da er Rækkens Sum $R(x)$ ligeledes en kontinuert Funktion af x for $a<x<b$.

Thi idet de enkelte Led $u_n(x)$ er kontinuerte Funktioner af x for $a<x<b$, er Rækkens Afsnit $R_n(x)=u_1(x)+\cdots+u_n(x)$ det ogsaa, men heraf følger straks ud fra en kendt Sætning

om Funktionsfølger, at $R(x)$ er kontinuert for $a < x < b$, idet $R(x)$ jo er Grænsefunktion for den ligelig konvergente Følge af kontinuerte Funktioner $R_1(x), R_2(x), \ldots R_n(x) \ldots$.

Eks. Ifg den beviste Sætning følger umiddelbart, at den ved Rækken

$$1 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} - \frac{1}{4^x} \cdots$$

for $x > 0$ fremstillede Funktion $R(x)$ er en kontinuert Funktion af x i hele dette Interval $0 < x < \infty$; thi er x et vilkaarligt positivt Tal, kan vi omkring dette Tal lægge et Interval (c, d), hvis venstre Endepunkt ligger til højre for Punktet 0 (d. v. s. saaledes at $c > 0$), og idet Rækken, som tidligere vist, er ligelig konvergent i dette Interval (c, d) og dens Led kontinuerte Funktioner, er Rækkens Sum følgelig ogsaa kontinuert i dette Interval (c, d), altsaa specielt i det (vilkaarlig valgte) Punkt $x > 0$, d. v. s. Rækkesummen $R(x)$ er kontinuert i hele Intervallet $0 < x < \infty$.

Vi beviser dernæst følgende Sætning om Integration af uendelige Rækker.

Sætning II: Lad $u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ være en uendelig Række, hvis enkelte Led $u_n(x)$ er kontinuerte Funktioner af x i det lukkede Interval $a \leqq x \leqq b$ og som er ligelig konvergent i dette lukkede Interval $a \leqq x \leqq b$, og lad $R(x)$ være den (i Følge den foregaaende Sætning kontinuerte) Funktion af x i Intervallet $a \leqq x \leqq b$, som angiver Rækkens Sum. Da gælder der Ligningen

$$\int_a^b R(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \cdots + \int_a^b u_n(x)\,dx + \cdots,$$

d. v. s. Rækken (med konstante Led) paa højre Side af Lig-

hedstegnet er <u>konvergent</u>, og den har netop <u>Summen</u> $\int_a^b R(x)\,dx$.
<u>Bevis:</u> Det gælder om at vise, at det n^{te} Afsnit

$$\int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \cdots + \int_a^b u_n(x)\,dx$$

nærmer sig til Grænseværdien $\int_a^b R(x)\,dx$ for $n \to \infty$. Rigtigheden heraf følger straks deraf, at det omhandlede n^{te} Afsnit jo er lig med

$$\int_a^b (u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x))\,dx = \int_a^b R_n(x)\,dx,$$

hvor $R_n(x)$ betegner det n^{te} Afsnit i den oprindelig givne Række; thi idet $R_1(x), R_2(x), \ldots R_n(x), \ldots$ jo er en ligelig konvergent Følge af kontinuerte Funktioner med Grænsefunktionen $R(x)$, ved vi jo (i Følge en kendt Sætning om Funktionsfølger), at $\int_a^b R_n(x)\,dx \to \int_a^b R(x)\,dx$ for $n \to \infty$.

Udfra denne Sætning om, at en vendelig Række, hvis Led er kontinuerte Funktioner af x, kan integreres ledvis over et Interval, hvori Rækken er ligelig konvergent, udleder vi følgende tilsvarende Sætning om <u>Differentiation af en vendelig Række</u>, hvilken Sætning dog ikke er saa simpel som den foregaaende.

<u>Sætning III: Lad $u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ være en i Intervallet $a<x<b$ konvergent Række, hvis enkelte Led $u_n(x)$ er differentiable i Intervallet $a < x < b$ med kontinuerte Differentialkvotienter $u_n'(x)$. Lad endvidere den ved ledvis Differentiation af den givne Række fremkomne Række</u>

$$u_1'(x) + u_2'(x) + \cdots + u_n'(x) + \cdots$$

vare ligelig konvergent i Intervallet $a < x < b$. Da vil Summen $\Phi(x)$ af den givne Række være en differentiabel Funktion af x i Intervallet $a < x < b$ (ligesom de enkelte Led $u_n(x)$), og dens Differentialkvotient $\Phi'(x)$ vil være lig med Summen af den ved ledvis Differentiation fremkomne Række $u_1'(x) + u_2'(x) + \cdots$:

Bevis: Lad os betegne Summen af den (i Følge Forudsætning ligelig konvergente) Række $u_1'(x) + u_2'(x) + \cdots$ med $f(x)$; da er $f(x)$ kontinuert i Intervallet $a < x < b$ (fordi de enkelte Led $u_n'(x)$ er det), og det gælder om at bevise, at $\Phi(x)$ er differentiabel med Differentialkvotienten $f(x)$. Lad α være et fast Punkt i Intervallet $a < x < b$ og x et variabelt Punkt i dette Interval. Idet Rækken $u_1'(\xi) + u_2'(\xi) + \cdots$ er ligelig konvergent i det lukkede Interval (α, x), kan vi integrere denne Række ledvis over Intervallet (α, x), hvorved vi finder

$$\int_\alpha^x f(\xi)\,d\xi = \int_\alpha^x u_1'(\xi)\,d\xi + \int_\alpha^x u_2'(\xi)\,d\xi + \cdots = \{u_1(x) - u_1(\alpha)\} + \{u_2(x) - u_2(\alpha)\} + \cdots.$$

Her har Rækken paa højre Side af Lighedstegnet Summen $\Phi(x) - \Phi(\alpha)$, idet den jo kan tænkes fremkommen ved ledvis Subtraktion af de to konvergente Rækker $u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ og $u_1(\alpha) + u_2(\alpha) + \cdots$ med henholdsvis Summerne $\Phi(x)$ og $\Phi(\alpha)$. Af den herved fundne Ligning $\int_\alpha^x f(\xi)\,d\xi = \Phi(x) - \Phi(\alpha)$ finder vi for $\Phi(x)$ Udtrykket

$$\Phi(x) = \int_\alpha^x f(\xi)\,d\xi + c,$$

hvor c betegner Konstanten $\Phi(\alpha)$. Dette Udtryk for $\Phi(x)$ viser os imidlertid umiddelbart, at $\Phi(x)$ er en differentiabel Funktion af x i Intervallet $a < x < b$ med Differentialkvotienten $f(x)$; thi det bestemte Integral $\int_\alpha^x f(\xi)\,d\xi$ er jo en

differentiabel Funktion af sin øverste Grænse x med Differentialkvotienten $f(x)$.

Vi afslutter herved vor Gennemgang af de uendelige Rækkers almindelige Teori, og gaar nu over til at behandle to særlig simple og for Anvendelserne vigtige Typer af uendelige Rækker med variable Led, nemlig først de saakaldte Potensrækker og derefter de trigonometriske eller Fourier'ske Rækker.

Opg. 10. Angiv hvilke af de tre Rækker med positive Led

$$\tfrac{1}{2}\log 2 + 2\log 3 + \cdots + \tfrac{1}{2^n}\cdot n^3 \log(n+1) + \cdots ,$$

$$2 + \tfrac{1}{32} + \cdots + 2^n \cdot \tfrac{1}{n^7} + \cdots ,$$

$$1 + \tfrac{8}{9} + \cdots + \tfrac{2^n + n^2}{3^n} + \cdots ,$$

der er konvergente.

Opg. 11. Bevis, at Rækken med positive Led

$$\frac{1}{2(1\cdot 2)^\alpha} + \frac{1}{3(2\cdot 3)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n(1\cdot n)^\alpha} + \cdots$$

er konvergent for $\alpha > 1$, divergent for $\alpha \leqq 1$.

Opg. 12. Bevis, at Rækken

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}} + \cdots$$

er divergent, og at Rækken

$$1+\frac{1}{8-\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{2n^2-\sqrt{n}}+\cdots$$

er konvergent.

Opg. 13. Bevis, at Rækken

$$\frac{1}{2(1\cdot 2)^\alpha}-\frac{1}{3(1\cdot 3)^\alpha}+\frac{1}{4(1\cdot 4)^\alpha}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n(1\cdot n)^\alpha}\cdots$$

er konvergent for alle Værdier af α, samt angiv for hvilke Værdier af α Rækken er absolut konvergent, og for hvilke den kun er betinget konvergent.

Opg. 14. Udled (ved Hjælp af den sædvanlige Multiplikationsregel) uendelige Rækker for henholdsvis

$$\frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{og} \quad \frac{1}{(1-q)^3} \qquad (|q|<1).$$

Opg. 15. Bevis, at Rækken

$$1-\int_1^2\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}-\int_2^3\frac{dx}{x}+\frac{1}{3}-\int_3^4\frac{dx}{x}+\cdots+\frac{1}{n}-\int_n^{n+1}\frac{dx}{x}+\cdots$$

er konvergent. Bevis dernæst ud fra Konvergensen af denne Række, at Størrelsen

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-l\cdot n$$

nærmer sig til en endelig og bestemt Grænseværdi C for $n\to\infty$. (Denne Konstant C, som man ofte møder ved Anvendelserne, kal-

des sædvanligvis den Eulerske Konstant og er lig med 0,57721…).

Opg. 16. Bevis, at den divergente Række $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$, hvor

$$u_{2n} = -1 - \sqrt{n-1} - 3\sqrt{n} \quad \text{og} \quad u_{2n+1} = 1 + 3\sqrt{n} + \sqrt{n+1},$$

er summabel med Værdien $\frac{3}{2}$.

Potensrækker.

16. Om Potensrække og dens Konvergenstal. Ved en Potensrække forstaas en uendelig Række af Formen

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots ,$$

hvor „Koefficienterne" $a_0, a_1, a_2, \ldots$ er givne Tal, medens x er en Variabel. I en Potensrække er de enkelte Led, $a_n x^n$, Funktioner af en uindskrænket Variabel x; derimod er Rækkens Sum naturligvis kun defineret som en Funktion af x for de Værdier af x, for hvilke Rækken er konvergent. Idet den af Afsnittene til en Potensrække (1) dannede Funktionsfølge

$$a_0, \quad a_0 + a_1 x, \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad \cdots, \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \ldots$$

er en Følge af Polynomier af Graderne $0, 1, 2, \ldots n, \ldots$, kaldes en Potensrække undertiden ogsaa for et „Polynomium af uendelig høj Grad".

Vi skal i denne Paragraf undersøge Konvergensforholdene for en vilkaarlig Potensrække (1) og begynder da med at gøre den selvfølgelige Bemærkning, <u>at enhver Potensrække er konvergent i Punktet $x = 0$</u>; thi for $x = 0$ er alle Potensrækkens Led jo 0 paa nær det første, og Rækken er følgelig konvergent med Summen a_0. Vi tilføjer, <u>at der eksisterer</u>

Potensrækker, der kun er konvergente i dette eneste Punkt $x = 0$.
Som et simpelt Eksempel paa en saadan Potensrække nævner vi Rækken

$$1!x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots + n!x^n + \cdots ,$$

der øjensynlig er divergent for alle $x \neq 0$, idet jo for ethvert fast $x \neq 0$

$$\left| \frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n} \right| = (n+1) \cdot |x| \to \infty \qquad \text{for } n \to \infty ,$$

og det derfor (yderligere) gælder, at $|n!\, x^n| \to \infty$ for $n \to \infty$. Potensrækker, der kun er konvergente i Punktet 0, kalder man sædvanligvis overalt divergente Potensrækker, idet man herved ser bort fra det trivielle Konvergenspunkt 0; saadanne overalt divergente Potensrækker er i Følge deres Natur ubrugelige ved de fleste Anvendelser.

Vi bemærker dernæst, at der eksisterer Potensrækker, der er konvergente for alle Værdier af x. Et simpelt Eksempel herpaa har vi i Rækken

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots ,$$

der øjensynlig er konvergent, endda absolut konvergent, for $-\infty < x < \infty$, idet jo for ethvert fast $x \neq 0$ Rækken med positive Led

$$\frac{|x|}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{|x|^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

opfylder Betingelsen

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| : \left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 \qquad \text{for } n \to \infty$$

og derfor er en vegentlig Kvotientrække med Kvotienten 0.

Vi beviser dernæst følgende vigtige Hjælpesætning: Er en Potensrække (1) konvergent i et Punkt $x_0 \neq 0$, da er Rækken ligeledes konvergent, og endda absolut konvergent, for ethvert x, der er numerisk mindre end x_0.

Bevis: Vi begynder med at bemærke, at idet Potensrækken er konvergent i Punktet x_0, er i dette Punkt den af Leddene dannede Talfølge konvergent med Grænseværdien 0 og følgelig (yderligere) begrænset, d. v. s. der eksisterer en saadan positiv Konstant k, at

$$|a_n x_0^n| < k \qquad \text{for alle } n = 0,1,2,\ldots;$$

Lad nu x være et vilkaarligt Tal numerisk mindre end x_0; det gælder nu at bevise, at Rækken med positive Led

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots + |a_n x^n| + \cdots$$

er konvergent. Dette indser man umiddelbart ved at skrive Rækken paa Formen

$$|a_0| + |a_1 x_0| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2 x_0^2| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \cdots + |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \cdots;$$

thi heraf fremgaar jo straks, at Rækkens Led er $\leqq$ de tilsvarende Led i Kvotientrækken

$$k + k\left|\frac{x}{x_0}\right| + k\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \cdots + k\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \cdots,$$

der er konvergent, fordi Kvotienten $\left|\frac{x}{x_0}\right|$ er < 1.

Af den overstaaende Hjælpesætning følger straks, at hvis en Potensrække er divergent i et Punkt x_0, da er desligedes divergent for ethvert x, der er numerisk større end x_0; thi var Potensrækken konvergent i et Punkt x_1, for hvilket $|x_1| > |x_0|$, maatte den jo i Følge den foregaaende Sætning ogsaa være konvergent i Punktet x_0, i Strid med Forudsætningen.

Vi kan nu umiddelbart bevise følgende Hovedsætning om Potensrækker:

Lad (1) være en vilkaarlig Potensrække, der hverken er overalt divergent (d. v. s. kun konvergent i Punktet 0) eller overalt konvergent. Da eksisterer der et positivt Tal λ, saaledes at Rækken er konvergent for $|x| < \lambda$, divergent for $|x| > \lambda$. Dette Tal λ kaldes Potensrækkens Konvergensstal, og Intervallet $-\lambda < x < \lambda$ kaldes Potensrækkens Konvergensinterval.

Bevis: Idet det er givet, at Rækken hverken er overalt divergent eller overalt konvergent, ved vi, at der eksisterer saavel et Tal $\alpha \neq 0$, for hvilket Rækken er konvergent, som ogsaa et Tal $\beta \neq 0$, for hvilket Rækken er divergent, og heraf følger straks udfra de foregaaende Hjælpesætninger, at Rækken i hvert Fald er konvergent for $|x| < \alpha$ og divergent for $|x| > \beta$. Det er endvidere klart, at nedre Grænse for de Punkter, hvori Rækken er divergent, falder sammen med øvre Grænse for de Punkter, hvori Rækken er konvergent. Er den fælles Værdi af disse to Tal λ, da har λ øjensynlig den i Sætningen omtalte Egenskab, d. v. s. Rækken vil være konvergent for $|x| < \lambda$, divergent for $|x| > \lambda$.

For at opnaa, at man for enhver Potensrække (uden nogensomhelst Undtagelse) kan tale om Rækkens Konvergenstal, vedtager vi endvidere, at en Potensrække, der kun

er konvergent i Punktet 0, skal siges at have Konvergensstallet $\lambda = 0$, medens en Potensrække, der er overalt konvergent, skal siges at have Konvergensstallet $\lambda = \infty$ og Konvergensintervallet $-\infty < x < \infty$.

Der gælder den vigtige Sætning at enhver Potensrække (for hvilken $\lambda > 0$) er absolut konvergent indenfor hele sit Konvergensinterval $-\lambda < x < \lambda$. Thi er x_0 et vilkaarligt Punkt i dette Interval, kan vi jo indskyde et positivt Tal x_1 imellem $|x_0|$ og λ, og idet Rækken er konvergent i dette Punkt x_1 (fordi $x_1 < \lambda$), vil den jo (fordi $|x_0| < x_1$) i Følge Hjælpesætningen ovenfor være absolut konvergent i Punktet x_0.

Lad (1) være en vilkaarlig Potensrække, om hvilken vi blot vil antage, at dens Konvergenstal λ er > 0 og $< \infty$ (altsaa at Rækken hverken er overalt divergent eller overalt konvergent). Vi ved da, at Rækken er konvergent i Intervallet $-\lambda < x < \lambda$ og divergent i de to Intervaller $x > \lambda$ og $x < -\lambda$; derimod udsiger de foregaaende Sætninger intetsomhelst om, hvorvidt Rækken er konvergent eller divergent i selve de to Punkter $-\lambda$ og $+\lambda$, der som Endepunkter for Konvergensintervallet skiller Konvergenspunkter fra Divergenspunkter. Vi skal vise, at der her i Virkeligheden ikke gælder nogen almengyldig Sætning, idet vi gennem Eksempler skal vise, at der findes en Potensrække, der er divergent i begge Intervalendepunkter λ og $-\lambda$, en anden, der er konvergent i det ene, divergent i det andet af disse to Punkter, og endelig en saadan, der er konvergent i begge disse Punkter.

Eks. 1. Kvotientrækken

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

har Konvergenstallet 1, idet den jo er konvergent for $|x|<1$, divergent for $|x|>1$. Denne Potensrække er <u>divergent</u> i <u>begge</u> Konvergensintervallets Endepunkter $+1$ og -1.

<u>Eks. 2.</u> Potensrækken

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots$$

har, ligesom den forrige, Konvergenstallet $\lambda=1$; thi idet denne Række for ethvert positivt x (og ved Bestemmelsen af Konvergenstallet er det naturligvis tilstrækkeligt at betragte Forholdene for $x>0$) er en regentlig Kvotientrække med Kvotienten x (idet jo $\frac{x^{n+1}}{n+1} : \frac{x^n}{n} = x\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \to x$ for $n \to \infty$), er den jo konvergent for $0<x<1$, divergent for $x>1$. Denne Række er <u>divergent</u> i det <u>ene</u> af de to Intervalendepunkter, nemlig i Punktet $+1$, og <u>konvergent</u> i det <u>andet</u> Intervalendepunkt -1, idet vi ved at indsætte $x=+1$ og $x=-1$ finder henholdsvis den divergente Række $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ og den konvergente Række $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots$. — Vi tilføjer til Orientering, at vi for denne Potensrækkes Vedkommende umiddelbart kunde have indset, at den har Konvergenstallet 1, ved Hjælp af følgende simple Bemærkning: Idet Rækken er <u>betinget konvergent</u> i Punktet $x=-1$, maa dette Punkt -1 nødvendigvis være et <u>Endepunkt for Konvergensintervallet</u>; thi det kan ikke ligge <u>udenfor</u> Konvergensintervallet (fordi Rækken jo her er divergent), og det kan ikke ligge <u>indenfor</u> Konvergensintervallet (fordi Rækken jo her er absolut konvergent).

Eks. 3. Potensrækken

$$\frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots + \frac{x^n}{n^2} + \cdots$$

har ligesom de foregående Konvergensradius 1, idet Rækken for ethvert positivt x er en regelret Kvotientrække med Kvotienten x (idet jo $\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} : \frac{x^n}{n^2} = x\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^2 \to x$ for $n \to \infty$), og derfor er konvergent for $0 < x < 1$, divergent for $x > 1$. Denne Række er konvergent i begge Konvergensintervallets Endepunkter $+1$ og -1, idet de to Rækker

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \qquad \text{og} \qquad -\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \cdots$$

jo begge er konvergente, endog absolut konvergente.

Vi afslutter Paragrafen med at bevise nogle simple Grænsesætninger om Potensrækkers Konvergensradius.

Sætning I: Lad (1) være en vilkaarlig Potensrække, og lad os multiplicere den helt igennem med samme Potens x^N, hvor N er et positivt helt Tal. Da vil den derved fremkomne nye Potensrække $a_0 x^N + a_1 x^{N+1} + \cdots$ være konvergent i præcis de samme Punkter som den oprindelige Række (1).

Thi for $x = 0$ er begge de to Rækker konvergente, og er $x \neq 0$, er jo enhver af de to Rækker fremkommen af den anden ved Multiplikation med et fra Nul forskelligt Tal, saaledes at de for et saadant x enten begge er konvergente eller begge divergente. — Vi kan øjensynlig ogsaa udtrykke denne Sætning saaledes: Mangler de N første Led i en Potensrække (d.v.s. er $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{N-1} = 0$), da vil Rækkens Konvergensforhold ikke forandres derved, at vi af alle Leddene bortdividerer den fælles Faktor x^N.

Sætning II: Lad $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ være en vilkaarlig Potensrække med Konvergenstallet λ, og lad $b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots$ være en ny Potensrække, hvis Koefficienter alle, fra et vist Trin af, er numerisk $\leqq$ de tilsvarende Koefficienter i den givne Række (1), d. v. s. hvor $|b_n|\leqq|a_n|$ for $n\geqq N$. Da vil Konvergenstallet λ_1 for denne nye Potensrække være $\geqq$ Konvergenstallet λ for den oprindelig givne Række.

Thi i ethvert Punkt x, hvori den givne Række $a_0+a_1x+\cdots$ er absolut konvergent, er den nye Række $b_0+b_1x+\cdots$ det jo ogsaa. — Specielt har vi, at hvis den givne Række har Konvergenstallet ∞, har den nye Række ligeledes Konvergenstallet ∞.

Sætning III: De to Potensrækker

$$(1)\qquad a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

og

$$(2)\qquad a_1x+2a_2x^2+3a_3x^3+\cdots+na_nx^n+\cdots,$$

hvor Koefficienten til x^n i den sidste Række er fremkommen af Koefficienten til x^n i den første Række ved Multiplikation med n, har samme Konvergenstal.

Bevis: Lad os betegne Konvergenstallene for de to Potensrækker (1) og (2) med henholdsvis λ og λ_1. Vi fører Beviset for, at $\lambda=\lambda_1$, derigennem, at vi først beviser, at $\lambda\geqq\lambda_1$ og derefter at $\lambda_1\geqq\lambda$. [1] Idet $|a_n|\leqq|na_n|$ for $n\geqq1$, har vi straks i Følge Sætning II, at $\lambda\geqq\lambda_1$. [2] Vi skal dernæst vise, at $\lambda_1\geqq\lambda$, eller (hvad der øjensynlig kommer ud paa det samme), at hvis x_0 er et vilkaarligt Punkt i det Indre af Konvergensintervallet $-\lambda<x<\lambda$ for Rækken (1), da vil Rækken (2) ligeledes være absolut konvergent i dette Punkt, d. v. s. Rækken

(3) $$|a_1x_0|+|2a_2x_0^2|+\cdots+|na_nx_0^n|+\cdots$$

vil være konvergent. Vi indskyder hertil et Punkt x_1 imellem $|x_0|$ og λ og sammenligner Rækken (3), hvis Konvergens skal bevises, med Rækken

(4) $$|a_0|+|a_1x_1|+|a_2x_1^2|+\cdots+|a_nx_1^n|+\cdots,$$

der jo vides at være konvergent, fordi $|x_1|<\lambda$. Nu er imidlertid for alle n fra et vist Trin af

$$|na_nx_0^n| \leq |a_nx_1^n|,$$

idet $\frac{nx_0^n}{x_1^n} = n\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^n \to 0$ for $n\to\infty$, og følgelig er Rækken (3) konvergent, fordi Rækken (4) er det.

Eks. I det Kvotientrækken $x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ har Konvergenstallet 1, finder vi ved at anvende Sætning III et Antal Gange efter hinanden, at for ethvert helt positivt Tal r, har de to Rækker

$$1^rx+2^rx^2+3^rx^3+\cdots+n^rx^n+\cdots \quad \text{og} \quad \frac{x}{1^r}+\frac{x^2}{2^r}+\cdots+\frac{x^n}{n^r}+\cdots$$

ligeledes Konvergenstallet 1. Derimod frembyder disse Rækker, som vi tidligere har set, ikke alle samme Konvergensforhold i Intervalendepunkterne $+1$ og -1.

Af Sætning III følger umiddelbart, <u>at en vilkaarlig Potensrække (1) og den nye Potensrække</u>

(2^a) $$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots,$$

der fremkommer af (1) ved ledvis Differentiation, har samme Konvergenstal. Thi multiplicerer vi Rækken (2°) helt igennem med Faktoren x, kommer vi netop til Rækken (2), og en saadan Multiplikation forandrer jo ikke Rækkens Konvergenstal.

17. Bestemmelse af en Potensrækkes Konvergenstal. For talrige af de Potensrækker (1), man møder ved Anvendelserne, vil det gælde, at Forholdet mellem de numeriske Værdier af to paa hinanden følgende Koefficienter $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ vil nærme sig til en bestemt Grænseværdi A for $n \to \infty$. For en saadan Potensrække kan vi umiddelbart bestemme Rækkens Konvergenstal λ, idet der gælder den simple Sætning, at λ er den reciproke Værdi af A, d.v.s. i nøjagtig Formulering, at hvis $A > 0$ er $\lambda = \frac{1}{A}$, og hvis $A = 0$ er $\lambda = \infty$.

Bevis: Idet $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to A$ for $n \to \infty$, vil for ethvert $x \neq 0$

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| \to A \cdot |x| ,$$

d.v.s. Rækken $|a_0| + |a_1 x| + \cdots$ er en uegentlig Kvotientrække med Kvotienten $A \cdot |x|$. Heraf følger umiddelbart: 1) Er $A > 0$, har Potensrækken Konvergenstallet $\lambda = \frac{1}{A}$, idet den er absolut konvergent for $A|x| < 1$, d.v.s. for $|x| < \frac{1}{A}$, medens den ikke er det for $A|x| > 1$, d.v.s. for $|x| > \frac{1}{A}$. 2) Er $A = 0$, er Potensrækken konvergent for alle Værdier af x, idet jo her $A \cdot |x| = 0$ for alle x, og Rækken har altsaa her Konvergenstallet $\lambda = \infty$.

Vi skal nu anvende denne Sætning til at bestemme Konvergenstallene for nogle specielle Potensrækker, hvortil vi vælger saadanne, der er særlig vigtige ved Anvendelserne, idet de, som vi senere skal se, fremstiller simple kendte Funktioner.

Eks. 1. For Rækken

(5) $$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

gælder det, at

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{(n+1)!}:\frac{1}{n!}=\frac{1}{n+1}\to 0 \qquad \text{for } n\to\infty.$$

Rækken har følgelig Konvergenstallet $\lambda=\infty$, d. v. s. den er overalt konvergent.

Eks. 2. Ud fra det foregaaende Eksempel følger straks, at enhver af de to Potensrækker

(6) $$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots$$

og

(7) $$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\cdots$$

har Konvergenstallet $\lambda=\infty$, fordi Rækken (5) har det; thi for enhver af de to Rækker (6) og (7) er jo Koefficienten til x^n numerisk $\leqq$ Koefficienten $\frac{1}{n!}$ til x^n i Rækken (5).

Eks. 3. For Rækken

(8) $$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

gælder det, at

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{n+1}:\frac{1}{n}=\frac{n}{n+1}\to 1 \qquad \text{for } n\to\infty.$$

Rækken har følgelig Konvergenstallet $\lambda=1$.

Eks. 4. Vi betragter dernæst Rækken

$$(9)\qquad 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}x^n+\cdots .$$

Er m specielt et helt ikke negativt Tal, da er alle Koefficienterne fra et vist Trin af lig med 0, og Rækken har følgelig Konvergenstallet ∞. Er m derimod ikke et helt Tal ≥ 0, finder vi

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{m-n}{n+1}\right| = \left|\frac{-1+\frac{m}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right| \to 1 \qquad \text{for } n\to\infty ,$$

og Rækken har følgelig for ethvert saadant m Konvergenstallet $\lambda = 1$.

Eks. 5. Vi betragter sluttelig Potensrækken

$$(10)\qquad 1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\frac{x^8}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}-\cdots .$$

Idet hver anden Koefficient (nemlig alle de med ulige Mærketal) er 0, kan vi ikke her umiddelbart anvende den overstaaende Sætning om Bestemmelse af Konvergenstallet, idet vi jo ikke kan betragte Forholdet $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. For at anvende den nævnte Sætning behøver vi imidlertid blot først at indføre $y=x^2$ som ny Variabel i Stedet for x, hvorved vi kommer til Potensrækken

$$1-\frac{y}{2^2}+\frac{y^2}{2^2\cdot 4^2}-\frac{y^3}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\frac{y^4}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}-\cdots ;$$

her gælder det, at

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{(2n+2)^2} \to 0 \quad \text{for } n\to\infty ,$$

saaledes at denne Række er konvergent for alle y, hvoraf straks følger, at den givne Potensrække er konvergent for alle x, altsaa at $\lambda = \infty$. Vi tilføjer, at vi ogsaa umiddelbart kunde have fundet dette Resultat ved (ligesom ved Eksempel 2) at sammenligne den givne Række (10) med Potensrækken (5); thi idet Koefficienterne i Rækken (10) er numerisk $\leqq$ de tilsvarende Koefficienter i Rækken (5), maa Rækken (10) have Konvergenstallet ∞, fordi Rækken (5) har det.

18. Om Potensrækkes ligelige Konvergens og Anvendelser deraf. Lad

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{1}$$

være en vilkaarlig Potensrække, om hvilken vi blot vil antage, at den ikke er overalt divergent (d. v. s. at den ikke kun er konvergent i Punktet 0), altsaa at dens Konvergenstal λ er > 0. Vi vil da bevise følgende vigtige Sætning.

Potensrækken (1) er ligelig konvergent i ethvert egentligt Delinterval til dens Konvergensinterval, d. v. s. i ethvert Interval $\alpha \leqq x \leqq \beta$, for hvilket $-\lambda < \alpha < \beta < \lambda$.

Vi føre Beviset for denne Sætning derved, at vi viser, at der til den givne Potensrække i det givne Interval $\alpha \leqq x \leqq \beta$ eksisterer en konvergent Majorantrække, og en saadan har vi umiddelbart i Rækken med positive Led

$$|a_0| + |a_1| \cdot \gamma + |a_2| \cdot \gamma^2 + \cdots + |a_n| \cdot \gamma^n + \cdots,$$

hvor det positive Tal γ betegner det største af de to Tal $|\alpha|$ og $|\beta|$. Thi [1] denne Række er konvergent, fordi γ ligger indenfor Potensrækkens Konvergensinterval, og Potensrækken er absolut konvergent i alle Punkter indenfor Konvergensintervallet,

og[2]) den er en Majorantrække til Potensrækken i Intervallet $\alpha \leqq x \leqq \beta$, idet der jo for ethvert x i dette Interval og alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ gælder Uligheden $|a_n x^n| \leqq |a_m| \cdot \gamma^n$. Vi tilføjer, at en Potensrække ikke behøver at være ligelig konvergent i hele Konvergensintervallet $-\lambda < x < \lambda$ (men kun i ethvert egentligt Delinterval); saaledes er jo, som vi tidligere har vist, Kvotientrækken $1 + x + x^2 + \ldots$ ikke ligelig konvergent indenfor hele Konvergensintervallet $-1 < x < 1$.

Heraf denne Sætning følger umiddelbart, at Summen $P(x)$ af en Potensrække (1) er en kontinuert Funktion af x indenfor hele Konvergensintervallet $-\lambda < x < \lambda$. Thi er x_0 et vilkaarligt Punkt i dette Interval, kan vi jo altid omkring x_0 lægge et Interval (α, β), der er et egentligt Delinterval til Konvergensintervallet $(-\lambda, \lambda)$, og idet Potensrækken er ligelig konvergent i dette Interval (α, β), og dens Led alle er kontinuerte Funktioner af x i Intervallet, er jo Summen $P(x)$ selv en kontinuert Funktion af x i Intervallet (α, β), altsaa specielt i det (vilkaarlig valgte) Punkt x_0 indenfor Konvergensintervallet. — Specielt finder vi, idet $P(0) = a_0$, at $P(x) \to a_0$ for $x \to 0 \leftarrow x$.

Lad (1) som hidtil være en vilkaarlig Potensrække, hvis Konvergenstal λ er > 0, og lad N være et vilkaarligt fast positivt helt Tal. Vi vil da bevise, at for $x \to 0 \leftarrow x$ gælder der for Potensrækkens Sum $P(x)$ den vigtige Grænseformel

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N + o(x^N).$$

Thi Restleddet $R_{N+1}(x) = a_{N+1} x^{N+1} + a_{N+2} x^{N+2} + \ldots$ kan jo skrives paa Formen

$$R_{N+1}(x) = x^{N+1} \left(a_{N+1} + a_{N+2} x + a_{N+3} x^2 + \cdots \right),$$

hvor Potensrækken indenfor Parenthesen $\to a_{\nu+1}$ for $x \to 0 \leftarrow x$, og heraf følger jo straks, at $R_{\nu+1}(x)$ er uendelig lille af højere Orden end x^ν (iøvrigt uendelig lille af mindst $(\nu+1)^{\text{te}}$ Orden i Forhold til x).

Vi beviser dernæst følgende vigtige Sætning: Lad (1) være en vilkaarlig Potensrække med Konvergenstal $\lambda > 0$, om hvilken det er givet, at der eksisterer et Interval $-\delta < x < \delta$ omkring $x = 0$ saaledes at Potensrækkens Sum $P(x)$ er 0 indenfor hele dette (lille) Interval. Da maa nødvendigvis samtlige Koefficienter i Potensrækken være 0.

Bevis: Idet $P(0) = a_0$, følger straks, at a_0 maa være 0. Lad os antage, at Sætningen ikke var rigtig, altsaa at ikke samtlige Koefficienter var 0, og lad a_ν være den første Koefficient (d. v. s. den med lavest Mærketal), der er $\neq 0$. Vi har da i Følge den ovenfor fundne Grænseformel, at for $x \to 0 \leftarrow x$ er

$$P(x) = a_\nu x^\nu + \sigma(x^\nu);$$

men denne Formel er øjensynlig i Strid med Forudsætningen om, at $P(x) = 0$ for $-\delta < x < \delta$, idet den jo (fordi $a_\nu \neq 0$) vilde medføre, at for alle tilstrækkelig smaa $x \neq 0$ var $|P(x)| > \frac{1}{2}|a_\nu x^\nu| > 0$ og ikke $= 0$.

19. Regneregler for Potensrækker. Vi skal i denne Paragraf udlede nogle simple Regneregler for Potensrækker, som bl. a. viser, hvorledes Potensrækkerne i mange Henseender er bekvemme at operere med, fordi man ved simple Regninger med Potensrækker atter kommer til saadanne Rækker. — Vi nævne først den selvfølgelige Sætning

I: Multiplicerer man i en Potensrække med Konvergenstallet λ og Summen $P(x)$ alle Koefficienterne (d. v. s. alle Leddene)

med en Konstant $k \neq 0$, da vil den derved fremkomne nye Potensrække atter have Konvergenstallet λ, og dens Sum vil være lig med $k \cdot P(x)$.

Vi nævner dernæst følgende (ligeledes umiddelbart indlysende) Sætning om Addition af Potensrækker.

II: Er

$$(11) \qquad P_1(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

og

$$(12) \qquad P_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

to Potensrækker med henholdsvis Konvergenstallene λ_1 og λ_2, da vil Potensrækken

$$(13) \qquad (b_0+c_0) + (b_1+c_1)x + (b_2+c_2)x^2 + \cdots + (b_n+c_n)x^n + \cdots$$

i hvert Fald være konvergent for $|x| < \lambda$, hvor λ er det mindste af Tallene λ_1 og λ_2, og Summen af denne Potensrække (13) vil for $|x| < \lambda$ være lig med $P_1(x) + P_2(x)$.

Ved at kombinere I og II finder man f. Eks., at hvis (11) og (12) begge er konvergente for $|x| < \lambda$ med henholdsvis Summen $P_1(x)$ og $P_2(x)$, da er Potensrækken $(b_0-c_0) + (b_1-c_1)x + \cdots + (b_n-c_n)x^n + \cdots$ ligeledes konvergent for $|x| < \lambda$ og med Summen $P_1(x) - P_2(x)$. Vi vil benytte dette sidste Resultat til at bevise følgende vigtige Sætning, der sædvanligvis kaldes Potensrækkernes Entydighedssætning:

Lad (11) og (12) være to Potensrækker, hvis Konvergenstal λ_1 og λ_2 begge er > 0 (d. v. s. ingen af Rækkerne er overalt divergent), og om hvilke det er givet, at der for alle x i et vist Interval $-\delta < x < \delta$ omkring $x = 0$ gælder Ligningen $P_1(x) = P_2(x)$. Da er

de to Potensrækker identiske, d. v. s. der gælder for alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ Ligningen $b_n = c_n$.

Thi vi har jo for $|x| < \lambda$ (hvor λ som ovenfor betegner det mindste af Tallene λ_1 og λ_2)

$$P_1(x) - P_2(x) = (b_0 - c_0) + (b_1 - c_1)x + \cdots + (b_n - c_n)x^n + \cdots,$$

og idet $P_1(x) - P_2(x) = 0$ for alle x i Omegnen af Punktet $x = 0$, følger det udfra en Sætning i forrige Paragraf, at $b_n - c_n = 0$, d. v. s. $b_n = c_n$, for alle n. — I los Formulering kan denne Sætning ojensynlig udtrykkes saaledes: Hvis en Funktion overhovedet kan fremstilles ved en Potensrække, kan dette kun ske paa een Maade.

Vi beviser dernæst følgende Sætning om Multiplikation af Potensrækker.

III: Lad (11) og (12) være to Potensrækker med Konvergenstallene λ_1 og λ_2. Da gælder der for $|x| < \lambda$, hvor λ betegner det mindste af Tallene λ_1 og λ_2, Ligningen

$$P_1(x) \cdot P_2(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots + d_n x^n + \cdots,$$

hvor

$$d_n = b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \cdots + b_{n-1} c_1 + b_n c_0.$$

Thi er x et vilkaarligt fast Tal indenfor Intervallet $-\lambda < x < \lambda$, ligger dette Tal (yderligere) indenfor begge Konvergensintervallerne $|x| < \lambda_1$ og $|x| < \lambda_2$, og de to Rækker med konstante Led

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

og

$$V = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

er følgelig begge absolut konvergente, hvoraf følger, at Rækken $w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$, hvor

$$w_{n+1} = u_1 v_{n+1} + u_2 v_n + \cdots + u_n v_2 + u_{n+1} v_1 \ ,$$

ligeledes er absolut konvergent, og at den har Summen $U \cdot V = P_1(x) \cdot P_2(x)$; men dette er jo netop, hvad Regnereglen udsiger, idet

$$w_{n+1} = u_1 v_{n+1} + u_2 v_n + \cdots + u_n v_2 + u_{n+1} v_1 = x^n (b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \cdots + b_{n-1} c_1 + b_n c_0) = d_n x^n \ .$$

Eks. Hvadrerer vi den for $-\infty < x < \infty$ konvergente Potensrække

$$P(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \ ,$$

finder vi, ligeledes for $-\infty < x < \infty$,

$$(P(x))^2 = 1 + \frac{2x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \left(1 + \frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} + \cdots + \frac{n!}{(n-1)!1!} + 1\right) + \cdots \ ,$$

altsaa, idet $1 + \frac{n!}{1!(n-1)!} + \cdots + \frac{n!}{(n-1)!1!} + 1 = (1+1)^n = 2^n$,

$$(P(x))^2 = 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(2x)^n}{n!} + \cdots = P(2x) .$$

Funktionen $P(x)$ tilfredsstiller altsaa for alle x Funktionalligningen $P(2x) = (P(x))^2$; vi skal senere se (hvad vi allerede her kunde udlede udfra den fundne Funktionalligning), at $P(x)$ netop er Funktionen e^x.

Vi beviser derefter følgende Sætning om Integration af Potensrækker.

IV. Lad

(14) $$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

være en vilkaarlig Potensrække med Konvergenstal $\lambda > 0$. Da gælder det indenfor hele Konvergensintervallet $-\lambda < x < \lambda$, at Potensrækken er ledvis integrabel, d. v. s. at

(15) $$Q(x) = \int_0^x P(\xi)\, d\xi = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots .$$

Thi idet Rækken $P(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \cdots$ for ethvert x, der opfylder Betingelsen $|x| < \lambda$, er ligelig konvergent i det lukkede Interval $(0, x)$, fordi dette Interval jo er et egentligt Delinterval til Rækkens Konvergensinterval, har vi Lov til at integrere denne Række ledvis over Intervallet $(0, x)$.

Eks. For den for $-\infty < x < \infty$ konvergente Potensrække

$$P(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

finder vi ved ledvis Integration, at der, ligeledes for alle x, gælder Ligningen

$$\int_0^x P(\xi)\, d\xi = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots = P(x) - 1 .$$

Af denne Ligning $P(x) = \int_0^x P(\xi)\, d\xi + 1$ følger umiddelbart, at $P(x)$ netop er Funktionen e^x; thi Ligningen viser jo, 1) at $P(x)$ er differentiabel for alle x med Differentialkvotienten $P(x)$, og 2) at $P(0) = 1$, og som vi tidligere har vist, er e^x den eneste Funktion, der har disse Egenskaber.

Vi beviser slutteligt følgende Sætning om Differentiation af Potensrækker.

V: Lad (14) være en vilkaarlig Potensrække med Konvergenstal $\lambda > 0$. Da gælder det, [1] at den ved Rækken indenfor Intervallet $-\lambda < x < \lambda$ fremstillede Funktion $F(x)$ er differentiabel i dette Interval, og [2] at dens Differentialkvotient $F'(x)$ indenfor hele Intervallet $-\lambda < x < \lambda$ kan fremstilles ved den (i Følge en tidligere Sætning for $-\lambda < x < \lambda$ konvergente) Potensrække

$$(16) \qquad a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots .$$

I los Formulering kan denne Sætning udtrykkes saaledes: En Potensrække kan differentieres ledvis indenfor hele sit Konvergensinterval.

Ved Beviset for denne Sætning er det øjensynlig tilstrækkelig at betragte et egentligt Delinterval $\alpha < x < \beta$ til Konvergensintervallet $-\lambda < x < \lambda$ i Stedet for hele dette sidste Interval, idet vi jo om et vilkaarligt givet Punkt indenfor Konvergensintervallet altid kan lægge et saadant Delinterval. Sætningens Rigtighed følger da umiddelbart udfra den tidligere beviste almindelige Sætning om ledvis Differentiation af uendelige Rækker, hvis Led er Funktioner af en Variabel x; thi i denne Sætning fordredes kun (forunden at de enkelte Led skulde være differentiable med kontinuerte Differentialkvotienter), at den ved ledvis Differentiation fremkomne nye Række skulde være ligelig konvergent indenfor det betragtede Interval $\alpha < x < \beta$, og denne Betingelse er jo her opfyldt, fordi den ved ledvis Differentiation fremkomne Række (16) jo paa ny er en Potensrække med Konvergenstallet λ og derfor er ligelig konvergent i Delintervallet $\alpha < x < \beta$.

Eks. For den for $-\infty < x < \infty$ konvergente Potensrække

$$P(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^m}{m!} + \cdots$$

finder vi ved ledvis Differentiation, at for $-\infty < x < \infty$ er

$$P'(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^m}{m!} + \cdots = P(x).$$

Vi finder altsaa $P'(x) = P(x)$ i Overensstemmelse med, at $P(x)$ jo netop er Funktionen e^x.

Ved at anvende den fundne Sætning om ledvis Differentiation af en vilkaarlig Potensrække (14) paa Differentialkvotienten $P(x)$, finder vi, at $P(x)$ paa ny er en differentiabel Funktion af x for $-\lambda < x < \lambda$, og at dens Differentialkvotient $P''(x)$ er givet ved Potensrækken

$$P''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + 4\cdot 3a_4 x^2 + \cdots + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \cdots .$$

Idet vi kan anvende denne Betragtning et ubegrænset Antal Gange, kommer vi til følgende vigtige Sætning:

Den ved en Potensrække indenfor sit Konvergensinterval $-\lambda < x < \lambda$ fremstillede Funktion $P(x)$ er en vilkaarlig ofte differentiabel Funktion af x indenfor dette Interval, og dens n^{te} Differentialkvotient $P^{(n)}(x)$ er lig med Summen af den (ligeledes for $|x| < \lambda$ konvergente) Potensrække, der fremkommer ved at differentiere den givne Potensrække n Gange ledvis.

Vi skal i de følgende Paragraffer anvende de fundne Regneregler for Potensrækker til at udlede Potensrækker for nogle specielle, særlig vigtige Funktioner; for een saadan Funktion, nemlig e^x, har vi allerede gjort dette.

20. Potensrækker for $l.(1+x)$ og for Arctg x. Funktionen $l.(1+x)$ er defineret for $x > -1$, og der gælder for ethvert saadant x Formlen

$$l.(1+x) = \int_0^x \frac{d\xi}{1+\xi} .$$

Her kan den under Integraltegnet staaende Funktion $\frac{1}{1+\xi}$ for $|\xi| < 1$ fremstilles ved en konvergent Potensrække, nemlig ved Kvotientrækken (med Kvotienten $-\xi$)

$$\frac{1}{1+\xi} = 1 - \xi + \xi^2 - \xi^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \xi^{n-1} + \cdots .$$

Begrænser vi x til kun at variere indenfor Intervallet $-1 < x < 1$, finder vi følgelig udfra Sætningen om ledvis Integration af en Potensrække, at

$$(17) \quad l.(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots \qquad (-1 < x < 1) .$$

Paa Tilsvarende Maade finder vi en Potensrækkeudvikling for Arctg x. Vi gaar her udfra den for $-\infty < x < \infty$ gyldige Formel

$$\text{Arctg}\, x = \int_0^x \frac{d\xi}{1+\xi^2} ,$$

og finder, idet den under Integraltegnet staaende Funktion $\frac{1}{1+\xi^2}$ for $\xi^2 < 1$, d.v.s. for $-1 < \xi < 1$, kan fremstilles ved Kvotientrækken

$$\frac{1}{1+\xi^2} = 1 - \xi^2 + \xi^4 - \xi^6 + \cdots + (-1)^n \xi^{2n} + \cdots ,$$

at for $-1 < x < 1$ er

(18) $$\operatorname{Arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots .$$

Vi fremhæver, at skønt Arctg x jo er defineret (og vilkaarlig ofte differentiabel) for $-\infty < x < \infty$, er den fundne Potensrække for Arctg x kun brugelig (d. v. s. konvergent) for $-1 < x < 1$.

21. <u>Potensrække for e^x.</u> Vi skal i denne Paragraf angive en Metode, der ofte kan benyttes til at fremstille en given simpel Funktion i Potensrække, og som tager i sit Udgangspunkt den, at man karakteriserer den givne Funktion derved, at den er <u>partikulært Integral i en eller anden simpel Differentialligning.</u> Vi begynder med, som et særlig simpelt Eksempel paa denne Metode, at søge en Potensrækkeudvikling for Funktionen <u>$y = e^x$</u> (skønt vi jo allerede i Forvejen kender Resultatet). Vi karakteriserer herfor $y = e^x$ som <u>det partikulære Integral i Differentialligningen</u>

$$\frac{dy}{dx} - y = 0 ,$$

<u>der indeholder Punktet (0, 1)</u>, d. v. s. som for $x = 0$ antager Værdien $y = 1$. Vi sætter nu (idet vi foreløbig regner rent „formelt", d. v. s. uden at vi bekymrer os om Konvergens) det omhandlede Integral $y = e^x$ lig med Potensrækken

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots ,$$

hvor Koefficienterne a_n er <u>ubekendte Tal</u>, som det er vor Opgave at bestemme. Denne Potensrække indsætter vi i Differentialligningen $\frac{dy}{dx} - y = 0$, hvorved vi finder Ligningen

$$(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots) - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots)$$

$$= (a_1 - a_0) + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2)x^2 + \cdots + (na_n - a_{n-1})x^{n-1} + \cdots = 0,$$

altsaa, idet vi sætter samtlige Koefficienter i Potensrækken paa venstre Side af Ligheds tegnet lig med 0, de uendelig mange Ligninger med uendelig mange Ubekendte:

$$a_1 = a_0, \quad a_2 = \frac{a_1}{2}, \quad a_3 = \frac{a_2}{3}, \quad \cdots \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{n}, \quad \cdots .$$

Idet endvidere $a_0 = 1$, fordi $x = 0$ jo skal give $y = 1$, finder vi heraf

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{1!}, \quad a_2 = \frac{1}{2!}, \quad a_3 = \frac{1}{3!}, \quad \cdots \quad a_n = \frac{1}{n!}, \quad \cdots,$$

altsaa

$$(19) \qquad y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

Resultatet af de foregaaende Regninger kan øjensynlig udtrykkes saaledes: den fundne Potensrække (19) vil, naar vi indsætter den i Differentialligningen $\frac{dy}{dx} - y = 0$, tilfredsstille denne rent formelt. Nu viser det sig imidlertid bagefter, at den fundne Potensrække (19) er konvergent for $-\infty < x < \infty$, og derfor kan vi nu bagefter, udfra de almindelige Regneregler om Potensrækker (hvoraf vi her dog kun har haft Anledning til at benytte Sætningen om, at en Potensrække kan differentieres ledvis), indse, at fordi Potensrækken (19) formelt tilfredsstiller den omhandlede Differentialligning, maa den ved Potensrækken fremstillede Funktion $y(x)$ virkelig være et Ud-

tegral til Differentialligningen indenfor hele Rækkens Konvergensinterval, og et saadant Integral, hvis geometriske Billede gaar gennem Punktet (0,1); men dette betyder jo netop, at den ved den fundne Potensrække (19) for $-\infty < x < \infty$ fremstillede Funktion $P(x)$ maa være Funktionen e^x, fordi denne sidste Funktion jo er entydigt karakteriseret som det partikulære Integral til $\frac{dy}{dx} - y = 0$, der gaar gennem Punktet (0,1).

22. Potensrækker for $(1+x)^m$ og Arcsin x. Den samme Metode, som vi i 21 anvendte til at udlede en Potensrække for e^x, vil vi her benytte overfor den for $x > -1$ definerede Funktion $(1+x)^m$, hvor m er et fuldkommen vilkaarligt (reelt) Tal, om hvilket vi blot vil antage, at det ikke netop er et helt Tal ≥ 0. Vi karakteriserer her $y = (1+x)^m$ som det partikulære Integral til Differentialligningen

$$(20) \qquad (1+x)\frac{dy}{dx} - my = 0,$$

der gaar gennem Punktet (0,1), hvorved Funktionen $y = (1+x)^m$ er entydigt karakteriseret. Vi sætter $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ og finder ved Indsættelse i Differentialligningen (20)

$$(1+x)(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots) - m(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots)$$

$$= (a_1 - ma_0) + (a_1 + 2a_2 - ma_1)x + (2a_2 + 3a_3 - ma_2)x^2 + \cdots + ((n-1)a_{n-1} + na_n - ma_{n-1})x^{n-1} + \cdots = 0,$$

altsaa, idet vi sætter samtlige Koefficienter lig med 0,

$$a_1 = ma_0,\ a_2 = \frac{m-1}{2}a_1,\ a_3 = \frac{m-2}{3}a_2, \cdots a_n = \frac{m-n+1}{n}a_{n-1}, \cdots.$$

Idet $a_0 = 1$ (fordi $x = 0$ skal give $y = 1$), finder vi heraf successivt

$$a_1 = \frac{m}{1}\ ,\ a_2 = \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\ ,\ a_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\ ,\ \ldots\ \ a_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}\ ,\ \ldots$$

altsaa

$$(21)\qquad y = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}x^n \ldots .$$

Denne (foreløbig reent formelt udledte) Potensrække (21) er, som vi tidligere har vist, <u>konvergent for $-1 < x < 1$</u>. Heraf slutter vi da <u>ligeledes</u> (ganske som i det forrige Tilfælde), <u>at den ved Potensrækken (21) for $-1 < x < 1$ fremstillede Funktion virkelig maa være et partikulært Integral til Differentialligningen (20)</u>, og et saadant, der gaar gennem Punktet $(0,1)$, d.v.s. <u>Potensrækken (21) fremstiller indenfor sit Konvergensinterval $-1 < x < 1$ netop Funktionen $(1+x)^m$</u>. Den fundne Potensrække for $(1+x)^m$ kaldes sædvanligvis <u>Binomialrækken.</u>

Sætter vi i Binomialrækken specielt <u>$m = -\frac{1}{2}$</u>, samt skriver vi $-x^2$ i Stedet for x, finder vi for $-1 < x < 1$

$$(22)\qquad (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8 + \ldots .$$

Nu er imidlertid for $-1 < x < 1$

$$\operatorname{Aresin} x = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \int_0^x (1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\, d\xi\ ,$$

og vi finder følgelig, ved ledvis Integration af Rækken (22), Formlen

$$\operatorname{Aresin} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{x^9}{9} + \ldots \qquad (-1 < x < 1).$$

23. <u>Potensrækker for $\cos x$ og $\sin x$</u>. I de foregaaende Paragraffer

Har vi bestemt Potensrækker for nogle specielle Funktioner ved at karakterisere disse som partikulære Integraler til Differentialligninger af 1ste Orden. Ganske den samme Metode kan benyttes ved Differentialligninger af 2den Orden (eller af højere Orden), og som et karakteristisk Eksempel herpaa vil vi ad denne Vej bestemme Potensrækkeudviklinger for Funktionerne $y = \cos x$ og $y = \sin x$. Vi karakteriserer herfra $\cos x$ og $\sin x$ som de partikulære Integraler til Differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \,, \tag{23}$$

der indeholder henholdsvis Linieelementet $(0, 1, 0)$ og $(0, 0, 1)$, hvorved disse Funktioner jo er entydigt karakteriseret. Ganske som i de tidligere Tilfælde sætter vi $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, hvor Koefficienterne foreløbig er ubekendte Tal, og finder ved Formel Indsættelse i Differentialligningen (23)

$$(2 \cdot 1 a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + \cdots + (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \cdots) + (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots)$$

$$= (1 \cdot 2 a_2 + a_0) + (2 \cdot 3 a_3 + a_1) x + (3 \cdot 4 a_4 + a_2) x^2 + \cdots + ((n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n) x^n + \cdots = 0 \,,$$

hvoraf følger

$$a_2 = -\frac{a_0}{1 \cdot 2} \,, \quad a_3 = -\frac{a_1}{2 \cdot 3} \,, \quad a_4 = -\frac{a_2}{3 \cdot 4} \,, \quad \cdots \quad a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)} \,, \quad \cdots \,;$$

For $y = \cos x$ har vi $a_0 = \cos(0) = 1$, $a_1 = \cos'(0) = -\sin(0) = 0$, altsaa

$$a_{2n+1} = 0 \,, \quad a_0 = 1 \,, \quad a_2 = -\frac{1}{1 \cdot 2} \,, \quad a_4 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \,, \quad \cdots \quad a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \,, \cdots \,,$$

medens vi for $y = \sin x$ har $a_0 = \sin(0) = 0$, $a_1 = \sin'(0) = \cos(0) = 1$, altsaa

$$a_{2m}=0\ ,\ a_1=1\ ,\ a_3=-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\ ,\ a_5=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\ ,\ \cdots\ a_{2m+1}=(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}\ ,\ \cdots$$

Vi har altsaa (foreløbig rent formelt) fundet

$$(24)\qquad \cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots$$

og

$$(25)\qquad \sin x = \frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

Nu er imidlertid, som vi tidligere har vist, de fundne to Potensrækker begge <u>konvergente for $-\infty < x < \infty$</u>. Heraf slutter vi da bagefter (idet de hidtil kun formelle Regninger nu kan tillægges Realitet), at de fundne Potensrækker virkelig fremstiller <u>Funktionerne $\cos x$ og $\sin x$ for alle Værdier af x.</u>

<u>Eks.</u> Vi tilføjer til Orientering, at hvis vi blot kender den <u>ene</u> af de to fundne Formler (24) og (25), kan vi derudfra umiddelbart udlede den <u>anden</u>. Lad os f. Eks. antage, at vi kender Potensrækken (24) for $\cos x$; vi kan da derudfra straks finde Potensrækken (25) for $\sin x$, enten ved <u>ledvis Integration</u> af (24) eller ved <u>ledvis Differentiation</u> af (24), idet vi i det sidste Tilfælde bagefter multiplicerer med Faktoren -1.

<u>24. Den Besselske Funktion $J(x)$.</u> Den nye Metode til Løsning af Differentialligninger, som vi ovenfor har lært at kende, og som sædvanligvis kaldes <u>Integration ved Hjælp af Potensrækker</u>, har vi i de foregaaende Paragraffer benyttet til at finde Potensrækkeudviklingen for nogle specielle vigtige Funktioner, som vi karakteriserede som partikulære Integraler i simple Differentialligninger. Vi skal nu omtale en <u>væsentlig anderledes Brug</u> af denne Integrationsmetode, idet vi ved et Eksempel skal vise, hvorledes Metoden undertiden

kan anvendes med Fordel overfor Differentialligninger, som vi kun vanskeligt (eller slet ikke) kan beherske ved Hjælp af de i 2det Afsnit omtalte Integrationsmetoder, fordi de der nævnte specielle Metoder ikke kan benyttes, og fordi de successive Approksimationers Metode vil føre altfor langsomt og kun gennem betydelige Regninger til Maalet. Til dette Eksempel paa en Differentialligning, som lettest løses ved Hjælp af Potensrækkemetoden, vælger vi den Besselske Differentialligning

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0, \tag{26}$$

som vi allerede tidligere har omtalt (se Afsnit II, 133), og for hvilken det jo gjaldt, at der overhovedet ikke fandtes noget egentligt partikulært Integral, der kunde udtrykkes eksplicit ved de sædvanligvis benyttede Funktionstegn. Udfra den almindelige Teori om lineære homogene Differentialligninger af 2den Orden kunde vi i sin Tid umiddelbart vise, at der gennem ethvert Linieelement (x_0, y_0, p_0), for hvilket $x_0 \neq 0$, gik en og kun een Integralkurve til (26); derimod kunde vi dengang intet sluttet om, hvorvidt der eksisterede Integralkurver (bortset fra den trivielle Løsning $y = 0$), der skar Ordinataksen $x = 0$, d. v. s. som forbandt de to Halvplaner $x > 0$ og $x < 0$ med hinanden. Vi er nu i Stand til at bevise, at der eksisterer saadanne Integralkurver, idet vi kan vise, at der findes en Integralkurve $y = \varphi(x)$, som gaar gennem Punktet $(0, 1)$, og som kan fremstilles ved en Potensrække.

Vi sætter $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ og finder ved Indsættelse i den Besselske Differentialligning

$$x(2\cdot 1a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots+(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\cdots)+(a_1+2a_2x+\cdots+(n+1)a_{n+1}x^n+\cdots)+x(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots)$$

$$=a_1+(2\cdot 1a_2+2a_2+a_0)x+(3\cdot 2a_3+3a_3+a_1)x^2+\cdots+((n+1)na_{n+1}+(n+1)a_{n+1}+a_{n-1})x^n+\cdots=0,$$

altsaa

$$a_1=0,\quad 2^2\cdot a_2+a_0=0,\quad 3^2a_3+a_1=0,\quad \cdots\quad (n+1)^2a_{n+1}+a_{n-1}=0,\quad \cdots.$$

Idet $\underline{a_0=1}$ (fordi $x=0$ skal give $y=1$), finder vi heraf

$$a_{2n+1}=0,\quad a_0=1,\quad a_2=-\frac{1}{2^2},\quad a_4=\frac{1}{2^2\cdot 4^2},\quad \cdots\quad a_{2n}=(-1)^n\frac{1}{2^2\cdot 4^2\cdots(2n)^2},\quad \cdots$$

altsaa

$$(27)\qquad y=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\frac{x^8}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}-\cdots.$$

Idet den (ved de foreløbig rent formelle Regninger) fundne Potensrække (27), som vi tidligere har vist, er <u>konvergent for $-\infty<x<\infty$</u>, kan vi nu tilsidst slutte, <u>at den ved denne Potensrække (27) for $-\infty<x<\infty$ fremstillede Funktion $P(x)$ virkelig er et Integral til den Besselske Differentialligning, og et saadant, som for $x=0$ antager Værdien $y=1$</u>. Denne (for alle Værdier af x definerede) Funktion $P(x)$ betegnes sædvanligvis med $\underline{\phi(x)}$ og kaldes <u>den Besselske Funktion</u>.

Den Besselske Funktion $\phi(x)$ kan vises at have <u>uendelig mange Nulpunkter</u>; idet $\phi(0)=1$, er det imidlertid muligt at afgrænse et saadant (saa lille) Interval $-\alpha<x<\alpha$ omkring Punktet 0, <u>at indenfor dette Interval $-\alpha<x<\alpha$ har $\phi(x)$ ingen Nulpunkter</u>. Vi kan derfor indenfor ethvert af de to Intervaller

$-\infty < x < 0$ og $0 < x < \infty$ umiddelbart bestemme det fuldstændige Integral til den Besselske Differentialligning $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$, idet vi jo for ethvert af disse Intervallers vedkommende kender et partikulært Integral, nemlig $\varphi_1(x) = \phi(x)$, der er helt igennem $\neq 0$. I Følge en Hovedsætning indenfor Læren om lineære homogene Differentialligninger af 2den Orden, vil jo nemlig det fuldstændige Integral i ethvert af de to Intervaller være givet ved Formlen

$$y = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = c_1\phi(x) + c_2\varphi_2(x),$$

hvor

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x)\int \frac{1}{(\varphi_1(x))^2}\cdot e^{-\int f_1(x)dx}dx = \phi(x)\int \frac{1}{(\phi(x))^2}e^{-\int \frac{1}{x}dx}$$

$$= \pm\phi(x)\int (\phi(x))^{-2}\cdot\frac{1}{x}\,dx.$$

Vi vil skridtvis undersøge, hvorledes Funktionen $\varphi_2(x)$ forholder sig for $x \to 0$ eller $0 \leftarrow x$. Hertil bemærker vi at for $x \to 0 \leftarrow x$ kan den under Integraltegnet staaende Funktion $(\phi(x))^{-2}\cdot\frac{1}{x}$ skrives paa Formen

$$(\phi(x))^{-2}\cdot\frac{1}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{4} + \sigma(x^2)\right)^{-2}\cdot\frac{1}{x} = \left(1 + \frac{x^2}{2} + \sigma(x^2)\right)\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x} + \sigma(1),$$

d. v. s. den er lig med $\frac{1}{x} + f(x)$, hvor $f(x)$ har en „havelig Diskontinuitet" i Punktet 0, idet jo $f(x) \to 0$ for $x \to 0 \leftarrow x$. Heraf følger nemlig straks, at

$$\pm\varphi_2(x) = \phi(x)\int\left(\frac{1}{x} + f(x)\right)dx = \phi(x)\cdot l\cdot|x| + \phi(x)\cdot g(x),$$

hvor $g(x) = \int f(x)\,dx$ nærmer sig til en endelig og bestemt Grænseværdi for $x \to 0 \leftarrow x$. Idet saaledes $|\varphi_2(x)| \to \infty$ for $x \to 0 \leftarrow x$, har vi

hermed bevist (hvad vi allerede omtalte ved den tidligere skitsemassige Behandling af den Besselske Differentialligning), at af de dobbelt uendelig mange Integraler $y = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x)$ i enhver af de to Halvplaner $x > 0$ og $x < 0$ vil kun en enkelt Undtagelse, nemlig de for hvilke $c_2 = 0$, have sig Vej fra den ene Halvplan til den anden, medens alle de andre vil nærme sig asymptotisk til Linien $x = 0$, naar $0 \leftarrow x$ eller $x \to 0$.

25. Om Potensrækkes Forhold i Konvergensintervallets Endepunkter. Lad

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{28}$$

være en vilkaarlig Potensrække, der hverken er overalt konvergent eller overalt divergent, d. v. s. hvis Konvergenstal λ er > 0 og $< \infty$. For en saadan Potensrække kan det, som vi tidligere har set, indtraffe, at den er konvergent i begge Konvergensintervallets Endepunkter λ og $-\lambda$, at den er divergent i dem begge, eller at den er konvergent i det ene, divergent i det andet. I det Tilfælde, hvor Rækken er konvergent i mindst et af Punkterne λ og $-\lambda$, f. Eks. i Punktet $+\lambda$, gælder der følgende simple Sætning, som vi her blot nævner til Orientering uden at komme ind paa Beviset for den.

Er Potensrækken (28) konvergent med Summen A i Endepunktet λ for Konvergensintervallet $-\lambda < x < \lambda$, da vil den indenfor Konvergensintervallet ved Rækken fremstillede Funktion $P(x)$ nærme sig til Grænseværdien A, naar $x \to \lambda$.

Eks. Potensrækken

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots \tag{29}$$

har Konvergenstallet $\lambda = 1$ og fremstiller indenfor Konvergensin-

tervallet $-1 < x < 1$ Funktionen $P(x) = l\cdot(1+x)$. Potensrækken er <u>konvergent i Endepunktet $+1$</u>, idet Rækken

(30) $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \cdots$$

jo er konvergent. Den ovenfor nævnte Sætning lærer os, <u>at Summen af denne Række (30) netop er Tallet $l\cdot 2$</u>, idet jo $P(x) = l\cdot(1+x) \to l\cdot 2$ for $x \to 1$. Vi tilføjer, at i dette specielle Tilfælde kan vi iøvrigt umiddelbart (uden at gøre Brug af den nævnte almindelige Sætning) vise, at Rækken (30) virkelig har Summen $l\cdot 2$; thi vi har jo tidligere (se Aftrit 2, 146) ved Hjælp af Maclaurins Formel bevist, at

$$l\cdot 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{\theta}{n}, \quad (0 < \theta = \theta(n) < 1),$$

altsaa at

$$l\cdot 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots + (-1)^n \frac{1}{n-1}\right) = (-1)^{n+1} \frac{\theta}{n} \to 0 \qquad \text{for } n \to \infty,$$

hvilken sidste Grænseformel netop udsiger, at Rækken (30) er konvergent med Summen $l\cdot 2$.

Den nævnte Sætning kan almindeliggøres til følgende Sætning, som vi ligeledes blot nævner uden at give Beviset for den.

<u>Er Potensrækken (28) summabel med Summen A i Endepunktet x for Konvergensintervallet $-\lambda < x < \lambda$, da vil dens indenfor Konvergensintervallet $-\lambda < x < \lambda$ ved Rækken frembragte Funktion $P(x)$ nærme sig til Grænseværdien A for $x \to \lambda$.</u>

<u>Eks.</u> Potensrækken

(31) $$1-x+x^2-x^3+x^4\cdots$$

har Konvergenstallet $\lambda = 1$ og fremstiller inden for Konvergensintervallet $-1 < x < 1$ Funktionen $P(x) = \frac{1}{1+x}$. Potensrækken er summabel i Endepunktet $+1$ med Summen $\frac{1}{2}$, idet Rækken

(32) $$1-1+1-1+1-1\cdots$$

jo er summabel med Summen $\frac{1}{2}$. I Overensstemmelse med den nævnte almindelige Sætning gælder det da ogsaa, at $P(x) = \frac{1}{1+x} \to \frac{1}{2}$ for $x \to 1$.

Den sidstnævnte Sætning viser os, at det for Undersøgelsen af en Potensrækkes Forhold i Konvergensintervallets Endepunkter kan være af Betydning at indføre Begrebet Summabilitet. Der rejser sig imidlertid naturligt det Spørgsmaal, om dette Begreb ikke skulde kunne finde en væsentlig videregaaende Anvendelse inden for Potensrækkernes Teori, d. v. s. om der ikke skulde findes Potensrækker, der er summable ogsaa for Værdier af x, der er numerisk $> \lambda$. Vi vil bevise, at dette ikke er Tilfældet, idet vi vil bevise følgende Sætning:

En Potensrække (28) med Konvergenstal $\lambda < \infty$ er ikke summabel i noget Punkt x_0, for hvilket $|x_0| > \lambda$.

Bevis: I det enhver summabel Række $u_1 + u_2 + \cdots$ opfylder Betingelsen $\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \cdot u_m = 0$, er Sætningen øjensynlig bevist, naar vi har eftervist, at i ethvert Punkt x_0, for hvilket $|x_0| > \lambda$, divergerer Rækken

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_m x_0^m + \cdots$$

saa „stærkt", at Betingelsen $\lim \frac{1}{n} a_n x_0^n = 0$ ikke kan være opfyldt. Vi vil endog bevise, <u>at der ikke findes noget saadant (d. v. s. saa stort) Tal r, at der for alle n gælder Uligheden $|a_n x_0^n| < k \cdot n^r$, hvori k er en Konstant.</u> Thi var $|a_n x_0^n| < k \cdot n^r$ for alle n, vilde Potensrækken være konvergent i ethvert Punkt x_1, der var numerisk mindre end x_0 (i Strid med at $\lambda < |x_0|$), fordi Rækken med positive Led

$$|a_1 x_1| + \cdots + |a_n x_1^n| + \cdots = |a_1 x_0| \cdot \left|\frac{x_1}{x_0}\right| + \cdots + |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x_1}{x_0}\right|^n + \cdots$$

jo da vilde have sine Led mindre end de tilsvarende Led i Rækken

$$k \cdot 1^r \left|\frac{x_1}{x_0}\right| + k \cdot 2^r \left|\frac{x_1}{x_0}\right|^2 + \cdots + k \cdot n^r \left|\frac{x_1}{x_0}\right|^n + \cdots ,$$

hvilken sidste Række vides at være konvergent, fordi Potensrækken $1^r x + 2^r x^2 + \cdots + n^r x^n + \cdots$ jo er konvergent for $|x| < 1$.

Det er altsaa kun ved saadanne specielle Undersøgelser over Potensrækker, der vedrører Potensrækkens Forhold i <u>Konvergensintervallets Endepunkter</u>, at det kan være af Betydning at indføre Begrebet Summabilitet.

26. <u>Betingelse for, at en Funktion kan fremstilles ved en Potensrække.</u> I den foregaaende Behandling af Potensrækkernes Teori har vi bl. a. vist, hvorledes der blandt de for Anvendelserne særlig vigtige specielle Funktioner findes talrige, saasom e^x, $\cos x$, $l \cdot (1+x)$, . . . , der kan fremstilles ved Potensrækker. Vi skal nu i denne Paragraf afslutte vor Gennemgang af Læren om Potensrækker med at søge en almindelig <u>Afgrænsning</u> for Omraadet af de Funktioner, der overhovedet kan fremstilles ved Potensrækker, altsaa med at be-

handle det almindelige Problem, hvilke Betingelser en Funktion maa opfylde for at kunne udvikles i Potensrække.

Lad $f(x)$ være en Funktion af x, givet os indenfor et Interval $-\alpha < x < \alpha$ omkring Punktet $x = 0$ som Midtpunkt. Idet enhver Funktion $P(x)$, der er fremstillet ved en Potensrække $a_0 + a_1 x + \cdots$, jo er vilkaarlig ofte differentiabel indenfor hele Rækkens Konvergensinterval, har vi for det første umiddelbart, at en nødvendig Betingelse for, at den indenfor Intervallet $-\alpha < x < \alpha$ givne Funktion $f(x)$ skal kunne fremstilles ved en indenfor dette Interval konvergent Potensrække, bestaar deri, at $f(x)$ er vilkaarlig ofte differentiabel i hele Intervallet $-\alpha < x < \alpha$.

Vi beviser dernæst følgende vigtige Sætning:

Hvis en indenfor et Interval $-\alpha < x < \alpha$ vilkaarlig ofte differentiabel Funktion $f(x)$ overhovedet kan fremstilles ved en Potensrække (med Konvergenstal $\lambda > 0$), da maa denne Række nødvendigvis være Funktionens Maclaurin'ske Potensrække, idet vi herved forstaar Potensrækken

$$(33) \qquad f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots .$$

Thi kan $f(x)$ fremstilles ved en Potensrække

$$(34) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (-\lambda < x < \lambda),$$

finder vi straks ved at sætte $x = 0$, at $f(0) = a_0$, og differentierer vi (34) n-Gange ledvis (hvad der er tilladeligt) og indsætter derefter $x = 0$, finder vi $f^{(n)}(0) = n!\, a_n$, altsaa $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$; men hermed er jo netop bevist, at (34) maa være Funktionens Maclaurinske Potensrække.

Man kan vise (hvad vi dog ikke her skal komme ind paa), at der eksisterer Funktioner $f(x)$, der er vilkaarlig ofte differentiable i et Interval omkring Punktet 0, men hvis Maclaurinske Potensrække er overalt divergent. Saadanne Funktioner $f(x)$ kan altsaa sikkert ikke udvikles i Potensrække, og hermed følger da specielt, at den formentlig nødvendige Betingelse for, at en Funktion $f(x)$ skal kunne fremstilles ved en Potensrække, nemlig den, at $f(x)$ skal være vilkaarlig ofte differentiabel i et Interval omkring Punktet $x = 0$, ikke er nogen tilstrækkelig Betingelse.

Vi betragter nu en Funktion $f(x)$, der er vilkaarlig ofte differentiabel i et Interval $-\alpha < x < \alpha$, og om hvilken vi yderligere forudsætter, at dens Maclaurinske Potensrække er konvergent i dette Interval $-\alpha < x < \alpha$. Vi ved da i Følge det foregaaende, at hvis Funktionen $f(x)$ overhovedet kan fremstilles ved en Potensrække, maa dette være Rækken (33); derimod ved vi foreløbig intetsomhelst om, hvorvidt (33) virkelig altid fremstiller Funktionen $f(x)$, eller om det muligvis kan indtræffe, at en Funktions Maclaurinske Potensrække er konvergent, uden at dens Sum er lig med den givne Funktion. Vi vil ved et simpelt Eksempel vise, at dette sidste virkelig kan være Tilfældet. Vi betragter hertil Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases};$$

denne Funktion $f(x)$ er (se Afsnit II, 137) vilkaarlig ofte differentiabel for alle x, og det gælder om den, at $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = 0$, hvoraf følger, at dens Maclaurinske Potensrække

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots + 0 \cdot x^n + \cdots$$

er konvergent for alle x med Summen 0; om denne Funktion $f(x)$ gælder det altsaa, at dens Maclaurinske Potensrække er konvergent (endog for alle x), men uden at fremstille Funktionen $f(x)$, idet jo $f(x) \neq 0$ for alle $x \neq 0$.

Vi resumerer de foregaaende Resultater paa følgende Maade: For at en i et Interval $-\alpha < x < \alpha$ vilkaarlig ofte differentiabel Funktion $f(x)$ skal kunne fremstilles ved en i dette Interval konvergent Potensrække (hvilken Række nødvendigvis maa være Funktionens Maclaurinske Potensrække), er det en nødvendig Betingelse, at Rækken

$$(33) \qquad f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

er konvergent i Intervallet $-\alpha < x < \alpha$, men denne Betingelse er ikke tilstrækkelig, idet det kan indtraffe, at (33) er konvergent for $-\alpha < x < \alpha$ uden at have Funktionen $f(x)$ til Sum. — En samtidig nødvendig og tilstrækkelig Betingelse for, at $f(x)$ skal kunne fremstilles ved en i Intervallet $-\alpha < x < \alpha$ konvergent Potensrække, har vi imidlertid deri, at for ethvert fast x i Intervallet $-\alpha < x < \alpha$ skal

$$f(x) - \left\{ f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} \right\} \to 0 \quad \text{for } n \to \infty;$$

thi denne Betingelse fordrer jo paa samme Tid, at Rækken (33) skal være konvergent for $-\alpha < x < \alpha$ og at den skal have Summen $f(x)$. Nu kan imidlertid i Følge Maclaurins Formel (se Afsnit II, 140) Størrelsen $f(x) - \left\{ f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} \right\}$ skrives paa Formen

$$\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n \qquad (0 < \theta < 1),$$

og hermed har vi da fundet det fundamentale Resultat, at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at en i et Interval $-\alpha < x < \alpha$ vilkaarlig ofte differentiabel Funktion $f(x)$ kan fremstilles ved en i dette Interval konvergent Potensrække (nemlig den Maclaurinske Potensrække) bestaar deri, at for ethvert fast x i dette Interval skal $\frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x) \to 0$ for $n \to \infty$; her betyder θ en (i Almindelighed ubekendt) Funktion af x og n, om hvilken vi blot ved, at den stedse ligger imellem 0 og 1.

Eks. Funktionen e^x er vilkaarlig ofte differentiabel for alle x, og det gælder for ethvert fast $x \neq 0$, at

$$\left|\frac{x^n}{n!} \cdot f^{(n)}(\theta x)\right| = \left|\frac{x^n}{n!}\right| e^{\theta x} < k \cdot \left|\frac{x^n}{n!}\right| ,$$

hvor $k = \begin{cases} e^x & \text{for } x > 0 \\ e^0 = 1 & \text{for } x < 0 \end{cases}$ er uafhængig af n. Idet $\frac{x^n}{n!} \to 0$ for $n \to \infty$ (fordi $\frac{x}{n} \to 0$), vil følgelig $\frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x) \to 0$ for $n \to \infty$, og Funktionen e^x kan altsaa (som vi jo allerede tidligere har vist, endog paa flere forskellige Maader) for alle x fremstilles ved en Potensrække, nemlig ved sin Maclaurinske Potensrække

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

Resultatet af Undersøgelsen i denne Paragraf kan vi i lös Formulering udtrykke saaledes, at det, set fra et almindeligt funktionsteoretisk Synspunkt, kun er en meget begrænset Klasse af Funktioner, der kan udvikles i Potensrække, og at dette maaske tydeligst fremgaar deraf, at hvis en Funktion i et Interval $-\alpha < x < \alpha$ overhovedet kan fremstilles ved en Potensrække, da er denne Potensrække (og dermed Funktionen) fuldstændig bestemt i hele Intervallet $-\alpha < x < \alpha$,

naar man blot kender Funktionen i et vilkaarligt lille Delinterval $-\delta < x < \delta$ omkring $x = 0$; thi Potensrækkens Koefficienter er jo bestemt alene ved de Værdier, som Funktionen og dens Differentialkvotienter antager i selve Punktet $x = 0$, og disse Værdier afhænger jo kun af Funktionens Forhold i en „uendelig lille" Omegn af Punktet 0.

Opg. 17. Bestem Konvergensstadiet for enhver af de to Potensrækker

$$(2\log 3)x + (\log 4)x^2 + \cdots + (2^n \cdot n^{-2}\log(n+2))x^n + \cdots$$

og

$$(2\log 10)x + (2^2\log 13)x^2 + \cdots + (2^n \log(3n+7))x^n + \cdots$$

og undersøg Potensrækkernes Forhold i Konvergensintervallets Endepunkter.

Opg. 18. Bestem Konvergensstadiet for Potensrækken

$$ax - b^2x^2 + a^3x^3 - b^4x^4 + \cdots + a^{2n-1}x^{2n-1} - b^{2n}x^{2n} + \cdots,$$

hvor a og b er to positive Tal.

Opg. 19. Bevis Formlerne $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ og $2\cos x \sin x = \sin 2x$ ved Benyttelse af Potensrækkerne for $\cos x$ og $\sin x$.

Opg. 20. Find Potensrækker for $\mathrm{Cos}\, x$ og $\mathrm{Sin}\, x$ saavel ved Hjælp af Definitionsligningerne $\mathrm{Cos}\, x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\mathrm{Sin}\, x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ som ogsaa ved at benytte, at $y = \mathrm{Cos}\, x$ og $y = \mathrm{Sin}\, x$ kan (eentydigt) karakteriseres som de par-

tikulære Integraler til Differentialligningen $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$, der indeholder henholdsvis Linieelementet $(0,1,0)$ og $(0,0,1)$.

Opg. 21. Angiv Potensrækker for $\cos x$ og $\sin x$ (se forrige Opgave) og udled ved Hjælp af de fundne Potensrækker de (kendte) Formler

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \quad \int_0^x \sin t \, dt = \cos x - 1, \quad \cos^2 x - \sin^2 x = 1.$$

Opg. 22. Udled de første 5 Led i Potensrækkeudviklingen for $y = e^x \cos x$ 1) ved Multiplikation af Potensrækkerne for e^x og $\cos x$, 2) ved Hjælp af Maclaurins Formel, og endelig 3) ved at karakterisere Funktionen $y = e^x \cos x$ som det partikulære Integral til Differentialligningen $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$, der indeholder Linieelementet $(0,1,1)$.

Opg. 23. Udled ved i Formlen $(1+x)^\alpha (1+x)^\beta = (1+x)^{\alpha+\beta}$, hvor α og β er to vilkaarlige Tal, at indføre Potensrækkerne for de indgaaende Funktioner, den rigtige Formel

$$\binom{\alpha+\beta}{n} = \binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{n} + \binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{n-1} + \binom{\alpha}{2}\binom{\beta}{n-2} + \cdots + \binom{\alpha}{n-1}\binom{\beta}{1} + \binom{\alpha}{n}\binom{\beta}{0},$$

hvor $\binom{\alpha}{0} = 1$ og $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n}$.

Opg. 24. Bevis, at Potensrækken

$$\frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{x^n}{(n-2)(n-1)n} + \cdots$$

har Konvergensstallet $r = 1$, og find dernæst (ved at differentiere Rækken 2 Gange ledvis og bagefter integrere to Gange) den ved Rækken for $-1 < x < 1$ fremstillede Funktion. Bevis slutteligt, at Rækken

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n} + \cdots$$

er konvergent, og find Rækkens Sum.

Opg. 25. Det er klart, at hvis en Potensrække $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ med Konvergenstal $\lambda > 0$ kun indeholder ulige Potenser af x (d. v. s. $a_0 = a_2 = a_4 = \cdots = 0$), da er den ved Rækken indenfor Konvergensintervallet $-\lambda < x < \lambda$ fremstillede Funktion $f(x)$ en ulige Funktion af x. Bevis omvendt (ved Hjælp af Entydighedssætningen), at hvis $f(x)$ er en indenfor et Interval $-\alpha < x < \alpha$ ulige Funktion, som overhovedet kan fremstilles ved en Potensrække, da indeholder denne Potensrække kun ulige Potenser af x. Formuler og bevis den tilsvarende Sætning om lige Funktioner.

Fourierske Rækker.

27. Indledende Bemærkninger. Ved en trigonometrisk Række forstaas en uendelig Række af Formen

$$(1)\quad \tfrac{1}{2}a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\cdots+(a_m\cos mx+b_m\sin mx)+\cdots,$$

hvor saavel „Cosinuskoefficienterne" $a_0, a_1, \ldots a_m, \ldots$ som ogsaa „Sinuskoefficienterne" $b_1, b_2, \ldots b_m, \ldots$ er givne Tal, medens x er en Variabel. Idet Rækken (1) forbliver uforandret, naar vi erstatter x med $x+2\pi$, vil Rækken (1), hvis den er konvergent i et Punkt x_0 med Summen A, ligeledes være konvergent i ethvert Punkt $x_0+2p\pi$ og med samme Sum A. Heraf følger da, at hvis Rækken (1) er konvergent i et Interval af Længden 2π, f. Eks. i Intervallet $-\pi \leqq x < \pi$, da vil den være konvergent for alle Værdier af x, og den ved Rækken fremstillede Funktion vil være en periodisk Funktion af x med Perioden 2π.

I Modsætning til Potensrækkerne, for hvilke det jo gjaldt, at det kun var en net begrænset Klasse af Funktioner, der kunde fremstilles ved saadanne Rækker, har de trigonometriske Rækker, som vi i det følgende skal vise, den fundamentale Egenskab, at man ved Hjælp af dem kan fremstille saa at sige alle Funktioner, der blot opfylder den (udfra Rækkens Natur selvfølgelige) Betingelse at være periodiske med Perioden 2π, eller, hvad der kommer væsentlig ud paa det samme, man kan udvikle saa at sige

enhver Funktion, der er givet i et Interval af Længden 2π, i trigonometrisk Række.

Medens i en Potensrække $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ de enkelte Led $y = a_m x^m$ er monotone Funktioner af x i ethvert af Intervallerne $-\infty < x < 0$ og $0 < x < \infty$ (idet de jo simpelthen er Parabler af m^{te} Orden), er i en trigonometrisk Række de enkelte Led $y = a_m \cos mx$ (eller $y = b_m \sin mx$) Funktioner af ganske anden Art, nemlig „svingende" Funktioner, der for store Værdier af m svinger overordentlig hurtigt op og ned imellem a_m og $-a_m$ (eller imellem b_m og $-b_m$). Idet vi om Funktionerne $y = a_m \cos mx$ og $y = b_m \sin mx$ siger, at de udfører rent harmoniske Svingninger, kan den Opgave at skulle udvikle en Funktion i trigonometrisk Række ogsaa udtrykkes saaledes, at det gælder om at „opløse" Funktionen i hinder rent harmoniske Svingninger, og den ovenfor nævnte Sætning om de trigonometriske Rækkers Evne til at kunne fremstille vilkaarlige Funktioner udsiger altsaa, at saa at sige enhver Funktion kan tænkes dannet ved „Sammensætning" af saadanne rent harmoniske Svingninger. Denne Egenskab ved de harmoniske Svingninger spiller en fundamental Rolle ved talrige Anvendelser, navnlig inden for Varme- og Elektricitetslæren.

Lad $f(x)$ være en vilkaarlig stykkevis kontinuert Funktion, der er periodisk med Perioden 2π, eller (hvad der her kommer ud paa det samme) som er givet os i Intervallet $-\pi < x < \pi$. Vi sætter da rent formelt (d.v.s. uden at vi foreløbig bekymrer os om, hvorvidt Funktionen overhovedet kan fremstilles ved en trigonometrisk Række)

$$(2) \qquad f(x) = \tfrac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots + (a_m \cos mx + b_m \sin mx) + \cdots .$$

Ydet

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = 0 \qquad (\text{for alle } n=1,2,\ldots)$$

finder vi umiddelbart ved (rent formel) ledvis Integration af Rækken (2)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx .$$

Endvidere finder vi, udfra de kendte Formler

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{for } m \neq n \\ \pi & \text{for } m = n \end{cases}, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{for } m \neq n \\ \pi & \text{for } m = n \end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\,dx = 0 \ (\text{for alle } m \text{ og } n),$$

ved Multiplikation af Rækken (2) med henholdsvis $\cos nx$ og $\sin nx$ og paafølgende (rent formel) ledvis Integration

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad , \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx .$$

Med Udgangspunkt i disse (foreløbig rent formelle) Koefficientbestemmelser er det naturligt <u>sammen med den givne stykkevis kontinuerte Funktion $f(x)$ at studere den bestemte trigonometriske Række (1), hvis Koefficienter a_n og b_n er bestemt udfra Funktionen $f(x)$ ved Formlerne</u>

$$(3) \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n \geq 0) \quad \text{og} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n \geq 1).$$

Denne trigonometriske Række (hvis Konvergens eller Divergens vi foreløbig intetsomhelst ved om) kaldes <u>den til den givne Funktion $f(x)$ hørende Fourierske Række</u>, og Koefficienterne

a_n og b_n i denne Række kaldes (som allerede nævnt i Afsnit II, 96) Funktionens Fourierkonstanter.

Vi skal i det Følgende studere de Fourierske Rækkers Teori, og da navnlig beskæftige os med følgende to Spørgsmaal: 1) Er den til en given Funktion $f(x)$ hørende Fourierske Række konvergent (eller maaske summabel) og 2) har Rækken, hvis den er konvergent (eller summabel), den givne Funktion $f(x)$ til Sum? Førend vi begynder paa at løse disse to Spørgsmaal, vil vi imidlertid først (i næste Paragraf) bevise en elementær Sætning om den til en given Funktion hørende Fourierske Række, nemlig en Sætning, der (ganske uafhængig af Spørgsmaalet om Fourierrækkens Konvergens eller Divergens) lærer os en overordentlig vigtig Egenskab ved Fourierrækkens Afsnit at kende.

28. Fourierrækkens Afsnit som Tilnærmelsesfunktioner til $f(x)$. Lad $f(x)$ være en vilkaarlig, i Intervallet $(-\pi, \pi)$ stykkevis kontinuert Funktion, og lad

$$\frac{1}{2}a_0 + (a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos 2x + b_2\sin 2x) + \cdots + (a_n\cos nx + b_n\sin nx) + \cdots$$

være den til Funktionen hørende Fourierske Række, d. v. s. den trigonometriske Række, hvis Koefficienter netop er Funktionens Fourierkonstanter

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n \geq 0), \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n \geq 1).$$

Vi betragter Afsnittet

$$S_{n+1}(x) = \frac{1}{2}a_0 + (a_1\cos x + b_1\sin x) + \cdots + (a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

og vil nu dette Afsnit bevise følgende fundamentale Sætning:
Blandt samtlige trigonometriske Funktioner af Formen

$$T_{n+1}(x) = \tfrac{1}{2}\alpha_0 + (\alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x) + \cdots + (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

hvor de $2n+1$ Størrelser $\alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_n, \beta_1, \cdots \beta_n$ er Konstanter (d. v. s. er uafhængige af x), er Afsnittet $N_{n+1}(x)$ i den Fourierske Række den Funktion, der giver den bedste Tilnærmelse til den givne Funktion $f(x)$, i den Forstand, at Integralet af Fejlkvadratet

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_{n+1}(x))^2 \, dx$$

er mindst, naar Funktionen $T_{n+1}(x)$ netop er Afsnittet $N_{n+1}(x)$, d. v. s. naar vi til Koefficienter $\alpha_0, \cdots \alpha_n, \beta_1, \cdots \beta_n$ i $T_{n+1}(x)$ netop vælger Fourierkonstanterne $a_0, \cdots a_n, b_1, \cdots b_n$ for Funktionen $f(x)$.
Bevis: Idet $T_{n+1}(x)$ er en vilkaarlig af de omhandlede trigonometriske Funktioner, d. v. s. idet Koefficienterne $\alpha_0, \cdots \alpha_n, \beta_1, \cdots \beta_n$ er vilkaarlige Tal, kan vi umiddelbart udregne Integralet af Fejlkvadratet, og vi finder ved Hjælp af kendte Formler

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_{n+1}(x))^2 \, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \left(\tfrac{1}{2}\alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \cdots + \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx\right)\right\}^2 dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, dx + \tfrac{1}{2}\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 + \beta_n^2 - \alpha_0 a_0 - 2(\alpha_1 a_1 + \beta_1 b_1 + \cdots + \alpha_n a_n + \beta_n b_n).$$

Det gælder nu at vise, at dette sidste Polynomium af 2den Grad i de $2n+1$ Variable $\alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_n, \beta_1, \cdots \beta_n$ har sin mindste Værdi for $(\alpha_0, \cdots \alpha_n, \beta_1, \cdots \beta_n) = (a_0, \cdots a_n, b_1, \cdots b_n)$. Dette ses imidlertid umiddelbart, naar vi skriver Polynomiet paa Formen

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, dx + \tfrac{1}{2}(\alpha_0 - a_0)^2 + (\alpha_1 - a_1)^2 + (\beta_1 - b_1)^2 + \cdots + (\alpha_n - a_n)^2 + (\beta_n - b_n)^2 .$$

$$-\left(\tfrac{1}{2}a_0^2 + a_1^2 + b_1^2 + \cdots + a_m^2 + b_m^2\right);$$

thi heraf fremgaar jo straks, at Polynomiet har sin mindste Værdi, nemlig Værdien

$$\tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx - \left(\tfrac{1}{2}a_0^2 + a_1^2 + b_1^2 + \cdots + a_m^2 + b_m^2\right),$$

naar $(\alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_m, \beta_1, \cdots \beta_m) = (a_0, a_1, \ldots a_m, b_1, \cdots b_m)$.

Vi tilføjer, at den fundne Formel

$$(4)\quad \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - \Pi_{m+1}(x))^2\,dx = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx - \left(\tfrac{1}{2}a_0^2 + a_1^2 + b_1^2 + \cdots + a_m^2 + b_m^2\right)$$

umiddelbart viser (idet Størrelsen paa venstre Side af Ligheds-tegnet er $\geqq 0$), at

$$\tfrac{1}{2}a_0^2 + a_1^2 + b_1^2 + \cdots + a_m^2 + b_m^2 \leqq \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx, \quad (\text{for alle } m = 1, 2, \cdots),$$

hvoraf følger, at den uendelige Række med positive Led

$$\tfrac{1}{2}a_0^2 + (a_1^2 + b_1^2) + \cdots + (a_m^2 + b_m^2) + \cdots$$

er konvergent, idet dens Afsnit jo er opadtil begrænsede. Det gælder derfor yderligere at $\lim_{m\to\infty}(a_m^2 + b_m^2) = 0$, d. v. s. at saavel a_m som $b_m \to 0$ for $m \to \infty$. Hermed har vi faaet et nyt Bevis for den i Afsnit II, § 96 beviste Sætning, at Fourierkonstanterne a_m og b_m for en vilkaarlig stykkevis kontinuert Funktion $f(x)$ gaar mod 0 for $m \to \infty$.

Vi gaar nu over til at undersøge det almindelige Spørgs-maal om Konvergens og Summabilitet af den til en given Funk-

tion hørende Fourierske Række og skal da begynde med i næste Paragraf at udlede nogle, for den følgende Undersøgelse særlig bekvemme, Udtryk for den Fourierske Rækkes Afsnit og for Middelsummerne af disse Afsnit.

29. <u>Om Fourierske Rækkes Afsnit og Afsnittenes Middelsummer.</u>
Vi begynder med at udlede et Udtryk for Funktionen

$$\tfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos nx,$$

som vi i det følgende vil faa Brug for. Vi skriver hertil, idet vi foreløbig antager $\cos x \neq 1$, d. v. s. $x \neq 2p\pi$, den omhandlede Funktion paa Formen

$$\tfrac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos nx = \frac{2(1-\cos x)(\frac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos nx)}{2(1-\cos x)},$$

hvoraf umiddelbart følger ved Udmultiplikation af Tælleren, idet vi samtidig sætter $2\cos x \cos kx = \cos(k+1)x + \cos(k-1)x$, den søgte Formel

$$(5) \qquad \tfrac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos nx = \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{2(1-\cos x)};$$

vi tilføjer til Orientering, at Funktionen paa højre Side af Lighedstegnet, der jo ikke er definieret i Punkterne $x = 2p\pi$ (fordi Nævneren, ligesom ogsaa Tælleren, er 0 i ethvert saadant Punkt), har hævelige Diskontinuiteter i disse Punkter; thi idet Funktionen paa venstre Side af Lighedstegnet jo er overalt kontinuert og i Punktet $2p\pi$ har Værdien $\frac{1}{2} + n$, vil Størrelsen paa højre Side af Lighedstegnet $\to \frac{1}{2} + n$ for $x \to 2p\pi \leftarrow x$.

Lad nu fx være en <u>stykkevis kontinuert Funktion, der er periodisk med Perioden 2π</u>. For at finde et Udtryk for Af-

snittet $S_{n+1}(x)$ til Funktionens Fourierske Række omskriver vi først det enkelte Led i Rækken paa følgende Maade

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \cos nx \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos nu\,du + \sin nx \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin nu\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,(\cos nu\cdot\cos nx + \sin nu\cdot\sin nx)\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos n(u-x)\,du$$

og finder derefter ved Hjælp af Formlen (5), <u>at Fourierrækkens Afsnit $S_{n+1}(x)$ kan udtrykkes ved Formlen</u>

$$(6)\quad S_{n+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left(\tfrac{1}{2} + \cos(u-x) + \cos 2(u-x) + \cdots + \cos n(u-x)\right)du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,\frac{\cos n(u-x) - \cos(n+1)(u-x)}{2(1-\cos(u-x))}\,du,$$

hvor den under det sidste Integraltegn staaende Funktion $F(u)$ ogsaa i Punktet $u = x$ skal stemme med den under det første Integraltegn staaende Funktion, d. v. s. skal have Værdien $f(x)\,(\frac{1}{2}+n)$, forsaavidt $f(u)$ overhovedet er defineret i Punktet $u=x$ (d. v. s. hvis $u = x$ ikke netop er et Springsted for den stykkevis kontinuerte Funktion $f(u)$).

<u>Obs.</u> For den specielle Funktion <u>$f(x) = 1$</u>, for hvilken $\frac{1}{2}a_0 = 1$, $a_n = b_n = 0$ (for $n \geqq 1$), finder vi

$$S_{n+1}(x) = 1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n(u-x) - \cos(n+1)(u-x)}{2(1-\cos(u-x))}\,du.$$

For at undersøge, hvorvidt den Fourierske Række er konvergent eller ej, kunde vi direkte undersøge, hvorledes det foreliggende Udtryk (6) for Afsnittet $S_{n+1}(x)$ forholdt sig for $n \to \infty$. En saadan Undersøgelse er imidlertid ret vanskelig at foretage, hvad der hænger sammen med, at Brøken under Integraltegnet i (6) ikke bevarer et fast Fortegn, men stadig svinger frem og tilbage mellem positive og negative Værdier, naar

u gennemløber Integrationsintervallet $-\pi < u < \pi$. Vi kan imidlertid helt omgaa den direkte og vanskelige Undersøgelse af Afsnittet $R_{n+1}(x)$ ved blot i Stedet for Rakkens Konvergens først at undersøge Rakkens Summabilitet, hvorved vi tillige vil opnaa et væsentlig simplere og almindeligere Resultat. Vi faar hertil Brug for Afsnittenes Middelsum $S_n(x)$, for hvilken vi udfra det fundne Udtryk (6) for selve Afsnittene umiddelbart finder Formlen

$$S_n(x) = \frac{R_1 + R_2 + \cdots + R_n}{n} = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,\frac{(1-\cos(u-x)) + (\cos(u-x) - \cos 2(u-x)) + \cdots + (\cos(n-1)(u-x) - \cos n(u-x))}{2(1-\cos(u-x))}\,du$$

(7)

$$= \frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,\frac{1-\cos n(u-x)}{1-\cos(u-x)}\,du = \frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,\frac{\sin^2\frac{n(u-x)}{2}}{\sin^2\frac{u-x}{2}}\,du\,,$$

hvor Brøken under Integraltegnet har en havelig Diskontinuitet i Punktet $u = x$, idet den $\to n^2$ for $u \to x \leftarrow u$. Det hermed fundne Udtryk for Afsnittenes Middelsum er langt simplere at undersøge end Udtrykket for Afsnittet selv, hvad der hænger sammen med, at Brøken under Integraltegnet i Udtrykket (7) er helt igennem positiv.

Eks. For Funktionen $f(x) = 1$ finder vi $S_n(x) = \frac{1}{n}(R_1 + R_2 + \cdots R_n)$ $= \frac{1}{n} \cdot n = 1$, altsaa

$$1 = \frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\frac{n(u-x)}{2}}{\sin^2\frac{u-x}{2}}\,du\,.$$

Vi vil nu foretage en simpel Omskrivning af det fundne Udtryk (7) for $S_n(x)$. Hertil bemærker vi, at idet saavel Funktionen $f(u)$ som Brøken under Integraltegnet i (7) er periodiske Funktioner af u med Perioden 2π, kan vi lade u gennemløbe Intervallet $-\pi + x < u < \pi + x$ i Stedet for Intervallet $-\pi < u < \pi$,

herved finder vi, idet vi hagefter indfører $\frac{u-x}{2} = \alpha$ som ny Integrationsvariabel i Stedet for u,

$$S_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(u) \frac{\sin^2 \frac{n(u-x)}{2}}{\sin^2 \frac{u-x}{2}} du = \frac{1}{n\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2\alpha) \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

$$= \frac{1}{n\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x+2\alpha) \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2 \alpha} d\alpha + \frac{1}{n\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2\alpha) \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2 \alpha} d\alpha .$$

Indfører vi i det første af disse to Integraler $\alpha = -\beta$, faar vi

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x+2\alpha) \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2 \alpha} d\alpha = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x-2\beta) \frac{\sin^2 n\beta}{\sin^2 \beta} d\beta = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x-2\alpha) \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2 \alpha} d\alpha ,$$

og altsaa

$$(8) \qquad S_n(x) = \frac{1}{n\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ f(x+2\alpha) + f(x-2\alpha) \right\} \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2 \alpha} d\alpha ,$$

hvilket er den <u>sögte Formel</u>. I denne Formel er specielt indeholdt (nemlig svarende til at vi til $f(x)$ vælger Funktionen 1), at

$$(9) \qquad 1 = \frac{1}{n\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2 \alpha} d\alpha .$$

30. <u>Bevis for en Hjælpesætning.</u> Vi indskyder her Beviset for en Hjælpesætning, som vi faar Brug for ved Undersögelsen af, hvorledes Middelsummen S_n forholder sig for $n \to \infty$. Vi gaar udfra <u>en Funktion $\varphi(\alpha)$</u>, som vi vil antage <u>stykkevis kontinuert i Intervallet $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$</u>, og som yderligere opfylder <u>Betingelsen $\varphi(\alpha) \to 0$ for $0 \leftarrow \alpha$</u>, og vil da undersöge Integralet

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\alpha) \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2 \alpha} d\alpha ,$$

hvor n er et helt positivt Tal. Vi bemærker, at Brøken $\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2\alpha}$ kun er definieret for $0 < \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$, men ikke i Intervalendepunktet $\alpha = 0$, idet imidlertid $\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2\alpha} \to n^2$ for $0 \leftarrow \alpha$, har denne Brøk blot en hævelig Diskontinuitet i Punktet $\alpha = 0$.

Den Hjælpesætning, vi vil bevise, hedder da, at

$$(10) \qquad \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\alpha)\,\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2\alpha}\,d\alpha \to 0 \quad \text{for } n \to \infty .$$

Bevis: Vi gør først opmærksom paa, at man ved Beviset uden videre kan erstatte Brøken under Integraltegnet $\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2\alpha}$ med den væsentlig simplere Brøk $\frac{\sin^2 n\alpha}{\alpha^2}$. Thi idet for $0 \leftarrow \alpha$

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 - \sin^2\alpha}{\alpha^2\sin^2\alpha} = \frac{\alpha^2 - (\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \sigma(\alpha^3))^2}{\alpha^2(\alpha + \sigma(\alpha))^2} =$$

$$\frac{\alpha^2 - (\alpha^2 - \frac{2\alpha^4}{3!} + \sigma(\alpha^4))}{\alpha^2(\alpha^2 + \sigma(\alpha^2))} = \frac{\frac{\alpha^4}{3} + \sigma(\alpha^4)}{\alpha^4 + \sigma(\alpha^4)} \longrightarrow \frac{1}{3} ,$$

vil Funktionen $\frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}$, naar vi tillægger den sin naturlige Værdi $\frac{1}{3}$ i Punktet $\alpha = 0$, være kontinuert i det lukkede Interval $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$, saaledes at

$$\left|\frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right| < k \quad (k \text{ Konstant}) \quad \text{for } 0 < \alpha \leqq \frac{\pi}{2} ,$$

og heraf følger jo straks, at

$$\left|\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\alpha)\,\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2\alpha}\,d\alpha - \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\alpha)\,\frac{\sin^2 n\alpha}{\alpha^2}\,d\alpha\right| = \frac{1}{n}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\alpha)\sin^2 n\alpha\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right)d\alpha\right|$$

$$< \frac{1}{n}\cdot k\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi(\alpha)|\,d\alpha = \frac{1}{n}\,K \to 0 \qquad \text{for } n \to \infty ,$$

hvorved Tilladeligheden af ved Beviset for (10) at erstatte $\frac{1}{\sin^2\alpha}$ med $\frac{1}{\alpha^2}$ er godtgjort. — For nu at bevise den simplere

Formel

(11) $$\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 n\alpha}{\alpha^2}\,\varphi(\alpha)\,d\alpha \to 0 \qquad \text{for } n \to \infty$$

betragter vi den positive Brøk $\frac{\sin^2 n\alpha}{\alpha^2}$ for $0 < \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ og søger at skaffe os over Størrelsen af denne Brøk; vi bemærker hertil, at vi straks (i hele Intervallet $0 < \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$) har følgende to væsentlig forskelligartede Uligheder

(12^a) $$\frac{\sin^2 n\alpha}{\alpha^2} \leqq \frac{1}{\alpha^2}$$

og (idet $|\sin x| < |x|$ for $x \neq 0$)

(12^b) $$\frac{\sin^2 n\alpha}{\alpha^2} < \frac{n^2\alpha^2}{\alpha^2} = n^2 .$$

Af disse to Uligheder (12^a) og (12^b) er den første aabenbart at foretrække, naar α ikke ligger altfor nær ved 0, medens den anden er at foretrække for saadanne Værdier af α, der ligger umiddelbart til højre for $\alpha = 0$; nøjagtigere talt, idet $\frac{1}{\alpha^2} \leqq n^2$ for $\alpha \geqq \frac{1}{n}$, bør vi benytte <u>Uligheden (12^a) for $\frac{1}{n} \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$</u>, medens vi bør benytte <u>Uligheden (12^b) for $0 < \alpha < \frac{1}{n}$</u>. Vi finder herved

$$\left|\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 n\alpha}{\alpha^2}\,\varphi(\alpha)\,d\alpha\right| < \frac{1}{n}\int_0^{\frac{1}{n}} n^2\,|\varphi(\alpha)|\,d\alpha + \frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\varphi(\alpha)|}{\alpha^2}\,d\alpha = n\int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi(\alpha)|\,d\alpha + \frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\varphi(\alpha)|}{\alpha^2}\,d\alpha .$$

Vi vil bevise, at de to Addender paa højre Side af Uligheds-tegnet begge $\to 0$ for $n \to \infty$. For den <u>første</u> Vedkommende har vi umiddelbart

$$n\int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi(\alpha)|\,d\alpha < n\left(\mu \cdot \frac{1}{n}\right) = \mu ,$$

hvor μ betegner øvre Grænse for $|\varphi(\alpha)|$ i Intervallet $0 < \alpha < \frac{1}{n}$, og derfor $\to 0$ for $n \to \infty$, fordi $\varphi(\alpha) \to 0$ for $0 \leftarrow \alpha$. For den anden Addends Vedkommende deler vi Integrationsintervallet $\frac{1}{n} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ i to Delintervaller $\frac{1}{n} < \alpha < \sqrt{\frac{1}{n}}$ og $\sqrt{\frac{1}{n}} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, hvor $\sqrt{\frac{1}{n}}$ gaar mod 0 samtidig med $\frac{1}{n}$, men langsommere end $\frac{1}{n}$, d. v. s. hvor $\frac{1}{n} : \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$. Herved finder vi da, idet vi med M betegner øvre Grænse for $|\varphi(\alpha)|$ i hele Intervallet $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, medens vi med m betegner øvre Grænse for $|\varphi(\alpha)|$ i det lille Interval $0 < \alpha < \sqrt{\frac{1}{n}}$:

$$\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\varphi(\alpha)|}{\alpha^2}\,d\alpha = \frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\sqrt{\frac{1}{n}}} \frac{|\varphi(\alpha)|}{\alpha^2}\,d\alpha + \frac{1}{n}\int_{\sqrt{\frac{1}{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\varphi(\alpha)|}{\alpha^2}\,d\alpha < \frac{1}{n}\cdot m\int_{\frac{1}{n}}^{\sqrt{\frac{1}{n}}} \frac{d\alpha}{\alpha^2} + \frac{1}{n}\cdot M\int_{\sqrt{\frac{1}{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\alpha^2}$$

$$= \frac{1}{n}\cdot m\,(n - \sqrt{n}) + \frac{1}{n}\cdot M\left(\sqrt{n} - \frac{2}{\pi}\right) < m + \frac{M}{\sqrt{n}}\,.$$

Hermed er Beviset fuldført; thi Størrelserne paa højre Side af Uligheds-tegnet gaar begge mod 0 for $n \to \infty$, fordi saavel m ($=$ Maks $|\varphi(\alpha)|$ for $0 < \alpha < \sqrt{\frac{1}{n}}$) som $\frac{M}{\sqrt{n}} \to 0$ for $n \to \infty$.

31. <u>Fourierrækkens Summabilitet.</u> Lad $f(x)$ være en vilkaarlig <u>stykkevis kontinuert periodisk Funktion med Perioden 2π</u>, og lad

$$\tfrac{1}{2}a_0 + (a_1\cos x + b_1\sin x) + \cdots + (a_n\cos nx + b_n\sin nx) + \cdots$$

være Funktionens Fourierske Række. Udfra den i 29 fundne Formel for Afsnittenes Middelsum

$$(8) \qquad S_n(x) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x+2\alpha) + f(x-2\alpha)\}\,\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2\alpha}\,d\alpha$$

og den deri specielt indeholdte Formel

$$(9) \qquad 1 = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cdot\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2\alpha}\,d\alpha$$

kan vi umiddelbart, idet vi gør Brug af den i forrige Paragraf nævnte Hjælpesætning, bevise følgende Hovedsætning:

Den Fourierske Række er summabel for alle Værdier af x, og i ethvert Kontinuitetspunkt x for Funktionen $f(x)$ har den Summen $f(x)$, medens den i et Springsted x for $f(x)$ (eller i et Punkt x, hvori Funktionen har en havelig Diskontinuitet) har Summen $\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-))$.

Bevis: Idet det jo gælder i et Kontinuitetspunkt x, at $\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-)) = \frac{1}{2}(f(x)+f(x)) = f(x)$, kan Sætningen ogsaa udtrykkes saaledes, at den Fourierske Række er summabel i ethvert Punkt x med Summen $\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-))$. Det drejer sig altsaa om at bevise, at for ethvert fast x vil

$$\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-)) - \mathfrak{S}_n(x) \to 0 \quad \text{for } n \to \infty .$$

I Følge Formlerne (8) og (9) kan Størrelsen $\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-)) - \mathfrak{S}_n(x)$ skrives paa Formen

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} - \mathfrak{S}_n(x) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x+)+f(x-)-f(x+2\alpha)-f(x-2\alpha)\} \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2\alpha}\, d\alpha .$$

Her er imidlertid Funktionen $\varphi(\alpha) = f(x+)+f(x-)-f(x+2\alpha)-f(x-2\alpha)$ stykkevis kontinuert i Intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$ og opfylder yderligere Betingelsen $\varphi(\alpha) \to 0$ for $0 \leftarrow \alpha$, idet jo $f(x+2\alpha) \to f(x+)$ og $f(x-2\alpha) \to f(x-)$ for $0 \leftarrow \alpha$. Vi kan derfor paa det fundne Integral anvende Hjælpesætningen i 30, og finder derved

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x+)+f(x-)-f(x+2\alpha)-f(x-2\alpha)\} \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2\alpha}\, d\alpha \to 0 \quad \text{for } n \to \infty ,$$

hvormed Sætningen er bevist

Vi skal til Slut sige et Par Ord om, hvorvidt Fourier=

rakkeri for en stykkevis kontinuert Funktion er ligelig summabel eller ej, idet vi karakteriserer en summabel Række med variable Led som ligelig summabel, hvis den af Afsnittenes Middelsummer dannede Funktionsfølge $S_1(x), \ldots S_n(x), \ldots$ gaar ligelig mod sin Grænsefunktion $R(x)$. Vi bemærker da for det første, at Fourierrækken umuligt kan være ligelig summabel i et Interval, som indeholder et Springsted for Funktionen $f(x)$; thi idet de enkelte Middelsummer $S_n(x)$ jo er kontinuerte Funktioner af x, maa Fourierrækkens Sum $R(x) = \lim S_n(x)$ nødvendigvis ogsaa være kontinuert i ethvert Interval, hvori Rækken er ligelig summabel; men denne Sum $R(x)$ er jo diskontinuert i Springstederne for $f(x)$. — Udfra det foregaaende Bevis for Fourierrækkens Summabilitet kan man uden Vanskelighed indse (hvad vi dog ikke skal komme nærmere ind paa), at dersom vi blot udskærer Funktionens Springsteder, ved at lægge vilkaarlig smaa Intervaller omkring dem, vil Fourierrækken være ligelig konvergent i de resterende Intervaller. Heraf følger umiddelbart, at hvis $\alpha \leqq x \leqq \beta$ er et vilkaarligt lukket Interval, som ikke indeholder noget Springsted for Funktionen $f(x)$, vil Integralet af Fejlkvadratet

$$\int_\alpha^\beta (f(x) - S_n(x))^2 \, dx \to 0 \qquad \text{for } n \to \infty, \tag{13}$$

idet den under Integraltegnet staaende Funktion $(f(x) - S_n(x))^2$ gaar ligelig mod 0 for $n \to \infty$. Man kan imidlertid bevise, at (13) ogsaa gælder, selvom Intervallet $\alpha \leqq x \leqq \beta$ indeholder Springssteder, idet man kan vise, at Fourierrækkens Forhold i den umiddelbare Omegn af Springstederne (hvor den jo ikke er ligelig summabel) ikke er saa „irregulært", at disse uendelig smaa Omegne kommer til at virke „forstyrrende" paa det

nævnte Integral. Det gælder altsaa for enhver stykkevis kontinuert Funktion, at

$$(14) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x))^2 \, dx \to 0 \qquad \text{for } n \to \infty .$$

Dette Resultat vil vi senere gjøre Brug af.

32. Fourierrækkens Konvergens. Vi har i forrige Paragraf bevist, at det for enhver stykkevis kontinuert periodisk Funktion med Perioden 2π gælder, at dens Fourierske Række er summabel for alle Værdier af x, og at Summen af den (summable) Fourierske Række er lig med $f(x)$ i ethvert Kontinuitetspunkt x for Funktionen, medens den i et Springsted x er lig med Middeltallet $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$. Vi skal nu i denne Paragraf beskæftige os med Spørgsmaalet om, hvorvidt Fourierrækken er konvergent. Vi bemærker da for det første, hvad vi dog ikke her skal komme nærmere ind paa, at der eksisterer stykkevis kontinuerte Funktioner, hvis Fourierrækker ikke er overalt konvergente (men kun summable), og heraf følger da, at Summabilitetsbegrebets Indførelse virkelig er af principiel Betydning for de Fourierske Rækkers Teori. — Vi skal imidlertid vise, at vi, ved at foretage en noget snævrere Afgrænsning af de Funktioner, hvormed vi vil beskæftige os, kan opnaa, at Funktionernes Fourierrækker er, ikke blot overalt summable, men ogsaa overalt konvergente, og vi tilføjer, at de Betingelser vi hertil paalægger Funktionerne er af en saadan Natur, at de kan siges at være opfyldte for alle saadanne (periodiske) Funktioner, som man ved Anvendelserne vil kunne faa Brug for. Der gælder nemlig følgende Hovedsætning:

Er $f(x)$ en periodisk Funktion med Perioden 2π (eller givet os kun i et Interval af Længden 2π), og er $f(x)$ ikke blot

stykkevis kontinuert, men yderligere stykkevis differentiabel med en stykkevis kontinuert Differentialkvotient, da vil Funktionens Fourierske Række være konvergent for alle Værdier af x, og dens Sum vil være lig med $\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-))$, d. v. s. den vil i et Kontinuitetspunkt have Summen $f(x)$ og i et Springsted Summen $\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-))$. (Er Funktionen kun givet i et Interval af Længden 2π, da vil Rækken i ethvert af Endepunkterne konvergere mod Middeltallet mellem Funktionens (naturlige) Værdier i disse to Punkter).

Bevis: Idet $f(x)$ er stykkevis kontinuert, ved vi om Funktionens Fourierske Række, at den er summabel med Summen $\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-))$, hvoraf straks følger, at hvis Rækken er konvergent, har den den „rigtige" Sum. Nu har vi imidlertid ved Behandlingen af Begrebet Summabilitet (se 13) bevist, at enhver summabel Række $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$, der opfylder Betingelsen $|u_n|<\frac{k}{n}$, tillige er konvergent, og Sætningen er derfor bevist, hvis vi om Fourierrækken kan vise, at dens Led opfylder Betingelsen

$$|a_n\cos nx+b_n\sin nx|<\frac{k}{n}.$$

Dette følger imidlertid umiddelbart udfra Forudsætningen om, at $f(x)$ er (ikke blot stykkevis kontinuert, men) stykkevis differentiabel med en stykkevis kontinuert Differentialkvotient; thi for en saadan Funktion gælder det jo (se Afsnit II, § 96), at dens Fourierkonstanter a_n og b_n opfylder Betingelserne $|a_n|<\frac{k}{n}$ og $|b_n|<\frac{k}{n}$, og altsaa ogsaa Betingelsen $|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\leqq|a_n|+|b_n|<\frac{2k}{n}$.

33. Eksempler paa Fourierrækker. Vi skal i denne Paragraf udvikle nogle specielle Funktioner i Fourierske Rækker; disse Eksempler vælger vi iblandt de Funktioner, hvis Fourierkonstanter vi allerede tidligere har udregnet (se Afsnit II, § 96).

I: Er i en konvergent trigonometrisk Række alle Cosinuskoefficienterne 0, vil den ved Rækken fremstillede Funktion $f(x)$ øjensynlig være en ulige Funktion, idet alle Rækkens Led jo skifter Fortegn, naar x ombyttes med $-x$. Omvendt gælder det, at hvis $f(x)$ er en ulige Funktion, vil dens Fourierrække kun indeholde Sinusled; thi for enhver ulige Funktion er jo alle Fourierkonstanterne a_n lig med 0.

Eks. For den i Intervallet $(-\pi, \pi)$ givne ulige Funktion $f(x)=x$, har vi tidligere fundet Fourierkonstanterne bestemt ved $a_n = 0$, $b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n}$. Funktionens Fourierrække er altsaa

$$2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} \ldots\right).$$

Rækken er (i Følge Hovedsætningen i forrige Paragraf) konvergent for alle x, og i ethvert Punkt i det Indre af Intervallet $-\pi < x < \pi$ har den Summen $f(x) = x$, medens den i Intervalendepunkterne π og $-\pi$ har Summen $\frac{1}{2}(f(\pi-)+f(-\pi+)) = \frac{1}{2}(\pi+(-\pi)) = 0$, hvad vi jo ogsaa straks ser paa Rækken, idet alle dens Led er 0 for $x = \pm\pi$.

II: Er i en konvergent trigonometrisk Række alle Sinuskoefficienterne 0, vil den ved Rækken fremstillede Funktion $f(x)$ øjensynlig være en lige Funktion, idet alle Rækkens Led jo forbliver uforandret, naar x ombyttes med $-x$. Omvendt gælder det, at hvis $f(x)$ er en lige Funktion, vil dens Fourierrække kun indeholde Cosinusled; thi for enhver lige Funktion er jo alle Fourierkonstanterne b_n lig med 0.

Eks. For den i Intervallet $(-\pi, \pi)$ givne lige Funktion

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{for } -\pi < x \leqq 0 \\ x & \text{for } 0 \leqq x < \pi \end{cases}$$

har vi tidligere fundet Fourierkonstanterne bestemt ved

$$b_n = 0 \quad , \quad a_n = \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ lige} \geq 2 \\ \frac{-4}{\pi n^2} & \text{for } n \text{ ulige} \end{cases} \quad , \quad a_0 = \pi \, .$$

Funktionens Fourierrække er altsaa

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdot \quad \cdot \right) .$$

Rækken er (i Følge Hovedsætningen) konvergent for alle x, og i ethvert Punkt af Intervallet $-\pi \leqq x \leqq \pi$ har den Summen $f(x) = |x|$, ogsaa i Endepunkterne $+\pi$ og $-\pi$, idet jo $f(\pi-) = f(-\pi+) = |\pi|$. Af dette Eksempel og det foregaaende ser vi altsaa, at Funktionen $f(x) = x$, $0 \leqq x < \pi$, saavel kan udvikles i en Cosinusrække som i en Sinusrække. Det samme gælder naturligvis almindeligt, idet en vilkaarlig Funktion $f(x)$, der er givet i Intervallet $0 < x < \pi$ (altsaa kun i et Interval af Længden π, og ikke i et Interval af Længden 2π), øjensynlig altid kan suppleres med en i Intervallet $-\pi < x < 0$ given Funktion, til en i Intervallet $-\pi < x < \pi$ lige Funktion eller til en i Intervallet $-\pi < x < \pi$ ulige Funktion.

III: En konvergent trigonometrisk Række (1), <u>hvori $a_{2m+1} = b_{2m+1} = 0$ for alle m</u>, vil øjensynlig fremstille en Funktion $f(x)$, der er <u>periodisk med Periodem π</u>, idet alle Rækkens Led jo forbliver uforandret, naar x erstattes med $x + \pi$. <u>Omvendt</u> gælder det, <u>at for enhver periodisk Funktion med Perioden π, vil Funktionens Fourierrække kun indeholde cos. og sin. taget af lige Multipla af x</u>; thi for enhver saadan Funktion er jo $a_{2m+1} = b_{2m+1} = 0$.

<u>Eks.</u> Lad $f(x)$ være givet i Intervallet $(0, \pi)$ ved Ligningen

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{for } \frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi \end{cases} ,$$

og lad os udstrække Definitionen af denne Funktion til <u>hele</u>

Intervallet $(-\pi, \pi)$ ved yderligere at forlange om den, at for $-\pi \leqq x \leqq 0$ skal $f(x)$ være lig $f(x+\pi)$. Denne Funktion har, som vi tidligere har udregnet, Fourierkonstanterne

$$b_m = 0\,, \qquad a_{2m+1} = 0\,, \qquad a_m = \begin{cases} 0 & \text{for } m = 4m \geq 0 \\ \frac{-8}{\pi m^2} & \text{for } m = 4m+2 \end{cases}, \quad a_0 = \frac{\pi}{2}$$

og altså Fourierrækken

$$\frac{\pi}{4} - \frac{8}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{6^2} + \frac{\cos 10x}{10^2} + \cdots \right).$$

Rækken er overalt konvergent og fremstiller for $-\pi \leqq x \leqq \pi$ Funktionen $f(x)$, idet $f(x)$ jo er kontinuert i hele Intervallet $-\pi \leqq x \leqq \pi$ samt opfylder Betingelsen $f(\pi-) = f(-\pi+)$.

Vi tilføjer til disse Eksempler den almindelige Bemærkning, at (som det allerede tydeligt fremgaar af Undersøgelsen i 2det Afsnit over Fourierkonstanternes Størrelsesorden) vil det „i Almindelighed" gælde, at jo „glattere" Funktionen $y = f(x)$ forløber, desto stærkere vil Fourierkonstanterne gaa imod 0, d. v. s. desto „hurtigere" vil Fourierrækken konvergere. Denne Bemærkning er navnlig af Vigtighed ved saadanne Opgaver, hvor det gælder om at lægge en Funktion $y = f(x)$ igennem visse givne Punkter, i den Hensigt bagefter at udvikle denne Funktion i trigonometrisk Række. Her gælder det følgelig om, hvis man ønsker hurtig Konvergens, at lægge Kurven saa „glat" som mulig, og navnlig at undgaa ikke blot Springsteder, men ogsaa Knæk.

34. Fourierkonstanternes Kvadratsum. Vi bevistе i 28, at der for enhver i Intervallet $(-\pi, \pi)$ stykkevis kontinuert Funktion $f(x)$ gjaldt Ligningen

(4) $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-\mathfrak{A}_{n+1}(x))^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx - \left(\tfrac{1}{2}a_0^2 + a_1^2 + b_1^2 + \cdots + a_n^2 + b_n^2\right),$$

hvor a_n og b_n er Funktionens Fourierkonstanter, medens $\mathfrak{A}_{n+1}(x)$ betegner Afsnittet i Funktionens Fourierske Række. Udfra denne Formel (4) kunde vi i 28 umiddelbart indse, at den uendelige Række

$$\tfrac{1}{2}a_0^2 + (a_1^2+b_1^2) + (a_2^2+b_2^2) + \cdots + (a_n^2+b_n^2) + \cdots$$

er konvergent (fordi Størrelsen paa højre Side i (4) er $\geqq 0$). Vi skal nu bevise, at denne konvergente Række har Summen

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx.$$

Bevis: I Følge Formel (4) er den opstillede Paastand ensbetydende med, at

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-\mathfrak{A}_{n+1}(x))^2\,dx \to 0 \qquad \text{for } n\to\infty.$$

Vi benytter nu den i 28 fundne Egenskab ved Afsnittet $\mathfrak{A}_{n+1}(x)$, nemlig at blandt samtlige trigonometriske Funktioner

$$\mathfrak{T}_{n+1}(x) = \tfrac{1}{2}\alpha_0 + \alpha_1\cos x + \beta_1\sin x + \cdots + \alpha_n\cos nx + \beta_n\sin nx$$

er Afsnittet $\mathfrak{A}_{n+1}(x)$ den, for hvilken Integralet af Fejlkvadratet $\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-\mathfrak{T}_{n+1}(x))^2\,dx$ er mindst. Heraf følger nemlig specielt, idet Middelsummen $\mathfrak{S}_{n+1} = \frac{1}{n+1}(\mathfrak{A}_1 + \cdots + \mathfrak{A}_{n+1})$ jo netop er en saadan trigonometrisk Funktion $\mathfrak{T}_{n+1}(x)$, at

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - \mathfrak{A}_{n+1}(x))^2 dx \leqq \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - \mathfrak{S}_{n+1}(x))^2 dx$$

(hvor Lighedstegnet iøvrigt kun gælder i det specielle Tilfælde, hvor $\mathfrak{S}_{n+1}(x)$ er identisk med $\mathfrak{A}_{n+1}(x)$). Af denne sidste Ulighed følger umiddelbart Sætningens Rigtighed; thi som nævnt i 31 gælder det for enhver stykkevis kontinuert Funktion, at

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - \mathfrak{S}_n(x))^2 dx \to 0 \qquad \text{for } n \to \infty.$$

35. Integration af en partiel Differentialligning ved en Fourierskrække. Ved vor Omtale af de partielle Differentialligninger af 2den Orden nævnede vi, at de Fourierske Rækker var et vigtigt Hjælpemiddel ved Løsningen af saadanne Ligninger. Som et karakteristisk Eksempel herpaa vil vi betragte den saakaldte Varmeledningsligning

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k^2 u,$$

hvor u er en ubekendt Funktion af de to uafhængige Variable x og (Tiden) t. Det Problem, man sædvanligvis møder i Forbindelse med Studiet af Varmeledningsligningen, er det at finde en i en given „Halvstrimmel" $a \leq x \leq b$, $t > 0$ defineret Funktion $u(x,t)$, der ikke alene tilfredsstiller Ligningen, men som yderligere opfylder følgende to Randbetingelser: 1) For $0 \leftarrow t$ skal $u(x,t) \to f(x)$, hvor $f(x)$ er en i Intervallet $a < x < b$ vilkaarligt given Funktion, og 2) for $t \to \infty$ skal $u(x,t) \to 0$ for alle x i Intervallet $a < x < b$.

Vi bemærker for det første, at idet Varmeledningsligningen er linear i u og de partielle Afledede af u, gælder det ogsaa

synlig, at hvis man kender en Samling partikulære Integraler $u(x,t)$, vil man ved at multiplicere disse Integraler med vilkaarlige Konstanter og derefter addere dem atter komme til partikulære Integraler. Endvidere bemærker vi, at, som man umiddelbart ser ved Indsættelse, vil for enhver Værdi af Konstanten c Funktionerne

$$e^{-(c^2+k^2)t}\cos cx \qquad \text{og} \qquad e^{-(c^2+k^2)t}\sin cx$$

være partikulære Integraler til Ligningen. Vi fremhæver særlig de af disse Integraler, hvori c er et helt ikke negativt Tal, altsaa Integralerne

$$e^{-(n^2+k^2)t}\cos nx \qquad \text{og} \qquad e^{-(n^2+k^2)t}\sin nx \qquad (n=0,1,2,\ldots);$$

disse Integraler vil $\to 0$ for $t\to\infty$, medens de for $0\leftarrow t$ gaar over i Funktionerne $\cos nx$ og $\sin nx$, der udfører rent harmoniske Svingninger.

Nu kan imidlertid Funktionen $f(x)$ (idet vi forudsætter, at den er differentiabel med en kontinuert Differentialkvotient samt, hvad man altid kan opnaa ved passende Valg af Længdeenhed, antager, at Intervallet (a,b) har Længden 2π) sammensættes af Lutter rent harmoniske Svingninger, idet den jo kan fremstilles ved sin (konvergente) Fourierske Række

$$f(x)=\tfrac{1}{2}a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\cdots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\cdots.$$

Vi multiplicerer de enkelte Led i denne Fourierske Række med Faktorerne $e^{-(n^2+k^2)t}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ og betragter den derved fremkomne uendelige Række

$$\tfrac{1}{2}a_0\, e^{-k^2t} + (a_1\cos x + b_1\sin x)\, e^{-(1+k^2)t} + \cdots + (a_n\cos nx + b_n\sin nx)\, e^{-(n^2+k^2)t} + \cdots,$$

hvilken Række øjensynlig ved formel Indsættelse i Varmeledningsligningen tilfredsstiller denne Ligning, fordi de enkelte Funktioner $e^{-(n^2+k^2)t}\cos nx$ og $e^{-(n^2+k^2)t}\sin nx$ gør det. Denne uendelige Række vil fremstille en Funktion $u(x,t)$, der opfylder samtlige de ovenfor stillede Betingelser. Thi som man uden Vanskelighed kan vise (uden at vi dog her skal gaa ind paa Enkeltheder), gælder det,

1) at Rækken er konvergent for $t > 0$ (paa Grund af Faktorerne $e^{-(k^2+n^2)t}$, der jo aftager meget hurtigt imod Nul for $n \to \infty$) og for $t > 0$ kan differentieres ledvis (endog vilkaarlig mange Gange) med Hensyn til enhver af de to uafhængige Variable x og t, saaledes at den ved Rækken fremstillede Funktion $u(x,t)$ virkelig er et Integral til Ligningen, og

2) at man har Lov til at udføre Grænseovergangene $0 \leftarrow t$ og $t \to \infty$ ved at foretage disse Grænseovergange med hvert af Rækkens Led for sig, hvorved man finder Grænseligningerne

$$u(x,t) \to \tfrac{1}{2}a_0 + (a_1\cos x + b_1\sin x) + \cdots = f(x) \quad \text{for } 0 \leftarrow t$$

og

$$u(x,t) \to 0 + 0 + 0 + \cdots = 0 \quad \text{for } t \to \infty$$

Opg. 26. Find den trigonometriske Funktion $T_3(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \alpha_2 \cos 2x + \beta_2 \sin 2x$, der i Intervallet $-\pi < x < \pi$ fremstiller Funktionen $f(x) = x^2 - 3x + e^x$ bedst, d. v. s. for hvilken Integralet af Fejlkvadratet $\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_3(x))^2 dx$ er mindst. Angiv dernæst, for den fundne Funktion $T_3(x)$, „Fejlen" $\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_3(x))^2 dx$.

Opg. 27. Udvikl i Intervallet $-\pi < x < \pi$ Funktionerne $\cos\frac{x}{2}$ og $\sin\frac{x}{2}$ i Fourierske Rakke, samt angiv Fourierrækken for Funktionen $2\cos\frac{x}{2} + 3\sin\frac{x}{2}$.

Opg. 28. Find Fourierrækken for den Funktion $f(x)$, der i Intervallet $-\pi < x < \pi$ er givet ved Ligningen

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{for } -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{for } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ +1 & \text{for } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{for } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}.$$

Opg. 29. Find Fourierrækken for den Funktion $f(x)$, der i Intervallet $-\pi < x < \pi$ er givet ved Ligningen

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } -\pi < x < -\frac{\pi}{3} \\ 2x & \text{for } -\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} \\ 3x & \text{for } \frac{\pi}{3} < x < \pi \end{cases}.$$

Opg. 30. Lad der være givet f. Eks. to Cosinusrækker

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots \quad \text{og} \quad g(x) = \frac{1}{2}b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots,$$

som vi vil antage begge er absolut konvergente i Punktet $x = 0$.

Bevis, at Rækkerne er absolut konvergente for ethvert x og ligelig konvergente i hele Intervallet $-\infty < x < \infty$. Bevis dernæst (ved Multiplikation af de to Rækker), at Funktionen $f(x) \cdot g(x)$ for alle x kan fremstilles ved en Cosinusrække

$$f(x)\,g(x) = \tfrac{1}{2} c_0 + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \cdots ,$$

samt angiv Udtryk for Koefficienterne c_n i Produktrækken ved Hjælp af Koefficienterne a_n og b_n i de to givne Rækker.

Opg. 31. Lad $f(x)$ være en periodisk Funktion med Perioden 2π, om hvilken vi vil antage, at den er to Gange differentiabel for alle x med en kontinuert 2den Differentialkvotient, hvoraf følger, at saavel Funktionen $f(x)$ selv som dens 1ste Differentialkvotient $f'(x)$ kan fremstilles ved konvergente Fourierske Rækker. Bevis, at den Fourierske Række for $f'(x)$ netop er den trigonometriske Række, der fremkommer ved ledvis Differentiation af Fourierrækken for $f(x)$.

Opg. 32. Find Summen af den konvergente Række $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$ ved først at bestemme den Funktion $f(x)$, der i Intervallet $-\pi < x < \pi$ har den Fourierske Række

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} + \cdots .$$

og dernæst benytte Sætningen om Fourierkonstanternes Kvadratsum.

Opg. 33. Idet $f(x)$ og $g(x)$ er to stykkevis kontinuerte Funktioner i Intervallet $-\pi < x < \pi$ med henholdsvis Fourierkonstanterne $\frac{1}{2} a_0, a_1, b_1, a_2, b_2 \cdots$ og $\frac{1}{2} a'_0, a'_1, b'_1, a'_2, b'_2 \cdots$, skal man finde Fourierkonstanterne for Funktionerne $f(x) + g(x)$ og $f(x) - g(x)$.

Opg. 34. Idet $f(x)$ og $g(x)$ er de samme Funktioner som i forrige Opgave, skal man ved Anvendelse af Identiteten

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \{f(x)+g(x)\}^2 dx - \int_{-\pi}^{+\pi} \{f(x)-g(x)\}^2 dx = 4\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cdot g(x)\, dx$$

bevise Rigtigheden af Formlen

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cdot g(x)\, dx = \frac{1}{2}a_0 a_0' + (a_1 a_1' + b_1 b_1') + \cdots + (a_n a_n' + b_n b_n') + \cdots,$$

hvor Rækken paa højre Side er absolut konvergent.

Opg. 35. Idet Funktionen $g(x)$ i forrige Opgave bestemmes ved Ligningerne

$$g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq x \leqq \xi \\ 0 & \text{i den øvrige Del af Intervallet } (-\pi, \pi), \end{cases}$$

skal man ved Anvendelse af Formlen

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{2}a_0 a_0' + (a_1 a_1' + b_1 b_1') + \cdots$$

bevise, at den til $f(x)$ hørende Fourierske Række

$$\frac{1}{2}a_0 + (a_1\cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \cdots$$

er ledvis integrabel, d. v. s. at Rækken

$$\int_0^{\xi} \frac{1}{2}a_0\, dx + \int_0^{\xi} (a_1\cos x + b_1 \sin x)\, dx + \int_0^{\xi} (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x)\, dx + \cdots$$

er konvergent med Summen $\int_0^{\xi} f(x)\, dx$.

Uendelige Produkter.

36. Sammenhæng mellem uendeligt Produkt og uendelig Række.

Lad

$$(1) \qquad (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)\ldots$$

være et vilkaarligt uendeligt Produkt, hvis Faktorer $1+u_n$ alle er $\neq 0$. Som omtalt i Indledningen siges dette Produkt at være konvergent med Værdien A, dersom Afsnittet $A_n=(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)$ nærmer sig, til en bestemt, fra Nul forskellig, Grænseværdi A for $n\to\infty$. Vi kan i det følgende nøjes med at betragte saadanne uendelige Produkter (1), for hvilke det gælder, at $u_n\to 0$ for $n\to\infty$, thi denne Betingelse er jo en for Produktets Konvergens nødvendig Betingelse, og alle Produkter (1), for hvilke denne Betingelse ikke er opfyldt, vil derfor sikkert være divergente. I et uendeligt Produkt, for hvilket $u_n\to 0$ for $n\to\infty$, vil alle Faktorerne $1+u_n$ fra et vist Trin af (d. v. s. for $n>N$) være positive, og vi kan derfor uden at foretage nogen virkelig Indskrænkning af Undersøgelsens Almindelighed antage, at Faktorerne $1+u_n$ alle sammen er positive, idet vi i modsat Fald blot sletter et endeligt Antal af Faktorerne, hvad der naturligvis ingensomhelst Indflydelse har paa Produktets Konvergens eller Divergens. Ved at antage samtlige Faktorer $1+u_n$ positive, opnaar vi for enhver af disse Faktorer at kunne tale om dens Logarithme $l\cdot(1+u_n)$. Vi kan da bevise følgende Sætning, der viser, hvorledes Undersøgelsen af et uendeligt Produkt umiddelbart kan hen-

føres til Undersøgelsen af en tilsvarende uendelig Række.

Den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at Produktet (1), hvor alle Faktorerne $1+u_n$ antages positive, er konvergent, bestaar deri, at den uendelige Række

$$(2) \qquad l\cdot(1+u_1)+l\cdot(1+u_2)+\cdots+l\cdot(1+u_n)+\cdots$$

er konvergent. Endvidere gælder det i det Tilfælde, hvor Produktet (1) og Rækken (2) er konvergente, at Produktets Værdi $A\,(\neq 0)$ og Rækkens Sum V er forbundet ved Ligningen $A=e^V$ eller $V=l\cdot A$.

Bevis: Idet vi med V_n betegner det n^{te} Afsnit i Rækken (2)

$$V_n = l\cdot(1+u_1)+l\cdot(1+u_2)+\cdots+l\cdot(1+u_n),$$

medens vi med A_n betegner det n^{te} Afsnit i Produktet (1)

$$A_n = (1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n),$$

er disse to Afsnit øjensynlig forbundet ved Ligningen $A_n = e^{V_n}$ eller $V_n = l\cdot A_n$. Heraf følger umiddelbart Sætningens Rigtighed. Thi [1]) er Rækken (2) konvergent med Summen V, altsaa $V_n \to V$ for $n\to\infty$, vil Produktet (1) ligeledes være konvergent og have Værdien $A = e^V\,(\neq 0)$, idet jo $V_n \to V$ medfører $A_n = e^{V_n} \to e^V$, og omvendt [2]) er Produktet (1) konvergent med Værdien $A\,(>0)$, altsaa $A_n \to A$, da vil Rækken (2) ligeledes være konvergent og have Summen $l\cdot A$, idet jo $A_n \to A$ medfører $V_n = l\cdot A_n \to l\cdot A$.

37. Absolut konvergent og betinget konvergent Produkt. Vi kalder et konvergent Produkt (1) absolut konvergent, hvis det forbliver konvergent og bevarer sin Værdi, naar Faktorerne permuteres paa vilkaarlig Maade, medens vi kalder et konvergent Produkt (1)

for betinget konvergent, hvis det ikke har denne Egenskab. Udfra den i forrige Paragraf beviste Sætning følger umiddelbart, at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at Produktet (1) (hvori Faktorerne $(1+u_n)$ alle antages positive) er absolut konvergent, er den, at Rækken (2) er absolut konvergent. Thi er Rækken (2) absolut konvergent, forbliver den jo konvergent og bevarer sin Sum V ved en vilkaarlig Omordning af Leddene, hvoraf følger, at Produktet (1) forbliver konvergent og bevarer sin Værdi $\pi = e^V$ ved en vilkaarlig Omordning af Faktorerne, og omvendt. Udfra denne sidste Bemærkning kan vi nu umiddelbart bevise følgende Hovedsætning:

Den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at et uendeligt Produkt (1), hvis Faktorer alle er $\neq 0$, er absolut konvergent, bestaar deri, at den uendelige Række

(3) $$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

er absolut konvergent, altsaa deri, at Rækken med positive Led

$$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots$$

er konvergent.

Bevis: Vi kan ved Beviset antage, at $u_n \to 0$ for $n \to \infty$, idet i modsat Fald Produktet (1) og Rækken (3) sikkert begge er divergente. Denne Antagelse medfører, at alle Faktorerne $1+u_n$ fra et vist Trin af er positive, og vi kan derfor (som ovenfor) antage, at de allesammen er positive, idet vi ellers blot slette et endeligt Antal af Faktorerne. Et Produkt (1), hvis Faktorer alle er positive, er imidlertid i Følge den overstaaende Bemærkning da og kun da absolut konvergent, naar den tilsvarende uendelige Række (2)

er det, og Beviset for den opstillede Sætning er derfor ensbetydende med at vise, at, idet $u_m \to 0$, vil de to Rækker med positive Led

(4) $$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_m| + \cdots$$

og

(5) $$|l\cdot(1+u_1)| + |l\cdot(1+u_2)| + \cdots + |l\cdot(1+u_m)| + \cdots$$

enten begge være konvergente eller begge være divergente. Rigtigheden heraf følger imidlertid umiddelbart ved at udføre den kendte Grænseligning

$$\lim_{x \to 0 \pm x} \frac{l\cdot(1+x)}{x} = 1 \; ;$$

thi idet $u_m \to 0$, viser denne Ligning jo, at fra et vist Trin af, d. v. s. for $n > N$, vil f. Eks.

$$\frac{1}{2} < \frac{|l\cdot(1+u_m)|}{|u_m|} < 2 \; ,$$

og de (for $n > N$ gældende) Uligheder

$$|l\cdot(1+u_m)| < 2\cdot|u_m| \quad \text{og} \quad |u_m| < 2\,|l\cdot(1+u_m)|$$

viser jo straks, at hvis den ene af de to Rækker (4) og (5) er konvergent, er den anden det ogsaa.

Med denne Sætning afslutter vi vore almindelige Betragtninger over uendelige Produkter, gennem hvilke vi væsentlig har villet vise, hvorledes Læren om uendelige Produkter umiddelbart kan udledes ud fra Læren om uendelige Rækker, og skal til Slut (i næste Paragraf) omtale et simpelt og sær-

lig rigtigt Eksempel.

38. Gammafunktionen $\Gamma(x)$. Vi betragter Funktionen

$$F_n(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{2}{2+x} \cdots \frac{n}{n+x} \cdot (n+1)^x \quad ,$$

hvor x er et vilkaarligt Tal, om hvilket vi blot forudsætter, at det ikke er et helt Tal ≤ 0. Vi vil bevise, at for ethvert $x \neq 0, -1, -2, \ldots$ vil Funktionen $F_n(x)$ for $n \to \infty$ nærme sig til en bestemt, fra Nul forskellig, Grænseværdi. Vi skriver hertil Funktionen $F_n(x)$ paa Formen

$$F_n(x) = \frac{1}{x}\left\{\frac{1}{1+x}\left(\frac{2}{1}\right)^x\right\} \cdot \left\{\frac{2}{2+x} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x\right\} \cdots \left\{\frac{n}{n+x}\left(\frac{n+1}{n}\right)^x\right\} ,$$

hvoraf følger, at $F_n(x)$ simpelthen er det n^{te} Afsnit i det uendelige Produkt

$$(6) \quad \frac{1}{x}\left\{\frac{1}{1+x} \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^x\right\} \cdot \left\{\frac{2}{2+x} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x\right\} \cdots \left\{\frac{n-1}{n-1+x}\left(\frac{n}{n-1}\right)^x\right\} \cdot \left\{\frac{n}{n+x}\left(\frac{n+1}{n}\right)^x\right\} \cdots .$$

Den opstillede Paastand om, at $F_n(x)$ nærmer sig til en bestemt Grænseværdi $\Gamma(x) \neq 0$ for $n \to \infty$, er følgelig ensbetydende med, at det uendelige Produkt (6) er konvergent for ethvert $x \neq 0, -1, -2, \ldots$. Vi vil endog bevise, at dette Produkt er absolut konvergent. Vi skriver hertil, for et vilkaarligt fast $x \neq 0, -1, \cdots$, den n^{te} Faktor paa Formen

$$1 + u_n = \frac{n}{n+x}\left(\frac{n+1}{n}\right)^x = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x$$

$$= \left(1 - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} + \sigma\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 + \frac{x}{n} + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2 \cdot n^2} + \sigma\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + \frac{x(x-1)}{2n^2} + \sigma\left(\frac{1}{n^2}\right) ,$$

hvoraf følger

$$u_n = \frac{x(x-1)}{2n^2} + \sigma\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot A_n \ ,$$

hvor $A_n \to \frac{x(x-1)}{2}$ for $n \to \infty$, og hvor derfor $|A_n| < k = k(x)$ for alle n. Heraf følger imidlertid umiddelbart, at Produktet (6) er absolut konvergent; thi idet $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$ er konvergent, viser Uligheden $|u_n| < k\frac{1}{n^2}$, at Rækken

$$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots$$

er konvergent, og Konvergensen af denne sidste Række er jo ensbetydende med den absolute Konvergens af Produktet (6).— Den for alle $x \neq 0, -1, -2, \cdots$ bestemte Grænsefunktion $\lim_{n\to\infty} F_n(x)$ betegnes sædvanligvis med $\Gamma(x)$ og kaldes i Overensstemmelse hermed for <u>Gammafunktionen</u>.

Vi vil slutteligt bevise om Funktionen $\Gamma(x)$, at den for ethvert $x \neq 0, -1, \cdots$ tilfredsstiller <u>Funktionalligningen</u>

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x).$$

Rigtigheden heraf følger umiddelbart ved Grænseovergangen $n \to \infty$ udfra Ligningen

$$F_n(x+1) = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x+2} \cdots \frac{n}{x+n+1}(n+1)^{x+1} = x\left\{\frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x+1} \cdots \frac{n}{x+n} \cdot (n+1)^x\right\} \cdot \frac{n+1}{x+n+1}$$

$$= x \cdot F_n(x)\,\frac{n+1}{n+x+1},$$

idet jo $\frac{n+1}{n+x+1} \to 1$ for $n \to \infty$. Ydet $F_n(1) = 1$ for alle n, og følgelig $\Gamma(1) = \lim_{n\to\infty} F_n(1) = 1$, finder vi udfra Funktionalligningen $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, at

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1\,,\ \Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2!\,,\ \Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(2) = 3!\ ,\ \ldots$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1) = (n-1)!\ ,\ \ldots\ .$$

Paa Grund af denne (for ethvert positivt helt Tal gyldige) Ligning $\Gamma(n) = (n-1)!$ betegner man ofte Gammafunktionen som en Interpolationsfunktion for den, kun for positive hele Værdier af n definerede, Funktion $f(n) = (n-1)!$, og det er ikke mindst netop som en saadan Interpolationsfunktion, at Gammafunktionen er af stor Betydning ved talrige Undersøgelser.

Opg. 36 For hvilke Værdier af x er Produktet

$$\left(1+\frac{x}{1^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{x^n}{n^2}\right)\cdots$$

konvergent?

Opg. 37. For hvilke Værdier af x er Produktet

$$\left(1+\frac{1}{1^x}\right)\left(1+\frac{1}{2^x}\right)\left(1+\frac{1}{3^x}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^x}\right)\cdots$$

konvergent?

Uegentlige Integraler.

39. Uegentligt Integral af en positiv Funktion. Lad $f(x)$ være kontinuert i et Interval $a \leqq x < \infty$, der strækker sig i det Uendelige til højre Side. Vi siger jo da om Integralet $\int_a^\infty f(x)\,dx$, at det er konvergent med Værdien A, dersom Afsnittet $F(\xi) = \int_a^\xi f(x)\,dx$ nærmer sig til Grænseværdien A for $\xi \to \infty$.

Ligesom vi indenfor de uendelige Rækkers Teori begyndte med at betragte det Tilfælde, hvor alle Rækkens Led var positive, vil vi her begynde med at betragte det Tilfælde, hvor Funktionen $f(x)$ under Integraltegnet er positiv (eller rettere $\geqq 0$) for alle $x \geqq a$. For et saadant Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ er Afsnittet $F(\xi) = \int_a^\xi f(x)\,dx$ en stedse voksende (eller rettere aldrig aftagende) Funktion af ξ for $\xi > a$, og der kan derfor her kun indtræffe en af følgende to Muligheder. 1) Funktionen $F(\xi)$ er opadtil begrænset for $\xi > a$, og da vil $F(\xi)$ nærme sig til en endelig og bestemt Grænseværdi for $\xi \to \infty$, nemlig til øvre Grænse A for Funktionen $F(\xi)$, d. v. s. Integralet $\int_a^\infty f(x)\,dx$ vil her være konvergent med Værdien A, og 2) Funktionen $F(\xi)$ er ikke opadtil begrænset for $\xi > a$, og da vil $F(\xi) \to \infty$ for $\xi \to \infty$, og Integralet $\int_a^\infty f(x)\,dx$ vil altsaa være divergent. Vi har hermed bevist, at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at Integralet $\int_a^\infty f(x)\,dx$, hvor $f(x) \geqq 0$ for $x \geqq a$, er konvergent, bestaar deri, at Afsnittet $F(\xi) = \int_a^\xi f(x)\,dx$ er en begrænset Funktion af ξ for $\xi > a$, og hvis denne Funktion $F(\xi)$ er begrænset (og Integralet altsaa konvergent), da vil Integralets Værdi netop være

øvre Grænse for Funktionen $F(\xi)$.

Heraf slutter vi umiddelbart, at hvis $f(x)$ og $g(x)$ er to for $x \geqq a$ kontinuerte positive Funktioner, for hvilke $g(x) \leqq f(x)$ for alle $x \geqq a$, da vil $\int_a^\infty g(x)\,dx$ være konvergent, hvis $\int_a^\infty f(x)\,dx$ er det, og Værdien B af $\int_a^\infty g(x)\,dx$ vil være $\leqq$ Værdien A af $\int_a^\infty f(x)\,dx$. Thi er $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent med Værdien A, gælder det jo for ethvert $\xi > a$, at

$$\int_a^\xi g(x)\,dx \leqq \int_a^\xi f(x)\,dx \leqq \int_a^\infty f(x)\,dx = A,$$

og denne Ulighed viser jo netop, at Afsnittet $\int_a^\xi g(x)\,dx$ er opadtil begrænset for $\xi > a$, og at dets øvre Grænse B er $\leqq A$.

Omvendt gælder det, at hvis $f(x)$ og $g(x)$ begge er kontinuerte og positive for $x \geqq a$, og $g(x) \geqq f(x)$ for alle $x \geqq a$, da vil $\int_a^\infty g(x)\,dx$ være divergent, hvis $\int_a^\infty f(x)\,dx$ er det. Thi var $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergent, maatte jo i Følge den foregaaende Sætning $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ogsaa være det.

Udfra det i Indledningen fundne Resultat, at $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ $(a>0)$ er konvergent for $\alpha > 1$, divergent for $\alpha \leqq 1$, følger umiddelbart ved Hjælp af de foregaaende Sætninger det rigtige Resultat, at hvis $f(x)$ er positiv for $x \geqq a$ (>0), vil $\int_a^\infty f(x)\,dx$ være konvergent, hvis der eksisterer to Konstanter: $\alpha > 1$ og k saaledes at $f(x) < \frac{k}{x^\alpha}$ for $x \geqq a$ (eller blot for alle x fra et vist Trin af); ellers vil $\int_a^\infty f(x)\,dx$ være divergent, hvis $f(x) > \frac{k}{x}$ for alle tilstrækkelig store x.

Eks. $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ er konvergent, idet jo $\frac{\sin^2 x}{x^2} \leqq \frac{1}{x^2}$ for $x \geqq 1$.

Eks. $\int_1^\infty x^\alpha e^{-x}\,dx$ er konvergent for alle α. Thi idet e^x jo vokser stærkere i det Uendelige for $x \to \infty$ end nogen selv nok saa stor Potens af x, vil jo for ethvert fast α

$$e^{-x}\, x^{\alpha+2} = \frac{x^{\alpha+2}}{e^x} \longrightarrow 0 \qquad \text{for } x \to \infty,$$

hvoraf følger, at $e^{-x} x^{\alpha} < \frac{k}{x^2}$ for alle x fra et vist Trin af.
Eks. Integralet $\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ er divergent. Thi idet

$$\int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx > \int_{p\pi+\frac{\pi}{4}}^{p\pi+\frac{3\pi}{4}} \frac{|\sin x|}{x}\,dx > \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{p\pi+\frac{\pi}{4}}^{p\pi+\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{x}$$

$$> \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{(p+\frac{3}{4})\pi} > \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1}{p+1},$$

er jo

$$\int_1^{p\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx > \int_{\pi}^{p\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx > \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p}\right),$$

og heraf følger straks, at Afsnittet $\int_1^{\xi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ ikke er en begrænset Funktion af ξ, fordi Størrelsen $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p} \to \infty$ for $p \to \infty$.

Ganske tilsvarende Sætninger til dem, vi ovenfor har udledt for et uegentligt Integral af Formen $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$, gælder naturligvis for et uegentligt Integral af Formen $\int_a^{b} f(x)\,dx$, hvor Integrationsintervallet (a,b) er endeligt, men hvor der er „noget i Vejen" med Funktionen $f(x)$ i et af Intervalendepunkterne a og b, f. Eks. i Punktet a. Vi finder her (ved nøjagtig samme Betragtninger som ovenfor), at hvis $f(x)$ er kontinuert og positiv i det til venstre aabne Interval $a < x \leqq b$, er den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at $\int_a^b f(x)\,dx$ er konvergent, den, at Afsnittet $F(\xi) = \int_{\xi}^{b} f(x)\,dx$ er en begrænset Funktion af ξ for $a < \xi < b$, og endvidere, at hvis dette Afsnit $F(\xi)$ er begrænset (og Integralet følgelig konvergent), vil Integralets Værdi $A = \lim_{\xi \leftarrow a} F(\xi)$ netop være øvre Grænse A for Funktionen $F(\xi)$ i Intervallet $a < \xi < b$. Heraf udleder vi (ganske som før), at hvis vi i et saadant Integral af en positiv Funktion formindsker Funktionen under Integralregnet, vil Integralet forblive konvergent, hvis det var det i Forvejen og omvendt, at hvis vi forstørrer Funk-

tionen under Integraltegnet, vil Integralet forblive divergent, hvis det var det i Forvejen.

Idet vi f. Eks. antager, at venstre Intervalendepunkt a netop er Punktet 0 (og følgelig at højre Endepunkt b er > 0), har vi da umiddelbart følgende vigtige Resultat: Er $f(x)$ kontinuert og positiv i det lil venstre aabne Interval $0 < x \leqq b$, da vil $\int_0^b f(x)\,dx$ være konvergent, hvis der eksisterer to saadanne Konstanter: $\alpha < 1$ og k, at $f(x) < \frac{k}{x^\alpha}$ for alle x i en vis Omegn til højre for Punktet 0 (d. v. s. for $0 < x < h$), medens Integralet vil være divergent, hvis $f(x) \geq \frac{k}{x}$; thi om Integralet $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ ved vi jo, at det er konvergent for $\alpha < 1$, divergent for $\alpha \geqq 1$.

Eks. $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{x^2}\,dx$ er divergent; thi for alle x tilstrækkelig nær ved 0 er jo $\frac{\cos^2 x}{x^2} > \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2}$.

Eks. Om Integralet $\int_0^1 e^{-x} x^\alpha\,dx$ gælder det, at for $\alpha \geqq 0$ er Funktionen $e^{-x}x^\alpha$ under Integraltegnet kontinuert i det lukkede Interval $0 \leqq x \leqq 1$, medens denne Funktion $\to \infty$ for $0 \leftarrow x$, dersom $\alpha < 0$. Vi vil bevise, at Integralet $\int_0^1 e^{-x}x^\alpha\,dx$ er konvergent for $\alpha > -1$, divergent for $\alpha \leqq -1$. Rigtigheden heraf følger umiddelbart deraf, at $e^{-x} \to 1$ for $0 \leftarrow x$; thi dette medfører jo, at der for alle x i en vis Omegn til højre for Punktet 0 gælder Ulighederne $e^{-x}x^\alpha < 2x^\alpha$ og $e^{-x}x^\alpha > \frac{1}{2}x^\alpha$, af hvilke den første viser, at Integralet er konvergent for $\alpha > -1$, medens den sidste viser, at Integralet er divergent for $\alpha \leqq -1$.

40. Integralfremstilling for Funktionen $\Gamma(x)$. Vi betragter Integralet

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1}\,dt$$

af den positive Funktion $f(t) = e^{-t}t^{x-1}$. Her er 1) Integrationsintervallet uendelig stort, og 2) er der „noget i Vejen" i venstre

Endepunkt $t = 0$, dersom $x < 1$. For at behandle hver af disse to „Singulariteter" for sig, deler vi Integrationsvejen i to Dele, f. Eks. i Intervallerne $0 < x \leqq 1$ og $1 \leqq x < \infty$ og betragter Integralerne $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ og $\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ hver for sig. Som vist i foregaaende Paragraf er det sidste af disse to Integraler konvergent for alle Værdier af x, medens det første kun er konvergent for $x - 1 > -1$, d. v. s. for $x > 0$. Det givne Integral $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^1 + \int_1^\infty$ har derfor kun en Mening (d. v. s. fremstiller et bestemt Tal) for $x > 0$. Vi vil nu den for $x > 0$ definerede Funktion $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt$ bevise, at den for $x > 0$ tilfredsstiller Funktionalligningen $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$. Hertil betragter vi Udtrykket $\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-t} \cdot t^x dt$, hvor $0 < \tau_1 < \tau_2 < \infty$, d. v. s. som er fremkommen ved at „beskære" det givne Interval $0 < t < \infty$ til begge Sider. Anvender vi delvis Integration paa dette (helt igennem „regulære") Integral, finder vi

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-t} \cdot t^x dt = \left[-e^{-t} t^x\right]_{\tau_1}^{\tau_2} + x \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-t} t^{x-1} dt$$

$$= -e^{-\tau_2} \tau_2^x + e^{-\tau_1} \tau_1^x + x \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

hvoraf umiddelbart følger ved Grænseovergangen $0 \leftarrow \tau_1$, $\tau_2 \to \infty$, at for ethvert $x > 0$ er $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$. Idet endvidere $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{t=+\infty} = 1$, finder vi udfra Funktionalligningen $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, at for ethvert positivt helt n er $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Vi har herved nu den ved $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ for $x > 0$ fremstillede Funktion $\Gamma(x)$ bevist, at den har flere fundamentale Egenskaber fælles med den i 38 for alle $x \neq 0, -1, -2, \ldots$ definerede Funktion $\Gamma(x)$. Der rejser sig da naturligt det Spørgsmaal, om man udfra disse fælles Egenskaber (nemlig den fælles Funktionalligning $f(x+1) = x f(x)$ og Ligningen $\Gamma(1) = \Gamma(1)$)

kan slutte, at de to Funktioner $F(x)$ og $\Gamma(x)$ er en og samme Funktion for $x>0$. Vi vil vise, at en saadan Slutning ikke kan drages; thi er $p(x)$ en vilkaarlig Funktion, der er periodisk med Perioden 1 og for hvilken $p(1)=1$ (f. Eks. Funktionen $p(x)=\cos 2\pi(x-1)$), vil jo Funktionen $p(x)\,\Gamma(x)$ have de nævnte Egenskaber fælles med $\Gamma(x)$, saaledes at disse Egenskaber ikke karakteriserer $\Gamma(x)$ entydigt. Man kan imidlertid ved nærmere Undersøgelse af Funktionerne $\Gamma(x)$ og $F(x)$, hvilken Undersøgelse vi dog ikke her skal komme ind paa, bevise om den, at de er sammenfaldende for $x>0$, eller anderledes udtrykt, at $\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ for $x>0$ er en Integralfremstilling for Funktionen $\Gamma(x)$.

41. Absolut konvergent og betinget konvergent Integral. Om de i de foregaaende Paragraffer betragtede regentlige Integraler har vi stedse antaget, at Funktionen under Integraltegnet var positiv i hele Integrationsintervallet; vi lader nu denne Antagelse falde, d. v. s. vi forudsætter ikke længer, at Funktionen har et fast Fortegn i hele Intervallet. Lad $f(x)$ være en vilkaarlig i Intervallet $x\geq a$ kontinuert Funktion. Vi betragter da sammen med Integralet $\int_a^\infty f(x)\,dx$ det tilsvarende Integral $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$, hvor Funktionen under Integraltegnet er helt igennem positiv, og vil da bevise, at hvis dette sidste Integral $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ er konvergent, er det givne Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ det ogsaa. Rigtigheden heraf følger umiddelbart udfra det almindelige Konvergensprincip for regentlige Integraler; thi Uligheden

$$\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx\right| \leqq \int_{\xi_1}^{\xi_2} |f(x)|\,dx \qquad (a<\xi_1<\xi_2<\infty)$$

viser jo, at hvis $\int_{\xi_1}^{\xi_2}|f(x)|\,dx$ kan gøres vilkaarlig lille (d. v. s. $<\varepsilon$)

ved blot at vælge ξ_2 tilstrækkelig stor (d. v. s. for $\xi_2 > \xi = \xi(\varepsilon)$), gælder dette ogsaa (yderligere) om $\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx\right|$.

I fuldkommen analogi med Definitioner inden for Læren om de uendelige Rækker, vil vi vedtage at sige om et <u>konvergent</u> Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$, at det er <u>absolut konvergent</u>, hvis ikke blot Integralet selv, men ogsaa $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ er konvergent, medens vi kalder Integralet <u>betinget konvergent</u>, hvis det <u>ikke</u> har denne Egenskab.

<u>Eks.</u> Gælder det om en for $x \geqq a$ kontinuert Funktion $f(x)$, at for alle tilstrækkelig store x er $|f(x)| < \frac{k}{x^\alpha}$, hvor $\alpha > 1$, da er $\int_a^\infty f(x)\,dx$ <u>absolut konvergent</u>; thi da ved vi jo om Integralet $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$, at det er konvergent.

<u>Eks.</u> Som et simpelt Eksempel paa et <u>betinget konvergent</u> Integral vil vi betragte Integralet $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ (der frembyder en vis Analogi med den betinget konvergente Række $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$). Idet $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ jo er divergent, ved vi for det første, at $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ <u>ikke er absolut konvergent</u>. For dernæst at vise at $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ virkelig er <u>konvergent</u> (og følgelig <u>betinget</u> konvergent) skal vi vise om Afsnittet $\int_1^\xi \frac{\sin x}{x}\,dx$, at det nærmer sig til en endelig bestemt Grænseværdi for $\xi \to \infty$. Vi skriver hertil dette Afsnit paa Formen

$$\int_1^\xi \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_1^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_\pi^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \cdots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} + \int_{n\pi}^{\xi} \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

hvor $n = n(\xi)$ er det største hele Tal, for hvilket $n\pi \leqq \xi$. Idet det første Integral $\int_1^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$ jo er konstant (d. v. s. uafhængigt af ξ), medens det sidste Integral $\int_{n\pi}^{\xi} \frac{\sin x}{x}\,dx$ er numerisk $< \frac{1}{n\pi} \leqq \frac{1}{n}$ og derfor $\to 0$ for $\xi \to \infty$, gælder det blot om at vise, at Summen $\int_\pi^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \cdots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$ nærmer sig til en endelig bestemt Grænseværdi for $\xi \to \infty$, d. v. s. for $n \to \infty$. Dette føl-

ger imidlertid umiddelbart deraf, at denne Sum jo simpelthen er et Afsnit af den uendelige Række

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx + \cdots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx + \cdots,$$

hvilken Række i Følge en kendt Sætning er <u>konvergent</u>, fordi $^{1)}$ dens Led har skiftende Fortegn, og $^{2)}$ dens Led øjensynlig er stedse aftagende i numerisk Værdi og aftager mod 0 for $n \to \infty$.

Ganske tilsvarende Betragtninger, som dem vi her har anstillet for uegentlige Integraler $\int_a^\infty f(x)\,dx$ udstrakt over et uendelig stort Interval, kan naturligvis ligesaavel anstilles for uegentlige Integraler $\int_a^b f(x)\,dx$, hvor der er „noget i Vejen" i det ene eller andet Intervalendepunkt.

<u>Eks.</u> Gælder det for en i det til venstre aabne Interval $0 < x \leqq b$ kontinuert Funktion $f(x)$, at $|f(x)| < \frac{k}{x^\alpha}$, hvor $\alpha > -1$, da er Integralet $\int_0^b f(x)\,dx$ <u>absolut konvergent</u>, idet jo Integralet $\int_0^b |f(x)|\,dx$ er konvergent.

42. <u>Indførelse af ny uafhængig Variabel i et uegentligt Integral.</u> Vi vil nu udlede en vigtig Regneregel, der viser, hvorledes den fra de sædvanlige (egentlige) Integraler kendte Sætning om Indførelse af ny Integrationsvariabel kan udstrækkes til ogsaa at gælde for <u>uegentlige Integraler</u>. Vi vælger at formulere Sætningen for det Tilfælde, hvor den ene af de to Variable gennemløber et <u>endeligt</u> Interval, medens den anden gennemløber et <u>uendeligt</u> Interval; her viser Sætningen os da tillige, hvorledes et uegentligt Integral udstrakt over et uendeligt Interval altid kan transformeres om til et uegentligt Integral, der er udstrakt over et endeligt Interval, men som har en Singularitet i det ene Endepunkt, og omvendt.

Sætning: Er $x = \varphi(u)$ en monoton Funktion af u (f. Eks. en stedse voksende Funktion) med en kontinuert Differentialkvotient $\varphi'(u)$, og afbilder $x = \varphi(u)$ det endelige Interval $\alpha \leqq u < \beta$ paa det uendelige Interval $a \leqq x < \infty$, samt er $f(x)$ kontinuert for $x \geqq a$, da vil der gælde Ligningen

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du,$$

idet herved menes, at hvis det ene af disse to Integraler konvergerer (fremstiller et bestemt Tal), vil det andet ogsaa gøre det, og de vil have samme Værdi.

Rigtigheden heraf følger straks udfra den kendte Sætning om egentlige Integraler

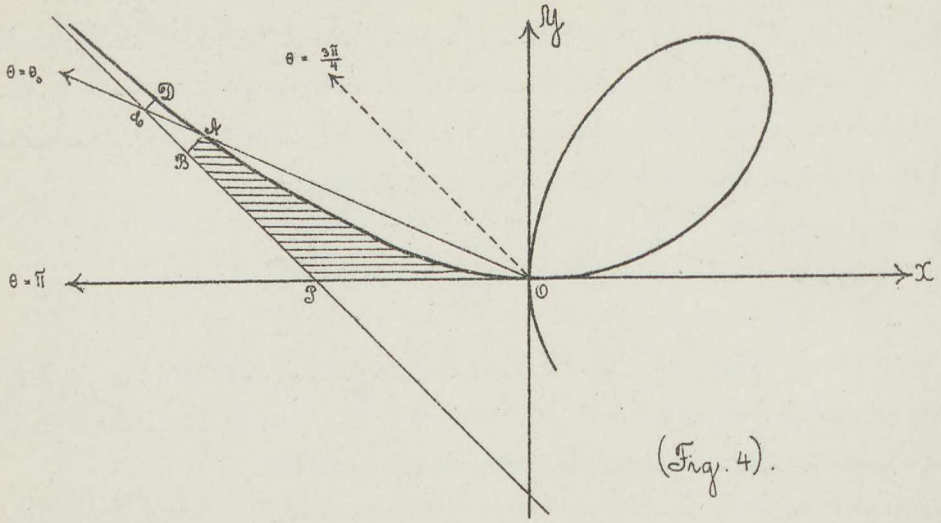
$$\int_a^\xi f(x)\,dx = \int_\alpha^\xi f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du,$$

hvor ξ og ξ er forbundet ved Ligningen $\xi = \varphi(\xi)$, idet det bemærkes, at $\xi \to \beta$ medfører $\xi \to \infty$, og omvendt.

Eks. Indfører vi i $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ en ny Integrationsvariabel u ved Ligningen $x = \operatorname{tg} u$, hvor $\varphi(u) = \operatorname{tg} u$ er monoton (med en kontinuert Differentialkvotient $\varphi'(u) = \frac{1}{\cos^2 u}$) i Intervallet $0 \leqq u < \frac{\pi}{2}$ og afbilder dette Interval paa Intervallet $0 \leqq x < \infty$, finder vi

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 u}\,du}{1+\operatorname{tg}^2 u} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{\pi}{2}.$$

Eks. Som et Øvelseseksempel af lidt almindeligere Art, vil vi betragte Descartes Blad (se Fig. 4), der har Ligningen $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ $(a > 0)$, og vil undersøge om det (paa Figuren skraverede) Område over Abscisseaksen, der begrænses af Abscisseaksen $y = 0$, Kurven og Asymptoten $x + y + a = 0$, har et en-



(Fig. 4).

deligt eller et uendelig stort Areal, d. v. s. om Arealet af det „beskaarne" Omraade OPBAO nærmer sig til en endelig Grænseværdi eller vokser i det Uendelige, naar Punktet A langs Kurven fjerner sig bort i det Uendelige. Vi bemærker hertil først, at vi i Stedet for at beskære Omraadet ved den paa Asymptoten vinkelrette Linie AB ligesaavel kan beskære det ved Linien AC, hvis Forlængelse gaar gennem O; thi idet (se Fig. 4)

$$\text{Areal } OPBAO < \text{Areal } OPCAO < \text{Areal } OPCDO,$$

vil Arealerne af Omraadet beskaaret paa den ene eller anden Maade enten begge nærme sig til samme endelige Grænseværdi eller begge $\to \infty$. Vi sætter

$$\text{Areal } OPCAO = \text{Trekant } OPC - \text{Sektor } OAO,$$

hvoraf følger, idet Kurven og Asymptoten i polare Koordina-

her har henholdsvis Ligningerne

$$r = \frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta} \quad \text{og} \quad r = \frac{-a}{\sin\theta+\cos\theta},$$

og idet $\theta=\theta_0$ $\left(\frac{3\pi}{4}<\theta_0<\pi\right)$ bestemmer Retningen af Linien OA

$$\text{Areal } OPCAO = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\pi}\left(\frac{-a}{\sin\theta+\cos\theta}\right)^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\pi}\left(\frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{\theta_0}^{\pi}\left\{\frac{1}{(\sin\theta+\cos\theta)^2} - \frac{9\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta}{(\cos^3\theta+\sin^3\theta)^2}\right\} d\theta.$$

Det drejer sig om at undersøge, hvorvidt dette Areal, for $\frac{3\pi}{4} \leftarrow \theta_0$, nærmer sig til en endelig bestemt Grænseværdi eller $\to\infty$, altsaa om <u>hvorvidt det regentlige Integral</u>

$$\frac{a^2}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\left\{\frac{1}{(\sin\theta+\cos\theta)^2} - \frac{9\cdot\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\cos^3\theta+\sin^3\theta)^2}\right\} d\theta,$$

<u>hvor Funktionen under Integraltegnet er defineret og kontinuert i det til venstre aabne Interval $\frac{3\pi}{4}<\theta\leqq\pi$, er konvergent eller ej.</u> Idet saavel Taller som Nævner i enhver af de to Brøker under Integraltegnet er homogene Polynomier i $\cos\theta$ og $\sin\theta$, og saaledes at Graden af Telleren er 2 lavere end Graden af Nævneren, indfører vi (hvad der ikke forandrer Integralets Konvergens eller Divergens, eller i Tilfælde af Konvergens forandrer Integralets Værdi) <u>en ny Integrationsvariabel z ved Ligningen $z=\operatorname{tg}\theta$, $\theta=\operatorname{Arctg} z$,</u> hvor $\operatorname{Arctg} z$ er en monoton Funktion af z (med en kontinuert Differentialkvotient), der afbilder Intervallet $\frac{3\pi}{4}<\theta\leqq\pi$ paa Intervallet $-1<z\leqq 0$. Herved faar vi Integralet

$$(1) \qquad \frac{a^2}{2}\int_{-1}^{0}\left\{\frac{1}{(1+z)^2} - \frac{9z^2}{(1+z^3)^2}\right\} dz.$$

For at undersøge om dette Integral er konvergent eller ej, vil vi undersøge, hvorledes Funktionen under Integraltegnet forholder sig for $-1 \leftarrow z$. Vi finder for $z \neq -1$

$$\frac{1}{(1+z)^2} - \frac{9z^2}{(1+z^3)^2} = \frac{(1-z+z^2)^2 - 9z^2}{\{(1+z)(1-z+z^2)\}^2} = \frac{(z^2+2z+1)(z^2-4z+1)}{(1+z)^2 \cdot (1-z+z^2)^2} = \frac{z^2-4z+1}{(1-z+z^2)^2} ,$$

hvoraf følger, at denne Funktion $\to \frac{2}{3}$ for $-1 \leftarrow z$, og at Funktionen altsaa simpelthen har en <u>hævelig Diskontinuitet</u> i Endepunktet $z = -1$, saaledes at Integralet selvfølgelig er <u>konvergent</u>. I Stedet for at udregne dette Integral ved at skrive det paa Formen

$$(2) \qquad \frac{a^2}{2} \int_{-1}^{0} \frac{z^2-4z+1}{(1-z+z^2)^2}\, dz ,$$

hvor Brøken $\frac{z^2-4z+1}{(1-z+z^2)^2}$ under Integraltegnet er defineret og kontinuert i det <u>lukkede</u> Interval $-1 \leqq z \leqq 0$, og derefter dekomponere denne Brøk, er det simplere at blive staaende ved det <u>regentlige</u> Integral (1) (hvor Funktionen under Integraltegnet kun er defineret for $-1 < z \leqq 0$) og her først udregne Afsnittet $\int_{\xi}^{0}$, hvor $-1 < \xi < 0$, og derefter lade $-1 \leftarrow \xi$. Vi finder herved

$$\frac{a^2}{2} \int_{\xi}^{0} \left\{ \frac{1}{(1+z)^2} - \frac{9z^2}{(1+z^3)^2} \right\} dz = \frac{a^2}{2} \left[\frac{-1}{1+z} + \frac{3}{(1+z^3)} \right]_{\xi}^{0} =$$

$$\frac{a^2}{2}(-1+3) - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{-(1-\xi+\xi^2)+3}{1+\xi^3} = a^2 + \frac{a^2}{2} \frac{\xi^2-\xi-2}{(\xi+1)(\xi^2-\xi+1)} =$$

$$a^2 + \frac{a^2}{2} \frac{\xi-2}{\xi^2-\xi+1} \to a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} , \qquad \text{for } -1 \leftarrow \xi .$$

Det omhandlede (i det Mendelige gaaende) Omraade har altsaa <u>det endelige Areal $\frac{a^2}{2}$</u>

<u>43. Regentligt Planintegral.</u> Vi har i 2det Afsnit defineret Be-

grebet Planintegral $\int_{\omega} F(x,y)\,d\sigma$, hvor ω er et helt i det Endelige beliggende Omraade (med et bestemt Areal), og hvor $F(x,y)$ er en indenfor hele dette Omraade ω (incl. Rand) kontinuert Funktion af de to uafhængige Variable x og y. Vi skal nu foretage en Udvidelse af Begrebet Planintegral, idet vi ogsaa skal tillægge et Planintegral en Mening (d. v. s. opfatte det som fremstillende et bestemt Tal) i visse saadanne Tilfælde, hvor Omraadet ω strækker sig i det Uendelige, eller hvor Funktionen $F(x,y)$ er diskontinuert i et Punkt (x_0, y_0) indenfor ω, f. Eks. fordi Funktionen $F(x,y) \to \infty$ for $(x,y) \to (x_0, y_0)$; i saadanne Tilfælde taler man om et uegentligt Planintegral, ligesom vi i de foregaaende Paragraffer har talt om et uegentligt Linieintegral (eller simpelthen om et uegentligt Integral).

Vi begynder med at betragte det Tilfælde, hvor Omraadet ω strækker sig i det Uendelige, og vil for Simpelheds Skyld tænke os dette Omraade bestaaende af hele den Del af Planen, der ligger udenfor en givet lukket Kurve k (eller specielt værende hele XY-Planen). Endvidere vil vi for Simpelheds Skyld tænke os den indenfor Omraadet ω (incl. Rand) givne kontinuerte Funktion $F(x,y)$ værende overalt positiv. — Vi beskærer Omraadet ω ved Hjælp af en (stor) Cirkel med Centrum i O og Radius ϱ og betragter først det (egentlige) Planintegral $\int_{\omega_\varrho} F(x,y)\,d\sigma$, hvor ω_ϱ betegner det endelige Omraade, der ligger udenfor Kurven k, men indenfor Cirklen C. Vi lader nu $\varrho \to \infty$. Da vil dette Planintegral $\int_{\omega_\varrho} F(x,y)\,d\sigma$ være en stedse voksende Funktion af ϱ (fordi $F(x,y)$ er overalt positiv), og følgelig vil dette Planintegral enten nærme sig til en endelig Grænseværdi A eller vokse udover alle Grænser; i det første Tilfælde siger vi om det givne (uegentlige) Planintegral $\int_{\omega} F(x,y)\,d\sigma$, at det er konvergent med Værdien A, medens vi i det andet Tilfælde kalder Planintegralet

divergent.

Vi tilføjer til denne Definition straks den Bemærkning, at det er væsentligt, at vi under Grænseovergangen har beskaaret Omraadet ω netop ved Hjælp af en Cirkel med Centrum i O, d. v. s. vi kommer til samme Resultat, hvis vi i Stedet for en saadan Cirkel C benytter en vilkaarlig anden Kurve K, som blot under Grænseovergangen udvider sig i det Uendelige til alle Sider. Lad nemlig K være en vilkaarlig saadan Kurve, og lad C_1 og C_2 være henholdsvis den største Cirkel med Centrum i O, der ligger helt indenfor K, og den mindste Cirkel med Centrum i O, der helt omslutter K. Der gælder da øjensynlig Ulighederne

$$\int_{\omega_1} F(x,y)\,db < \int_{\omega'} F(x,y)\,db < \int_{\omega_2} F(x,y)\,db,$$

hvor ω_1, ω' og ω_2 angiver de ved henholdsvis Cirklen C_1, Kurven K og Cirklen C_2 beskaarne Omraader; men disse Uligheder viser jo umiddelbart, at naar Kurven K udvider sig i det Uendelige til alle Sider (hvorved samtidig begge Cirklerne C_1 og C_2 udvider sig i det Uendelige), vil det ved Kurven K begrænsede Planintegral da og kun da nærme sig til den endelige Grænseværdi A, naar dette gælder for det ved Cirklen C afgrænsede Planintegral.

Eks. Som et særlig vigtigt Eksempel vil vi betragte det, hvor Funktionen $F(x,y)$ for alle tilstrækkelig fjerne Punkter (x,y), d. v. s. for alle Punkter (x,y), for hvilke Afstanden $r=\sqrt{x^2+y^2} \geq R$, er givet ved Ligningen $F(x,y) = \frac{1}{r^\alpha}$. Tænker vi os for Simpelheds Skyld det givne Omraade ω afgrænset „indadtil" ved Cirklen $r=R$ (altsaa bestaaende af samtlige Punkter, hvis Afstand fra O er $\geq R$), finder vi, idet vi indfører polare Koordinater (r,ϑ),

det ved Cirklen C beskaarne Planintegral udtrykt ved

$$\int_{\omega_\varrho} F(x,y)\,d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_R^{\varrho} \frac{1}{r^{\alpha}}\, r\,dr = 2\pi \int_R^{\varrho} \frac{dr}{r^{\alpha-1}} \,.$$

Vi lader nu $\varrho \to \infty$ og finder herved (idet $\int_R^{\infty} \frac{dr}{r^{\alpha-1}}$ er konvergent for $\alpha > 2$ med Værdien $\frac{1}{\alpha-2}\,\frac{1}{R^{\alpha-2}}$, medens det er divergent for $\alpha \leqq 2$), at det givne uegentlige Planintegral er konvergent for $\alpha > 2$ med Værdien $\frac{2\pi}{\alpha-2}\,\frac{1}{R^{\alpha-2}}$, medens det er divergent for $\alpha \leqq 2$.

Ganske som ved de tidligere Undersøgelser af lignende Art vises nu umiddelbart, at dersom $F(x,y)$ og $G(x,y)$ er to kontinuerte positive Funktioner indenfor et Område ω, der strækker sig ud i det Uendelige, og saaledes at $G(x,y) \leqq F(x,y)$ for alle tilstrækkelig fjerne Punkter, da vil Planintegralet $\int_\omega G(x,y)\,d\sigma$ være konvergent, hvis Planintegralet $\int_\omega F(x,y)\,d\sigma$ er det.

Eks. Funktionen $F(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ er kontinuert i hele Planen, og idet $e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2}\,e^{-y^2}$ jo aftager hurtigere mod 0 for $x \to \infty$ end $\frac{1}{x^3}$ (iøvrigt end enhver Potens $x^{-\alpha}$), vil $\int_\omega e^{-x^2-y^2}\,d\sigma$, hvor ω f. Eks. er hele Planen, være konvergent. For at søge Værdien af dette konvergente Integral beskærer vi Planen ω ved Hjælp af Cirklen C med Centrum i O og Radius ϱ, og finder, idet vi indfører polære Koordinater (r,θ),

$$\int_{\omega_\varrho} e^{-x^2-y^2}\,d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varrho} e^{-r^2}\, r\,dr = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}\,(1-e^{-\varrho^2})\,d\theta = \pi\,(1-e^{-\varrho^2}) \,,$$

hvoraf umiddelbart følger (idet $e^{-\varrho^2} \to 0$ for $\varrho \to \infty$), at det givne Integral $\int_\omega e^{-x^2-y^2}\,d\sigma$ har Værdien π. Vi vil gøre en vigtig Anvendelse af dette Resultat, idet vi vil vise, hvorledes vi derudfra kan udlede Værdien af det (øjensynlig konvergente) uegentlige Linieintegral $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$, der spiller en vigtig Rolle inden for Fejlteorien. Vi henlytter herfra en tidligere Bemærkning

om, at vi ved Behandlingen af et regentligt Planintegral udstrakt over et vendeligt Omraade ω ligesaavel kan beskære Omraadet ω ved Hjælp af andre Kurver end netop Cirkler, naar blot Beskæringskurven efterhaanden udvider sig i det Uendelige til alle Sider. Vi vælger her at beskære Planen ω ved Hjælp af et akseparallelt Kvadrat med Centrum i O, hvis halve Sidelængde vi betegner med ξ. For det saaledes beskaarne Planintegral finder vi umiddelbart Udtrykket

$$\int e^{-x^2-y^2}\,d\sigma = \int_0^\xi e^{-x^2}dx \int_0^\xi e^{-y^2}dy = \left(\int_0^\xi e^{-x^2}dx\right)^2 .$$

Nu har vi imidlertid ovenfor (ved Beskæring af Planen ved Hjælp af Cirkler) fundet, at $\int_\omega e^{-x^2-y^2}\,d\sigma = \pi$, og det maa derfor gælde, at

$$\left(\int_0^\xi e^{-x^2}dx\right)^2 \longrightarrow \pi \qquad \text{for } \xi \to \infty ,$$

d. v. s. $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \lim \int_0^\xi e^{-x^2}dx$ har Værdien $\sqrt{\pi}$ (hvor Kvadratroden skal tages med Fortegnet +, idet Funktionen e^{-x^2} jo er helt igennem positiv).

Vi betragter dernæst et regentligt Planintegral $\int_\omega F(x,y)\,d\sigma$, hvor Omraadet ω er beliggende helt i det Endelige, men hvor Funktionen $F(x,y)$ er diskontinuert i et Punkt $P_0:(x_0,y_0)$ indenfor ω. Vi beskærer her Omraadet ω ved en (lille) Cirkel c med Centrum i P_0 og Radius ρ og betragter det (egentlige) Planintegral $\int_{\omega_\rho} F(x,y)\,d\sigma$, hvor ω_ρ angiver Omraadet ω efter Udskæringen af den nævnte lille Cirkel c. Vi lader nu $0 \leftarrow \rho$ og siger da om det givne Planintegral $\int_\omega F(x,y)\,d\sigma$, at det er konvergent med Værdien A, hvis det beskaarne Planintegral ved denne Grænseovergang $0 \leftarrow \rho$ nærmer sig til en endelig og

bestemt Grænseværdi A, medens vi kalder Integralet divergent, hvis dette ikke finder Sted.

Eks. Funktionen $F(x,y) = \frac{1}{r^\alpha}$ $(\alpha > 0)$ er overalt kontinuert undtagen i Punktet $O(0,0)$. Betegner vi med ω_ϱ f. Eks. det Omraade, der ligger indenfor Cirklen $r = R$, finder vi for det ved en (lille) Cirkel med Centrum i O beskaarne Planintegral Udtrykket

$$\int_{\omega_\varrho} F(x,y)\,d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_\varrho^R \frac{1}{r^\alpha} \cdot r\,dr = 2\pi \int_\varrho^R \frac{dr}{r^{\alpha-1}} .$$

Vi lader nu $0 \leftarrow \varrho$ og finder herved (idet $\int_0^R \frac{dr}{r^{\alpha-1}}$ er konvergent for $\alpha < 2$ med Værdien $\frac{1}{2-\alpha} R^{2-\alpha}$, medens det er divergent for $\alpha \geqq 2$), at det givne uegentlige Planintegral er konvergent for $\alpha < 2$ med Værdien $\frac{2\pi}{2-\alpha} \cdot R^{2-\alpha}$, medens det er divergent for $\alpha \geqq 2$.

44. Uegentligt Rumintegral. Vi har i 2det Afsnit defineret Begrebet Rumintegral $\int_\Omega F(x,y,z)\,d\tau$, hvor Omraadet Ω er beliggende helt i det Endelige, og hvor Funktionen $F(x,y,z)$ er kontinuert i hele Omraadet Ω (incl. Begrænsningsflader). Paa ganske samme Maade som ved Linieintegraler og Planintegraler kan man naturligvis foretage en Udvidelse af Begrebet Rumintegral, idet man ogsaa tillægger et saadant Rumintegral en Mening (d. v. s. opfatter det som fremstillende et bestemt Tal) i visse saadanne Tilfælde, hvor Omraadet Ω strækker sig i det Uendelige, eller hvor Funktionen $F(x,y,z)$ er diskontinuert i et Punkt $P_0(x_0,y_0,z_0)$ indenfor Omraadet Ω. De Definitioner, der benyttes for et saadant „uegentligt" Rumintegral er fuldkommen analoge med dem for det uegentlige Linieintegral og det uegentlige Planintegral; vi beskærer her først Omraadet Ω ved Hjælp af Kugleflader, og foretager derefter en Grænseovergang ved hensigtsmæssig at lade Kuglefladen udvide sig i det Uendelige eller lade

den trække sig sammen om Funktionens Diskontinuitetspunkt P_0. Vi skal ikke her gaa nærmere ind paa den almindelige Teori, men nøjes med at betragte to karakteristiske og særlig vigtige Eksempler.

Eks. Bestaar Omraadet Ω af alle Punkter, for hvilke Afstanden $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ er $\geqq R$, og er Funktionen $F(x,y,z)$ givet indenfor Ω ved Ligningen $F(x,y,z) = \frac{1}{r^\alpha}$, finder vi for det ved en (stor) Kugleflade med Centrum i O og Radius ϱ begrænsede Rumintegral Udtrykket

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_R^{\varrho} \frac{1}{r^\alpha} \cdot r^2 \, dr = 4\pi \int_R^{\varrho} \frac{dr}{r^{\alpha-2}} .$$

Vi lader nu $\varrho \to \infty$ og finder herved (idet $\int_R^{\infty} \frac{dr}{r^{\alpha-2}}$ er konvergent for $\alpha > 3$ med Værdien $\frac{1}{\alpha-3} \cdot \frac{1}{R^{\alpha-3}}$, medens det er divergent for $\alpha \leqq 3$), at det givne regentlige Rumintegral er konvergent for $\alpha > 3$ med Værdien $\frac{4\pi}{\alpha-3} \cdot \frac{1}{R^{\alpha-3}}$, medens det er divergent for $\alpha \leqq 3$.

Eks. Bestaar Omraadet Ω af alle Punkter indenfor Kuglefladen $r = R$, og er Funktionen $F(x,y,z)$ givet ved Ligningen $F(x,y,z) = \frac{1}{r^\alpha}$ $(\alpha > 0)$, hvilken Funktion $F(x,y,z)$ har en Diskontinuitet i Punktet $O:(0,0,0)$, finder vi for det ved en (lille) Kugleflade med Centrum i O og Radius ϱ begrænsede Rumintegral Udtrykket

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_{\varrho}^{R} \frac{1}{r^\alpha} r^2 \, dr = 4\pi \int_{\varrho}^{R} \frac{dr}{r^{\alpha-2}} .$$

Vi lader nu $0 \leftarrow \varrho$ og finder herved (idet $\int_{\varrho}^{R} \frac{dr}{r^{\alpha-2}}$ er konvergent for $\alpha < 3$ med Værdien $\frac{1}{3-\alpha} R^{3-\alpha}$, medens det er divergent for $\alpha \geqq 3$), at det givne regentlige Rumintegral er konvergent for $\alpha < 3$ med Værdien $\frac{4\pi}{3-\alpha} R^{3-\alpha}$, medens det er divergent for $\alpha \geqq 3$.

Idet vi herved afslutter vore Undersøgelser over uegentlige Linieintegraler, uegentlige Planintegraler og uegentlige Rumintegraler, vil vi til Slut resumere nogle af de hvad vi Hovedresultater i følgende løse Formulering:

For et uegentligt Linieintegral, et uegentligt Planintegral og et uegentligt Rumintegral, udstrakt henholdsvis over et endeligt Interval, et endeligt Område i Planen og et endeligt Område i Rummet, gælder det „i Almindelighed", at man for at sikre Integralets Konvergens maa kræve om Funktionen under Integraltegnet, at den skal gaa stærkere mod Nul end henholdsvis $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ og $\frac{1}{x^3}$, hvor x angiver Afstanden fra et fast Punkt til det variable Punkt, der fjerner sig bort i det Uendelige.

Betragter vi derimod et uegentligt Integral, hvor Intervallet eller Området er beliggende helt i det Endelige, men hvor Funktionen under Integraltegnet bliver uendelig i et Punkt P_0 af Området (d. v. s. vokser ud over alle Grænser, naar det variable Punkt P nærmer sig ubegrænset til P_0) gælder det (omvendt af før), at man for at sikre Konvergens ved Integration „ind i" Punktet P_0 maa kræve mere i Tilfælde af Linieintegral end i Tilfælde af Planintegral, og mere for et Planintegral end for et Rumintegral, idet det her i Almindelighed maa kræves om Funktionen under Integraltegnet, at den, naar det variable Punkt P nærmer sig ubegrænset til Diskontinuitetspunktet P_0, skal vokse langsommere i det Uendelige end $\frac{1}{x}$ i Tilfælde af Linieintegral, $\frac{1}{x^2}$ i Tilfælde af Planintegral og $\frac{1}{x^3}$ i Tilfælde af Rumintegral, hvor x angiver Afstanden fra Diskontinuitetspunktet P_0 til det variable Punkt P.

Disse Resultater er af Vigtighed ved forskellige Anvendelser, f. Eks. inden for Potentialteorien.

Opg. 38. Bevis, at af Integralerne

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-x+2} \quad \text{og} \quad \int_0^\infty \frac{x\,dx}{x^2-x+2}$$

er det første konvergent og det andet divergent, samt find Værdien af det første Integral.

Opg. 39. Hvilke af Integralerne

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^{\frac{1}{3}}(x+2)^{\frac{2}{3}}} \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^{\frac{1}{4}}(x+2)^{\frac{3}{3}}} \quad \int_0^\infty \frac{(x+1)^{\frac{13}{7}}\,dx}{(x+2)^{\frac{20}{7}}}$$

er konvergente og hvilke divergente?

Opg. 40. Bevis, at Integralerne

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx \quad \text{og} \quad \int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$$

er betinget konvergente.

Opg. 41. Bevis, at Integralet

$$\int_0^\infty e^{-yx} \sin x\,dx$$

er konvergent for $y > 0$ og find dets Værdi.

Opg. 42. Bevis, at Integralet

$$\int_1^\infty \sin(x^2)\,dx$$

er konvergent (Aldjor Transformationen $x = \sqrt{u}$).

Opg. 43. I det ω angiver det Omraade i Planen, der ligger udenfor Cirklen $r = 2$, skal det bevises, at af de uegentlige Planintegraler

$$\int_\omega \frac{1}{x^2 l.r}\, db \quad \text{og} \quad \int_\omega \frac{1}{x^2 (l.r)^2}\, db \,.$$

er det første divergent, det andet konvergent. Find endvidere Værdien af det sidste Integral.

Indholdsfortegnelse.

Side

Indledning 1

1. Uendelige Rækker 1
2. Uendeligt Produkt 9
3. Uegentligt Integral 13
4. Det almindelige Konvergensprincip for Funktioner 22

Uendelige Rækker 30

Den almindelige Teori 30

5. Rækker med positive Led 30
6. Uegentlige Kvotientrækker 33
7. Sammenhæng mellem uendelige Rækker og uegentlige Integraler 38
8. En uendelig Række med positive Led er Leddenes Orden ligegyldig 42
9. Absolut konvergente Rækker 46
10. Betinget konvergente Rækker 53
11. Rækker, hvis Led har skiftende Fortegn 55
12. Regneregler for uendelige Rækker 58
13. Summable Rækker 62
14. Rækker med variable Led; ligelig Konvergens 71

Side

15. Regning med ligelig konvergente Rækker 76

Potensrækker 83

16. En Potensrække og dens Konvergensstal 83
17. Bestemmelse af en Potensrækkes Konvergensstal 92
18. En Potensrækkes ligelige Konvergens og Anvendelser deraf 95
19. Regneregler for Potensrækker 97
20. Potensrækker for $l \cdot (1+x)$ og for Arctg x 104
21. Potensrække for e^x 105
22. Potensrækker for $(1+x)^m$ og Arcsin x 107
23. Potensrækker for cos x og sin x 108
24. Den Besselske Funktion $J(x)$ 110
25. En Potensrækkes Forhold i Konvergensintervallets Endepunkter 114
26. Betingelse for, at en Funktion kan fremstilles ved en Potensrække 117

Fourierske Rækker 125

27. Indledende Bemærkninger 125
28. Fourierrækkens Afsnit som Tilnærmelsesfunktioner til $f(x)$ 128
29. En Fourierske Rækkes Afsnit og Afsnittenes Middelsummer 131
30. Bevis for en Hjælpesætning 134
31 Fourierrækkens Summabilitet 137
32. Fourierrækkens Konvergens 140
33. Eksempler paa Fourierrækker 141
34. Fourierkonstanternes Kvadratsum 144
35. Integration af en partiel Differentialligning ved en Fourierske Række 146

Side

Uendelige Produkter 152

36. Sammenhæng mellem uendelig Produkt og uendelig Række 152
37. Absolut konvergent og betinget konvergent Produkt 153
38. Gammafunktionen $\Gamma(x)$ 156

Uegentlige Integraler 159

39. Uegentligt Integral af en positiv Funktion 159
40. Integralfremstilling for Funktionen $\Gamma(x)$ 162
41. Absolut konvergent og betinget konvergent Integral 164
42. Indførelse af ny uafhængig Variabel i et uegentligt Integral 166
43. Uegentligt Planintegral 170
44. Uegentligt Rumintegral 175