

Denne fil er downloadet fra
Danmarks Tekniske Kulturarv
www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på www.tekniskkulturarv.dk/about

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til tekniskkulturarv@dtu.dk

Kaz.

67/10 1930

FBN

LASTVERTEILENDE QUERVERBÄNDE

VON

CHRISTEN OSTENFELD

DIPL. INGENIEUR
M. ING. F.



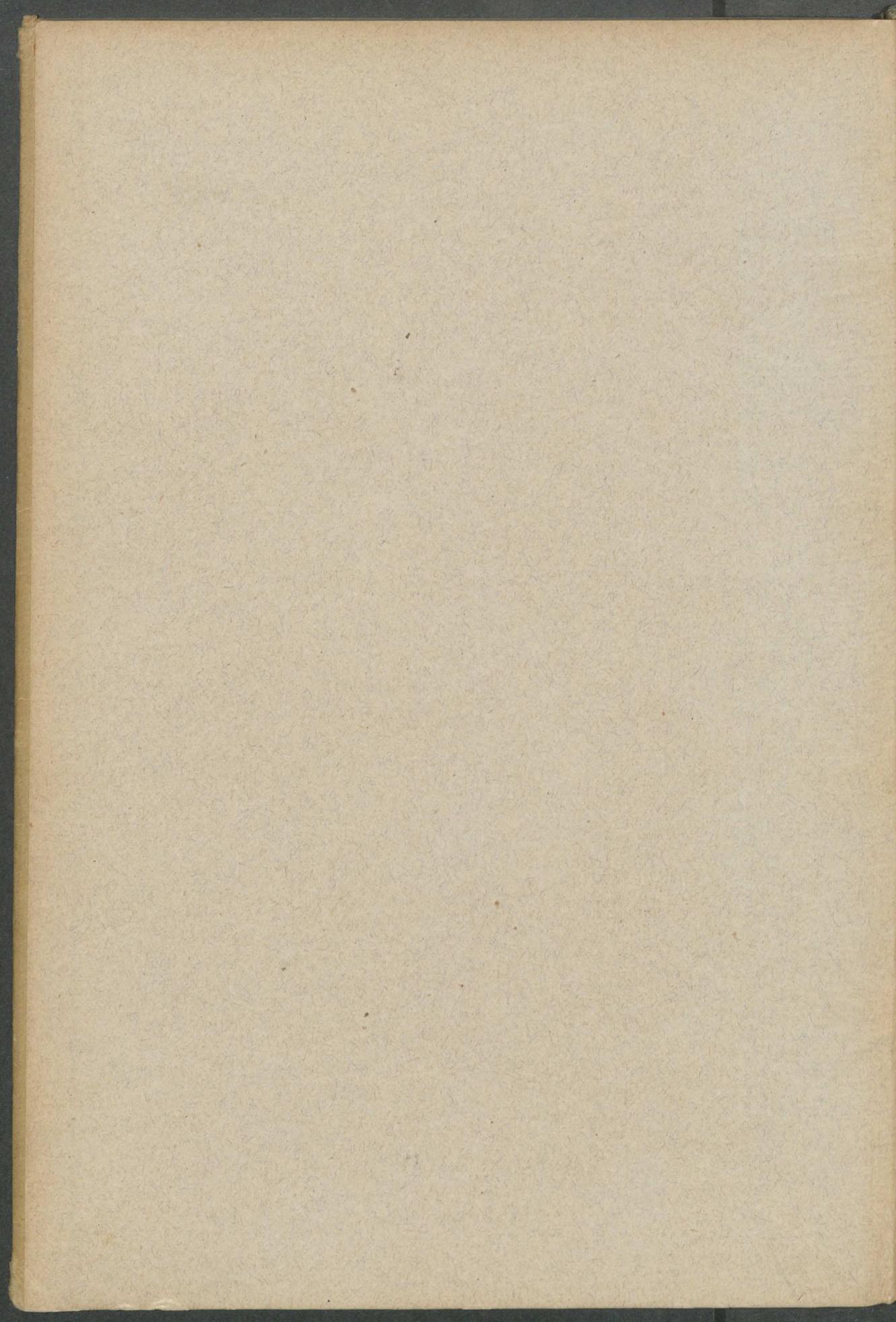
København DTH Dis 2

Eks 2

IN KOMMISSION BEI JUL. GJELLERUP

KOPENHAGEN 1930

DANMARKS
TEKNISKE BIBLIOTEK

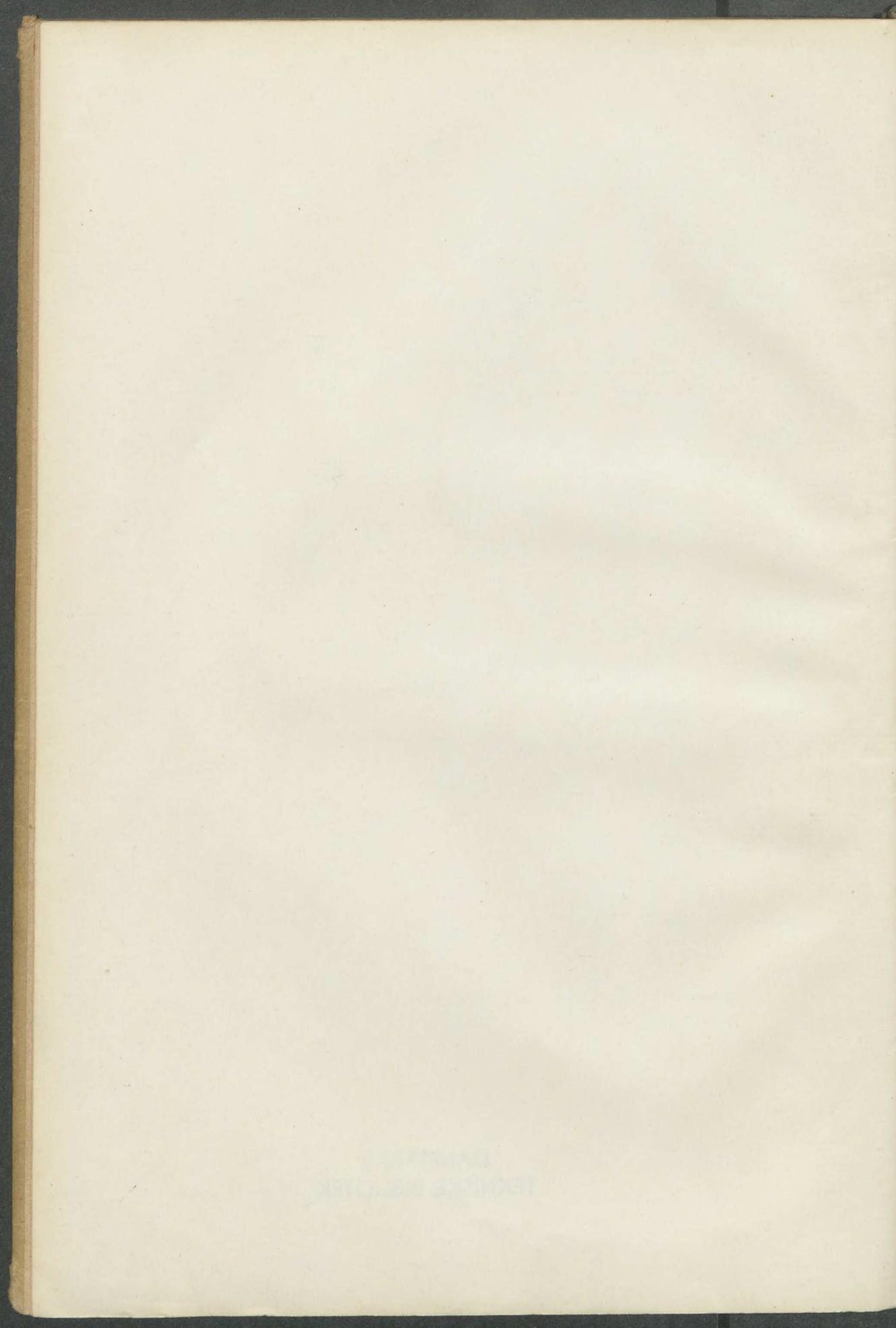


DANMARKS
TEKNISKE BIBLIOTEK

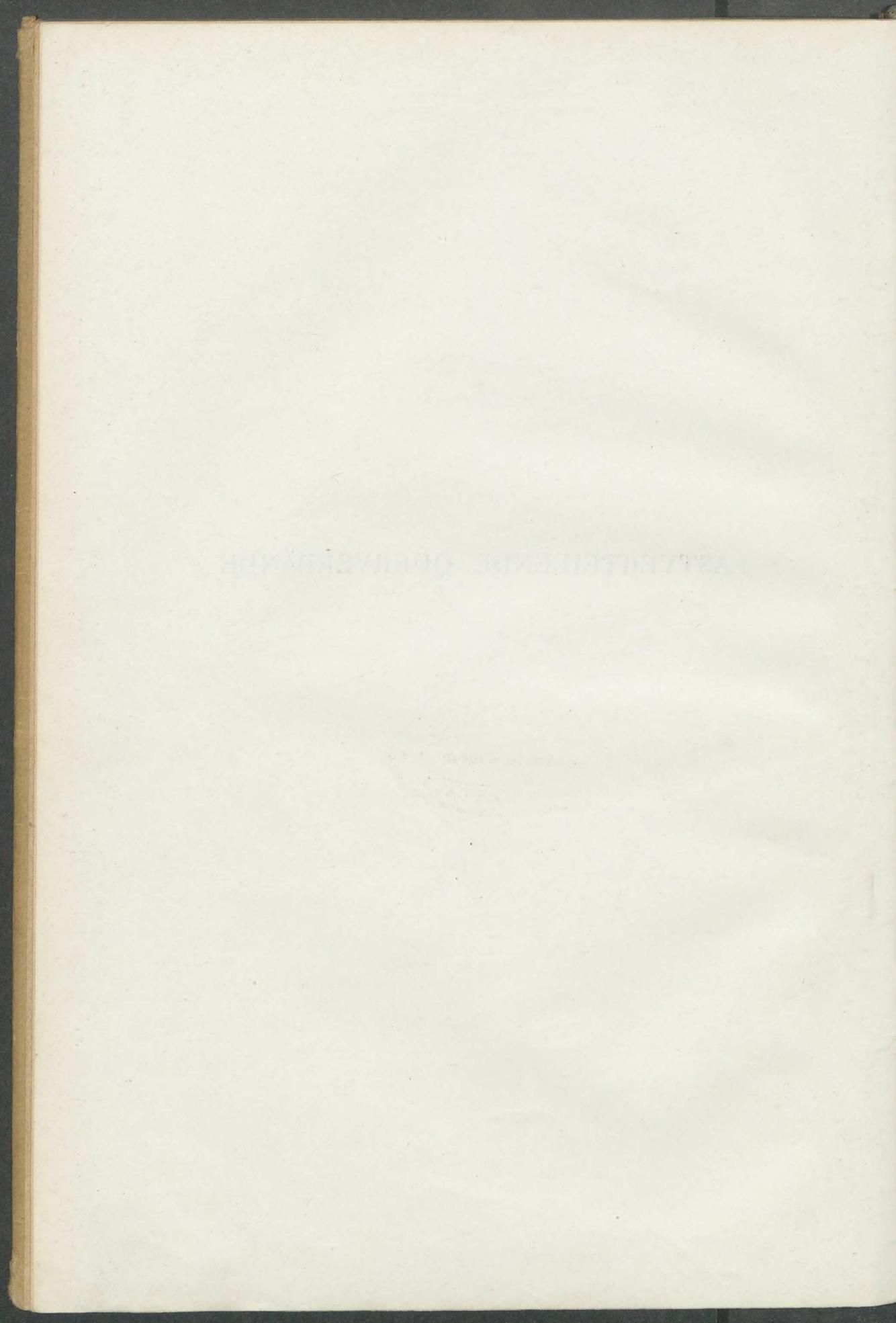
eksp. 2

17. JUNI 1900
RETRODUCED

DANMARKS
TEKNISKE BIBLIOTEK



LASTVERTEILENDE QUERVERBÄNDE



LASTVERTEILENDE QUERVERBÄNDE

VON

CHRISTEN OSTENFELD

DIPL. INGENIEUR

M. ING. F.



IN KOMMISSION BEI JUL. GJELLERUP

KOPENHAGEN 1930

COPYRIGHT BY CHR. OSTENFELD

J. JØRGENSEN & CO. (IVAR JANTZEN)
KOPENHAGEN

MEINEN ELTERN

DENNE Afhandling er af Den polytekniske Læreanstalts
Lærerraad efter Indstilling af Censorerne Professor
P. M. Frandsen og Professor A. Engelund antaget til at for-
svares for den tekniske Doktorgrad. Forsvaret finder Sted
den 17. Oktober 1930, Kl. 14, i Den polytekniske Læreanstalts
store Foredragssal.

Den polytekniske Læreanstalt, København, den 5. August 1930.

P. O. PEDERSEN,
Direktør.

*R. Jespersen,
Inspektør.*

Afhandlingen blev indsendt den 1. August 1929.

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
<i>Dansk Resumé af Afhandlingen</i>	1
A. THEORETISCHER TEIL	
Kapitel I. <i>Einleitung</i>	7
» II. <i>Allgemeine Theorie</i>	18
Voraussetzungen.	
Berechnungsmethode.	
Die Koeffizienten.	
Das Gleichungssystem.	
» III. <i>Die Koeffizienten</i>	25
Allgemeines.	
Sonderfall 1: λ variabel, I konstant.	
» 2: λ konstant, I variabel.	
Normaler Fall: λ konstant, I konstant.	
» IV. <i>Die Auflösung der Gleichungen</i>	36
» V. <i>Zahlenbeispiel</i>	39
» VI. <i>Stufenweise Berechnung</i>	45
Zahlenbeispiel.	
Durchbiegungs-Hilfswerte.	
Idee der Querträger.	
» VII. <i>Einflussflächen</i>	57
» VIII. <i>Unendlich steife Querträger</i>	59
» IX. <i>Analytische Methode</i>	62
» X. <i>Allgemeine Ergebnisse</i>	67
Geschlossene Formeln für 3 Hauptträger.	
Einfache Regeln der Lastverteilung.	
B. PRAKTISCHER TEIL	
» XI. <i>Anwendungen auf Eisenbetonbrücken</i>	81
» XII. <i>Anwendungen auf Decken u. ähnl. Konstruktionen</i>	94
» XIII. <i>Anwendungen auf Holzkonstruktionen</i>	96
» XIV. <i>Anwendungen auf eiserne Brücken</i>	97
» XV. <i>Anwendungen auf Eisenwasserbauten</i>	105
C. ANLEITUNG ZUR DURCHFÜHRUNG DER BERECHNUNGEN	
	142

TABELLEN

Seite

Zu Kap. III. Sonderfall 1;	
Koeff: Balken 5 ^a , 7 ^a , 9 ^a . Tabelle 1, 2, 3	111
Sonderfall 2;	
Koeff: Balken 4, 6. Tabelle 4, 5	113
Normaler Fall;	
Koeff: Balken $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10$. Tabelle 6—13 . . .	115
$n = \text{unendlich}$ {Endstütze erhebt sich} {Mittelstütze erhebt sich} Tabelle 14	121
Zu Kap. VI. Durchbiegungs-Hilfswerte. Tabelle 15	122
Zu Kap. X. { Tabelle 16	131
{ Tabelle 17	126
{ Tabelle 18	128
{ Tabelle 19	129
Zu Kap. VI. Matrix	133
Fig. 10	135
Fig. 31—38	137

RESUMÉ AF AFHANDLINGEN

VED Projekteringen af de fleste Hus- eller Brobygningskonstruktioner har man at gøre med et Bjælkenæt, der spiller en vigtig Rolle for Konstruktionen, idet det fordeler Belastningen udover denne; Formaalet med de nævnte Bygværker er netop at optage dette Næt af hinanden krydsende Bjælker, det være sig i Form af en Etageadskillelse eller af en Brobanekonstruktion. Belastningen ledes gennem Dragernættet over i den bærende Hovedkonstruktion (f. Ex. Hoveddragerne for en Bro), og for denne er det derfor af afgørende Betydning, hvorledes det direkte belastede Dragernæt optager og fordeler Belastningen videre. Ved nogle andre Konstruktioner, særlig ved Jærnkonstruktioner i Vandbygningen (Dokporte, store Stigbord m. m.) bestaar de bærende Dele udelukkende af et saadtant Næt af hinanden krydsende Bjælker, og Konstruktionens Beregning er derfor kun mulig ved tilstrækkeligt Kendskab til, hvorledes Belastningen fordeles over de enkelte Dragere. Det samme gælder ved visse Brotyper.

Et Dragernæt bestaaende af flere hinanden krydsende Længde- og Tværdragere er i Besiddelse af en stor Fordelingsevne overfor lokale Belastninger; saaledes vil en Enkeltkraft ikke blot af den direkte belastede Bjælke overføres til Understøtningen, men alle Nættets Bjælker vil deltage i Kraftoverførelsen. Hvis et Punkt af Nættet bøjer sig ned, maa alle Nættets Punkter ligeledes bøje sig mere eller mindre ned, og en Enkeltkraft vil altsaa afgive Reaktioner i alle Nættets Understøtningspunkter. For at kunne gennemføre en korrekt Beregning af en Konstruktion (f. Ex. Hoveddrager), der belastes gennem et saadtant Dragernæt, er det nødvendigt at kende Nættets Reaktioner paa Hoveddrageren.

I Praksis er man dog næsten altid bleven staaende ved den simpleste Beregning, idet man har set ganske bort fra Belastningens Fordeling: den direkte belastede Længdedrager afgiver som simpelt understøttet Bjælke sine Reaktioner til de to nærmeste Tværdragere, og disse understøttes atter af de to nærmeste Hoveddragere; alle andre (Længde-, Tvær- eller Hoved-) Dragere opfattes som værende spændingsløse. En saadan Beregningsmaade er simpel, og dens Anvendelse er derfor let forklarlig; den giver dog i mange Tilfælde et betydeligt Overskud af

Sikkerhed, man havde med andre Ord kunnet opnaa den ønskede Sikkerhed med mindre Dimensioner af Dragerne, eventuelt kunde ogsaa Konstruktionshøjden være reduceret. De fleste Konstruktioner, der bærer et fordelende Dragernæt, er altsaa i Besiddelse af en Sikkerhedsreserve, hvis Størrelse foruden af Nættet ogsaa afhænger af, hvorledes den ydre Belastning er givet: er Belastningen fordelt over hele Dragernættet, vil Reserven kun være lille, ved store Enkeltkræfter derimod kan den være meget betydelig.

Et Dragernæt er i høj Grad statisk ubestemt; Dragernes Forbindelser i Krydningspunkterne (Knuderne) bevirker, at en Nedbøjning eller Vinkeldrejning meddeler sig til alle andre Dragere, idet Knuderne overfører Kræfter og Momenter; den konstruktive Udformning af Knuderne vil derfor kunne faa Indflydelse paa Nættets Fordelingsevne. Ved alle Anvendelser kan man forudsætte, at Forbindelsen er i Stand til at forene de to krydsende Dragere saaledes, at de i Knuderne har nøjagtig samme Nedbøjning; derimod er en Momentoverførelse fra en Drager til en anden (ved Vridning af den sidstnævnte) ikke altid sikret; da desuden denne Vridning har langt mindre Indflydelse paa Fordelingen end Nedbøjningen, kan man se bort fra Vridningen, naar da ikke Beregningen skal gennemføres med allerstørste Nøjagtighed.

Den af et Dragernæt bevirkede Fordeling af Belastningen er — med en enkelt Undtagelse (Zschetsche) — kun blevet behandlet i de seneste Aar af forskellige Forfattere (Kontinuerlige Dragere paa elastisk eftergivelige Understøtninger og lignende Undersøgelser). Desuden er der gennemført nogle Belastningsprøver, der bl. a. ogsaa har givet nogen Oplysning om Fordelingen.

Bleich-Melan har i 1927 (i »Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik«) givet en Undersøgelse af Opløsningen af det System af Ligninger, hvorpaa Beregningen af et Dragernæt beror; og i 1928 har *Genntner* (i »Der Eisenbetonträgerrost«) udviklet en nøjagtig og derefter en tilnærmet Beregning af et saadant Dragernæt. De to sidste Arbejder adskiller sig fra alle tidligere derved, at man som de statisk ubestemmelige Størrelser indfører Deformationerne af Knuderne; først herigenem bliver Beregningerne praktisk gennemførlige. Ikke desto mindre bringer de nævnte Forfattere et saa betydeligt matematisk Apparat til Anvendelse, at man kun i faa Tilfælde kunde tænke sig at benytte Fremgangsmaaden; hertil kommer, at man ikke opnaar noget Overblik over Hovedlinierne i Belastningens Fordeling, saaledes som det i Praksis vilde være ønskeligt.

Man har ved et Par Broer (Friedensbrücke i Wien, Murgbrücke bei Gernsbach) udnyttet Fordelingen af Belastningen til at reducere Dimensionerne af Dragerne, og ved Husbygning kan man ofte drage Fordel deraf.

Det foreliggende Problem blev af Forfatteren taget op i 1925 efter Tilskyndelse fra en praktisk Opgave (Dokport i Genua, udført af A. G. Conrad Zschokke, Döttingen, Schweiz). Ved Studiet af den eksisterende Litteratur fik jeg straks det Indtryk, at det vilde være ret haablost at naa til en overkommelig Beregning ved den almindelig anvendte Kraftmetode; efter tidligere at have arbejdet med Deformationsmetoden var det mig da nærliggende at forsøge, om ikke denne Metode kunde føre til en simpel og overskuelig Behandling. Efter i 1925—26 at have udarbejdet det væsentlige af Afhandlingen, maatte jeg imidlertid paa Grund af praktisk Arbejde lægge den til Side, og først i 1929 kunde den endelig afsluttes.

Afhandlingen forsøger at opstille en nøjagtig Beregning af et vilkaarligt Dragernæt; Metoden tillader endvidere at regne mindre nøjagtigt eller — om ønskes — at faa et Begreb om Fordelingen ved ganske raa Tilnærmelser, saaledes som man ved første Projektering kan have Brug for. Der søges opnaaet et praktisk Overblik over Spørgsmaalet.

Beregningen gennemføres ved Deformationsmetoden, idet man som Overtallige vælger Nedbøjningerne i alle Knuderne; de før omtalte vridende Momenter ses der bort fra. Hovedsystemet (alle Overtallige = 0) er meget mere statisk ubestemt end det givne Dragernæt, hvad der dog her maa anses for en Fordel, da derved hver Bjælke i Hovedsystemet bliver ganske uafhængig af næsten alle andre Bjælker i Nættet. Derfor bliver Opstillingen af Elasticitetsligningerne yderst simpel; hvis Faglængder og Inertimomenter er konstante indenfor hver Bjælke, kan Ligningerne direkte opskrives med Koefficienter, der er beregnede een gang for alle, og som er angivne i Tabeller, der gælder for alle Fagantal fra 0 til uendelig. Eventuelle Indspændinger eller Mellemunderstøtninger kan der meget simpelt tages Hensyn til.

Hvis Nættet har Dragere i begge Retninger, vil Ligningerne Opløsning, trods de Symmetrier, Ligningerne indeholder, blive et ret betydeligt Arbejde. I Afhandlingen har man ikke beskæftiget sig med, hvorledes Opløsningen eventuelt kunde simplificeres, men man er gaaet den Vej at opstille en successiv Beregningsmetode, som tillader meget hurtigt at komme til tilnærmelsesvis rigtige Løsninger uden at opstille det fuldstændige Ligningssystem. Ved den successive Metode deles Beregningen i flere Trin; ofte kan man med tilstrækkelig Nøjagtighed blive staaende ved første eller andet Trin, hvorved Regnearbejdet reduceres meget betydeligt.

Denne successive Beregning er ikke lige godt anvendelig ved alle Dragernæt, men det angives, indenfor hvilke Grænser den kan anvendes.

Afhandlingens theoretiske Del (Kap. 1—10) indeholder først den almindelige Theori, der gælder for saadanne Dragernæt. Man gaar ud fra et vilkaarligt Næt (se Fig. 2 Side 18) og indfører Nedbøjningerne

$\zeta_a, \zeta_b \dots \zeta_r$ af Nættets Knuder a, b, \dots, r som Overtallige, idet disse Nedbøjninger samtidig betragtes som Forlængelser af tænkte, tilføjede Understøtningsstænger $Z_a, Z_b \dots Z_r$; for Spændingen i disse Stænger har man da:

$$Z_a = 0 = Z_{ao} - Z_{aa}\zeta_a - Z_{ab}\zeta_b - \dots - Z_{ar}\zeta_r,$$

og de analoge, hvor Betydningen af Koefficienterne Z fremgaar af Ligningerne. Disse Ligninger er tilstrækkelige til Beregning af alle Systemets Nedbøjninger.

Efter Bestemmelsen af Nedbøjningerne ζ faas Momenter og Transversalkræfter af Ligningerne:

$$\begin{aligned} M_a &= M_{ao} - M_{aa}\zeta_a - M_{ab}\zeta_b \dots M_{ar}\zeta_r; \\ Q_a &= Q_{ao} - Q_{aa}\zeta_a - Q_{ab}\zeta_b \dots Q_{ar}\zeta_r. \end{aligned}$$

Til Opskrivning af Z -Ligningerne har man Brug for de deri indgaaende Koefficienter; disse betyder de Kræfter, der optræder i Z -Stængerne, naar man sætter den paagældende » $\zeta = -1$ «; saaledes er Z_{aa} lig den Kraft, der optræder i Z -Stangen a , naar $\zeta_a = -1$. Koefficienterne faas ved Theorien for kontinuerlige Bjælker, idet Koefficienterne simpelthen er Reaktionerne i en kontinuerlig Bjælke, hidrørende fra, at en Understøtning hæver sig Stykket 1; drejer det sig saaledes om at finde de Koefficienter, der svarer til » $\zeta_r = -1$ « (se Fig. 5 Side 22), saa har man hertil Ligningerne til Bestemmelse af Momenterne:

$$\begin{aligned} -M_{r-1} \cdot \delta_{r-1,r} - M_r \cdot \delta_{r,r} - M_{r+1} \cdot \delta_{r+1,r} &= \delta_{r,u} \\ -M_r \cdot \delta_{r,r+1} - M_{r+1} \cdot \delta_{r+1,r+1} - M_{r+2} \cdot \delta_{r+2,r+1} &= \delta_{r+1,u} \end{aligned}$$

og de analoge; med konstant Inertimoment faas de Clapeyron'ske Ligninger:

$$\begin{aligned} -M_{n-2} \cdot l_{n-1} - 2M_{n-1}(l_{n-1} + l_n) - M_n \cdot l_n &= -6E \cdot I \cdot \frac{l_{n-1}}{l_{n-1} + l_n} \left(\frac{1}{l_{n-1}} + \frac{1}{l_n} \right) \\ -M_{n-1} \cdot l_n - 2M_n(l_n + l_{n+1}) - M_{n+1} \cdot l_{n-1} &= 6E \cdot I \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right) \dots \text{o.s.v.} \end{aligned}$$

af disse Ligninger findes da $M_0 \dots M_n$, og af disse atter Transversalkræfterne $Q = \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n}$ og endelig Reaktionerne $R_n = Q_n - Q_{n-1}$, som er de søgte Koefficienter.

Naar Bjælkernes Faginddeling og Understøtningsmaade er givet, kan Koefficienterne udregnes paa Forhaand; for simpelt understøttede Bjælker er dette gjort i Afhandlingen, og i Tabellerne 1—14 findes angivet Resultaterne; for det i Praksis vigtigste Tilfælde: konstant Inertimoment og Faglængde indenfor hver Bjælke er angivet de fuldstændige Sæt Koefficienter, saaledes at man aldrig behøver selv at udregne dem, hvor stort Fagantal Bjælken end har. Ved stigende Antal Fag nærmer Koef-

ficienterne sig nemlig til bestemte Grænseværdier, nemlig til de, der gælder i en Bjælke med uendelig mange Fag.

Som før nævnt gaas der ikke nærmere ind paa Spørgsmaalet om Opløsningen af Z-Ligningerne; i Kap. 4 gives der gennem Ligningernes Matrix et Overblik over denne Opgave. I Kap. 5 gennemgaas et Taleksempel, hvori Ligningernes Opløsning gennemføres paa 3 Maader, idet man saaledes viser Udnnyttelsen af nogle simple Kunstgreb, som Ligningernes Symmetri-Egenskaber tillader, et af disse er den praktiske »Belastungs-Umordnings-Verfahren« (André).

Imidlertid vil, som sagt, Beregningen ofte vise sig at blive ret kompliceret, hvis Dragernætten har mange Bjælker paa hver Led. Man maa da gaa til den i Kap. 6 angivne successive Beregningsmetode. Denne gaar ud paa at dele Beregningerne i flere Trin, saaledes at man ved første Trin kun medtager de Tværdragere, der befinner sig lige under den ydre Belastning; er f. Ex. denne en Enkeltkraft, medtager man kun een Tværbjælke; for det saaledes simplificerede System finder man let Nedbøjningerne, da disse kun er meget faatallige, og hermed har man straks Hovedlinierne i Belastningens Fordeling. Ved det næste Trin medtages flere Tværdragere, og Z-Ligningerne opskrives paany for dette nye System; i disse Ligninger indføres de ved første Trin fundne Nedbøjninger som bekendte Størrelser, og Ligningerne bliver derved efter simple at løse; de eneste Ubekendte er de nye Tværdrageres Nedbøjninger.

Saledes gaar man frem, indtil man er naaet til at faa alle de givne Tværdragere med.

Meget ofte kan man blive staaende ved første Trin, og hermed er Regningerne reduceret meget betydeligt.

Det er vist ved et Taleksempel (med 3 Trin), hvorledes Beregningen stiller sig, og det er angivet, hvorledes man mest fordelagtigt former den. Ved det første Trin kan det sommetider være bekvemt at regne med en »ideel Tværdrager«, hvis Stivhed fastsættes saaledes, at den repræsenterer de øvrige Tværbjælker, der foreløbig lades ude af Betragtning.

Kapitel 7 angiver, hvorledes man gaar frem ved Bestemmelsen af Influensfladerne for et Dragernæt. Influensfladen for Nedbøjningen af en bestemt Knude (\circ : for den Overtallige) er lig Nedbøjningslinien for en Enkeltkraft 1 i Knuden; denne bestemmes ifølge det foregaaende særdeles let, idet den successive Beregning her egner sig udmærket. For Fuldstændigheds Skyld er i Kap. 8 angivet de Formler, der gælder, naar Tværdragene er uendelig stive, og i Kap. 9 undersøges specielt det Tilfælde, hvor en Længdedrager understøttes af uendelig mange Tværdragere; man benytter her den analytiske Metode, der gaar ud fra, at Længdedragernes Belastning p er proportional med Tværdragernes Ned-

bøjning y ; $p = -ky$; for Længdedrageren har man altsaa $p = EI \frac{d^4y}{dx^4}$

$= -ky$, som efter Integration giver Belastningens Fordeling over Tværdraegerne. I Kap. 10 har man endelig søgt at faa Overblik over, hvorledes i al Almindelighed Længdedragerstivhedens Forhold til Tværdraegerstivheden influerer paa Belastningens Fordeling over Dragernætten. For et givet Næt er dette Forhold indført som variabelt, og man har optegnet i Kurver, hvorledes Nættets Nedbøjninger varierer som Funktion af den Variable; dette gøres for forskellige Stillinger af Belastningen. Paa Grundlag af Kurverne opstilles nogle simple Regler for Fordelingen, og det er tillige angivet, hvorledes man kan benytte saadanne Kurver til at opnaa et raat Skøn over Belastningens Fordeling helt uden Beregning.

I Afhandlingen's praktiske Del (Kap. 11—15) behandles kort Theoriens Anvendelser paa Jærbeton- og Jærnbroer samt paa Jærnkonstruktioner i Vandbygningen. Ved Broerne er undersøgt de typiske Brobanekonstruktioner, og de i Praksis alm. Stivhedsforhold angives. Ved Jærbetonbroerne optræder Pladen som et i høj Grad fordelende Led, der medtages i Beregningen, uden at der dog gaas ind paa den hertil svarende Pladetheori.

De økonomiske Fordele ved Udnyttelse af Fordelingen behandles ligeledes, og der nævnes, hvad man i saa Henseende har naaet ved de faa udførte Broer, hvor Belastningen var givet saaledes, at man kunde fordele den i Bredden udover flere Hoveddragere.

Endelig er de udførte Prøvebelastninger (Bromaalinger) bearbejdede, og man har fundet en god Overensstemmelse med Beregningen, selv naar denne kun gennemføres med første Tilnærmelse. Maalingerne viser tydeligt, at visse Hoveddragerformer (med Stænger, for hvilke Influenslinierne hyppigt skifter Fortegn) aflastes betydeligt gennem Belastningens Fordeling.

Nogle typiske Husbygningskonstruktioner (Etageadskillelser, Søjlefundamenter m. m.) er kort omtalte.

Ved Jærnkonstruktionerne i Vandbygning undersøges først Dokporte og de store Stoney-Stigbord (Tysk: »Schützen«), som overhovedet kun kan beregnes, naar man kender Vandtrykkets Fordeling over Hoveddragere; dernæst behandles Flydedokker, Pontoner o. lign., der som svømmende Legemer er belastede paa særlig Maade; endelig strejfes Skibene kun ganske kort for at bestemme deres Stilling i denne Gruppe af Bygværker.

Det skal tilføjes, at Afhandlingen slutter med en »Anleitung zur Durchführung der Berechnungen«, der fremtræder i Skema-Form, og som skulde være til Nutte ved den praktiske Udførelse af Beregningen; her er alle Beviser o. s. v. udeladt, og det angives ganske kort, hvorledes man skal gaa frem.

A. THEORETISCHER TEIL

KAPITEL I

Einleitung.

BEIM Entwurf der meisten Hoch- und Brückenbauten steht man vor dem Problem eines lastverteilenden Trägerrostes, der eine wichtige Funktion im Bauwerke besitzt; der Zweck der genannten Bauten ist eben, diese Trägerroste aufzunehmen, sei es in der Form einer Decke oder einer Fahrbahntafel. Die primäre Belastung des Bauwerkes wird durch den Rost in das übrige Tragwerk überleitet, und so ist das Verhalten dieser von der Belastung direkt beanspruchten Teile von bestimmendem Einfluss auf die nur mittelbar belasteten Tragteile (z. B. die Hauptträger einer Brücke). Bei einigen anderen Konstruktionen, besonders im Eisenwasserbau, besteht das Tragwerk ausschliesslich aus dem Trägerrost, und ihre Berechnung ist also nur bei genügender Kenntnis der statischen Verhältnisse solcher Systeme möglich. Bei gewissen Brückentypen kann derselbe Fall auftreten.

Der aus mehreren Längs- und Querträgern bestehende Rost stellt ein Tragelement von erheblichem Verteilungsvermögen dar; durch Einzelkräfte belastet werden diese nicht nur durch die direkt getroffenen Träger in die Auflager geleitet, sondern alle Träger des Rostes beteiligen sich in verschiedenem Masse an ihrer Aufnahme. Ist ein Punkt gezwungen sich durchzubiegen, werden alle Punkte des Rostes Durchbiegungen aufweisen, und eine Einzelkraft wird sodann in jedem Auflagerpunkt des Rostes Reaktionen abgeben. Um eine richtige Berechnung eines durch solche Roste belasteten Tragwerkes (z. B. Hauptträger) durchführen zu können, ist es notwendig, sich über die Reaktionen der Roste Rechenschaft zu geben. Bei den Bauten, die nur aus dem Trägerrost bestehen, ist es unerlässlich wenigstens die Hauptlinien der durch die Zusammenwirkung aller Träger bewirkten Lastverteilung zu kennen.

In der Praxis ist man doch mit wenigen Ausnahmen bei den einfachsten

Berechnungen stehen geblieben, indem man sozusagen die lastverteilende Wirkung des Rostes ganz vernachlässigt hat: der direkt belastete Längsträger giebt gemäss dem Hebelgesetz seine Reaktionen an die der Belastung am nächsten liegenden Querträger ab, und diese werden von den benachbarten zwei Hauptträgern unterstützt; alle anderen (Längs-, Quer- oder Hauptträger) werden als spannungslos aufgefasst. Eine solche Berechnungsweise ist sehr einfach, und ihre Anwendung ist somit erklärlich; sie giebt doch in vielen Fällen einen ganz erheblichen Überschuss an Sicherheit des Bauwerkes; mit anderen Worten: man hätte die erwünschte Sicherheit mit kleineren Dimensionen erreichen können. Auch könnte die Konstruktionshöhe in gewissen Fällen kleiner gemacht werden, wo solches erwünscht. Die meisten Konstruktionen, die einen lastverteilenden Rost aufweisen, besitzen also eine »stille Reserve«, die ausser vom Rost auch von der Art der Belastung abhängig ist: sind die äusseren Kräfte über den ganzen Rost verteilt, ist diese Reserve am kleinsten, dagegen kann sie bei isolierten Einzelkräften sehr bedeutend ausfallen.

Ein Trägerrost ist ein hochgradig statisch unbestimmtes System; die Verbindungen der Träger in den Kreuzungspunkten (oder Knoten) bewirken, dass sich eine Durchbiegung oder Winkeldrehung an alle anderen Träger mitteilt; es werden also Kräfte oder Momente durch die Knotenverbindung überführt, und die konstruktive Ausbildung dieser Knoten wird demgemäß die Verteilung beeinflussen können. Man kann bei allen Anwendungen voraussetzen, dass die Verbindung imstande ist, die zwei sich kreuzenden Träger so zu vereinigen, dass sie genau die gleiche Durchbiegung im betrachteten Knoten aufweisen; dagegen ist die Übertragung eines Momentes von einem Träger zum anderen (durch Verdrehung des letztgenannten Trägers) nicht immer gewährleistet; da der Einfluss dieser Verdrehungen auf die Lastverteilung weit geringer ist als derjenige der Durchbiegungen, kann man bei einer nicht allzu genauen Berechnung die Verdrehungen vernachlässigen. Wegen seiner komplizierten Gestaltung wird die Berechnung eines solchen Rostes nie sehr einfach durchgeführt werden können; besitzt der Rost sehr viele Träger in beiden Richtungen, wird sie immer mit erheblicher Rechenarbeit verbunden sein.

Das Problem der lastverteilenden Trägerroste ist in allgemeiner Fassung nur in neuester Zeit behandelt worden. Eine Ausnahme bildet doch Zschetsche¹, der schon 1893 eine Berechnung für den allgemeinen Fall eines (auch schiefwinkligen) Trägerrostes aufgestellt hat. Die Berechnung wird mittels der »Uebertragungskräfte« (welche in jedem Knoten die dort sich kreuzenden Träger verbinden) durchgeführt; an-

¹ Zschetsche: Theorie lastverteilender Querverbände. Z. d. ö. Ing. u. A. V. 1893, S. 572.

ders ausgedrückt: Zschetsche hat diese gegenseitigen Reaktionen in jedem Knoten des Rostes als überzählige eingeführt. Prinzipiell bietet eine solche Berechnung nur rechnungstechnische Schwierigkeiten, aber diese sind so bedeutend, dass die Rechnung selbst für den einfachen Fall nur eines verteilenden Querträgers, der 4 Hauptträger verbindet, ziemlich beschwerlich und unübersichtlich ist. Für den Fall beliebig vieler Hauptträger und Querträger wird die Berechnung fast undurchführbar. Immerhin hat Zschetsche durch die behandelten Sonderfälle (mit 1 oder 2 Querträgern) die Bedeutung seiner Untersuchung klar gestellt und interessante Ergebnisse gefunden. Die Berechnungen von Zschetsche haben wohl mitunter Anwendung bei ganz speziellen Aufgaben gefunden, aber häufige Untersuchungen dieser Konstruktionen haben sie nicht erlaubt.

Das Problem erschien wohl nach diesen langen Berechnungen nicht als allzu verlockend, und beinahe 20 Jahre verflossen, bis neue Behandlungen in der Litteratur erschienen.

Eine Untersuchung elastisch gelagerter Tragwerke wurde 1912 von Arnstein¹ veröffentlicht. Dieser Verfasser behandelt den kontinuierlichen Träger, der auf elastisch senkbaren Stützen gelagert wird. Die Stützen können aus elastischen Säulen gebildet werden oder aus Trägern; Arnstein untersucht z. B. den Fall von mehreren Längsträgern, welche von drei Querträgern gestützt werden; diese sind schliesslich auf elastischen Säulen aufgelagert. Alle Berechnungen werden wie bei Zschetsche mittels der »Kraftmethode« (Einführung der gegenseitigen Reaktionen der Balken unter Anwendung der Spannungs-Elastizitätsgleichungen) durchgeführt; sie sind deshalb ziemlich beschwerlich und erlauben wenigstens nicht vereinfachende Annäherungen oder dgl., welche einfacher zum Ziele führen könnten.

Ungefähr gleichzeitig hat Kögler² das Problem aufgenommen und eine bestimmte Brücke (aus Eisenbeton) mit 5 Hauptträgern und 1 Querträger für 3 verschiedene Trägheitsmomente der Querträger durchgerechnet, um dadurch einige einfache Regeln zu gewinnen; u. A. stellt Kögler fest, dass eine grosse Variation des Trägheitsmomentes des Querträgers nur einen geringen Einfluss auf die Lastverteilung hat; er giebt noch einige wertvolle Anhaltspunkte für die Dimensionierung der Brücke.

Auch die Schweizerischen Bundesbahnen³ (Brückingenieur A. Bühler)

¹ Arnstein: Einflusslinien statisch unbestimmter elastisch gelagerter Tragwerke. Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1912.

² Kögler: Lastverteilende Wirkung der Querträger. Arm. Beton, 1912, S. 107.

³ Schweizerische Bundesbahnen: Lastverteilung bei Plattenbalkenbrücken, Schw. Bauzt 1914, II. S. 268. A. Bühler: Dgl. Schw. Bauzt. 1915. I. S. 78. A. Bühler: Dgl. Schw. Bauzt. 1915. II. S. 7.

haben sich in letzter Zeit lebhaft für die Frage interessiert; durch einige Messungen an Eisenbetonbrücken wurde die Größenordnung der Verteilung bestimmt; man hat gefunden, dass die Verteilung viel grösser ist als erwartet: man rechnet im Allgemeinen allzu ungünstig! Es wird vorgeschlagen, in gewissen Fällen die Querträger unendlich starr anzunehmen (was eine einfache Berechnung ergiebt); aber im allgemeinen Fall ist keine Berechnungsmethode vorhanden. Speziell werden die Berechnungsvoraussetzungen für die Fahrbahnplatte besprochen.

Im Eisenbrückenbau war man schon lange darüber im Klaren, dass die Fahrbahn einen elastischen Rost darstellt, und in den meisten Handbüchern auf diesem Gebiete wurden gewisse Angaben über die dadurch bewirkte Verteilung gemacht; zu diesem Zweck ging man von einfachen Annäherungen aus, indem man nur die Deformation weniger Fahrbahnfelder betrachtete. Oder man beschränkte sich darauf, die Längsträger als kontinuierliche Träger auf elastisch senkbaren Stützen (die Querträger) zu untersuchen. Immerhin sind natürlich die Angaben dieser Werke¹ zum gewöhnlichen Gebrauch (Entwerfen usw. der üblichen aufgehängten oder aufgeständerten Fahrbahntafel) vollkommen genügend; auf den allgemeinen Fall der Trägerroste gehen sie aber nicht ein.

In dieser Verbindung soll auf einen Artikel von *Lossier*² aufmerksam gemacht werden, der eben eine in einem Bogen aufgehängte Fahrbahn behandelt; es werden hier die Längsträger als durchgehend über nur 5 Querträger angenommen, was doch wohl bisweilen nicht zutreffende Ergebnisse liefern mag; *Lossier* giebt sehr wertvolle Zahlenangaben und Rechenregeln für eine solche »Typen-Fahrbahn«.

Kurz nachdem die Frage wieder im Brückenbau aufgegriffen war, wurden auch andere Gebiete erforscht, für welche die Lastverteilung von Bedeutung war. So veröffentlichte *André*³ 1917 die Berechnung von Fundamentrahmen, welche unter Zuhilfenahme seines eleganten Kunstgriffes: des Belastungs-Umordnungs-Verfahrens, aufgestellt wurde. In einem Buche, das auch Schwimmponenten behandelt, entwickelt er diese Studien näher. Das gleiche Gebiet der Eisenschwimmkörper wurde gründlich von *Karner*⁴ aufgenommen; nach einer interessanten Übersicht der häufigsten Konstruktionen von Schwimmdocks

¹ Winkler; Ritter, Müller-Breslau, Vianello, Bleich, Melan, A. Ostenfeld.

² Etudes de la solidarité des pièces de ponts. Génie civil 24/8 1912.

³ W. L. André: Zur Berechnung von Fundamentrahmen, Eisenbau 1917. S. 219. Vergleiche auch W. L. André: Die Statik der Schwerlastkrane, Werft- und Schwimmkrane, und Schwimmkranpontons. Verlag Oldenburg, München und Berlin 1919.

⁴ Karner: Schwimmdocks und ähnliche Eisenwasserbauten, Eisenbau 1919. S. 231 & 1920, S. 1, 41.

und Pontons giebt er die zu voraussetzenden Belastungen an und stellt nachher eine Berechnung auf, welche den Besonderheiten (Symmetrie der Belastung usw.) dieser Systeme Rechnung trägt. Als Überzählige werden die Längsträgermomente über den Querträgern eingeführt.

Aus dieser Periode stammen auch einige experimentelle Untersuchungen. So hat *Saliger*¹ 1912 über die Probobelastung einer Eisenbetondecke mit 7 Rippen berichtet; die Verteilung wurde hier durch die Platte bewirkt. *Frank*² und *Knorr*³ haben Messungen an Eisenbetonbrücken angestellt und interessante Ergebnisse gefunden; als störendes Nebenproblem tritt doch bei den Eisenbetonbrücken immer das Vorhandensein der Platte auf; die Probobelastung kann deshalb nicht voll ausgewertet werden.

In den letzten Jahren haben sich verschiedene Autoren mit dem Trägerrost befasst. So hat *Thullie*⁴ 1922 eine Berechnung aufgestellt, welche von der Verteilung unendlich steifer Querträger beginnend an dieser eine Korrektur anbringen will, um durch mehrmaliges Umrechnen das Ergebnis zu verbessern.

*Petermann*⁵ hat eine Berechnung des allgemeinen Falles unter Einführung der Momente an einem Trägernetz durchgeführt.

*Lewerenz*⁶ behandelt den besonderen Fall, wo nur drei Hauptträger vorhanden sind. Er leitet gewisse Regeln für die günstigsten Trägheitsmomente dieser Hauptträger ab.

— Die theoretische Behandlung hat doch erst 1927 eine wirkliche Verbesserung erfahren durch die Arbeit von *Faltus*⁷, der anlässlich der Friedensbrücke in Wien (erbaut 1926, 13 Balkenhauptträger unter der Fahrbahn) die Frage behandelt. Diese Brücke ist unter Berücksichtigung einer gewissen Verteilung entworfen; man hat dabei nur mit den von der Belastung direkt getroffenen Querträgern gerechnet; Faltus stellt nun eine analoge Berechnung auf, die jedoch mit einem »ideellen

¹ Saliger: Versuche über die Verteilung einer Linienbelastung in einer Rippenplatte. Arm. Beton. 1912, S. 361.

² Frank: Verteilung von Radlasten bei Eisenbetonbrücken. Arm. Beton. 1913. S. 363 & 1914, S. 49.

³ Knorr: Untersuchung über die Lastverteilung von Querträgern bei einer Balkenbrücke. Arm. Beton. 1919. S. 299.

⁴ Thullie: Die Druckverteilung auf die einzelnen Träger der Betonbrücken; Beton und Eisen, 1922, S. 67.

⁵ Petermann: Über lastverteilende Wirkung durchgehender Querverbindungen. Die Bautechnik. 1925, Heft 39—42.

⁶ Lewerenz: Die Berechnung von eisernen Überbauten mit 3 Hauptträgern. Die Bautechnik, 15/9, 1925.

⁷ Frantz Faltus: Lastverteilende Querverbindungen. Bauingenieur, 12/11. 1927 & 27/4 1928. Frantz Faltus: Lastverteilende Querverbindungen. Z. d. ö. Ing. u. A. V. Heft 43, 44, 45, 46, 1928.

Querträger« rechnet, dieser soll auch die unbelasteten Querträger vertreten und erhöht sodann das Verteilungsvermögen des Rostes; Messungen haben seine Berechnungen gut bestätigt.

Bleich und *Melan* haben in ihrem Buche¹ 1927 als Anwendungsbeispiel auch die rostförmigen Tragwerke behandelt. Im allgemeinen Fall werden für einen Knoten die Momente in den zwei Balkenrichtungen und die Durchbiegung des Knotens eingeführt; es ist also hier das Neue zu vermerken, dass man mit einer Deformationsgrösse (der Durchbiegung) als Überzählige arbeitet; von den Clapeyron'schen Gleichungen ausgehend wird ein System von partiellen Differenzengleichungen aufgestellt; die Auflösung dieser Gleichungen ist Zweck der betreffenden Abhandlung. Ein Zahlenbeispiel erläutert das Verfahren, das recht grosse Anforderungen an den Leser stellt. Die Verdrehungsmomente zwischen den sich kreuzenden Balken werden hier vernachlässigt, um nicht die Rechnung unnötig zu komplizieren.

Die neueste Arbeit hat *Genntner*² 1928 geliefert. Das Problem ist im Gegensatz zu allen anderen Abhandlungen unter Berücksichtigung auch der Verdrehungsmomente behandelt. Das Verfahren bedient sich ausschliesslich der Deformationsgrössen, indem als Unbekannte die 2 Verdrehungswinkel in jedem Knoten und die Durchbiegung des Knotens eingeführt werden. Die Überzähligen gehen in ein System partieller Differenzengleichungen ein, dessen Lösung recht umständlich ist, weil sehr viele Unbekannte vorhanden sind (3 für jeden Knoten). *Genntner* gibt eine beschleunigte Näherungslösung an, welche die praktische Anwendung ermöglichen soll. *Genntner* gibt ein Zahlenbeispiel wieder um sein Verfahren zu erläutern; er findet, dass die Näherung sehr gut mit der strengen Lösung stimmt.

Zu den zwei letzten Arbeiten ist zu bemerken, dass sie zweifellos in mathematischer Hinsicht sehr erschöpfende Behandlungen darstellen. Immerhin sind die Berechnungen mit erheblichem Arbeitsaufwand verbunden, und sie stellen dem Ingenieur mathematische Anforderungen, welchen nicht sehr oft in der Praxis entsprochen werden kann; dazu ist es schwierig durch diese Verfahren eine Orientierung zu gewinnen, welche eine mehr oder weniger grobe Schätzung erlaubt. Es ist erwünscht praktische Richtlinien für die Beurteilung eines gegebenen oder zu entwerfenden Rostes zu besitzen.

In den allerletzten Jahren haben auch die Messungen an ausgeführten Bauwerken dazu beigetragen, neues Licht über unsere Frage zu

¹ Bleich-Melan: Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik. Springer, Berlin-Wien, 1927.

² Richard Genntner: Der Eisenbetonträgerrost. Beton & Eisen, ^{20/11} 1928 & ^{5/12} 1928. Dissertation.

werfen. Viele Messungen an Brücken, die für andere Zwecke ausgeführt wurden, haben nebenbei Aufschluss über die Lastverteilung der Fahrbahn dieser Brücken gebracht. Das ist besonders der Fall bei der grossen Untersuchung über die Nebenspannungen eiserner Tragwerke, welche 1926 von *M. Ros*¹ veröffentlicht wurde. Bei vielen der untersuchten Brücken hat man ein überraschend grosses Verteilungsvermögen der Fahrbahn gefunden; dieses ist auf mehrere Ursachen zurückzuführen, die Rostwirkung nimmt unter diesen einen wichtigen Platz ein. Auch bei den Messungen der Schweizerischen Bundesbahnen (Bühler, Nater) und in den Berichten von Rohn & Hübner findet man interessante Angaben für Eisen- und Eisenbetonbrücken².

Man hat bis jetzt nicht sehr oft die lastverteilende Wirkung eines gut ausgebildeten Trägerrostes bei Neubauten konstruktiv ausgenützt (abgesehen von den Eisenwasserbauten, wo eine einigermassen zuverlässige Berechnung überhaupt nur durch Kenntnis der Verteilung möglich ist).

Aus der Litteratur sind folgende Fälle bekannt:

Die eiserne Friedensbrücke in Wien (13 Hauptträger, Fahrbahn oben, grösste Spannweite 54,5 m). Hier hat man bei der Berechnung die Verteilung der Verkehrslasten durch die Querträger berücksichtigt und dadurch Gewichtersparnisse erzielt (siehe Kapitel 14). Man hätte doch nach Faltus³ in dieser Hinsicht noch weiter gehen können.

Die Strassenbrücke über die Murg bei Gernsbach (*Storz*)⁴, eine Eisenbetonbrücke mit 3 Hauptträgern unter der Fahrbahn, ist mit voller Rücksicht auf die Lastverteilung entworfen und ausgeführt worden; die Ersparnisse sind ganz bedeutend gewesen. Lossier hat im vorerwähnten Artikel (1912) schon auf die wirtschaftlichen Folgen der Lastverteilung aufmerksam gemacht. Er scheint bei der Fahrbahn von Eisenbetonbogenbrücken auch dieselben berücksichtigt zu haben. Endlich hat *Marcus*⁵ 1929 Mitteilungen über eine weitgespannte Decke gemacht; sie bestand aus 3 sich kreuzenden Trägerreihen (jede Reihe parallel zu den Begrenzungswänden eines dreieckigen Raumes); da hier in jedem Knoten 3 Träger sich an der Kraftaufnahme beteiligen, konnte man die Trägerhöhe ziemlich niedrig halten. Die Berechnung dieses Rostes

¹ Technische Kommission des Verbandes Schweizerischer Brücken- & Eisenhochbaufabriken. *M. Ros*: Nebenspannungen infolge vernieteter Knotenpunktverbindungen eiserner Fachwerkbrücken. Juni 1922.

² Bericht über den Brückenkongress Zürich 1926 und Wien 1928.

³ Frantz Faltus: Die Friedensbrücke in Wien, Z. d. ö. Ing. u. A. V. 1924.

⁴ Storz: Die Strassenbrücke über die Murg bei Gernsbach. Beton & Eisen, ^{20/9} 1928.

⁵ Marcus: Die weitgespannten Decken des Sportsgebäudes im Stadion Breslau-Leerbeutel, Beton & Eisen, ^{5/3} 1929.

wurde nach Angaben des Verfassers mittels eines Modellverfahrens mechanisch durchgeführt.

— Die Berechnung eines Trägerrostes wird in praktischen Fällen, wo die Fahrbahn- (oder Decken-) Konstruktion gegeben ist, oft Nebenprobleme aufweisen; die Überführung der äusseren Kräfte an den Rost durch sekundäre Konstruktionsglieder ist sehr oft unklar, und hier spielt häufig das Plattenproblem ein. Man findet in den meisten diesbezüglichen Werken Angaben darüber; auch sind hierüber spezielle Untersuchungen veröffentlicht.¹

Wir wollen in dieser Abhandlung nicht auf die Theorie der Platten eingehen sondern einfache Annahmen machen oder auf die Litteratur hinweisen. Es wäre zu wünschen, dass künftige Messungen genauere Angaben über die Rolle der Fahrbahnplatte als Zwischenkonstruktion und als Teil der Träger liefern würden. Wenn wir auch hier die Platten ausschalten wollen, sei doch der Vollständigkeit halber darauf aufmerksam gemacht, dass man vor der Entwicklung der heutigen Plattentheorie die Platten als aus sich kreuzenden Balken bestehend auffassen wollte; der durch Aufschneiden der Platte in Längs- und Querstreifen entstehende Rost sollte (als Annäherung) die Platte vertreten.² Die Drehungsmomente in den Schnitten zwischen den Streifen wurden also vernachlässigt.

Die vorliegende Arbeit wurde in 1925 angefangen, durch die Bedürfnisse der Praxis angeregt.³ Das Studium der vorhandenen Litteratur brachte sofort dem Verfasser die Überzeugung, dass es ziemlich aussichtslos sei dem Problem mittels der Kraftmethode näher zu treten; durch frühere Beschäftigung mit der Deformationsmethode tauchte indessen der Gedanke auf, ob nicht die Verwendung dieser Methode zu einer einfacheren und übersichtlicheren Behandlung führen könnte, und eben dieser Gedanke gab in 1925 die Veranlassung zu näherer Vertiefung in die Aufgabe. Infolge praktischer Tätigkeit konnte die Ausarbeitung leider nicht vor 1929 endgültig abgeschlossen werden.

¹ Bela Enyedi: Die Verteilung von Einzelkräften auf neben einander liegenden Trägern. Beton & Eisen, 20/9 1928. Emil Müller: Über die lastverteilende Wirkung von Brückenbelägen. Bauingenieur 1923, S. 489, 519.

² Huber: Die Theorie der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten, Bauingenieur 1923, S. 392, 354; 1924, S. 259; 1925 S. 7, 46. v. Bronneck: Die Berechnung der gekreuzt bewehrten Eisenbetonplatten und deren Aufnahmeträger. Beton & Eisen 1913, S. 37. Hotopp: Verfahren zur angenäherten statischen Berechnung biegefester rechteckiger Platten. Beton & Eisen 1922, S. 95. Manitius: Ein Beitrag zur statischen Berechnung von mit sich kreuzenden Eiseneinlagen versehenen rechteckigen Betonplatten. Beton und Eisen 1908, S. 241.

³ Berechnung eines Schwimmtores für einen Dockbau in Genua, durch die Firma Conrad Zschokke A. G., Werkstätte Döttingen, Schweiz.

Es soll in der Abhandlung versucht werden, eine Berechnung des allgemeinen Trägerrostes aufzustellen, welche genügend genaue Ergebnisse liefert und daneben auch nach Bedarf weniger streng — oder wenn erwünscht ganz roh oder schätzungsweise — durchgeführt werden kann; es soll darauf Wert gelegt werden einen praktischen Überblick über die Frage zu erhalten.

Der Rost kann ganz beliebig vorausgesetzt werden. Die Berechnung wird mittels der Deformationsmethode durchgeführt¹, indem man als überzählige Größen die Durchbiegungen aller Knoten wählt; die Verdrehungsmomente, welche der eine Träger zum kreuzenden Träger überführt, werden nicht berücksichtigt; die Mitnahme dieser Momente würde die Berechnung dermassen komplizieren, dass ihre praktische Anwendung dadurch sehr beeinträchtigt werden würde, und die erreichte Genauigkeit ist auch ohnedies in den meisten Fällen hinreichend. Das Hauptsystem (alle Überzählige gleich 0 gesetzt) ist weit mehr statisch unbestimmt als der vorgelegte Rost selbst. Das ist aber als ein Vorteil anzusehen, weil dadurch im Hauptsystem jeder Träger von fast allen anderen unabhängig wird. Die Aufstellung der Elastizitätsgleichungen ist demzufolge äusserst einfach; sie kann, wenn die Feldweiten und die Trägheitsmomente konstant sind, mit ein für allemal berechneten Koeffizienten angeschrieben werden. Diese Koeffizienten sind in Tabellen enthalten, die für alle Felderanzahlen bis auf unendlich viele Felder Gültigkeit haben; die Matrix der Gleichungen giebt eine gute Übersicht über die Anzahl und Plazierung der Koeffizienten. Es ist sehr einfach etwaigen Zwischenstützen oder Einspannungen des Rostes Rechnung zu tragen.

Die Auflösung der Gleichungen ist eine rein mathematische Aufgabe; da das Gleichungssystem eine ganz spezielle Form besitzt, ist es möglich verschiedene Kunstgriffe bei ihrer Lösung in Anwendung zu bringen. Verschiedene Autoren haben diese Rechenregeln in System gesetzt, und es ist nicht Zweck der Abhandlung diese mathematischen Untersuchungen weiter auszudehnen.

Wenn der Rost viele Träger in beiden Richtungen besitzt, wird die Auflösung immerhin eine recht bedeutende Arbeit sein. Statt uns mit der Vereinfachung der Auflösung der ursprünglichen Gleichungen zu befassen haben wir einen anderen Weg beschritten, indem eine stufenweise Berechnung aufgestellt ist, welche gestattet sehr schnell zu annähernd richtigen Ergebnissen zu gelangen. In vielen Fällen kann man bei der ersten oder zweiten Stufe stehen bleiben, was die Rechenarbeit ausserordentlich reduziert. Die stufenweise Berechnung ist doch nicht für alle Trägerroste mit gleich guter Annäherung verwendbar.

¹ Siehe A. Ostenfeld: Die Deformationsmethode, Julius Springer, Berlin, 1926.

Sehr oft kann man voraussetzen, dass die Biegelinien der Hauptträger affin sind; man kann dann (mit Annäherung) gewisse Erleichterungen erreichen; auch kann die Auflösung der Gleichungen in diesem Falle einfacher gestaltet werden. Wir geben an, innerhalb welcher Grenzen diese einfacheren Methoden Anwendung finden.

Die Einflusszahlen des Rostes können sehr oft von Nutzen sein; ihre Ermittlung geschieht mit der der Deformationsmethode innewohnenden Einfachheit; eine Kombination mit der oben erwähnten stufenweisen Berechnung (Mitnahme nur der belasteten Querträger) erleichtert noch die Berechnung. Bei den Einflusszahlen — wie im Allgemeinen — leistet André's Belastungsumordnungsverfahren sehr wertvolle Dienste.

Es ist bei der Berechnungsmethode möglich, die Variation des Verteilungsvermögens eines Rostes bei variierender Steifigkeit der Hauptträger und der Querträger zu verfolgen. Wir haben eine solche Untersuchung durchgeführt und die Ergebnisse kurvenmässig aufgetragen; eine Kurve giebt die Durchbiegung eines Knotens als Funktion des »Steifigkeitsverhältnisses« β (Steifigkeit der Hauptträger: Steifigkeit der Querträger), wenn dieses variiert von 0 bis ∞ . Es ist durch die Kurven möglich anzugeben, innerhalb welcher Grenzen das Steifigkeitsverhältnis eines Rostes liegen muss, damit man die einfacheren Berechnungen anwenden darf. Da noch alle Endpunkte der Kurven ($\beta = 0$ und $\beta = \infty$) äusserst einfach zu berechnen sind, ist es möglich schätzungsweise die Kurven einzutragen und dadurch eine erste Vorstellung über die Verteilung zu gewinnen; sie wird in den meisten Fällen nicht weit von der richtigen entfernt sein. Es ist also möglich mit sehr einfachen Mitteln abzuschätzen, welche Verteilungsmöglichkeiten für einen Rost vorhanden sind.

Im praktischen Teil der Abhandlung (Kapitel 11—15) werden die Anwendungen auf Eisenbeton- und Eisenbrücken, sowie auf Eisenwasserbauten kurz behandelt. Es war hier nicht Zweck vollständige Untersuchungen dieser Bauten zu geben, sondern lediglich für die wichtigsten Konstruktionen ihre Besonderheiten festzustellen und die sich daraus ergebende Bedeutung des vorliegenden Problems klarzulegen. Bei den Brücken sind die verschiedenen Fahrbahntypen auf ihre verteilende Wirkung hin untersucht worden. Es werden hierdurch für die üblichen Längs- und Querträger allgemeine Regeln gefunden oder bestätigt; die in der Praxis üblichen Steifigkeitsverhältnisse sind angegeben. Bei den Eisenbetonbrücken hat man nicht ganz vermeiden können auf die Berechnung der Platte einzugehen. Die Fragen der wirtschaftlichen Folgen der Lastverteilung sind ebenfalls behandelt. Hier spielt die Art der Belastung eine grosse Rolle. Endlich haben wir die Ergebnisse der angestellten Messungen wiedergegeben; diese bestätigen

gänzlich, dass eben eine sehr angenäherte Berechnung eine gute Vorstellung von der Verteilung geben kann. Einigen besonderen Konstruktionen wie Decken, Fundamentrahmen und Holzkonstruktionen ist nur eine kurze Bemerkung gewidmet. Unter den Eisenwasserbauten sind besonders die Schützen und die Schwimmtore behandelt; die Annahmen für ihre Berechnung und die Durchführung derselben werden kurz erörtert. Als besonders belastete Roste werden schliesslich die Schwimmdocks und Pontons aufgefasst; ihre Berechnung weicht von der des gewöhnlichen Rostes etwas ab. Der Grenzfall: die gewöhnlichen Schiffe wird nur kurz gestreift zwecks Bestimmung der Stellung letzterer in der Gesamtheit dieser Konstruktionen.

KAPITEL II

Allgemeine Theorie.

Voraussetzungen.

Wir betrachten ein ebenes Tragwerk, das aus zwei sich kreuzenden Trägerscharen zusammengesetzt ist; die Träger können beliebige Stützweiten haben, sie können parallel sein oder nicht (Fig. 1). Die Auflagerungen der Träger sind entweder gelenkig oder Einspannungen, auch können Zwischenstützen vorkommen.

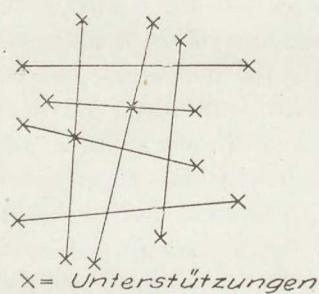


Fig. 1.

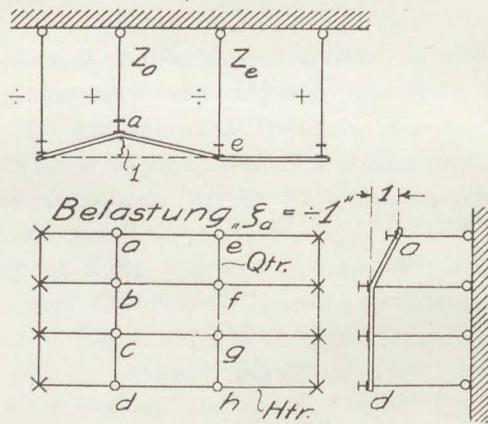


Fig. 2.

Für die folgenden Überlegungen wollen wir uns doch auf das System Fig. 2 beziehen, wo die Träger sich rechtwinklig kreuzen, und wo alle Stützweiten gleich angenommen sind. Alle Berechnungsweisen lassen sich ohne weiteres auf den ganz allgemeinen Fall (Fig. 1) erweitern. Die Träger, die in Fig. 2 an festen Auflagern gestützt oder eingespannt sind, werden im Folgenden *Hauptträger* genannt, die anderen *Querträger* (Verteilungsträger); die gegenseitige Auflagerung in den Kreuzungspunkten (*die Knoten*) ist gelenkig ausgebildet, d. h. die zwei

im Knoten verbundenen Träger müssen gleiche Durchbiegungen aufweisen, dagegen können keine Verdrehungsmomente durch Neigung einer Trägerachse an den anderen Träger überführt werden. Der Rost in Fig. 2 ist statisch unbestimmt, nämlich für n Hauptträger und m Querträger (die eventuellen Querträger über den Auflagern nicht mitgerechnet) $m(n - 2)$ fach unbestimmt; dabei wird vorausgesetzt, dass die Hauptträger selber statisch bestimmt sind, (was doch nicht der Fall zu sein braucht).

Die Belastung des Rostes seien beliebig gerichtete Einzelkräfte oder verteilte Belastungen; diese werden in lotrechten und wagerechten Teilkräften zerlegt; die letzteren beanspruchen den Rost auf Druck und wagerechte Biegung, und die entsprechende Berechnung stellt ein gewöhnliches Rahmenproblem dar. Nur die Untersuchung der Beanspruchungen durch die lotrechten Kräfte ist Zweck dieser Abhandlung.

Berechnungsmethode.

Die Berechnung eines Rostes wird mittels der Deformationsmethode ausgeführt¹. Als Überzählige führen wir die Durchbiegungen der $m \cdot n$ Knoten, welche die Träger mit einander verbinden, ein². Die Knoten werden mit $a b c d \dots$ für den ersten Querträger bezeichnet usw. für die folgenden (Fig. 2). Diese Durchbiegungen werden als Verlängerungen hinzugefügter Stäbe $Z_a, Z_b \dots$ die von den Knoten, $a, b \dots$ zu festen Stützpunkten laufen, aufgefasst. Gemäss der allgemeinen Deformationsmethode (siehe Quelle oben, S. 2—4) können wir eine willkürliche Stabkraft S auf die Form

$$S = S_o - S_a \zeta_a - S_b \zeta_b - \dots - S_r \zeta_r,$$

schreiben.

Für die Stabkräfte der hinzugefügten Stäbe Z haben wir, dass diese gleich 0 sind, deshalb

$$Z_a = 0 = Z_{ao} - Z_{aa} \zeta_a - Z_{ab} \zeta_b - \dots - Z_{ar} \zeta_r \dots; \quad (1)$$

Für die anderen Z -Stäbe gelten analoge Gleichungen; wir haben hier überall $Z_{rs} = Z_{sr}$. Diese Gleichungen, von welchen wir also eine für

¹ A. Ostenfeld: Die Deformationsmethode, Julius Springer, Berlin, 1926.

² Man hätte ausser der Durchbiegung eines Knotens auch die zwei Tangentenwinkel der in diesem Knoten sich kreuzenden Träger einführen können; dadurch hätte sich die Zahl der unbekannten Grössen und damit die der notwendigen Gleichungen sehr vermehrt; aber die sich ergebenden Gleichungen wären etwas einfacher ausgefallen; ihre Auflösung würde doch oft erhebliche Schwierigkeiten bereiten.

jeden Knoten besitzen, sind genügend zur Bestimmung aller Durchbiegungen $\zeta_a \zeta_b \dots \zeta_r$ des Systems.

Wir rechnen im Folgenden ζ_a positiv nach unten; » $\zeta_a = -1$ « ist deshalb eine Aufbiegung (siehe Fig. 2) des Knotens a ; weiter wird Z_a positiv in der Richtung » $\zeta_a = -1$ « gerechnet, d. h. wenn wir uns die Knoten von oben festgehalten denken, wird die Belastung » $\zeta_a = -1$ « eine Zugspannung im gedachten Stab bei a hervorrufen.

Nach der Auflösung der Gleichungen (1), was die ζ -Werte ergiebt, werden die Momente und Querkräfte durch die Formel:

$$M_a = M_{ao} - M_{aa} \zeta_a - M_{ab} \zeta_b - \dots - M_{ar} \zeta_r \dots; \quad (2)$$

$$Q_a = Q_{ao} - Q_{aa} \zeta_a - Q_{ab} \zeta_b - \dots - Q_{ar} \zeta_r \dots; \quad (3)$$

bestimmt.

Zur Kontrolle sämtlicher Berechnungen hat man, dass die Summe der Reaktionen der Hauptträger gleich der äusseren Belastung des Systems sein muss; diese Reaktionen werden leicht aus den Hauptträgermomenten bei den äussersten Querträgern gefunden (durch Teilung dieser durch die äussersten Feldweiten).

Die Koeffizienten Z_{rs} , M_{rs} und Q_{rs} der r ten Gleichung (1—3) werden in folgender Weise berechnet: Das Glied Z_{ro} (und die zwei analogen für M und Q) bedeutet die Kraft im Z -Stab für die äussere Belastung auf das in allen Knoten fest (unelastisch) gestützte System ($\zeta_a, \zeta_b \dots = 0$). Z_{aa} , ($Z_{bb} \dots$) sind die Reaktionen in den Z -Stäben a , ($b \dots$) für die Belastungen » $\zeta_a = -1$ «, ($\zeta_b = -1$ «) usw., alle anderen $\zeta = 0$; zu Z_{aa} (und $Z_{bb} \dots$) haben wir zwei Beiträge, einen von jedem der zwei Balken, die sich in a (oder b) kreuzen. Der erste Beitrag ist also die Reaktion im kontinuierlichen Hauptträger auf festen Stützen infolge der Erhebung um 1 (s. Fig. 2) der Stützen a ($b \dots$); der andere Beitrag röhrt in ähnlicher Weise von der Erhebung um 1 der Querträgerstützen a ($b \dots$) her, (diese sind ja durch die Knotenverbindung mit dem Hauptträger fest verbunden), während die übrigen Stützen ihre Stellung bewahren.

Z_{ab} , $Z_{ac} \dots$ bekommen hingegen nur einen Beitrag, nämlich die Reaktion im Z -Stabe a , von der Erhebung um 1 der Stützen b , $c \dots$ herrührend, während die übrigen Stützen der Balken ab , $ac \dots$ (diese seien Hauptträger oder Querträger) fest bleiben.

Als einfachstes Beispiel wollen wir den Fall nur zweier Träger betrachten (Fig. 3); die Belastung ist eine Einzellast P im Knoten a , welcher die Trägermitten vereinigt; wir führen hier die Durchbiegung ζ_a des Knotens a als unbekannte Grösse ein; nach Gleichung (1) finden wir ζ_a aus $Z_a = 0 = Z_{ao} - Z_{aa} \zeta_a$, wo also Z_a die Stabkraft eines gedachten

Unterstützungsstabes des Knotens a bedeutet; weiter ist $Z_{ao} = +P$, (der unterstützende Stab kann sich für $\zeta_a = 0$ nicht verlängern und muss demzufolge die ganze Belastung P aufnehmen); wir suchen nun Z_{aa} , die Reaktion im Z-Stab a für die Belastung » $\zeta_a = -1$ « (Fig. 3); die Durchbiegung 1 des Balkens mit Länge l_1 wird im Z-Stab a die Kraft $1 \cdot \frac{48 E_1 I_1}{l_1^3}$ (Bezeichnungen in Fig. 3) hervorrufen; der andere

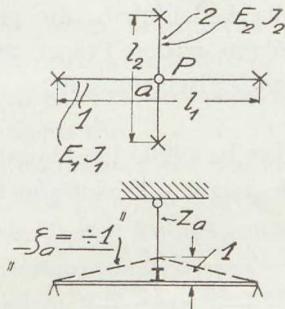


Fig. 3.

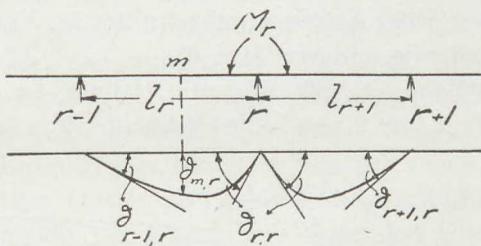


Fig. 4.

Balken wird den Beitrag $1 \cdot \frac{48 E_2 I_2}{l_2^3}$ liefern; alsdann haben wir

$$Z_{aa} = + \frac{48 E_1 I_1}{l_1^3} + \frac{48 E_2 I_2}{l_2^3}.$$

Die gesuchte Durchbiegung ζ_a ist nun

$$\zeta_a = \frac{+Z_{ao}}{Z_{aa}} = \frac{+P}{\frac{48 E_1 I_1}{l_1^3} + \frac{48 E_2 I_2}{l_2^3}}.$$

Von der Gesamtkraft P wird der Teil

$$X_2 = \zeta_a \cdot \frac{48 E_2 I_2}{l_2^3}$$

vom Balken 2 getragen, der Rest $P - X_2 = X_1$ wird vom Balken 1 aufgenommen.

Die Reaktionen, Momente und Querkräfte in einem kontinuierlichen Balken auf festen Stützen infolge der Erhebung um 1 einer Stütze werden durch die allgemeine Theorie der kontinuierlichen Balken bestimmt.

Wir brauchen dazu folgende Bezeichnungen¹ (Fig. 4):

¹ Siehe: A. Ostenfeld, Teknisk Statik II. Kopenhagen 1925. S. 84 u. folgende.

Die Stützen $0, 1, \dots, r-1, r, r+1, \dots, n$
 Die Stützmomente $M_0, M_1, \dots, M_{r-1}, M_r, M_{r+1}, \dots, M_n$
 Die Stützweiten $l_1, l_2, \dots, l_r, l_{r+1}, \dots, l_n$;

Für dieses System haben wir bekanntlich die Elastizitäts-Gleichungen

$$\begin{aligned} -M_{r-1}\delta_{r-1,r} - M_r\delta_{r,r} - M_{r+1}\delta_{r+1,r} &= \Sigma P_m \delta_{m,r} + \delta_{r,u}, \\ -M_r\delta_{r,r+1} - M_{r+1}\delta_{r+1,r+1} - M_{r+2}\delta_{r+2,r+1} &= \Sigma P_m \delta_{m,r+1} + \delta_{r+1,u}, \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (4)$$

und die analogen Dreimomentengleichungen; hier bedeutet δ_{rs} die relativen Drehungen der Tangenten über den Stützen r (der Träger sei über jeder Stütze durchschnitten, s. Fig. 4) infolge der Belastung $M_s = 1$ (und alle anderen $M = 0$).

Wenn es sich um »die Hebung 1« einer Stütze handelt, ist überall $\Sigma P_m \delta_{mr} = 0$, und die Momente M_r ergeben sich aus den Gleichungen

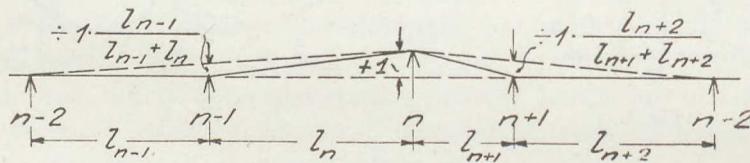


Fig. 5.

nach Ermittlung aller Hilfswerte δ_{rs} und der Grösse δ_{ru} . Hat der Balken konstantes Trägheitsmoment, gehen die obigen Gleichungen in die einfachen Clapeyron'schen Gleichungen über (Fig. 5):

für $n = 1$:

$$\begin{aligned} -M_{n-2}l_{n-1} - 2M_{n-1}(l_{n-1} + l_n) - M_nl_n &= -6EI \cdot \frac{l_{n-1}}{l_{n-1} + l_n} \cdot \left(\frac{1}{l_{n-1}} + \frac{1}{l_n} \right); \\ \text{für } n: \\ -M_{n-1}l_n - 2M_n(l_n + l_{n+1}) - M_{n+1}l_{n+1} &= +6EI \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right); \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (5)$$

Durch diese Gleichungen findet man die Momente $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n, M_{n+1}, \dots$, und durch diese wieder die Querkräfte $Q_n = \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n}$ und endlich die Reaktionen $R_n = Q_n - Q_{n+1}$; als Kontrolle haben wir $\Sigma R = 0$ für den ganzen Balken.

Die verschiedenen Sonderfälle werden im Kapitel 3 behandelt.

Das Gleichungssystem.

Für Kräfte in den Knoten ist ohne weiteres $Z_{ro} = +P_r$, für Kräfte zwischen den Knoten muss Z_{ro} (Beitrag von allen Knoten des betrachteten Balkens) für jeden Sonderfall berechnet werden.

Um eine Übersicht über die Anzahl und die Plazierung der Koeffizienten der Unbekannten ζ zu gewinnen wollen wir die *Matrix des Gleichungssystems* aufschreiben; diese ist ein Schema, das aus der Determinante der Gleichungen hervorgeht durch Ersetzen der Gleichungskoeffizienten durch die Index der Unbekannten $\zeta_a, \zeta_b \dots$. Die Matrix zeigt also nur die Gruppierung der Koeffizientenplätze; bei der Aufschreibung werden alle Buchstaben weggelassen, wenn der entsprechende Koeffizient = 0 ist. Für eine bestimmte Gleichung (welche für einen bestimmten Knoten gilt), ist dies der Fall mit allen Knoten, die ausserhalb der im betreffenden Knoten sich kreuzenden 2 Balken liegen; die a -Gleichung wird deshalb 1) die Nummer $abcd$ des Querträgers durch a , 2) die übrigen Knotennummern im Hauptträger durch a enthalten; alle anderen Plätze bleiben leer. Die b -Gleichung enthält 1) die gleichen Plätze wie bei 1) unter a , da der Querträger der gleiche ist; 2) die Knotennummer des Hauptträgers durch b . Für die weiteren Knotennummern $cd \dots$ des gleichen Querträgers gelten ähnliche Regeln. Gehen wir jetzt zu der Gleichung für die Knoten des folgenden Querträgers, finden wir in ähnlicher Weise, dass alle Plätze, welche sich auf diesen Querträger beziehen, in diesen Gleichungen ganz ausgefüllt werden, während die Nummern der übrigen Querträger nur die Diagonalreihe der übrig bleibenden quadratischen Partien der Matrix bilden.

Für den Rost in Fig. 2 haben wir folgende Matrix

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & a & b & c & d & e & & & \\
 & a & b & c & d & & f & & \\
 & a & b & c & d & & & g & \\
 & a & b & c & d & & & & h \\
 & a & & & & e & f & g & h \\
 & b & & & & e & f & g & h \\
 & c & & & & e & f & g & h \\
 & d & e & f & g & h & & &
 \end{array}$$

Die Matrix der Gleichungen kann jetzt ganz mechanisch aufgeschrieben werden. Da der Maxwell'sche Satz ganz allgemeine Gültigkeit hat, ($Z_{rs} = Z_{sr}$), ist für ein willkürliche System die Matrix um die von links nach rechts fallende Diagonalreihe symmetrisch: die Matrix ist *einzel-symmetrisch*; ist noch der Rost selber symmetrisch, sieht man leicht, dass die Matrix auch in Bezug auf die andere Diagonalreihe symmetrisch wird; in diesem Falle ist also die Matrix *doppel-symmetrisch*. Diese Symmetrie-Eigenschaften gelten auch für die quadratischen Matrixteile, welche zu einem Querträger gehören (z. B. $abcd$) und die die Matrix bilden; auch für die isolierten Diagonalreihen (»die Streuungs-

glieder«) welche in den übrigen leeren Quadranten Platz finden, haben diese Regeln Gültigkeit. Es lässt sich deshalb durch die Einzel- oder Doppelsymmetrie der Matrix immer ohne weiteres entscheiden, wie viele der Koeffizienten gleich 0 sind (die unausgefüllten Plätze), und wie viele der übrigen Koeffizienten von einander verschieden sind. Im Allgemeinen und namentlich bei vorhandener Doppelsymmetrie der Matrix wird man nur eine im Verhältnis zur totalen Koeffizientenzahl sehr geringe Anzahl Koeffizienten auszurechnen haben.

Wenn also die Feldweiten und die Variation der Trägheitsmomente für alle Balken bekannt sind, können die Koeffizienten der $\zeta_a, \zeta_b \dots$ -Werte, gemäss der allgemeinen Theorie berechnet werden. Man kann jetzt die Gleichungen aufstellen, und diese bekommen, wenn man von den Belastungsgliedern $Z_{ao} Z_{bo} \dots$ absieht, natürlich genau die gleichen Symmetrieeigenschaften wie die Matrix; es ist dann nur noch die Auflösung der Gleichungen vorzunehmen.

KAPITEL III

Die Koeffizienten.

Allgemeines.

Von der im Kapitel II erläuterten allgemeinen Theorie ausgehend kann man die bei einem beliebigen Rost vorkommenden Koeffizienten berechnen. Wir wollen doch hier eine Orientierung über die in der Praxis auftretenden Fälle suchen.

Bie Belastung. Die auf einem ganz willkürlichen Rost auftretende Belastung wollen wir uns folgendermassen vorstellen:

Einzelkräfte in den Knoten; wir haben dann für den r ten Knoten ohne weiteres, dass die Einzelkraft im Knoten $P_r = Z_{ro}$; alle Berechnungen sind also überflüssig.

Einzelkräfte zwischen den Knoten, gleichmässig verteilte Belastung oder die Belastung nach anderen Belastungskurven verteilt.

Man benutzt am einfachsten die Einflusslinien¹ für den kontinuierlichen Träger, berechnet die M_o -Momente für die gegebene Belastung und leitet davon die Q - und R -Werte ab. Ist der Balken lang (Felderzahl $\geq 8-10$ Felder), kann man genügend genau die Einflusslinien für einen kontinuierlichen Träger mit unendlich vielen Feldern benutzen.

Es geht aus der allgemeinen Theorie hervor, dass die Belastung nur auf die Z_o -Werte der Gleichungen (»die Belastungsglieder«) Einfluss hat, und diese Glieder müssen dann, wenn die Belastung nicht aus Einzelkräften in den Knoten besteht, für jeden Sonderfall ausgerechnet werden. Indessen wird man sehr oft ohne wesentliche Fehler eben voraussetzen können, dass die Belastung in den Knoten angreift; so können wir z. B. eine gleichmässig verteilte Belastung an den benachbarten Knoten durch Schätzung verteilen.

¹ z. B. den Griot'schen Tabellen o. a. entnommen.

Der Rost ist durch die Felderteilung und Trägheitsmomente der Balken charakterisiert (und durch das Konstruktionsmaterial: Eisen, Eisenbeton oder Holz; die dadurch eingeführte Veränderliche: der Elastizitätskoeffizient E der Balken, der bei Konstruktionen mit mehr als einem Material für die Berechnung eine Rolle spielt, wird hier doch nicht behandelt werden; gegebenen Falls wird eine Variation von E immer bei der Trägheitsmomentenberechnung berücksichtigt werden können; man muss nur dafür sorgen, dass $E \cdot I$ richtig wird).

Wir betrachten also nur die Variation der zwei Größen: die Feldweite l_n des Feldes n und das Trägheitsmoment I .

Es können folgende Fälle vorkommen:

- 1) Die Feldweite l_n ist variabel, während I für den ganzen Balken konstant bleibt. Dieser Fall trifft z. B. bei der Anwendung der stufenweisen Berechnung (s. Kap. 6) ein.
- 2) Die Feldweite l_n ist konstant ($= \lambda$); das Trägheitsmoment I ist variabel, entweder stufenweise von Feld zu Feld oder ganz kontinuierliche Variation über dem Balken.
- 3) Endlich können sowohl l_n ($= \lambda$) als I konstant über der ganzen Balkenlänge sein. Dies ist der »normale Fall«, der grosse praktische Bedeutung hat.

Infolge der allgemeinen Theorie ist der Rost für alle Koeffizienten Z_{rs} , in welchen die Belastung nicht eingeht, allein massgebend. Diese Koeffizienten, welche die Matrix der Gleichungen bilden, sind für einige praktisch wichtige Fälle (1—2) in den Tabellen 1—5 ausgerechnet. Es ist dabei vorausgesetzt, dass die Balken an beiden Enden einfach gestützt sind. Für den Fall 3) sind in den Tabellen 6—14 die vollständigen Koeffizienten — für beliebige Felderzahlen — angegeben. Man braucht also diese Koeffizienten nicht zu berechnen, sondern man kann sie direkt aus den Tabellen greifen.

Sind die Stützen der Balken eingespannt, müssen alle Koeffizienten für den entsprechenden Fall ausgerechnet werden; diese Berechnung bietet natürlich keine prinzipiellen Schwierigkeiten.

Sonderfall 1. λ variabel. I konstant.

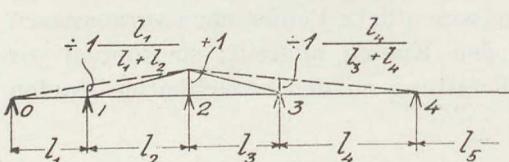


Fig. 6.

Von den allgemeinen Formeln (5) (Kapitel 2) leiten wir die notwendigen Formeln ab. Für einen Träger, wo sich z. B. die Stütze 2 erhebt, finden wir (Fig. 6):

$$\begin{aligned}
 -2M_1(l_1 + l_2) - M_2l_2 &= -6EI \cdot \frac{l_1}{l_1 + l_2} \cdot \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) = -6EI \cdot \frac{1}{l_2}, \\
 -M_1l_2 - 2M_2(l_2 + l_3) - M_3l_3 &= +6EI \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \right) = +6EI \cdot \frac{l_2 + l_3}{l_2 l_3}, \\
 -M_2l_3 - 2M_3(l_3 + l_4) - M_4l_4 &= -6EI \cdot \frac{l_4}{l_3 + l_4} \cdot \left(\frac{1}{l_3} + \frac{1}{l_4} \right) = -6EI \cdot \frac{1}{l_3}, \\
 -M_3l_4 - 2M_4(l_4 + l_5) - M_5l_5 &= 0, \\
 \dots &= 0.
 \end{aligned}$$

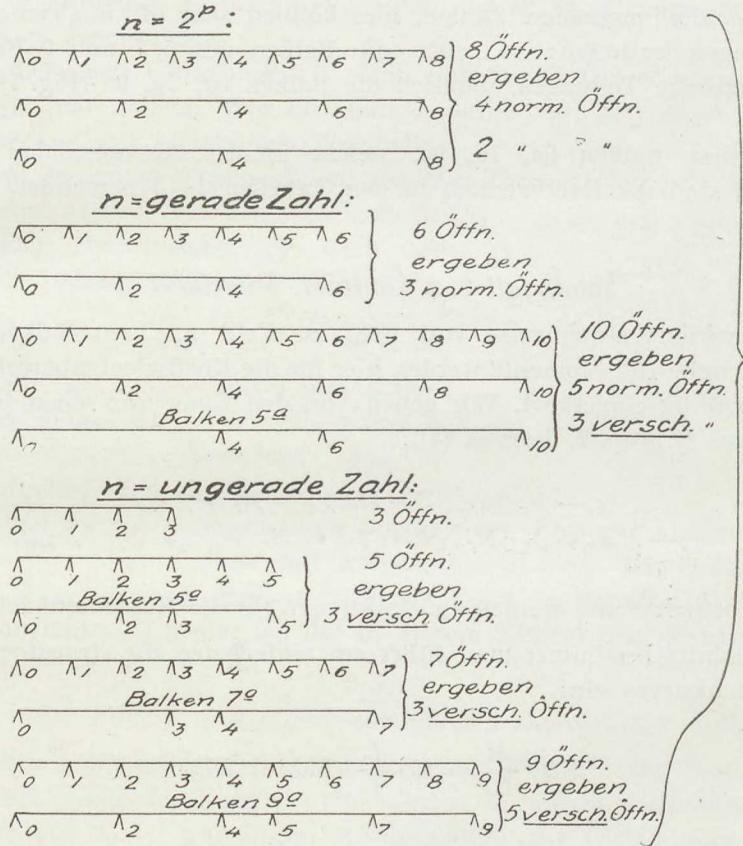


Fig. 7.

Wir haben also eine einfache Regel für die bekannten Glieder. Nach der Berechnung der Momente werden die Q - und R -Werte in gewöhnlicher Weise gefunden. Die stufenweise Berechnung (Kap. 6) führt mitunter zur Verwendung von Koeffizienten für Balken mit variabler Feldweite, indem sie die Berechnung der Koeffizienten eines Balkens mit vielen Feldern auf den Balken, der durch Weglassung einiger Stützen des ersten Balkens entsteht, zurückführt. Wir wollen deshalb

hier einen Überblick über die speziellen Teilungen nehmen, welche bei Anwendung dieser stufenweisen Berechnung entstehen können; für einen Balken mit n gleichen Feldern können folgende Fälle eintreffen:

- 1) $n = 2 - 4 - 8 \dots 2^p$, die Weglassung einiger Stützen giebt zu keinen ungleichen Teilungen Veranlassung (vergl. Fig. 7).
- 2) $n = \text{andere gerade Zahlen}$, hier giebt $n = 10$ zuerst einen Balken mit 5 Stützen, und dieser nachher den Balken 5a mit ungleicher Teilung.
- 3) $n = \text{alle ungeraden Zahlen}$, hier können sehr oft ungleiche Teilungen auftreten; so geben die Balken mit 5, 7 und 9 Feldern ungleiche Teilungen, nämlich die Balken 5a, 7a, 9a (Fig. 7).

Für diese Balken 5a, 7a, 9a, welche nicht zum »normalen Fall« gehören, sind die Koeffizienten in den Tabellen 1—3 berechnet.

Sonderfall 2. λ konstant. I variabel.

1) I variiert stufenweise von Feld zu Feld u. z. zur Balkenmitte symmetrisch. Die Momente werden hier für die Koeffizientenberechnung als überzählig eingeführt. Wir gehen von den Clapeyron'schen Gleichungen aus (s. Kap. 2, Formel (4)):

$$\begin{aligned} -M_{r-1}\delta_{r-1,r} - M_r\delta_{r,r} - M_{r+1}\delta_{r+1,r} &= \delta_{r,u}, \\ -M_r\delta_{r,r+1} - M_{r+1}\delta_{r+1,r+1} - M_{r+2}\delta_{r+2,r+1} &= \delta_{r+1,u}; \end{aligned}$$

Die Koeffizienten δ werden als Reaktionen für die Momentenfläche $\frac{M}{E \cdot I}$ als Belastung bestimmt; man führt am einfachsten die »transformierte Momentenkurve« ein:

$$EI_c \cdot \frac{M}{EI} = M \cdot \frac{I_c}{I} \text{ (Faktor } EI_c);$$

mit $I_c = I_{\max}$ und $I = \frac{1}{\alpha} \cdot I_{\max}$, also $\alpha = \frac{I_{\max}}{I}$ wird die Reaktion dieser Momentenfläche (Fig. 8):

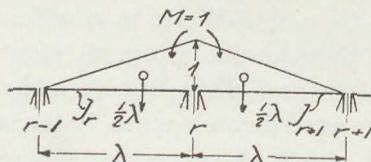


Fig. 8.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \alpha_r &= \frac{1}{6}\lambda\alpha_r \text{ bei } r-1, \\ \frac{1}{3}\lambda \cdot \alpha_r + \frac{1}{3}\lambda \cdot \alpha_{r+1} &= \text{bei } r, \\ \frac{1}{6}\lambda\alpha_{r+1} &= \text{bei } r+1, \end{aligned}$$

dadurch kann die r 'te Gleichung geschrieben werden:

$$-\frac{1}{6}M_{r-1}\cdot\lambda\alpha_r - \frac{1}{3}M_r\cdot\lambda\cdot(\alpha_r + \alpha_{r+1}) - \frac{1}{6}M_{r+1}\cdot\lambda\cdot\alpha_{r+1} = \delta_r\cdot EI_c\cdot\left(\frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}}\right),$$

oder

$$-M_{r-1}\alpha_r - 2M_r(\alpha_r + \alpha_{r+1}) - M_{r+1}\alpha_{r+1} = +\delta_r\cdot\frac{12EI_c}{\lambda^2}.$$

Diese Gleichungen sind denen sehr ähnlich, welche für den normalen Fall gelten (s. unten), nur sind die Momente mit α multipliziert.

2) I variiert kontinuierlich über den Balken. Hier wird die Berechnung in ähnlicher Weise durchgeführt, nur ist es oft vorteilhaft diese graphisch auszuführen.

Beispielsweise betrachten wir einen Balken mit 6 Öffnungen und I ungefähr parabolisch über den Balken variierend; hier kann man als Annäherung mit konstantem Trägheitsmoment in jedem Feld rechnen; Fig. 9 giebt eine solche Variation, wo doch die Endfelder etwas steifer als nach der Parabel vorausgesetzt sind. Wir haben

wie oben $I_c = I_{\max}$, $\alpha = \frac{I_c}{I} \geq 1$ gesetzt;

für den Balken mit 4 und 6 Öffnungen haben wir in Tabelle 4 und 5 die Koeffizienten berechnet; das in diese Koeffizienten eingehende μ entspricht I_c .

Die mit diesem μ berechneten Koeffizienten sind alle kleiner als die, welche für einen Balken mit konstantem I über der ganzen Balkenlänge gelten; mit dem gewählten μ -Wert ist nämlich der Balken mit konstantem I steifer als der in diesem Kapitel (Fig. 9) betrachtete Balken.

Normaler Fall: λ und I über der ganzen Balkenlänge konstant.

(Balken einfach gestützt). Die allgemeinen Formeln (5) (Kap. 2) für die Berechnung der Koeffizienten werden in diesem Fall durch Einführung von $l_r = \lambda$ und durch Multiplikation der Gleichungen mit 6 folgendermassen vereinfacht:

$$-M_{r-1}\cdot\lambda - 4M_r\cdot\lambda - M_{r+1}\cdot\lambda = 6EI\vartheta\cdot\frac{2}{\lambda},$$

wo die Erhebung (Senkung) über (unter) der Verbindungslinie der Nachbarstützen bezeichnet ist. ϑ ist also entweder $= \pm 1$ oder $\pm \frac{1}{2}$ (oder 0), und die rechte Seite der Gleichung wird demgemäss $+12\cdot\frac{EI}{\lambda}$, oder $-6\cdot\frac{EI}{\lambda}$, (oder 0). Durch Division mit λ werden diese Gleichungen noch vereinfacht, indem wir

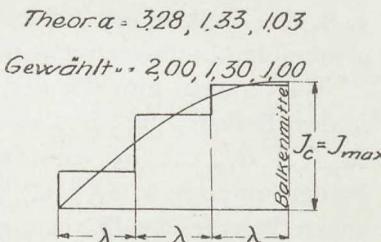


Fig. 9.

$$-M_{r-1} - 4M_r - M_{r+1} = +12 \frac{EI}{\lambda^2} \left(\text{oder } -6 \frac{EI}{\lambda^2} \text{ oder } 0 \right). \quad (6)$$

erhalten. Die Momente M können nachher in gewöhnlicher Weise aus diesen Gleichungen berechnet werden. Die Q -Werte und die R -Koeffizienten erhalten wir durch Summation. Als Kontrolle benutzen wir, dass die Summe der R -Koeffizienten gleich 0 sein muss und noch dass infolge des Maxwell'schen Satzes $R_{rp} = R_{pr}$. In den Tabellen 6—13 sind die vollständigen Koeffizienten für M , Q , R berechnet, für Balken mit 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 Felder.

Diese R -Koeffizienten sind in Fig. 10 (Seite 135) in einem rechtwinkligen Koordinatensystem in folgender Weise aufgetragen: als Abszisse benutzen wir die Felderzahl $n = 1, 2 \dots 10$ des Balkens, als Ordinate den numerischen Wert der Koeffizienten der Reaktionen R_{rp} . Betrachten wir z. B. den Balken mit Felderzahl n ($2 \leq n \leq 10$); die zu diesem Balken gehörende Abszissenstrecke ist die Länge vom Anfangspunkt zum Punkte n . Wir tragen nun die der Bewegung $\div 1$ eines bestimmten Knotens p des Balkens ($0 \leq p \leq n$) entsprechenden Reaktionskoeffizienten $R_{1p}, R_{2p}, \dots, R_{pp}, \dots, R_{np}$ als Ordinaten auf, indem wir als Abszisse die Feldernummern $1, 2, \dots, p, \dots, n$ des Knotens benutzen. Die so aufgetragenen Punkte, der Bewegung des Knotens p entsprechend, werden durch Linien verbunden, und die dadurch entstehende Kurve stellt den Einfluss der Bewegung von p auf die Koeffizienten dar. In ganz ähnlicher Weise werden nun für den gleichen Balken die der Bewegung der übrigen Knoten $(1, 2, \dots, p \div 1, p + 1, \dots, n)$ entsprechenden Kurven aufgezeichnet, und so erhalten wir das vollständige Kurvensystem, das dem Balken mit n Feldern entspricht. Für die übrigen Balken mit Felderanzahl bis 10 sind wir in dieser Weise verfahren (s. Fig. 10); für jede Kurve haben wir die Felderzahl n des entsprechenden Balkens ange schrieben.

Es ist aus der Theorie der kontinuierlichen Balken bekannt, dass die Momente, Querkräfte und Reaktionen, von einer in einem bestimmten Knoten p wirkenden Belastung oder Stützenbewegung herrührend, von der Felderzahl des Balkens ziemlich unabhängig sind; M , Q oder R in einem Knoten r ($\geq p$) sind ungefähr die gleichen, ob der Balken lang oder kurz ist (wenn der Balken nicht kürzer als 4—5 Felder ist); d. h. die M -, Q - oder R -Werte sind ungefähr die gleichen, welche in einem Balken mit unendlich vielen Feldern gelten; in einem solchen Balken sind die M -, Q - oder R -Werte im Knoten r nur von der Entfernung zwischen r und p abhängig. Die Koeffizientenwerte werden deshalb gegen bestimmte Grenzwerte konvergieren, wenn die Felderzahl des Balkens von 2, 3, 4, ..., n , ..., bis undendlich wächst. Die

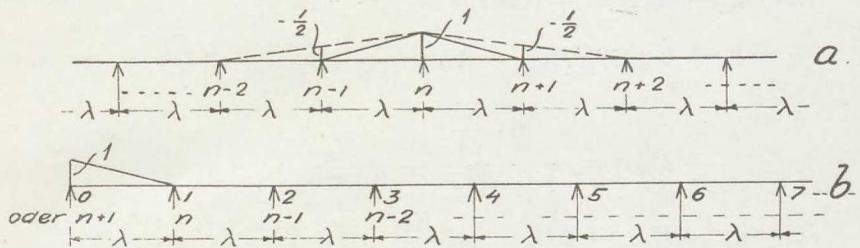


Fig. 11.

Grenzwerte sind diejenigen, die in einem Balken mit unendlich vielen Feldern Gültigkeit haben. Für einen solchen Balken (Fig. 11a) haben wir für die Erhebung um 1 der n -ten Stütze nach obigen Formeln das Gleichungssystem

$$1) \quad -4M_1 - M_2 = 0$$

$$2) \quad -M_1 - 4M_2 - M_3 = 0$$

$$3) \quad -M_2 - 4M_3 - M_4 = 0$$

.....

$$n-2) \quad -M_{n-3} - 4M_{n-2} - M_{n-1} = 0$$

$$n-1) \quad -M_{n-2} - 4M_{n-1} - M_n = -6 \frac{EI}{\lambda^2}$$

$$n) \quad -M_{n-1} - 4M_n - M_{n+1} = +12 \frac{EI}{\lambda^2}$$

$$n+1) \quad -M_n - 4M_{n+1} - M_{n+2} = -6 \frac{EI}{\lambda^2}$$

$$n+2) \quad -M_{n+1} - 4M_{n+2} - M_{n+3} = 0$$

.....

In diesen Gleichungen ist, da der Balken unendlich lang ist,

$$M_{n-2} = M_{n+2}, \quad M_{n-1} = M_{n+1} \text{ usw.}$$

Bei der Auflösung der Gleichungen fangen wir oben an, und wir finden durch sukzessive Elimination folgende Gleichungen:

$$1) \quad -M_1 = +0,2500 M_2$$

$$2) \quad -M_2 = +0,2666 M_3$$

$$3) \quad -M_3 = +0,26786 M_4$$

$$4) \quad -M_4 = +0,26794 M_5$$

$$5) \quad -M_5 = +0,26795 M_6$$

$$6) \quad -M_6 = +0,26795 M_7$$

.....

$$\begin{aligned}
 n-2) - M_{n-2} &= + 0,26795 M_{n-1} \\
 n-1) + 0,26795 M_{n-1} - 4 M_{n-1} - 4 M_n &= - 6 \frac{EI}{\lambda^2}; \\
 - M_{n-1} &= - \frac{6 \cdot \frac{EI}{\lambda^2}}{3,73205} + \frac{M_n}{3,73205}; \\
 n) - M_{n-1} - 2 M_n &= + 6 \frac{EI}{\lambda^2}; \\
 M_n \left(\frac{1}{3,73205} - 2 \right) &= + 6 \frac{EI}{\lambda^2} \left(1 + \frac{1}{3,73205} \right); \\
 M_n &= - \frac{EI}{\lambda^2} \cdot 4,392305.
 \end{aligned}$$

Durch sukzessive Rückrechnung erhält man

$$M_{n-1} = + 2,78461 \cdot \frac{EI}{\lambda^2} = M_{n+1},$$

usw. die in Tabelle 14, 1ste Spalte, gegebenen Zahlen.

Die aus diesen Momenten gebildeten Q - und R -Koeffizienten sind in Tabelle 14 angegeben. Durch Vergleich mit den in Tabelle 6—13 gegebenen Koeffizienten sehen wir, dass die letzteren sehr schnell gegen die hier gefundenen Grenzwerte konvergieren; ein Unterschied von den Kurven Fig. 10, welche für einen Balken mit 10 Feldern gelten (Erhebung der Mittelstütze), kann graphisch gar nicht bestimmt werden, und die entsprechenden Kurven für Balken mit 6, 7, 8 Feldern stimmen ebenfalls ausserordentlich gut. Den oben berechneten Koeffizienten für den unendlich langen Balken können deshalb allgemeine Gültigkeit für die Bewegung aller Knoten, welche nicht zu nahe den Balkenenden liegen (d. h. etwa 4—5 Felder davon entfernt), zugesprochen werden. Liegt der sich erhebende Knoten nahe den Balkenenden, muss man für lange Balken ($n \geq 10$) die entsprechenden Koeffizienten, welche für einen Balken mit 10 Feldern gelten, benutzen; für kurze Balken gelten die für diese Balken speziell berechneten Koeffizienten.

Für die langen Balken spielt es natürlich fast keine Rolle für die Koeffizientenwerte entsprechend einer Erhebung eines Knotens nahe dem Ende des Balkens, ob das zweite Ende des Balkens in einer Entfernung von 6 oder 10 Feldern von dem sich erhebenden Knoten liegt. Um dieses noch klarzulegen sollen für den unendlich langen Balken die Koeffizienten, welche einer Erhebung um 1 des Knotens 0 (Ende des Balkens) entsprechen (Fig. 11b), berechnet werden.

Das entsprechende Gleichungssystem ist:

$$\begin{aligned} 1) \quad & -4M_1 - M_2 = 0 \\ 2) \quad & -M_1 - 4M_2 - M_3 = 0 \\ \dots \dots \dots \quad & \\ n-1) \quad & -M_{n-2} - 4M_{n-1} - M_n = 0 \\ n) \quad & -M_{n-1} - 4M_n = -6 \frac{EI}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Die Lösung ist wie vorher

$$\begin{aligned} 1) \quad & -M_1 = + 0,2500 M_2 \\ 2) \quad & -M_2 = + 0,2666 M_3 \\ \dots \dots \dots \quad & \\ n-1) \quad & -M_{n-1} = + 0,26795 M_n \\ n) \quad & + 0,26795 M_n - 4M_n = -6 \frac{EI}{\lambda^2}; \\ & \underline{\underline{M_n = + 1,607696 \frac{EI}{\lambda^2}}}. \end{aligned}$$

Die weiteren Momente und die davon abgeleiteten Q - und R -Koeffizienten sind in der Tabelle 14, 2. Spalte, ausgerechnet; man sieht durch Vergleich mit den entsprechenden Koeffizienten für den Balken mit 10 Feldern (Tabelle 13), dass die Übereinstimmung vollkommen ist.

Die Anwendung der Koeffizienten ist nun klar: für kurze Balken (Felderzahl ≤ 8 à 10) werden die in den Tabellen 6—13 angegebenen Zahlen benutzt; für lange Balken (Felderzahl > 10) wenden wir an: Für die Koeffizienten, welche einer Erhebung eines Knotens am Balkenende (Knotennummer 0, 1, 2, 3, 4) entsprechen, werden die entsprechenden Zahlen des Balkens mit 10 Feldern (Tabelle 13) benutzt; für die Koeffizienten, welche einer Erhebung eines mittleren Knotens (= allen übrigen Knoten des Balkens) entsprechen, werden die Koeffizienten (Tabelle 14), welche dem Balken mit unendlich vielen Feldern angehören, verwendet.

Wir möchten hinzufügen, dass sehr oft viele Koeffizienten in der Berechnung wegen ihres kleinen Wertes wegfallen; wird man z. B. 4 Stellen nach dem Komma in der Berechnung mitnehmen, werden nur die Knoten, welche in einer Entfernung von höchstens 10 Feldern von dem sich erhebenden Knoten liegen, Beitrag geben; die entfernter liegenden Knoten geben die Koeffizienten 0.

Die vorausgehenden Koeffizienten-Berechnungen beziehen sich auf Balken, die an den beiden Enden einfach gestützt sind ohne Einspannmomente aufzuweisen; dies ist der in der Praxis übliche Fall. Der

Vollständigkeit halber wollen wir doch noch andeuten, wie sich der Fall verhält, wo der Balken an den Enden eingespannt ist. Prinzipiell ist natürlich kein Unterschied, der Berechnungsgang bleibt der gleiche wie vorher, nur sind die M , Q , und R -Koeffizienten durch andere zu ersetzen; die neuen Koeffizienten sind für jeden auftretenden Fall zu berechnen.

Diese Berechnung wird mit den Formeln (6) durchgeführt, beispielweise sollen hier die Momentenkoeffizienten für den unendlich langen Balken an einem Ende eingespannt (Fig. 12) berechnet werden; wir be-

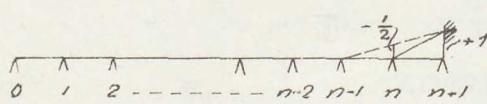


Fig. 12.

trachten die Erhebung des eingespannten Endes $n+1$; das Gleichungssystem ist

$$0) \quad -2M_0 - M_1 = 0$$

$$1) \quad -M_0 - 4M_1 - M_2 = 0$$

$$2) \quad -M_1 - 4M_2 - M_3 = 0$$

.....

$$n-1) \quad -M_{n-1} - 4M_{n-1} - M_n = 0,$$

$$n) \quad -M_{n-1} - 4M_n - M_{n+1} = -6 \frac{EI}{\lambda^2},$$

$$n+1) \quad -M_n - 2M_{n+1} = +6 \frac{EI}{\lambda^2};$$

die Auflösung gibt:

$$M_0 = -0,50 M_1$$

$$-M_1 = +M_2 \cdot \frac{1}{3,5}$$

$$-M_2 = +M_3 \cdot 0,37$$

.....

$$-M_{n-1} = +M_n \cdot 0,26795$$

$$-M_n = -\frac{6}{3,73205} \cdot \frac{EI}{\lambda^2} + \frac{M_{n+1}}{3,73205};$$

$$M_{n+1} \cdot \left(\frac{1}{3,73205} - 2 \right) = +\frac{6EI}{\lambda^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{3,73205} \right);$$

also

$$M_{n+1} = -\frac{EI}{\lambda^2} \cdot 4,392305; \quad M_n = +\frac{EI}{\lambda^2} \cdot 2,784610; \text{ u. s. w.}$$

Die weiteren Werte sind die gleichen wie in der Tabelle 14 gefunden.

Wir betrachten noch den Fall eines Balkens mit nur 2 Feldern an

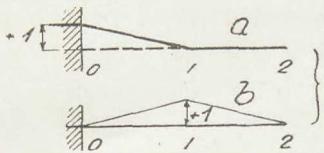


Fig. 13.

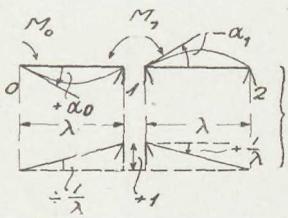


Fig. 14.

einem Ende eingespannt. Man findet für die Hebung der eingespannten Stütze 0 die Momentenkoeffizienten durch die Gleichungen¹ (Fig. 13 a)

$$\left. \begin{array}{l} 0) -2M_0 - M_1 = +6\frac{EI}{\lambda^2} \\ 1) -M_0 - 4M_1 = -6\frac{EI}{\lambda^2} \end{array} \right\} M_0 = -4,2856 \frac{EI}{\lambda^2}, \quad M_1 = +2,5714 \frac{EI}{\lambda^2}.$$

Für Hebung der Mittelstütze 1 (Fig. 13 b):

$$\left. \begin{array}{l} 0) -2M_0 - M_1 = -6\frac{EI}{\lambda^2} \\ 1) -M_0 - 4M_1 = +12\frac{EI}{\lambda^2} \end{array} \right\} M_0 = +5,1428 \frac{EI}{\lambda^2}, \quad M_1 = -4,2856 \frac{EI}{\lambda^2}.$$

¹ Bei der Aufstellung der Gleichungen in diesem Sonderfall kann man am einfachsten — ohne von den allgemeinen Gleichungen auszugehen — die folgende Überlegung benutzen; Der Balken wird an den Stützen durchgeschnitten (Fig. 14), und die nun frei aufgelagerten Balken 0—1 und 1—2 müssen in 1 den gleichen Tangentenwinkel α_1 aufweisen; ebenfalls muss der Tangentenwinkel α_0 bei der Einspannung gleich 0 sein; für Erhebung der Stütze 1 gibt das:

$$0) -\frac{\lambda}{6EI}(2M_1 + M_0) - \frac{1}{\lambda} = +\frac{\lambda}{6EI} \cdot 2M_1 + \frac{1}{\lambda},$$

oder $-4M_1 - M_0 = +12 \cdot \frac{EI}{\lambda^2}$.

$$1) +\frac{\lambda}{6EI}(2M_0 + M_1) - \frac{1}{\lambda} = 0;$$

oder $-2M_0 - M_1 = -6 \frac{EI}{\lambda^2}$.

KAPITEL IV

Die Auflösung der Gleichungen.

Obwohl die Auflösung ein rein mathematisches Problem darstellt und deshalb ausserhalb des Rahmens der vorliegenden Arbeit liegt, soll doch ein wenig darauf eingegangen werden. Die allgemeine Form des Gleichungssystems ist (s. (1), Kap. 2):

$$\left. \begin{array}{l} (a) \quad Z_a = 0 = Z_{ao} - Z_{ad}\zeta_a - Z_{ab}\zeta_b - \dots - Z_{ar}\zeta_r - \dots - Z_{an}\zeta_n; \\ (b) \quad Z_b = 0 = Z_{bo} - Z_{ba}\zeta_a - Z_{bb}\zeta_b - \dots - Z_{br}\zeta_r - \dots - Z_{bn}\zeta_n; \\ \vdots \quad \vdots \\ (r) \quad Z_r = 0 = Z_{ro} - Z_{ra}\zeta_a - Z_{rb}\zeta_b - \dots - Z_{rr}\zeta_r - \dots - Z_{rn}\zeta_n; \\ \vdots \\ (n) \quad Z_n = 0 = Z_{no} - Z_{na}\zeta_a - Z_{nb}\zeta_b - \dots - Z_{nr}\zeta_r - \dots - Z_{nn}\zeta_n; \end{array} \right\} (7)$$

Wir haben also mit einem System linearer, von einander unabhängiger Gleichungen zu tun. Weiter ist überall $Z_{rs} = Z_{sr}$. Die Matrix des Gleichungssystems ist also:

$$\left. \begin{array}{l} a) \quad a \ b \dots \ r \dots n \\ b) \quad a \ b \dots \ r \dots n \\ \vdots \\ r) \quad a \ b \dots \ r \dots n \\ \vdots \\ n) \quad a \ b \dots \ r \dots n \end{array} \right\} \quad (8)$$

<i>x</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>i</i>		
<i>x</i>	<i>b</i>	<i>f</i>	<i>K</i>		
<i>x</i>	<i>c</i>	<i>g</i>	<i>l</i>		
<i>x</i>	<i>d</i>	<i>h</i>	<i>m</i>		

Fig. 15.

Wie wir im Kapitel II bemerkt haben, ist die Matrix noch zu vereinfachen, da eine gewisse Anzahl der Koeffizienten $Z_{rs} = 0$ sind. Hat z. B. das System 4 Hauptträger (Fig. 15), schreibt sich die Matrix:

$$\left. \begin{array}{llllll}
 \text{a)} & \text{a} & \text{b} & \text{c} & \text{d} & \text{e} & \text{i} \\
 \text{b)} & \text{a} & \text{b} & \text{c} & \text{d} & \text{f} & \text{k} \\
 \text{c)} & \text{a} & \text{b} & \text{c} & \text{d} & \text{g} & \text{l} \\
 \text{d)} & \text{a} & \text{b} & \text{c} & \text{d} & \text{h} & \text{m} \\
 \text{e)} & \text{a} & & & & \text{e f g h i} \\
 \text{f)} & & \text{b} & & & \text{e f g h k} \\
 \text{g)} & & & \text{c} & & \text{e f g h l} \\
 \text{h)} & & & & \text{d e f g h} & \text{m} \\
 \text{i)} & \text{a} & & & \text{e} & \text{i k l m} \\
 \text{k)} & & \text{b} & & \text{f} & \text{i k l m} \\
 \text{l)} & & & \text{c} & & \text{g i k l m} \\
 \text{m)} & & & & \text{d} & \text{h i k l m}
 \end{array} \right\} \quad (9)$$

Die Matrix ist also nie vollständig; die vollständigen Gleichungen haben n^2 Koeffizienten; wegen der Symmetrie der Matrix wird diese Anzahl auf $\frac{n(n+1)}{2}$ reduziert, und davon ist noch eine erhebliche Anzahl gleich 0. Um über die Anzahl der Koeffizienten einen Überblick zu gewinnen ist es immer zu empfehlen die Matrix aufzuschreiben.

Die Lösung des Gleichungssystems (7), (das nicht selten in der Baustatik vorkommt) ist oft eine recht beschwerliche Aufgabe, welche ausser dem Zeitaufwand auch eine grosse Rechengenauigkeit fordert. Da der Fall für viele Aufgaben Interesse bietet, sind die Gleichungen von mehreren Verfassern¹ untersucht worden, und man verfügt heute über verschiedene Auflösungsverfahren, die Zeit- oder Genauigkeitsersparnis erstreben. Es soll hier einfach auf einige dieser Abhandlungen hingewiesen werden; sie leisten in praktischen Fällen oft gute Dienste. Die spezielleren Gleichungen (9) sind in neuester Zeit zur Behandlung

¹ A. Hertwig: Die Lösung linearer Gleichungen durch unendliche Reihen und ihre Anwendung auf die Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Systeme. Festschrift Müller-Breslau, Leipzig 1912. A. Hertwig: Zur Berechnung symmetrischer statisch unbestimmter Gebilde. Bauingenieur 1928. A. Ostenfeld: Rechnerische Auflösung von fünfgliedrigen Elastizitätsgleichungen. Eisenbau 1913 und Teknisk Statik II. Müller-Breslau: Anwendung von Determinanten auf die Berechnung statisch unbestimmter Systeme. Auflösung mehrgliedriger Elastizitätsgleichungen. Graphische Statik der Baukonstruktionen, II. V. Lewe: Die Auflösung der allgemeinen sowie der drei- und fünfgliedrigen Elastizitätsgleichungen. Eisenbau 1916. L. Karner: Die statische Berechnung von Schwimmdocks und ähnlichen Eisenwasserbauten. Eisenbau 1920. I. F. Faltus: Eine zweckmässige Methode zur Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke. Bauingenieur 1927. F. Faltus: Fehlerquellen bei der Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke und ihre Umgehung. Bautechnik 1927. Pasternak: Die graphische Berechnung des kontinuierlichen Trägers nach den Massenschwerpunkt-Verfahren. Bauingenieur 1927. Schw. Bauzt. 1928.

aufgenommen worden¹, und die in der Fussnote erwähnten Verfasser haben erschöpfende Lösungen solcher Probleme gegeben.

Wir möchten uns auf die Angabe einiger einfachen Kunstgriffe, mit welchen man auskommt, wenn die Gleichungen nur wenige Unbekannte enthalten, beschränken; diese Verfahren sind am folgenden Beispiel erläutert (Kap. V).

Das Belastungs-Umordnungs-Verfahren (André, s. Kap. I) wird oft schnell zum Ziele führen, da es oft eine Verminderung der Gleichungsanzahl auf die Hälfte erlaubt. Für viele Fälle ist die Anwendung des »Gauss'schen Algorithmus« (Pasternak, s. Fussnote) zur Auflösung der Gleichungen angezeigt; diese Methode ist für das allgemeine System (7) verwendbar.

Handelt es sich darum für den gleichen Rost mehrere Belastungsfälle zu berechnen (z. B. bei Ermittlung der Einflusslinien, s. Kap. VII), so ist für alle Belastungsfälle die Matrix immer dieselbe; nur die Belastungsglieder wechseln; die Auflösung der Gleichungen ist also nur einmal durchzuführen.

— Statt die Auflösung der Gleichungen mit vieler Mühe durchzuführen ist es für die Praxis oft wertvoller Annäherungsmethoden zu kennen, welche eine Reduktion der Gleichungsanzahl erlauben. Man muss nur wissen, in welchen Fällen solche Annäherungen gestattet sind; wir kommen im Kap. VI und X darauf zurück; es wird gezeigt, dass man oft ohne Auflösung der vollständigen Gleichungen durchkommt, wenn man keine sehr grosse Genauigkeit fordert; für eine endliche Berechnung allein käme die Auflösung in Frage.

¹ Bleich-Melan: Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik. Berlin & Wien 1927. R. Gentner: Der Eisenbeton-Trägerrost, Beton & Eisen 1928.

KAPITEL V

Zahlenbeispiel.

DER Rost Fig. 16 ist durch zwei Einzelkräfte P in den Knoten b und c der mittleren Hauptträger belastet; die Trägheitsmomente und Feldweiten sind aus der Figur ersichtlich. Wir benutzen zur Be-

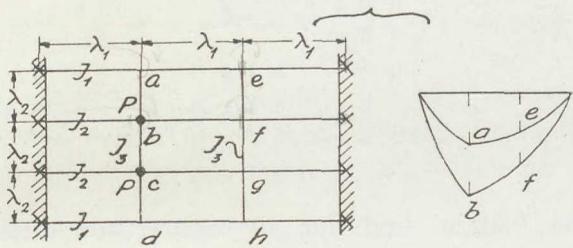


Fig. 16.

rechnung der 8 unbekannten Durchbiegungen $\zeta_a \dots \zeta_h$ die Gleichungen (1), Kap. II. Diese Gleichungen sind

$$Z_a = Z_{ao} - Z_{aa}\zeta_a - Z_{ab}\zeta_b - Z_{ac}\zeta_c - \dots - Z_{ah}\zeta_h;$$

.....

und die 7 analogen für $Z_b \dots Z_h$;

Die Steifigkeitskoeffizienten sind:

$$\mu_1 = \frac{EI_1}{\lambda_1^3}, \quad \mu_2 = \frac{EI_2}{\lambda_1^3}, \quad \mu_3 = \frac{EI_3}{\lambda_2^3};$$

mit $I_1 = 2I_2 = 4I_3$ und $\lambda_1 = 4\lambda_2$ haben wir:

$$\mu_1 = 4\mu, \quad \mu_2 = 2\mu, \quad \mu_3 = 64\mu, \quad \text{wo } \mu = \frac{EI_3}{\lambda_1^3}.$$

Die Koeffizienten Z sind nun (Tabelle 7):

$$\begin{aligned}
Z_{aa} &= + 9,6\mu_1 + 1,6\mu_3 = 38,4\mu + 102,4\mu = + 140,8\mu; \\
Z_{bb} &= + 9,6\mu_2 + 9,6\mu_3 = 19,2\mu + 614,4\mu = + 633,6\mu; \\
Z_{ab} &= - 3,6\mu_3 = - 230,4\mu; \\
Z_{ac} &= + 2,4\mu_3 = + 153,6\mu; \\
Z_{ad} &= - 0,4\mu_3 = - 25,6\mu; \\
Z_{ae} &= - 8,4\mu_1 = - 33,6\mu; \\
Z_{af} &= Z_{ag} = Z_{ah} = 0; \\
Z_{bc} &= - 8,4\mu_3 = - 537,6\mu; \\
(Z_{bd} &= + 2,4\mu_3 = + 153,6\mu); \\
Z_{bf} &= - 8,4\mu_2 = - 16,8\mu; \\
Z_{ao} &= 0 = Z_{do}; \\
Z_{bo} &= Z_{co} = + P.
\end{aligned}$$

Um uns über die nötigen Koeffizienten zu orientieren schreiben wir die Matrix der Gleichungen auf:

$$\begin{array}{ccccccccc}
& \underline{\text{a}} & \underline{\text{b}} & \underline{\text{c}} & \underline{\text{d}} & \underline{\text{e}} & & & \\
& \underline{\text{a}} & \underline{\text{b}} & \underline{\text{c}} & \underline{\text{d}} & & \underline{\text{f}} & & \\
& \underline{\text{a}} & \underline{\text{b}} & \underline{\text{c}} & \underline{\text{d}} & & & \underline{\text{g}} & \\
& \underline{\text{a}} & \underline{\text{b}} & \underline{\text{c}} & \underline{\text{d}} & & & & \underline{\text{h}} \\
& \underline{\text{a}} & & & & \underline{\text{e}} & \underline{\text{f}} & \underline{\text{g}} & \underline{\text{h}} \\
& \underline{\text{b}} & & & & \underline{\text{e}} & \underline{\text{f}} & \underline{\text{g}} & \underline{\text{h}} \\
& \underline{\text{c}} & & & & \underline{\text{e}} & \underline{\text{f}} & \underline{\text{g}} & \underline{\text{h}} \\
& & \underline{\text{d}} & \underline{\text{e}} & \underline{\text{f}} & \underline{\text{g}} & \underline{\text{h}} & &
\end{array}$$

Von den 64 Plätzen sind nur 40 besetzt; von diesen 40 Zahlen sind nur 8 (unterstrichen) verschieden (vergl. Koeffizienten).

Der Vollständigkeit halber werden alle 8 Gleichungen aufgeschrieben; der Faktor μ fällt durch die Division weg:

- a) $0 = -140,8\zeta_a + 230,4\zeta_b - 153,6\zeta_c + 25,6\zeta_d + 33,6\zeta_e$;
- b) $0 = + \frac{P}{\mu} + 230,4\zeta_a - 633,6\zeta_b + 537,6\zeta_c - 153,6\zeta_d + 16,8\zeta_f$;
- c) $0 = + \frac{P}{\mu} - 153,6\zeta_a + 537,6\zeta_b - 633,6\zeta_c + 230,4\zeta_d + 16,8\zeta_g$;
- d) $0 = + 25,6\zeta_a - 153,6\zeta_b + 230,4\zeta_c - 140,8\zeta_d + 33,6\zeta_h$;
- e) $0 = + 33,6\zeta_a - 140,8\zeta_c + 230,4\zeta_f - 153,6\zeta_g + 25,6\zeta_h$;
- f) $0 = + 16,8\zeta_b + 230,4\zeta_e - 633,6\zeta_f + 537,6\zeta_g - 153,6\zeta_h$;
- g) $0 = + 16,8\zeta_c - 153,6\zeta_e + 537,6\zeta_f - 633,6\zeta_g + 230,4\zeta_h$;
- h) $0 = + 33,6\zeta_d + 25,6\zeta_e - 153,6\zeta_f + 230,4\zeta_g - 140,8\zeta_h$.

Man sieht die Doppel-Symmetrie der Gleichungen. Da sowohl System als Belastung einzeln-symmetrisch sind, hat man

$$\zeta_a = \zeta_d, \quad \zeta_b = \zeta_c, \quad \zeta_e = \zeta_h, \quad \zeta_f = \zeta_g;$$

dadurch reduziert sich das Gleichungssystem auf 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten. Das reduzierte System heisst:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a)} \quad 0 = -115,2\zeta_a + 76,8\zeta_b + 33,6\zeta_e; \\ \text{b)} \quad 0 = +\frac{P}{\mu} + 76,8\zeta_a - 96,0\zeta_b + 16,8\zeta_f; \\ \text{e)} \quad 0 = +33,6\zeta_a - 115,2\zeta_e + 76,8\zeta_f; \\ \text{f)} \quad 0 = +16,8\zeta_b + 76,8\zeta_e - 96,0\zeta_f; \end{array} \right\} \begin{array}{l} \zeta_a = +0,07157 \frac{P}{\mu}; \\ \zeta_b = +0,07913 \frac{P}{\mu}; \\ \zeta_e = +0,06452 \frac{P}{\mu}; \\ \zeta_f = +0,06546 \frac{P}{\mu}. \end{array}$$

Die Balkenmomente können jetzt berechnet werden:

im Balken $a-e$: $M_a = -M_{aa}\zeta_a - M_{ae}\zeta_e$; hier ist

$$\begin{aligned} M_{aa} &= -3,6 \cdot \frac{EI_1}{\lambda_1^2} = -3,6\mu_1\lambda_1 = -3,6 \cdot 4\mu \cdot \lambda_1 = -14,4\mu\lambda_1; \\ M_{ae} &= +2,4 \cdot \frac{EI_1}{\lambda_1^2} = +2,4\mu_1\lambda_1 = +2,4 \cdot 4\mu \cdot \lambda_1 = +9,6\mu\lambda_1; \end{aligned}$$

also

$$M_a = +14,4\mu\lambda_1 \cdot 0,07157 \frac{P}{\mu} - 9,6\mu\lambda_1 \cdot 0,06452 \frac{P}{\mu} = +0,4112 P\lambda_1;$$

und

$$\begin{aligned} M_e &= -M_{ea}\zeta_a - M_{ee}\zeta_e = \\ &= -9,6\mu\lambda_1 \cdot 0,07157 \frac{P}{\mu} + 14,4\mu\lambda_1 \cdot 0,06452 \frac{P}{\mu} = +0,2421 P\lambda_1; \end{aligned}$$

im Balken $b-f$: $M_b = -M_{bb}\zeta_b - M_{bf}\zeta_f$;

$$M_{bb} = -3,6 \frac{EI_2}{\lambda_1^2} = -3,6\mu_2\lambda_1 = -7,2\mu\lambda_1;$$

$$M_{bf} = +2,4 \frac{EI_2}{\lambda_1^2} = +2,4\mu_2\lambda_1 = +4,8\mu\lambda_1;$$

also

$$M_b = +7,2\mu\lambda_1 \cdot 0,07913 \frac{P}{\mu} - 4,8\mu\lambda_1 \cdot 0,06546 \frac{P}{\mu} = +0,2556 P\lambda_1;$$

und

$$\begin{aligned} M_f &= -M_{fb}\zeta_b - M_{ff}\zeta_f = \\ &= -4,8\mu\lambda_1 \cdot 0,07913 \frac{P}{\mu} + 7,2\mu\lambda_1 \cdot 0,06546 \frac{P}{\mu} = +0,0915 P\lambda_1; \end{aligned}$$

Kontrolle: Die Reaktionen der Hauptträger = der äusseren Belastung;

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_1} [M_a + M_e + M_b + M_f] &= \frac{1}{\lambda_1} = [0,4112 P \lambda_1 \\ &\quad + 0,2421 \text{ »} \\ &\quad + 0,2556 \text{ »} \\ &\quad + 0,0915 \text{ »}] \\ &= \frac{1,0004 P \lambda_1}{1,0004 P} = \\ &= \underline{\underline{1,0004 P}} \text{ der Kraft in } b. \end{aligned}$$

im Balken $a-d$: $M_b = -M_{ba}\zeta_a - M_{bb}\zeta_b - M_{bc}\zeta_c - M_{bd}\zeta_d$;

$$\begin{aligned} M_{ba} &= +1,6 \cdot \frac{EI_3}{\lambda_2^2} = +1,6 \mu_3 \lambda_2 = +102,4 \mu \lambda_2; \\ M_{bb} &= -3,6 \cdot \frac{EI_3}{\lambda_2^2} = -3,6 \mu_3 \lambda_2 = -230,4 \mu \lambda_2; \\ M_{bc} &= +2,4 \cdot \frac{EI_3}{\lambda_2^2} = +2,4 \mu_3 \lambda_2 = +153,6 \mu \lambda_2; \\ M_{bd} &= -0,4 \cdot \frac{EI_3}{\lambda_2^2} = -0,4 \mu_3 \lambda_2 = -25,6 \mu \lambda_2; \\ M_b &= -102,4 \mu \lambda_2 \cdot 0,07157 \frac{P}{\mu} = -7,34 P \lambda_2 \\ &\quad + 230,4 \mu \lambda_2 \cdot 0,07913 \frac{P}{\mu} = +18,23 \text{ »} \\ &\quad - 153,6 \mu \lambda_2 \cdot 0,07913 \frac{P}{\mu} = -12,15 \text{ »} \\ &\quad + 25,6 \mu \lambda_2 \cdot 0,07157 \frac{P}{\mu} = +1,83 \text{ »} \\ &= \underline{\underline{+0,57 P \lambda_2}} \end{aligned}$$

Weiter ist $M_c = M_b$.

im Balken $e-h$: $M_f = -M_{fe}\zeta_e - M_{ff}\zeta_f - M_{fg}\zeta_g - M_{fh}\zeta_h$;

$$\begin{aligned} M_{fe} &= +102,4 \mu \lambda_2 \\ M_{ff} &= -230,4 \mu \lambda_2 \\ M_{fg} &= +153,6 \mu \lambda_2 \\ M_{fh} &= -25,6 \mu \lambda_2 \end{aligned} \left. \right\} \text{ wie oben!}$$

$$\begin{aligned} M_f &= +102,4 \mu \lambda_2 \cdot 0,06452 \frac{P}{\mu} = -6,62 P \lambda_2 \\ &\quad - 230,4 \mu \lambda_2 \cdot 0,06546 \frac{P}{\mu} = +15,10 \text{ »} \\ &\quad + 153,6 \mu \lambda_2 \cdot 0,06546 \frac{P}{\mu} = -10,05 \text{ »} \\ &\quad - 25,6 \mu \lambda_2 \cdot 0,06452 \frac{P}{\mu} = +1,65 \text{ »} \\ &= \underline{\underline{+0,08 P \lambda_2}}. \end{aligned}$$

Nachdem alle Momente gefunden sind, lässt sich die Lastverteilung gemäss Fig. 17 veranschaulichen. Wie man sieht, halten sich die Belastungen das Gleichgewicht. Für die Balken $c-g$ und $d-h$ gelten natürlich die gleichen Zahlen wie für die oben gezeichneten Hauptträger.

Die Anwendung der zweiten Methode zur Auflösung der Gleichungen soll nun gezeigt werden:

Das Gleichungssystem a)–h) (s. oben) wird in ein zweites reduziert, indem man die erste Gleichung a) zur letzten h), und b) zu g) usw. addiert und subtrahiert; die Belastungssymmetrie wird dabei nicht benutzt, weshalb die Methode für unsymmetrische Belastung geeignet ist.

$$a + h) 0 = -140,8(\zeta_a + \zeta_h) + 230,4(\zeta_b + \zeta_g) - 153,6(\zeta_c + \zeta_f) + 59,2(\zeta_d + \zeta_e);$$

$$b + g) 0 = +\frac{P}{\mu} + 230,4(\quad) - 633,6(\quad) + 554,4(\quad) - 153,6(\quad);$$

$$c + f) 0 = +\frac{P}{\mu} - 153,6(\quad) + 554,4(\quad) - 633,6(\quad) + 230,4(\quad);$$

$$d + e) 0 = +59,2(\quad) - 153,6(\quad) + 230,4(\quad) - 140,8(\quad);$$

$$a - h) 0 = -140,8(\zeta_a - \zeta_h) + 230,4(\zeta_b - \zeta_g) - 153,6(\zeta_c - \zeta_f) - 8,0(\zeta_d - \zeta_e);$$

$$b - g) 0 = +\frac{P}{\mu} + 230,4(\quad) - 633,6(\quad) + 520,8(\quad) - 153,6(\quad);$$

$$c - f) 0 = +\frac{P}{\mu} - 153,6(\quad) + 520,8(\quad) - 633,6(\quad) + 230,4(\quad);$$

$$d - e) 0 = -8,0(\quad) - 153,6(\quad) + 230,4(\quad) - 140,8(\quad);$$

Da diese Gleichungen wiederum doppel-symmetrisch sind, kann man das Verfahren wiederholen und erhält dann:

$$a + h + d + e) 0 = -81,6(\zeta_a + \zeta_h + \zeta_d + \zeta_e) + 76,8(\zeta_b + \zeta_g + \zeta_c + \zeta_f);$$

$$b + g + c + f) 0 = +2\frac{P}{\mu} + 76,8(\quad) - 79,2(\quad);$$

$$(a - h) - (d - e) 0 = -132,8((\zeta_a - \zeta_h) - (\zeta_d - \zeta_e)) + 384,0((\zeta_b - \zeta_g) - (\zeta_c - \zeta_f));$$

$$(b - g) - (c - f) 0 = +2\frac{P}{\mu} + 384,0(\quad) - 1154,4(\quad);$$

Die Summen und Differenzen der Unbekannten lassen sich jetzt ermitteln, und nachher berechnet man leicht die erwünschten Durchbiegungen $\zeta_a \dots \zeta_h$.

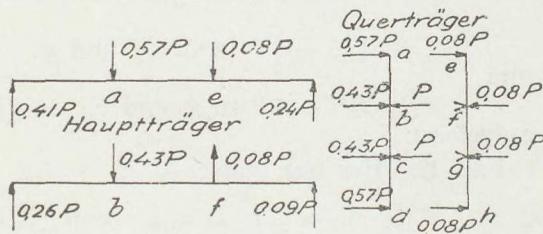


Fig. 17.

Die Anwendung der *dritten Methode* gestaltet sich folgendermassen:
Mittels des B. U.-Verfahrens wird die gegebene Belastung: $+P$ in b und c als Kombination der beiden Fälle:

1) $+ \frac{1}{2}P$ in b, c, f und g
und

2) $+ \frac{1}{2}P$ in b und c , $- \frac{1}{2}P$ in f und g ,
aufgefasst.

Fall 1): Hier hat man

$$\zeta_b = \zeta_c = \zeta_f = \zeta_g \quad \text{und} \quad \zeta_a = \zeta_d = \zeta_e = \zeta_h;$$

Man braucht also nur die zwei Gleichungen a) und b) (s. oben), welche sich auf

$$\left. \begin{array}{l} \text{a)} \quad 0 = -81,6\zeta_a + 76,8\zeta_b; \\ \text{b)} \quad 0 = +\frac{1}{2}\frac{P}{\mu} + 76,8\zeta_a - 79,2\zeta_b; \end{array} \right\} \text{reduzieren lassen;}$$

diese ergeben

$$\zeta_a = +0,06805 \cdot \frac{P}{\mu} = \zeta_e;$$

$$\zeta_b = +0,07230 \cdot \frac{P}{\mu} = \zeta_f.$$

Fall 2): Gemäss der »umgekehrten Symmetrie« sind

$$\zeta_b = \zeta_c = -\zeta_f = -\zeta_g; \quad \zeta_a = \zeta_d = -\zeta_e = -\zeta_h;$$

die obigen Gleichungen

$$\text{a)} \quad 0 = -148,8\zeta_a + 76,8\zeta_b; \quad \left. \begin{array}{l} \text{b)} \quad 0 = +\frac{1}{2}\frac{P}{\mu} + 76,8\zeta_a - 112,8\zeta_b; \end{array} \right\} \text{geben dann:}$$

$$\zeta_a = +0,00352 \frac{P}{\mu} = -\zeta_e;$$

$$\zeta_b = +0,00683 \frac{P}{\mu} = -\zeta_f;$$

durch Superposition von 1) und 2) erhält man

$$\zeta_a = +0,06805 \frac{P}{\mu} + 0,00352 \frac{P}{\mu} = +0,07157 \frac{P}{\mu},$$

$$\zeta_b = +0,0723 \rightarrow +0,00683 \rightarrow = +0,07913 \rightarrow,$$

$$\zeta_e = +0,06805 \rightarrow -0,00352 \rightarrow = +0,06453 \rightarrow,$$

$$\zeta_f = +0,0723 \rightarrow -0,00683 \rightarrow = +0,06547 \rightarrow,$$

wie vorher.

KAPITEL VI

Die stufenweise Berechnung.

BEI einem Rost, der viele Knoten besitzt, kann die Auflösung der Gleichungen beim üblichen Eliminationsverfahren sich sehr schwierig, ja fast undurchführbar gestalten; man muss hier zur Anwendung der im Kapitel IV besprochenen Methoden greifen oder sich mit einer Näherungsberechnung begnügen; eine solche wird in den meisten Fällen genügend genau sein, wenn man auf eine stufenweise Berechnung einschlägt, wie nachstehend beschrieben werden soll.

Es wird ein Rost vorausgesetzt, der sowohl mehrere Hauptträger als viele Querträger besitzt; wir nehmen vorläufig an, dass die Belastung nur als Einzelkräfte in den Knoten angreifend vorhanden ist, und dass sie sich an *einem* Querträger befindet (Fig. 18). Man sucht die Lastverteilung und die in den Hauptträgern und Querträgern durch die Kräfte P erzeugten Momente und Durchbiegungen in allen Knoten des Rostes. Der in Fig. 18 skizzierte Rost weist $5 \cdot 10 = 50$ Knoten auf (Symmetrie angenommen, auch für die Belastung); wenn auch die Aufstellung der 50 Gleichungen ganz einfach ist, da alle Koeffizienten schon durch die Tabellen 6—14 gegeben sind, so ist doch die Auflösung in einfacher Weise als fast undurchführbar anzusehen.

Wir teilen dann die Berechnung in mehrere Stufen, indem wir für die erste Stufe alle unbelasteten Querträger ausschalten; wir suchen also die Durchbiegungen $\zeta_q \zeta_r \zeta_s \zeta_t \zeta_u$ (und die symmetrischen) in einem Rost, der nur aus den Hauptträgern und den 2 belasteten Querträgern besteht. Diese Berechnung ist leicht auszuführen, und sie gibt sofort

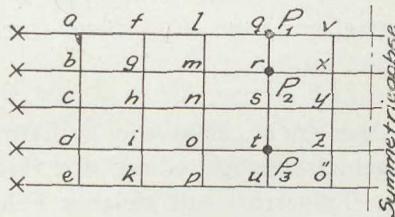


Fig. 18.

die Hauptlinien der Lastverteilung in den Hauptträgern, deren Momente in den Knoten q, r, s, t, u dadurch bekannt sind; dies ist auch mit den Momenten im Querträger $q-u$ der Fall.

Bei der zweiten Stufe fügen wir den Querträger $f-k$ (und den symmetrischen) zum Rost der ersten Berechnung und stellen auf's Neue die Gleichungen auf, diesmal für das zweite System geltend; hierzu sind andere Koeffizienten erforderlich, sie sind den Tabellen zu entnehmen. Bei der Lösung dieser Gleichungen wird man die im ersten Rost gefundenen $\zeta_q \dots \zeta_u$ als im zweiten Rost bekannt voraussetzen; die vorher gefundenen Werte dieser Durchbiegungen werden eingesetzt, und aus den Gleichungen können $\zeta_f \dots \zeta_k$ gefunden werden; man muss hier bemerken, dass man 10 Gleichungen mit nur 5 Unbekannten zur Verfügung hat; wählt man zur Berechnung der $\zeta_f \dots \zeta_k$ die 5 Gleichungen q, r, s, t, u , wird die Rechenarbeit bedeutend erleichtert, da jede dieser Gleichungen nur die 5 Bekannten $\zeta_q \dots \zeta_u$ und 1 Unbekannte enthält; z. B. hat die Gleichung t) nur die Unbekannte ζ_i . Die zweite Berechnungsstufe ergibt ein System von 5 Gleichungen mit nur einer Unbekannten in jeder Gleichung. Die übrigen (überflüssigen) Gleichungen $f \dots k$ können benutzt werden um die Ungenauigkeit des angewandten Annäherungsverfahrens zu bestimmen; werden die jetzt bekannten Werte $\zeta_f, \zeta_q (\dots \zeta_u)$ z. B. in die Gleichung f) eingesetzt, so ist diese nicht genau gleich 0; wird statt ζ_f der Ausdruck $(\zeta_f + \Delta \zeta_f)$ eingeführt, ergibt sich also eine kleine Grösse $\Delta \zeta_f$, welche Aufschluss über die Genauigkeit gibt.

— — — Man kann nun in derselben Weise mit der dritten Stufe fortfesten; man fügt neue Querträger hinzu, bis die Berechnung beendet ist.

Man sieht, dass die stufenweise Berechnung nicht selten eine unregelmässige Einteilung der Hauptträger veranlassen kann, selbst wenn der Trägerrost mit gleicher Felderteilung gegeben ist. Man hat also für solche Fälle spezielle Gleichungskoeffizienten nötig. Von Balken ausgehend mit konstanter Feldweite λ und Felderzahl $n = 2-10$, ist es leicht herauszufinden, welche Balkenteilungen bei den Stufen auftreten können; eine solche Untersuchung ist in Kap. III, Sonderfall 1, durchgeführt, und die sich daraus ergebenden Koeffizienten sind in den Tabellen 1—3 berechnet.

— — — Wenn die gegebene Belastung so angreift, dass man bei der ersten Stufe alle belasteten Querträger mitnehmen kann ohne die Berechnung zu komplizieren, so findet man bei den weiteren Stufen, dass die durch die Annäherungen begangenen Durchbiegungsfehler $\Delta \zeta$ sehr klein ausfallen; die belasteten Querträger spielen also bei der Last-

verteilung die massgebende Rolle, während die unbelasteten Querträger nur wenig die Verteilung beeinflussen. Man kann deshalb sehr oft bei der ersten Stufe stehen bleiben, wenn man nicht für besondere Zwecke die Durchbiegungen der unbelasteten Querträger — oder deren Momente — benötigt. Wir kommen später auf diese Möglichkeit zurück.

Wir gehen nun zur Erläuterung des Verfahrens durch ein *Zahlenbeispiel*. Der zu berechnende Rost ist in Fig. 19 dargestellt. Die Belastung greift in den

Knoten o , p und o_1 , p_1 an; sowohl Rost als Belastung sind symmetrisch. Die Trägheitsmomente sind I_1 für alle Hauptträger, I_2 für alle Querträger; wir nehmen an, dass $I_1 = 5 I_2$. Die Feldweite λ_1 sei gleich dem Hauptträgerabstand λ_2 angenommen, $\lambda_1 = \lambda_2$. Alle Bezeichnungen gehen aus der Figur hervor. Die unbekannten Durchbiegungen sind in der Anzahl von 36 vorhanden; wir müssen also die stufenweise Berechnu

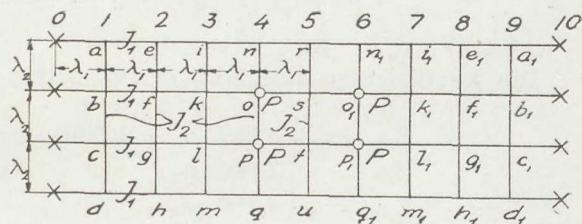


Fig. 19.

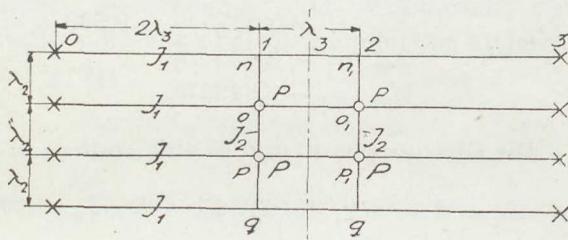


Fig. 20.

Die erste Stufe entspricht Fig. 20, wo wir $\lambda_3 = 2\lambda_1$ gesetzt haben. Das System hat wegen der Symmetrie nur 2 Unbekannte; wir wählen die Durchbiegungen ζ_n und ζ_o . Die Matrix der Gleichungen ist:

<u>n</u>	<u>o</u>	<u>p</u>	<u>q</u>	<u>n₁</u>
n	<u>o</u>	<u>p</u>	q	<u>o₁</u>
n	o	p	q	p ₁
n	o	p	q	q ₁
n				n ₁ o ₁ p ₁ q ₁
o				n ₁ o ₁ p ₁ q ₁
	p	q	n ₁ o ₁ p ₁ q ₁	
		q	n ₁ o ₁ p ₁ q ₁ ,	

wo die unterstrichenen Knotenzahlen die zur Bestimmung von ζ_n und ζ_0 notwendigen Koeffizienten angeben. Die übrigen Koeffizienten

sind wegen der Doppelsymmetrie der Matrix gleich den unterstrichenen und ebenfalls sind die »Untermatrix« $nopq$ und $n_1o_1p_1q_1$ einander gleich. Wir haben also nur 8 Koeffizienten nötig. Wir bezeichnen

$$\mu_3 = \frac{EI_1}{\lambda_3^3}, \quad \mu_2 = \frac{EI_2}{\lambda_2^3}, \quad \mu_4 = \frac{EI_2}{\lambda_3^3},$$

mit $\lambda_3 = 2\lambda_2$ und $I_1 = 5I_2$ ist dann

$$\mu_3 = \frac{E \cdot 5I_2}{\lambda_3^3} = 5\mu_4, \quad \mu_2 = \frac{EI_2}{\frac{1}{8} \cdot \lambda_3^3} = 8\mu_4.$$

Die Koeffizienten sind nun den Tabellen 1 und 7 zu entnehmen:

$$\begin{aligned} Z_{nn} &= +3,8575\mu_3 + 1,600\mu_2 = +32,0875\mu_4; \\ Z_{no} &= -3,600\mu_2 = -28,800\mu_4; \\ Z_{np} &= +2,400\mu_2 = +19,200\mu_4; \\ Z_{nq} &= -0,400\mu_2 = -3,200\mu_4; \\ Z_{nn_1} &= -3,6433\mu_3 = -18,2165\mu_4; \\ Z_{oo} &= +3,8575\mu_3 + 9,600\mu_2 = +96,0875\mu_4; \\ Z_{op} &= -8,400\mu_2 = -67,200\mu_4; \\ Z_{oo_1} &= -3,6433\mu_3 = -18,2165\mu_4; \end{aligned}$$

Die Gleichungen n) und o) sind, mit $\zeta_n = \zeta_{n_1} = \zeta_q$ und $\zeta_o = \zeta_{o_1} = \zeta_f$:

n) $Z_n = 0 = 0 - 32,0875\zeta_n + 28,8\zeta_o - 19,2\zeta_p + 3,2\zeta_q + 18,2165\zeta_{n_1};$

o) $Z_o = 0 = \frac{P}{\mu_4} + 28,800\zeta_n - 96,0875\zeta_o + 67,2\zeta_p - 19,2\zeta_q + 28,2165\zeta_{o_1};$

$$\zeta_n = +\underline{0,4422} \cdot \frac{P}{\mu_4}, \quad \zeta_o = +\underline{0,4915} \cdot \frac{P}{\mu_4}.$$

Für die zweite Berechnungsstufe fügen wir die Querträger $e-h$ und e_1h_1 hinzu (Fig. 21). Das System hat von sich aus 4 Unbekannte:

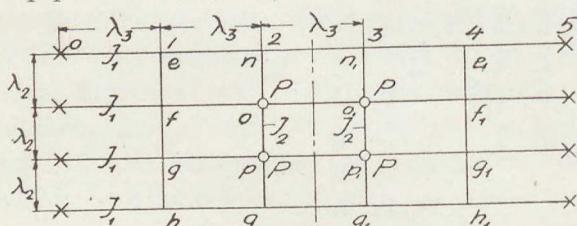


Fig. 21.

$\zeta_e \zeta_f \zeta_n \zeta_o$; nehmen wir aber an, dass die oben (Fig. 20) gefundenen ζ_n - und ζ_o -Werte für die Fig. 21 richtig sind, fehlen nur ζ_e und ζ_f , die aus den Gleichungen n) und o) gefunden werden können; jede dieser

Gleichungen enthält nur eine Unbekannte: $\zeta_e = \zeta_{e_1}$, oder $\zeta_f = \zeta_{f_1}$, siehe die Matrix:

e	f	g	h	n		<u>n</u> ₁		<u>e</u> ₁	
e	f	g	h	o		o ₁		f ₁	
e	f	g	h		p		p ₁		g ₁
e	f	g	h		q		q ₁		h ₁
e		n	o	p	q	<u>n</u> ₁		e ₁	
f		n	<u>o</u>	p	q	o ₁		f ₁	
g		n	o	p	q		p ₁		g ₁
h		n	o	p	q		q ₁		h ₁
e		n				n ₁ o ₁ p ₁ q ₁ e ₁			
f			o			n ₁ o ₁ p ₁ q ₁	f ₁		
g				p		n ₁ o ₁ p ₁ q ₁		g ₁	
h					q	n ₁ o ₁ p ₁ q ₁			h ₁
e		n					e ₁ f ₁ g ₁ h ₁		
f			o				e ₁ f ₁ g ₁ h ₁		
g				p			e ₁ f ₁ g ₁ h ₁		
h				q			q ₁ e ₁ f ₁ g ₁ h ₁		

Nur die 12 unterstrichenen Koeffizienten sind verschieden; die übrigen entweder »symmetrisch« oder aus Analogiegründen den anderen gleich; z. B. ist natürlich (s. Fig. 21)

$$Z_{no} = Z_{ef}, \quad Z_{np} = Z_{eg} \text{ u. s. w.}$$

Wir setzen

$$\mu_3 = \frac{EI_1}{\lambda_3^3}, \quad \mu_2 = \frac{EI_2}{\lambda_2^3}; \quad \text{also } \mu_3 = 0,625 \mu_2,$$

und wie vorher $\mu_2 = 8\mu_4$.

Wir erhalten die Koeffizienten (Tabelle 7 & 9):

Z_{ee}	= +	$9,8755\mu_3 + 1,600\mu_2$	= +	$7,7722\mu_2$
Z_{ef}	= -	$3,600 \mu_2$	= -	$3,60 \mu_2$
Z_{eg}	=		= +	$2,40 \mu_2$
Z_{eh}	=		= -	$0,40 \mu_2$
Z_{en}	= -	$9,5021\mu_3$	= -	$5,9388\mu_2$
Z_{en_1}	= +	$4,1337\mu_3$	= +	$2,5836\mu_2$
Z_{ee_1}	= -	$1,0331\mu_3$	= -	$0,646 \mu_2$
Z_{ff}	= +	$9,8755\mu_3 + 9,600\mu_2$	= +	$15,7722\mu_2$
Z_{fg}	= -	$8,4 \mu_2$	= -	$8,40 \mu_2$
Z_{nn}	= +	$14,0090\mu_3 + 1,600\mu_2$	= +	$10,3556\mu_2$
Z_{no}	= Z_{ef}	u. s. w.		
Z_{nn_1}	= -	$10,5354\mu_3$	= -	$6,5846\mu_2$
Z_{ne_1}	= Z_{hq_1}	$= Z_{en_1}$ u. s. w.		
Z_{oo}	= +	$14,0090\mu_3 + 9,600\mu_2$	= +	$18,3556\mu_2$
Z_{op}	= Z_{fg}	...		
Z_{oo_1}	= Z_{nn_1}	...		

Die Gleichungen n) med o) ergeben nun, mit

$$\zeta_n = \zeta_{n_1} = \zeta_q = \zeta_{q_1} \text{ und } \zeta_o = \zeta_{o_1} = \zeta_p = \zeta_{p_1} \text{ und } \zeta_e = \zeta_{e_1};$$

$$\text{n)} \quad Z_n = 0 = + 5,9388\zeta_e - 10,3556\zeta_n + 3,60\zeta_o - 2,40\zeta_p + 0,40\zeta_q \\ + 6,5846\zeta_{n_1} - 2,5836\zeta_{e_1};$$

$$\text{o)} \quad Z_o = 0 = + \frac{P}{\mu_2} + 5,9388\zeta_f + 3,60\zeta_n - 18,3556\zeta_o + 8,40\zeta_p - 2,40\zeta_q \\ + 6,5846\zeta_{o_1} - 2,5836\zeta_{f_1};$$

oder

$$\text{n)} \quad 0 = + 3,3552\zeta_e - 3,3710\zeta_n + 1,2000\zeta_o;$$

$$\text{o)} \quad 0 = + \frac{P}{\mu_2} + 3,3552\zeta_f + 1,2000\zeta_n - 3,3710\zeta_o;$$

durch Einsetzen von $\zeta_n = + 0,4422 \frac{P}{\mu_4}$, $\zeta_o = + 0,4915 \frac{P}{\mu_4}$ erhält man

$$\zeta_e = + \frac{0,2685}{\mu_4}, \quad \zeta_f = + \frac{0,2984}{\mu_4}.$$

Dritte und endliche Stufe. Wir kehren nun zum gegebenen Rost Fig. 19 zurück. Um einen besseren Überblick zu gewinnen betrachten wir die entsprechende Matrix, welche 36 Zeilen aufweist; (s. Seite 133). Von den vorhandenen 1296 Plätzen sind die 432 durch Koeffizienten ≥ 0 besetzt, und von diesen Koeffizienten sind nur 34 verschieden. Diese sind in der Matrix unterstrichen.

Wir setzen die bei den zwei ersten Stufen berechneten $\zeta_n \zeta_o \zeta_e \zeta_f$ als richtig voraus und können dann die noch unbekannten $\zeta_a \zeta_b \zeta_i \zeta_k \zeta_r \zeta_s$ aus den Gleichungen e) f) n) c) und z. B. a) und b) berechnen; zur Koeffizienten-Ermittlung setzen wir wie oben

$$\mu_1 = \frac{EI_1}{\lambda_1^3}, \quad \mu_2 = \frac{EI_2}{\lambda_2^3}, \quad \mu_4 = \frac{EI_2}{8\lambda_1^3},$$

also, mit

$$\lambda_1 = \lambda_2 : \mu_2 = \frac{1}{5}\mu_1, \quad \mu_1 = 40\mu_4, \quad \left(\frac{P}{\mu_1} = 0,025 \frac{P}{\mu_4} \right),$$

und erhalten folgende Koeffizienten (Tabelle 7 und 13):

$Z_{aa} = + 10,196$	μ_1	$Z_{bb} = + 11,796$	μ_1	$Z_{in} = + 4,4726\mu_1$
$Z_{ab} = - 0,72$	»	$Z_{bc} = - 1,68$	»	$Z_{in_1} = - 1,1988$ »
$Z_{ac} = + 0,48$	»	$Z_{ee} = + 14,35$	»	$Z_{ii_1} = + 0,3211$ »
$Z_{ad} = - 0,08$	»	$Z_{ei} = - 10,619$	»	$Z_{kk} = + 16,244$ »
$Z_{ae} = - 9,5063$	»	$Z_{en} = + 4,452$	»	$Z_{nn} = + 14,6696$ »
$Z_{ai} = + 4,155$	»	$Z_{er} = - 1,193$	»	$Z_{nr} = - 10,700$ »
$Z_{an} = - 1,1131$	»	$Z_{en_1} = + 0,3197$	»	$Z_{nn_1} = + 4,4706$ »
$Z_{ar} = + 0,2985$	»	$Z_{ei_1} = - 0,0856$	»	$Z_{oo} = + 16,2696$ »
$Z_{an_1} = - 0,07993$	»	$Z_{ee_1} = + 0,0228$	»	$Z_{rr} = + 14,6698$ »
$Z_{ai_1} = + 0,02140$	»	$Z_{ff} = + 15,95$	»	$Z_{ss} = + 16,2698$ »
$Z_{ae_1} = - 0,00571$	»	$Z_{ii} = + 14,644$	»	
$Z_{aa_1} = + 0,001429$	»	$Z_{in} = - 10,698$	»	

Die Gleichungen sind nun:

- e) $0 = + 9,512 \zeta_a + 10,7046 \zeta_i + 1,193 \zeta_r - 5,8724 \cdot \frac{P}{\mu_4};$
- f) $0 = + 9,512 \zeta_b + 10,7046 \zeta_k + 1,193 \zeta_s - 6,5456 \cdot \frac{P}{\mu_4};$
- n) $0 = + 1,193 \zeta_a + 11,8968 \zeta_i + 10,700 \zeta_r - 9,6022 \cdot \frac{P}{\mu_4};$
- o) $0 = + 1,193 \zeta_b + 11,8968 \zeta_k + 10,700 \zeta_s - 10,671 \cdot \frac{P}{\mu_4};$
- a) $0 = - 10,1174 \zeta_a + 0,2400 \zeta_b - 4,1764 \zeta_i - 0,2985 \zeta_r + 3,083 \cdot \frac{P}{\mu_4};$
- b) $0 = + 0,2400 \zeta_a - 10,1174 \zeta_b - 4,1764 \zeta_k - 0,2985 \zeta_s + 3,424 \cdot \frac{P}{\mu_4};$

Die Gleichungen e) und n) liefern leicht ζ_r und ζ_i als Funktion von ζ_a :

$$\zeta_r = + 1,00 \zeta_a + 0,329 \cdot \frac{P}{\mu_4}; \quad \zeta_i = 0,511 \cdot \frac{P}{\mu_4} - 0,9995 \zeta_a;$$

die Gleichungen f) und o) geben ζ_k und ζ_s als Funktion von ζ_b :

$$\zeta_k = + 0,571 \cdot \frac{P}{\mu_4} - 0,9993 \zeta_b; \quad \zeta_s = + 1,00 \zeta_b + 0,359 \cdot \frac{P}{\mu_4};$$

beim Einsetzen dieser Werte in a) und b) erhalten wir 2 Gleichungen mit den 2 Unbekannten ζ_a und ζ_b :

$$\zeta_a = + \underline{0,1422} \cdot \frac{P}{\mu_4}; \quad \zeta_b = + \underline{0,1553} \cdot \frac{P}{\mu_4};$$

durch e) und n) erhalten wir:

$$\zeta_r = + \underline{0,4712} \cdot \frac{P}{\mu_4}; \quad \zeta_i = + \underline{0,3688} \cdot \frac{P}{\mu_4};$$

endlich durch f) und o):

$$\zeta_s = + \underline{0,5143} \cdot \frac{P}{\mu_4}; \quad \zeta_k = + \underline{0,4157} \cdot \frac{P}{\mu_4};$$

Die Berechnung der Durchbiegungen ist jetzt beendet; es steht noch zurück die Gleichungen i) k) r) und s) als Kontrollgleichungen zu benutzen; setzen wir in diese Gleichungen die 10 Werte $\zeta_a - \zeta_s$ ein, erhalten wir nach Ausrechnung aller Zahlen bei der Gleichung

- i) statt 0 die Grösse + 0,034
- k) » 0 » » ÷ 0,006
- r) » 0 » » ÷ 0,050
- s) » 0 » » + 0,027;

Diese Fehlerwerte sind so klein, dass sie innerhalb der Rechnungsgenauigkeit liegen; die obigen Resultate können deshalb als ganz befriedigend angesehen werden. Wir wollen noch kontrollieren, dass die Summe der Reaktionen der Hauptträger $a-a_1$ und $b-b_1$ gleich der Belastung P ist; wir berechnen dazu die Momente M_a, M_b und finden die genannte Summe gleich

$$\frac{1}{\lambda_1} (M_a + M_b).$$

Die Momente sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} M_a &= -M_{aa}\zeta_a - M_{ae}\zeta_e - M_{ai}\zeta_i - M_{an}\zeta_n - M_{ar}\zeta_r - M_{an_1}\zeta_{n_1} - M_{ai_1}\zeta_i - M_{ae}\zeta_e - M_{aa_1}\zeta_a \\ &= -\zeta_a(M_{aa} + M_{aa_1}) - \zeta_e(M_{ae} + M_{ae_1}) - \zeta_i(M_{ai} + M_{ai_1}) - \zeta_n(M_{an} + M_{an_1}) - M_{ar}\zeta_r; \\ M_b &= -\zeta_b(M_{bb} + M_{bb_1}) - \zeta_f(M_{bf} + M_{bf_1}) - \zeta_k(M_{bk} + M_{bk_1}) - \zeta_o(M_{bo} + M_{bo_1}) - M_{bs}\zeta_s; \\ M_a + M_b &= -(\zeta_a + \zeta_b)(M_{aa} + M_{aa_1}) - (\zeta_e + \zeta_f)(M_{ae} + M_{ae_1}) - (\zeta_k + \zeta_i)(M_{ai} + M_{ai_1}) \\ &\quad - (\zeta_n + \zeta_o)(M_{an} + M_{an_1}) - (\zeta_r + \zeta_s)M_{ar}; \end{aligned}$$

Indem

$$\frac{P}{\mu_4} \cdot \frac{EI_1}{\lambda_1^2} = P \cdot \frac{8\lambda_1^3}{EI_2} \cdot \frac{EI_1}{\lambda_1^2} = 40P\lambda_1,$$

findet man — in einer leicht verständlichen Schreibweise —

$$\begin{aligned} M_a + M_b &= \left(+ 0,1422 \frac{P}{\mu_4} \right) \left(- 3,6462 \frac{EI_1}{\lambda_1^2} \right) = + 1,087 \cdot 40 P \lambda_1 \\ &\quad \left(+ 0,1553 \right) \left(- 0,0002 \right) \\ &\quad \left(+ 0,2685 \right) \left(+ 2,5847 \right) = - 1,468 \cdot \dots \\ &\quad \left(+ 0,2984 \right) \left(+ 0,0009 \right) \\ &\quad \left(+ 0,4157 \right) \left(- 0,6926 \right) = + 0,545 \cdot \dots \\ &\quad \left(+ 0,3688 \right) \left(- 0,0036 \right) \\ &\quad \left(+ 0,4422 \right) \left(+ 0,1855 \right) = - 0,186 \cdot \dots \\ &\quad \left(+ 0,4915 \right) \left(+ 0,0133 \right) \\ &\quad \left(+ 0,4712 \right) \left(- 0,0497 \right) = + 0,047 \cdot \dots \\ &\qquad\qquad\qquad + 0,025 \cdot 40 P \lambda_1 = \underline{\underline{P \lambda_1}} \end{aligned}$$

Also ist $\frac{1}{\lambda_1}(M_a + M_b) = P$, wie sich aus einer richtigen Berechnung ergeben musste.

Durchbiegungs-Hilfswerte. Hat man bei der ersten Stufe — oder durch die ersten Stufen — die Durchbiegungswerte in den belasteten Querträgern berechnet, könnte man die übrigen Durchbiegungen in ganz einfacher Weise wie folgt ermitteln. Wir setzen wie oben nur *einen*

Querträger als belastet voraus; wird die Berechnung so durchgeführt, dass man nur diesen Querträger berücksichtigt und alle anderen Querträger ausschaltet, so wird der ermittelte ζ -Wert jedes Hauptträgers einer Belastung durch eine Einzelkraft im Auflagerpunkt des Querträgers entsprechen, und alle Hauptträger werden affine Durchbiegungslinien aufweisen; die Durchbiegungen aller übrigen Punkte jedes Hauptträgers werden also einen bekannten Bruchteil der Durchbiegung des belasteten Knotens ausmachen, nämlich den Teil, der sich aus der Biegelinie eines in einem Punkte belasteten Balkens ergibt.

Es kann deshalb in vielen Fällen von Nutzen sein, die durch eine Einzelkraft in einem Knoten r eines Balkens mit n Feldern (z. B. $n \leq 10$) erzeugten Durchbiegungslinien zu kennen; diese ζ -Werte sind leicht zu ermitteln. Mit den Bezeichnungen der Fig. 22 erhalten wir die Durchbiegung y_x oder $y_{x'}$ im Abstande x oder X' vom Auflager eines Balkens mit Elastizitätskoeffizienten E und Trägheitsmoment I gleich

$$EIy_x = \frac{1}{6}Pab \cdot \frac{l+b}{l} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot P \cdot \frac{ab}{l} \cdot \frac{x}{a} \cdot x \cdot \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}Pab \cdot x \left[\frac{l+b}{l} - \frac{x^2}{al} \right],$$

$$EIy_{x'} = \frac{1}{6}Pab \cdot x' \left[\frac{l+a}{l} - \frac{x'^2}{bl} \right].$$

In den Tabellen 15 sind die Werte EIy_x und $EIy_{x'}$ für die Balken mit 2—10 Feldern und die Kraft P in jedem Knoten des Balkens berechnet, und zwar hat man für jede Stellung von P diese Durchbiegungen in jedem Knoten des genannten Balkens zuerst genau ermittelt und nachher in Hundertsteln der Durchbiegung des belasteten Knotens ausgedrückt.

Bleibt man bei einer der ersten Stufen stehen, können die übrigen Durchbiegungen also durch die Beiwerte der Tabelle 15 berechnet werden; ist die Belastung nur eine Einzelkraft, sind diese ζ einfach der Tabelle zu entnehmen; im Falle mehrerer Einzelkräfte — entsprechend der Mitnahme mehrerer belasteten Querträger bei der Berechnung der ersten Stufen —, erhält man leicht durch Superposition der Beiwerte der Tabellen die in Frage kommenden Verhältniszahlen.

Es ist eine notwendige Voraussetzung dieser Tabellen, dass die Biegelinien der Hauptträger affin sind. (Über das Zutreffen dieser Bedingung siehe Kap. X).

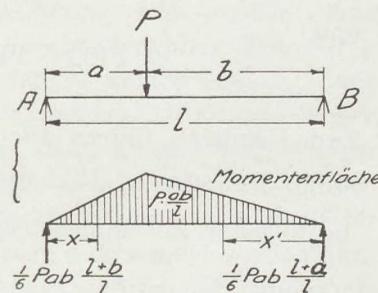


Fig. 22.

Wir wollen durch das eben durchgerechnete Zahlenbeispiel die obigen Ausführungen erläutern. Bleiben wir bei der ersten Stufe stehen; aus den gefundenen Werten ζ_n (und ζ_o) suchen wir die übrigen $\zeta_a \zeta_e \zeta_i$ und ζ_r (und $\zeta_b \zeta_f \zeta_k$ und ζ_s). Die Kraft steht in $\frac{1}{10} = \frac{2}{5}$ der Stützweite. Die Tabelle für $n=5$ gibt uns unter leicht verständlicher Superposition:

$$\zeta_a = \frac{12}{625} \left(\frac{32,8 + 28,8}{100} \right) = \frac{12}{625} \cdot 0,616$$

und

$$\zeta_n = \frac{12}{625} \left(\frac{100 + 94,4}{100} \right) = \frac{12}{625} \cdot 1,944, \text{ also } \zeta_a = 31,7\% \text{ von } \zeta_n.$$

Zum Vergleich führen wir an, dass wir bei Anwendung der dritten Stufe $\frac{\zeta_a}{\zeta_n} = 32,1\%$, $\frac{\zeta_b}{\zeta_o} = 31,6\%$ gefunden haben, also fast das gleiche; die folgende Zusammenstellung gibt die Werte für die anderen ζ :

$$\begin{aligned} &\text{nach Tabelle 15: } \frac{\zeta_a}{\zeta_n} = 31,7\%, \frac{\zeta_e}{\zeta_n} = 60,8\%, \frac{\zeta_i}{\zeta_n} = 84,8\%, \frac{\zeta_r}{\zeta_n} = 105,5\%. \\ &\text{gefunden nach } \begin{cases} \zeta_a = 31,1\%, \zeta_e = 60,7\%, \zeta_i = 83,5\%, \zeta_r = 106,7\%, \\ \zeta_b = 31,6\%, \zeta_f = 60,7\%, \zeta_h = 84,5\%, \zeta_s = 104,2\%. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Verhältniszahlen können noch eine praktische Anwendung finden, nämlich zur Vereinfachung des durch den vorgelegten Rost gegebenen Gleichungssystems, das, wie wir gesehen haben, oft zu schwierig aufzulösen ist. Wir betrachten z. B. die Matrix (S. 133) zum Rost des Zahlenbeispiels; die geschlossenen »Untermatrix« (hier viergliedrig) und die noch vorhandenen Streungsglieder, welche nach rechts fallenden Diagonalen verlaufen, fallen stark in die Augen; wir suchen nun die zwei Durchbiegungen ζ_n und ζ_o ($= \zeta_{n_1}$ und ζ_{o_1}) aus den durch diese Matrix bestimmten Gleichungen direkt zu berechnen ohne auf die stufenweise Berechnung zurückzugreifen. Zu diesem Zwecke drücken wir in den Gleichungen n) und o), welche die Belastung P enthalten, alle übrigen Unbekannten durch ζ_n und ζ_o aus, was mit Beihilfe der Tabellen 15 leicht möglich ist. Diese zwei Gleichungen ergeben also nach Ausrechnung der Zahlen die gesuchten zwei Unbekannten, welche durch Anwendung der Tabellenwerte von den anderen Gleichungen »unabhängig« gemacht worden sind. Die Berechnungsweise setzt natürlich — eben so wie die vorherige Schätzung der Durchbiegungen der unbelasteten Knoten — affine Biegelinien voraus; sie ist deshalb bei biegsamen Querträgern mit Vorsicht anzuwenden. Es ist notwendig den Bereich (die Steifigkeitsverhältnisse) zu kennen, innerhalb dessen die stufenweise Berechnung zuverlässige Ergebnisse ergibt; über diese wichtige Frage wird Kap. X orientieren.

Alles, was bis jetzt über die stufenweise Berechnung gesagt worden ist, hat nur Gültigkeit, wenn eine oder wenige Einzelkräfte in den Knoten vorhanden sind. Wenn kompliziertere Belastungen vorliegen, und sind diese für die Lastverteilung massgebend, so ist es oft vorteilhaft die Einflussflächen zu ermitteln und damit weiter zu rechnen (s. nächstes Kapitel); dieser Fall löst sich also in den eben behandelten auf.

*Ideeller Querträger.*¹ Für Steifigkeitsverhältnisse, wo es zu ungenau wäre ohne weiteres die stufenweise Berechnung anzuwenden, kann man eine wesentliche Verbesserung einführen, indem man dem belasteten Querträger eine erhöhte Steifigkeit zuteilt, welche bei der ersten Stufe der Anwesenheit der unbelasteten Querträger Rechnung tragen soll; die Berechnung wird also mit nur dem belasteten Querträger durchgeführt, und sie liefert so brauchbare Ergebnisse, dass die Berechnung der ersten Stufe mit diesem »ideellen Querträger« auch für die mittleren Steifigkeitsverhältnisse sehr wohl angewendet werden darf. Um einen Begriff über die für den belasteten Querträger einzuführende Steifigkeit zu bekommen nehmen wir an, dass die Querträger sich gegenseitig nicht beeinflussen. Die Fig. 23 zeigt einen einfachen Rost (alle Hauptträger und alle Querträger gleich), wo der mittlere Hauptträger b durch die Querträger, die auf den Randträgern a und c aufruhen, versteift wird. Die Belastung ist eine Einzelkraft $p = 1$ im Knoten m ; die Einflusslinie der Durchbiegung in m eines freien Hauptträgers ist in Fig. 23 b angedeutet; sie weist in m den Wert $\zeta_{m,m}$, und im Auflagerpunkt des r -ten Querträgers die Ordinate $\zeta_{m,r}$ auf. Wenn annähernd vorausgesetzt werden kann, dass die Wirkung jedes Querträgers proportional der entsprechenden Durchbiegung ζ_{mr} (Fig. 23 b) sei, so ist die Gesamtwirkung aller n Querträger durch die Summe $\sum_0^n \zeta_{mr}$ ausgedrückt; ist das Trägheitsmoment des belasteten Querträgers gleich θ , so muss man, um die Berechnung unter Berücksichtigung nur des belasteten Querträgers, (unter Weglassung aller unbelasteten Querträger) durchführen zu können, statt θ das Trägheitsmoment des Querträgers m gleich

$$\theta \cdot \frac{\sum_0^n \zeta_{mr}}{\zeta_{mm}}$$

¹ F. Faltus: Lastverteilende Querverbindungen. Bauingenieur, 12/11. 27. und Z. d. ö. Ing. u. A. V., 26/10., 9/11 1928. Der Begriff dieser ideellen Querträger ist in diesen Abhandlungen eingeführt

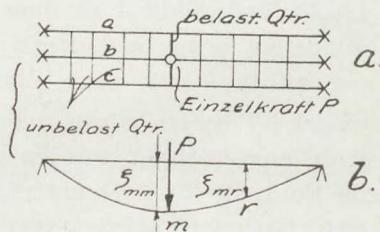


Fig. 23.

einführen; der fiktive Querträger wird die Last P angenähert so verteilen, wie es der Fall mit den n Querträgern sein würde. Die Zahlenwerte $\zeta_{m,r}$ finden sich aus den Tabellen 15; wir kommen auf Anwendungsbeispiele in Kap. X zurück.

Wir könnten hier noch einen Schritt weiter gehen; denken wir uns einen beliebigen Rost, für welchen wir die Einflusszahlen ermitteln wollen; wir rechnen zu diesem Zwecke nur mit dem belasteten Querträger (ideeller Querträger oder nicht). Wenn die Hauptträgeranzahl gegeben ist, ist es möglich ein für allemal geschlossene Formeln für die ζ der Knoten dieses Querträgers aufzustellen, entsprechend einem

festen Angriffsknoten der Kraft 1; die variable Grösse dieser Formeln ist das Verhältnis der Hauptträger-Steifigkeit zur Steifigkeit des Querträgers. Für den Rost Fig. 24 wäre es einfach diese Formeln für $\zeta_a \dots \zeta_e$ zu berechnen und zwar für die Kraft 1 im Knoten $a \dots e$. Der Parameter ist das Steifigkeitsverhältnis (s. Kap. X)

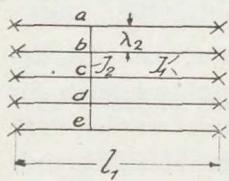


Fig. 24.

$$\beta = \frac{I_1}{I_2} \left(\frac{\lambda_2}{l_1} \right)^3 = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Solche Formeln als Kurven aufgetragen und für 3, 4, 5 ... Hauptträger ausgerechnet würden gute Dienste leisten. Wir haben im Kap. X alle Formeln für 3 Hauptträger ausgerechnet.

Als Grenzfall solcher Untersuchungen wäre dann der Rost aufzufassen, der unendlich viele Hauptträger besitzt, welche nur durch einen Querträger verbunden sind; dieses Problem (entsprechend einer Schiene auf Schwellen) ist bereits mittels einer analytischen Betrachtung gelöst. Wir werden uns im Kap. IX damit beschäftigen und werden dort die analytische Methode als Annäherungslösung zu unserem Problem auffassen; wenn sie aus irgend welchen Gründen versagen sollte, müssen wir zum Verfahren der stufenweisen Berechnung zurückgreifen.

KAPITEL VII

Die Einflussflächen.

WIE bei vielen statischen Problemen bieten auch hier die Einflusslinien eine übersichtliche Darstellung der Wirkungsweise des Tragwerkes. Die Einflusslinien einer Durchbiegung, eines Momentes etc. werden so zur Darstellung gebracht, dass man die betreffende Wirkung (Durchbiegung, Moment etc.), durch eine Kraft 1 in einem beliebigen Punkte des Rostes angreifend erzeugt, lotrecht unter dem Angriffspunkt dieser Einzellast 1 aufzeichnet. Für jeden Träger erhält man durch Verbindung der Punkte eine Einflusslinie, und die Fläche, die man sich durch alle Einflusslinien der Hauptträger und Querträger bestimmt denken kann, ist als Einflussfläche des Rostes aufzufassen. Fig. 25 zeigt die Einflusslinien der Durchbiegung ζ_a im Knoten a eines Rostes; um sie zeichnerisch darstellen zu können hat man sie um jeden Träger in den Zeichnungsplan gedreht; diese Darstellungsweise ist ohne weiteres verständlich. Durch Zuhilfenahme des Maxwell'schen Satzes kommen wir noch einen Schritt weiter; die Einflussfläche einer Durchbiegung ζ_r eines Punktes r kann nämlich dadurch als die Durchbiegungsfläche des Rostes infolge einer Kraft 1 im Punkte r wirkend aufgefasst werden. Man braucht also nur die Kraft 1 im r wirken zu lassen und die zugehörigen ζ aller Knoten zu berechnen; die Einflusslinie in Fig. 25 stellt also einfach die Durchbiegungen aller Träger dar unter der Belastung 1 in a .¹ Dadurch ist eine wesentliche Vereinfachung der Berechnungen erreicht. Handelt es sich um die Einflusslinien für Momente oder Quer-

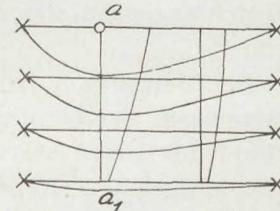


Fig. 25.

¹ Diese Vereinfachung ist ein allgemeiner Vorteil der Deformationsmethode, s.: A. Ostenfeld: Die Deformationsmethode, S. 30 (Einflusslinien).

kräfte, so ergeben diese sich aus den Einflusslinien für die Durchbiegungen bei Anwendung der Gleichungen:

$$M = M_o - M_a \zeta_a - M_b \zeta_b - \dots - M_n \zeta_n, \text{ u. s. w.}$$

Hier sind $M_a, M_b \dots M_n$ feste Zahlen, während $\zeta_a, \zeta_b \dots \zeta_n$ und auch M_o den entsprechenden Einflusslinien zu entnehmen sind; die Grösse M_o ist ≥ 0 , wenn Belastung zwischen den Knoten vorkommt.

Man kann bei einem symmetrischen Rost immer eine Vereinfachung der Berechnungen bei Anwendung des Belastungs-Umordnungs-Verfahrens erreichen. Sucht man z. B. die Einflusslinie der Durchbiegungen ζ_a (Fig. 25); der Rost sei symmetrisch angenommen; statt die Berechnung für eine Kraft l in a durchzuführen fassen wir diese Belastung als eine Kombination der folgenden zwei Belastungen auf:

Die Belastung $+\frac{1}{2}$ in a und $+\frac{1}{2}$ in a_1 , (beide nach unten), und
 » » $+\frac{1}{2}$ in a (nach unten) und $-\frac{1}{2}$ in a_1 (nach oben gerichtet).

Bei der Berechnung des ersten Teiles ist wegen der Belastungssymmetrie $\zeta_a = \zeta_{a_1}$ (und die analogen), beim zweiten Teil haben wir »umgekehrte Symmetrie«: $\zeta_a = -\zeta_{a_1}$ (usw.); in beiden Fällen reduziert sich die Anzahl der Gleichungen auf die Hälfte. Die Superposition der Durchbiegungen der zwei Belastungsfälle geben die gesuchte Einflusslinie.

Bei Berechnung von Einflusslinien ist oft die Anwendung der stufenweisen Berechnung sehr angezeigt, nämlich wenn man nur den durch die Kraft 1 belasteten Querträger mitnimmt unter Vernachlässigung der übrigen Querträger; (man bleibt also bei der ersten Stufe stehen). Diese Annäherung ist wie früher bemerkt oft ganz genügend, und sie erlaubt selbst in komplizierteren Fällen die Berechnungen verhältnismässig rasch zu erledigen. Ist ein Rost für eine komplizierte Belastung zu berechnen, und will man die Auflösung der Gleichungen mittels der im Kap. IV angegebenen spezielleren Methoden vermeiden, so ist es vorteilhaft zu den Einflusslinien der Durchbiegungen (durch die Mitnahme nur des belasteten Querträgers ermittelt) zu greifen und nachher die ζ -Werte mit der gegebenen Belastung zu kombinieren.

KAPITEL VIII

Unendlich steife Querträger.

WIR setzen in diesem Kapitel voraus, dass die Querträger unendlich steif sind, d. h. dass sie geradlinig bleiben. Die Hauptträger haben (der Einfachheit halber) die gleiche Stützweite, während ihre Trägheitsmomente I verschieden sind. Wir wollen hier eine ganz einfache Berechnung vornehmen.¹ Wir nehmen an, dass der Rost nur durch eine Einzelkraft P über einem Querträger belastet ist, und dass keine anderen Querträger vorhanden sind. Jeder Hauptträger wird durch die geradlinige Durchbiegung des Querträgers einen Lastanteil erhalten, der ihn ebenfalls durchbiegt, und seine Durchbiegungslinie ist natürlich jener der anderen Hauptträger ähnlich; in einem beliebigen anderen Querschnitt des Rostes werden deshalb die Hauptträger Durchbiegungen aufweisen, welche den Durchbiegungen im Angriffspunkte des Querträgers proportional sind, d. h. die Hinzufügung geradliniger (unendlich steifer) Querträger in jedem beliebigen Querschnitt des Rostes wird an der Lastverteilung nichts ändern. Die Berechnung ist also genau, auch wenn wir nur die belasteten Querträger — im Falle der Einflusslinien: den einzigen belasteten Querträger — berücksichtigen.

Die obige Annahme (Fig. 26) hat also allgemeine Gültigkeit. Wir können nun schreiben mit den Bezeichnungen der Figur

$$\zeta_a : \zeta_b : \zeta_c = \frac{A}{I_a} : \frac{B}{I_b} : \frac{C}{I_c} : \dots$$

d. h. die Durchbiegungen sind zu den Steifigkeiten jedes Hauptträgers

¹ Diese Darstellung ist dem Buche A. Ostenfeld: Jernbetonbroer entliehen.

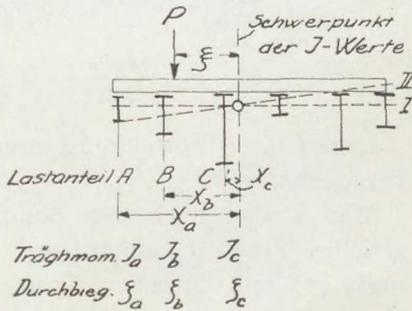


Fig. 26.

proportional; ist der Querträger nach seiner Durchbiegung noch horizontal $\zeta_a = \zeta_b = \zeta_c$ (Stellung I, fig. 26), können wir setzen

$$\frac{A}{I_a} = \frac{B}{I_b} = \frac{C}{I_c} = \frac{A + B + C + \dots}{\Sigma I} = \frac{P}{\Sigma I}, \text{ also } A = P \cdot \frac{I_a}{\Sigma I} \quad (1)$$

und die analogen; dies ist der Fall, wenn sich P über dem Schwerpunkte der Trägheitsmomente befindet.

Ist P in einem Abstand ξ von dieser Stellung (Fig. 26, Stellung II) müssen wir zu den gefundenen Drücken A, B, \dots die Wirkung des Momentes $P \cdot \xi$ addieren; aus der geradlinigen Durchbiegung der Querträger folgt

$$x_a : x_b : x_c \dots = \frac{A}{I_a} : \frac{B}{I_b} : \frac{C}{I_c}, \text{ also } B = A \cdot \frac{I_b}{I_a} \cdot \frac{x_b}{x_a}, \quad C = A \cdot \frac{I_c}{I_a} \cdot \frac{x_c}{x_a} \dots;$$

die Gleichgewichtsbedingungen sind:

$$A + B + C \dots = P; \quad Ax_a + Bx_b + Cx_c + \dots = P \cdot \xi;$$

diese ergeben unter Einsetzung der obigen A, B, C -Werte:

$$\frac{A}{I_a x_a} (I_a x_a + I_b x_b + I_c x_c + \dots) = 0, \text{ oder } \Sigma I x = 0$$

was ohne weiteres richtig ist, da x_a eben vom Schwerpunkt der I -Werte ausgemessen ist.

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{I_a x_a} (I_a x_a^2 + I_b x_b^2 + I_c x_c^2 + \dots) &= \frac{A}{I_a x_a} \Sigma I x^2 = P \cdot \xi; \\ A &= P \cdot \xi \cdot \frac{I_a x_a}{\Sigma I x^2}, \quad B = P \cdot \xi \cdot \frac{I_b x_b}{\Sigma I x^2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Durch diese Formeln ist nun jede Belastungskombination einfach zu berechnen.

Wir wollen noch den Sonderfall untersuchen, wo alle Hauptträger gleiches Trägheitsmoment und gleichen Abstand $\lambda = a$ haben. Die Formeln (1) und (2) geben dann, bei $(n - 1)$ Trägern (n Stützweiten des Querträgers):

$$\frac{I}{\Sigma I} = \frac{1}{n+1} \quad \text{und} \quad x_{\max} = \frac{n}{2} \cdot \lambda;$$

das »Trägheitsmoment«: $\Sigma I x^2 = \frac{1}{12} \cdot \lambda^2 \cdot n(n+1)(n+2)$,

das »Widerstandsmoment«: $\frac{\Sigma I x^2}{x_{\max}} = \frac{1}{6} \cdot \lambda \cdot (n+1)(n+2)$,

die Randträgerreaktion: $A = \frac{P}{n+1} \left[1 \pm \frac{6\xi}{\lambda(n+2)} \right]$;

diese Reaktion wird, für $\xi = x_{\max} = \frac{n}{2} \cdot \lambda$ (P über dem Randträger)

gleich $A' = \frac{P}{n+1} \left[1 \pm \frac{3n}{n+2} \right]$; wir bestimmen noch, dass für

$$\xi = \frac{\lambda}{6} (n+2) \cdot n$$

bekommt man $A = P$, und für

$$\xi = \frac{\lambda}{6} (n+2)$$

hat man $A = 0$.

Diese Werte mit den in der folgenden Zusammenstellung gegebenen Sonderfällen sind in einer Abhandlung von A. Bühler¹ enthalten (siehe Fig. 27).

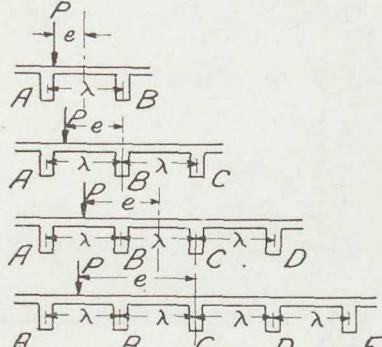


Fig. 27.

$\lambda = a$	Trägheitsmoment	Widerstands-moment	Allgemein ist Randträgerreaktion	links	rechts	links	rechts	Wenn P über Randträger, so ist die Randtr.-reakt.	$A = P$, wenn	$A = 0$, wenn
$n = 1$	$\frac{a^2}{2}$	a	$P \left(\frac{1}{2} + \frac{e}{a} \right)$	$P \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{a} \right)$	$+ P$	0	$e = \frac{a}{2}$	$e = \frac{a}{2}$	$e = \frac{a}{2}$	$e = \frac{a}{2}$
$n = 2$	$2a^2$	$2a$	$P \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{10} \frac{e}{a} \right)$	$P \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{10} \frac{e}{a} \right)$	$+ \frac{5}{6}P$	$- \frac{1}{6}P$	$e = \frac{4}{3}a$	$e = \frac{2}{3}a$		
$n = 3$	$5a^2$	$\frac{10}{3}a$	$P \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{10} \frac{e}{a} \right)$	$P \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{10} \frac{e}{a} \right)$	$+ \frac{7}{10}P$	$- \frac{2}{10}P$	$e = \frac{5}{2}a$	$e = \frac{5}{6}a$		
$n = 4$	$10a^2$	$5a$	$P \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{10} \frac{e}{a} \right)$	$P \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{10} \frac{e}{a} \right)$	$+ \frac{3}{5}P$	$- \frac{1}{5}P$	$e = 4a$	$e = a$		
bei $(n+1)$ Trägern	$I = \frac{a^2}{12} n(n+1)(n+2)$	$W = \frac{a}{6} (n+1)(n+2)$	$\overbrace{\frac{P}{n+1} \left[1 \pm \frac{6e}{a(n+2)} \right]}$	$\overbrace{\frac{P}{n+1} \left(1 \pm \frac{3n}{n+2} \right)}$	$e = \frac{a}{6} n(n+2)$	$\frac{a}{6}(n+2)$				

Durch diese Formeln können die Einflusslinien der Auflagerdrücke, Querkräfte und Momente einfach ermittelt werden (s. Beispiele in der angegebenen Quelle).

¹ A. Bühler: Lastverteilung bei Plattenbalkenbrücken. Schw. Bauzt. 1915. I. S. 7.

KAPITEL IX

Analytische Methode.

WIR kommen hier auf unsere Schlussbemerkung des Kapitels VI zurück.

Wir wollen den Fall besonders studieren, wo der Rost unendlich viele gleiche Hauptträger in gleichen Abständen λ und nur einen Querträger besitzt (Fig. 28 a); dieser Querträger sei durch eine Einzellast P in einem beliebigen Punkt belastet. Wir suchen die Lastverteilung über den Hauptträgern. Wir benutzen hierzu die allgemeine Theorie, die für einen gebogenen Balken gilt und setzen für den Querträger¹ (s. Fig 28 b):

$$E_2 I_2 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -M \text{ (Moment)}$$

$$E_2 I_2 \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} = Q \text{ (Querkraft)}$$

$$E_2 I_2 \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} = p \text{ (Belastung);}$$

wir betrachten den Querträger als durch eine gleichförmige Belastung p pro Längeneinheit gestützt; diese Belastung p soll die Hauptträgerreaktionen P im Abstande λ ersetzen: $P = p \cdot \lambda$. Die äussere Kraft P biegt den Querträger durch und die Durchbiegung y_x hängt eben von der Reaktion p_x ab, was durch den Ausdruck $p = -k \cdot y$ festgelegt wird; k wird durch die Lagerungsverhältnisse der Hauptträger bestimmt. Die Durchbiegung eines Hauptträgers ist bekanntlich

$$y = \frac{1}{3} \cdot \frac{P}{E_1 I_1} \cdot \frac{a^2 b^2}{l} = \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{E_1 I_1} \cdot \frac{\lambda \cdot a^2 b^2}{l}, \text{ also } k = \frac{3 E_1 I_1 \cdot l}{\lambda \cdot a^2 b^2},$$

¹ A. Ostenfeld: Teknisk Elasticitetslære, Kopenhagen 1924, S. 498. Fr. Bleich: Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, Julius Springer 1924, S. 335. Dieser Verfasser hat die Berechnung für ähnliche Zwecke gegeben.

wenn die Hauptträger frei gelagert sind; für eine teilweise Einspannung kann man dem Nenner einen Koeffizienten μ ($1 \geq \mu \geq 0$) beifügen. Der elastische Durchbiegungskoeffizient k des Querträgers ist somit festgelegt. Die Biegelinie des Querträgers ist nun durch

$$p = E_2 I_2 \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} = -ky \quad (1)$$

bestimmt, und es fehlt nur die Integration dieser Differenzialgleichung; diese ist durch

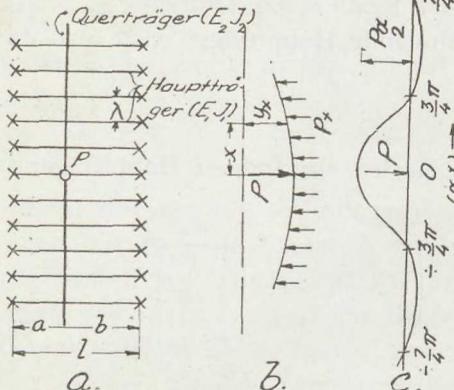


Fig. 28.

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{4E_2 I_2}}, \quad y = e^{\alpha x} (A \sin \alpha x + B \cos \alpha x) + e^{-\alpha x} (C \sin \alpha x + D \cos \alpha x) \quad (2)$$

ausgedrückt. Zur Bestimmung der 4 Konstanten A, B, C, D haben wir erstens die Randbedingung

$$x = \infty, \quad y = 0, \quad \text{die } A = B = 0 \text{ ergibt,}$$

und nachher, dass die Biegelinie um die Kraft P symmetrisch ist, also

$$x = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{hieraus erhält man } C = D;$$

und endlich dass im gleichen Punkt die Querkraft gleich $\frac{1}{2}P$ ist:

$$x = 0, \quad Q = E_2 I_2 \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1}{2}P;$$

diese Gleichung giebt nach einiger Ausrechnung

$$C = D = \frac{P}{8\alpha^3 E_2 I_2} = \frac{P\alpha}{2k} \quad (\text{vergl. (2)}).$$

Die endliche Lösung von (1) ist also

$$y = \frac{P\alpha}{2k} \cdot e^{-\alpha x} \cdot (\cos \alpha x + \sin \alpha x)$$

oder

$$p = -ky = -\frac{P\alpha}{2} \cdot e^{-\alpha x} \cdot (\cos \alpha x + \sin \alpha x). \quad (3)$$

Die entsprechende Kurve ist in Fig. 28c angedeutet,¹ sie weist unter der Kraft P die Ordinate $p_0 = \frac{1}{2}P\alpha$ auf; der an dieser Stelle sich befindende Hauptträger wird also durch die Reaktion

$$p_0\lambda = \lambda \cdot \frac{P\alpha}{2}$$

belastet, ein anderer Hauptträger im Abstande x wird durch die Kraft

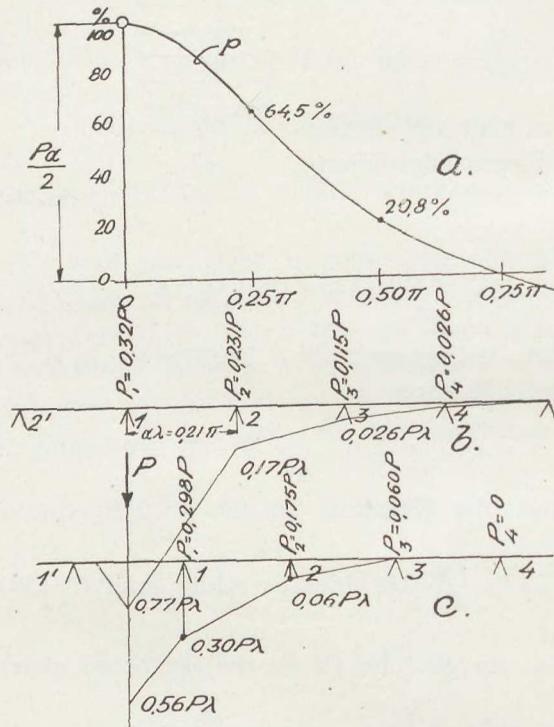


Fig. 29.

$p_x \cdot \lambda$ beansprucht. — Es bleibt noch übrig in den Ausdruck für α den Wert von k einzusetzen:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{3IE_1I_1}{a^2b^2\lambda\mu} \cdot \frac{1}{4E_2I_2}} = \sqrt[4]{\frac{3}{4\mu} \cdot \frac{l}{a^2b^2\lambda} \cdot \frac{E_1I_1}{E_2I_2}},$$

wenn wir hier die Größen $\beta = \frac{I_1}{I_2} \cdot \left(\frac{\lambda}{l}\right)^3$ und $\lambda = k \cdot l$, also $\beta = \frac{I_1}{I_2} \cdot k^3$ einführen, erhalten wir, mit $a = \xi l$, $b = l(1 - \xi)$:

¹ M und Q könnten jetzt aus $\frac{d^2y}{dx^2}, \dots$ berechnet werden; Müller-Breslau: Graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. II. (2te Abteilung 1908) enthält S. 242 Tabellen über p , M , Q für verschiedene Werte von (αx) .

$$\alpha = \frac{1}{l} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4\mu} \cdot \frac{\beta}{\xi^2(1-\xi)^2} \cdot \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{1}{k^4}}. \quad (5)$$

Die halbe Länge x_0 der zentralen Welle der Kurve in Fig. 28c ist

$$\alpha x_0 = \frac{3}{4}\pi; \quad x_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{\alpha} = 2,36 \cdot \frac{1}{\alpha}.$$

Die hier gezeigte Methode kann durch ihre rasche Berechnungsweise ganz wertvolle Hilfe leisten, auch wenn das gegebene Tragwerk ziemlich weit von den strengen Voraussetzungen der Theorie ist. Wenn man nur die zentrale Welle (zwischen $+\frac{3}{4}\pi$, und $-\frac{3}{4}\pi$) der Biegelinie mitnimmt, können auch Roste mit wenigen (3—6) Hauptträgern angenähert durch die Formeln erfasst werden. Der Auflagerungsweise der Hauptträger muss man so wie so durch Schätzung des Koeffizienten μ Rechnung tragen. Die Aufzeichnung der ersten Welle der Kurve (Fig. 29) ermöglicht, wenn k , β und ξ gegeben sind, eine direkte Bestimmung der auf jeden Träger entfallenden Belastung; wenn x_0 bekannt ist, ist es leicht die Aufteilung der Strecke $\alpha \cdot x_0$ in Feldlängen $\alpha \cdot \lambda$ auszuführen, und die Ordinaten der Kurve geben dann nach Multiplikation mit λ die gesuchte Verteilung von P .

Die Methode ist indessen noch allgemeiner verwendbar, nämlich wenn der Rost ausser vielen Hauptträgern noch mehrere Querträger besitzt; um einen Begriff über die Lastverteilung zu erhalten suchen wir die Einflusslinien und verwenden dabei — wie bei der stufenweise Berechnung, vergl. Kap. VI-VII — das Verfahren, nur den durch die Kraft 1 belasteten Querträger mitzunehmen; der Rost besitzt während dieser Berechnung nur einen Querträger, und wir können also die obigen Formeln anwenden um die Lastverteilung durch diesen Querträger bewirkt zu erhalten; nachher geht man zu einem anderen Querträger über usw.; die Annäherung ist wie früher am besten, wenn die Querträger steif sind.

Als Anwendungsbeispiel untersuchen wir einen Rost Fig. 30, der die einfachen Verhältnisse aufweist:

$$a = b = \frac{1}{2}l, \quad I_1 = I_2, \quad \mu = 1, \quad E_1 = E_2,$$

also

$$\xi = 0,5, \quad \beta = k^3.$$

Die Formel (5) gibt $\alpha = \frac{1}{l} \cdot \sqrt[4]{12 \cdot \frac{\beta}{k^4}} = \frac{1}{l} \cdot \sqrt[4]{12 \cdot \frac{1}{k}}$;

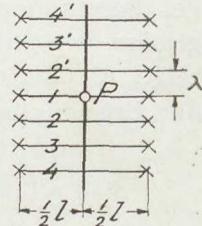


Fig. 30.

$$\begin{array}{lll}
 \text{für } k = \frac{\lambda}{l} = 1 \text{ ist } \alpha = \frac{1}{l} \cdot 1,86; & x_0 = 2,36 \frac{1}{\alpha} = 1,27\lambda & \left. \begin{array}{l} \text{die erste} \\ \text{Welle erstreckt} \\ \text{sich also} \\ \text{über} \end{array} \right\} 3 \\
 \gg \quad \gg \quad \frac{1}{2} \quad \alpha = \frac{1}{l} \cdot 2,22; & & 2,13\lambda \\
 \gg \quad \gg \quad \frac{1}{4} \quad \alpha = \frac{1}{l} \cdot 2,64; & & 3,57\lambda \\
 & & \left. \begin{array}{l} \text{Hauptträger.} \\ \text{5} \\ \text{7} \end{array} \right\}
 \end{array}$$

Für den letzten Fall ($k = \frac{1}{4}$) finden wir $\frac{1}{2}P\alpha = 0,33 \frac{P}{\lambda}$; um die einzelnen Drücke zu finden teilen wir für die erste Welle der Kurve Fig. 29 a die Strecke

$$\alpha x_0 = 0,75\pi \text{ in Feldlängen } \alpha\lambda = \alpha \cdot \frac{x_0}{3,57} = \frac{0,75\pi}{3,57} = 0,21\pi \text{ ein;}$$

man sieht jetzt unmittelbar die Verteilung über die 7 Träger (Fig. 29 b) und die Drücke werden in der Kurve abgelesen:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= 0,33 \frac{P}{\lambda} \cdot \lambda = 0,33P \text{ (genauer } 0,33P \cdot 97\% = 0,32P\text{);} \\
 P_2 &= 0,33P \cdot 70\% = 0,231P \\
 P_3 &= \gg 35\% = 0,115P \\
 P_4 &= \gg 8\% = 0,026P.
 \end{aligned}$$

Diese Kräfte sind in Fig. 29 b eingeschrieben. Die Momente im Verteilungsträger sind ebenfalls abgebildet, und ihre Grösse ist angeschrieben.

Steht P in der Mitte zwischen zwei Hauptträgern, ändert sich an der Berechnung nichts; nur ist die Einteilung der Wellenlänge $2\alpha x_0$ gemäss der wirklichen Felderteilung auszuführen wie in Fig. 29 c gezeigt; die Berechnung der Drücke und Momente bietet nichts Neues; das Ergebnis ist in der Figur eingeschrieben.

KAPITEL X

Allgemeine Ergebnisse.

Geschlossene Formeln für 3 Hauptträger.

WIR wollen an einem einfachen Rost den Einfluss auf die Lastverteilung einer Variation der Steifigkeit der Querträger derjenigen der Hauptträger gegenüber erforschen. Der Rost ist in Fig. 39 abgebildet, er hat 3 gleiche Hauptträger (I_1, I_1) und nur einen Querträger (I_2, I_2); wir setzen noch voraus, dass $\lambda_1 = \frac{1}{2}l_1$ und $\lambda_2 = \frac{1}{2}l_2$. Die Steifigkeitsverhältnisse sind für den Hauptträger $\mu_1 = \frac{EI_1}{\lambda_1^3}$, für den Querträger $\mu_2 = \frac{EI_2}{\lambda_2^3}$; und wir führen das Verhältnis

$$\alpha = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{I_1}{I_2} \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^3 = \frac{I_1}{I_2} \cdot \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^3$$

als veränderlich ein.

Es wird weiter das Verhältnis $\mu = \frac{EI_1}{l_1^3}$ benötigt; es ist also

$$\mu_1 = 8\mu, \quad \mu_2 = \frac{1}{\alpha} \cdot 8\mu.$$

P in b. Es wird zuerst angenommen, dass die Belastung P sich im Knoten b befindet; P ist eine Einzelkraft. Die Gleichungskoeffizienten sind:

$$Z_{bo} = +P; \quad Z_{ao} = Z_{co} = 0.$$

$$Z_{aa} = +6,0\mu_1 + 1,5\mu_2 = +(6\alpha + 1,5)\mu_2;$$

$$Z_{ab} = -3,0\mu_2;$$

$$Z_{ac} = +1,5\mu_2;$$

$$Z_{bb} = +6,0\mu_1 + 6,0\mu_2 = +6(\alpha + 1)\mu_2;$$

$$Z_{bc} = -3,0\mu_2;$$

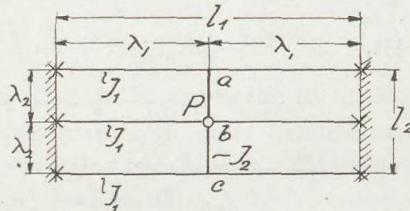


Fig. 39.

und die Gleichungen a) und b):

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad Z_a = 0 &= -(6\alpha + 1,5)\mu_2\zeta_a + 3,0\mu_2\zeta_b - 1,5\mu_2\zeta_c; \\ \text{b)} \quad Z_b = 0 &= +P + 3,0\mu_2\zeta_a - 6(\alpha + 1)\mu_2\zeta_b + 3,0\mu_2\zeta_c; \end{aligned}$$

mit Berücksichtigung der Symmetrie reduzieren sie sich auf

$$\begin{aligned} Z_a = 0 &= -(2\alpha + 1)\zeta_a + \zeta_b; \\ Z_b = 0 &= +\frac{P}{\mu_2} + 6\zeta_a - 6(\alpha + 1)\zeta_b; \end{aligned}$$

und man findet:

$$\begin{aligned} \zeta_a &= +\frac{P}{\mu_2} \cdot \frac{1}{6\alpha(2\alpha + 3)} = +\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{48} \cdot \frac{1}{2\alpha + 3} = \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{48} \cdot \varphi_1(\alpha); \\ \zeta_b &= +\frac{P}{\mu_2} \cdot \frac{2\alpha + 1}{6\alpha(2\alpha + 3)} = +\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{48} \cdot \frac{2\alpha + 1}{2\alpha + 3} = \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{48} \cdot \varphi_2(\alpha); \end{aligned}$$

Die Momente ergeben sich aus:

$$\begin{aligned} \text{im Htr.: } M_a &= -M_{aa}\zeta_a = +3\mu_1\lambda_1 \cdot \zeta_a = & \left. \begin{array}{l} \alpha = 0, \quad M_a = +\frac{1}{12}Pl_1, \\ \alpha = \infty, \quad M_a = 0. \end{array} \right\} \\ &+ \frac{1}{4}Pl_1 \cdot \frac{1}{2\alpha + 3} = +\frac{1}{4}Pl_1 \cdot \varphi_1(\alpha); \\ \gg \quad M_b &= -M_{bb}\zeta_b = +3\mu_1\lambda_1 \cdot \zeta_b = & \left. \begin{array}{l} \alpha = 0, \quad M_b = +\frac{1}{12}Pl_1, \\ \alpha = \infty, \quad M_b = +\frac{1}{4}Pl_1, \end{array} \right\} \\ &+ \frac{1}{4}Pl_1 \cdot \frac{2\alpha + 1}{2\alpha + 3} = +\frac{1}{4}Pl_1 \cdot \varphi_2(\alpha); \\ \gg \quad \text{Qtr.: } M_b^{ac} &= -M_{ba}\zeta_a - M_{bb}\zeta_b - M_{bc}\zeta_c = & \left. \begin{array}{l} \alpha = 0, \quad M_b^{ac} = +\frac{1}{6}Pl_2, \\ \alpha = \infty, \quad M_b^{ac} = 0. \end{array} \right\} \\ &- 1,5\mu_2\lambda_2 \cdot \zeta_a + 3\mu_2\lambda_2 \cdot \zeta_b - 1,5\mu_2\lambda_2 \cdot \zeta_c = \\ &+ Pl_2 \cdot \frac{1}{2(2\alpha + 3)} = \frac{1}{2}Pl_2 \cdot \varphi_1(\alpha); \end{aligned}$$

Die für $\alpha = 0$ (unendlich steife Querträger) gefundenen Werte stimmen mit den im Kap. VIII gegebenen überein; die für $\alpha = \infty$ (unendlich biegsame Querträger, d. h. keine wirksamen Querträger vorhanden), stimmen mit den für einen einfachen Balken (den mittleren Träger) gültigen Werten.

P in a. Es wird jetzt angenommen, dass die Belastung P in a wirkt; die Koeffizienten sind wie oben und die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad Z_a = 0 &= +P - (6\alpha + 1,5)\mu_2\zeta_a + 3\mu_2\zeta_b - 1,5\mu_2\zeta_c; \\ \text{b)} \quad Z_b = 0 &= +3\mu_2\zeta_a - 6(\alpha + 1)\mu_2\zeta_b + 3\mu_2\zeta_c; \\ \text{c)} \quad Z_c = 0 &= -1,5\mu_2\zeta_a + 3\mu_2\zeta_b - (6\alpha + 1,5)\mu_2\zeta_c; \end{aligned}$$

Hier ist keine Symmetrie vorhanden; man findet nach Auflösung der 3 Gleichungen:

$$\zeta_a = + \frac{P}{\mu_2} \cdot \frac{4\alpha + 5}{12\alpha(2\alpha + 3)} = + \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{48} \cdot \frac{4\alpha + 5}{2(2\alpha + 3)} = + \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{48} \cdot \varphi_3(\alpha);$$

$$\zeta_b = + \frac{P}{\mu_2} \cdot \frac{1}{6\alpha(2\alpha + 3)} = + \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{48} \cdot \frac{1}{2\alpha + 3} = + \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{48} \cdot \varphi_1(\alpha);$$

$$\zeta_c = - \frac{P}{\mu_2} \cdot \frac{1}{12\alpha(2\alpha + 3)} = - \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{48} \cdot \frac{1}{2(2\alpha + 3)} = - \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{48} \cdot \frac{1}{2} \varphi_1(\alpha).$$

Die Momente sind:

$$\text{im Htr.: } M_a = + Pl_1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4\alpha + 5}{2(2\alpha + 3)} = + \frac{1}{4} Pl_1 \cdot \varphi_3(\alpha); \begin{cases} \alpha = 0, & M_a = + \frac{5}{4} Pl_1 \\ \alpha = \infty, & M_a = + \frac{1}{4} Pl_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \Rightarrow \quad M_b = + Pl_1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2\alpha + 3} = + \frac{1}{4} Pl_1 \cdot \varphi_1(\alpha); \begin{cases} \alpha = 0, & M_b = + \frac{1}{2} Pl_1 \\ \alpha = \infty, & M_b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \Rightarrow \quad M_c = - Pl_1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2(2\alpha + 3)} = - \frac{1}{4} Pl_1 \cdot \frac{1}{2} \varphi_1(\alpha); \begin{cases} \alpha = 0, & M_c = - \frac{1}{4} Pl_1 \\ \alpha = \infty, & M_c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Qtr.: } M_b^{ac} = - Pl_2 \cdot \frac{1}{4(2\alpha + 3)} = - Pl_2 \cdot \frac{1}{4} \varphi_1(\alpha); \begin{cases} \alpha = 0, & M_b^{ac} = - \frac{1}{2} Pl_2 \\ \alpha = \infty, & M_b^{ac} = 0 \end{cases}$$

Wie beim obigen Fall stimmen auch hier die Grenzwerte, für $\alpha = 0$ und $\alpha = \infty$ mit den direkt zu ermittelnden überein. Die Funktionen $\varphi_1(\alpha)$, $\varphi_2(\alpha)$, $\varphi_3(\alpha)$, welche durch die Formeln für ζ und M definiert sind, sind in der folgenden Tabelle für verschiedene α -Werte ausgerechnet; den verschiedenen Steifigkeitsverhältnissen α entsprechen, für $I_1 = I_2$, bestimmte Feldweitenverhältnisse $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}$; diese sind in der zweiten Kolonne der Tabelle angegeben.

Für $\lambda_1 = \lambda_2$ ist $\frac{I_1}{I_2} = \alpha$:	Für $I_1 = I_2$ ist $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}$:	$\varphi_1(\alpha)$	$\varphi_2(\alpha)$	$\varphi_3(\alpha)$
0	∞	0,3333	0,3333	0,8333
0,01	4,65	0,3311	0,3377	0,8344
0,10	2,15	0,3125	0,3750	0,8438
0,5	1,26	0,2500	0,5000	0,8750
1,0	1,00	0,2000	0,6000	0,9000
2,0	0,79	0,1429	0,7143	0,9286
10,0	0,47	0,0435	0,9130	0,9783
100,0	0,21	0,0049	0,9901	0,9975
∞	0,00	0,0000	1,0000	1,0000

Die durch die Tabelle gefundenen Werte von $\zeta_a \zeta_b \zeta_c$ und vom Moment im Querträger sind als Kurven in Fig. 31-38, Seite 137-141, gestrichelt aufgezeichnet;

sie decken sich teilweise mit den aufgezogenen Linien, (s. unten). Da der durchgerechnete Rost als Sonderfall des folgenden aufzufassen sein wird, sei für die nähere Besprechung der Kurven auf das Nachstehende hingewiesen.

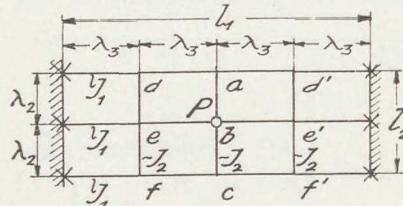


Fig. 40.

Nach der vorhergehenden Berechnung des einfachen Rastes in Fig. 39 möchten wir noch die Wirkung der Hinzufügung weiterer zwei Querträger verfolgen; in der Fig. 40, die ein weit komplizierteres System darstellt, werden wir die Durchbiegungen und Momente ermitteln, immer als Funktion

des Steifigkeitsverhältnisses α . Die Bezeichnungen sind wie vorher;

$$\text{Mit } \lambda_3 = \frac{1}{2} \lambda_1, \quad \mu_3 = \frac{EI_1}{\lambda_3^3}, \quad \text{und, wie oben:}$$

$$\mu_1 = \alpha \mu_2, \quad \mu_3 = 8\alpha \mu_2, \quad \text{und} \quad \mu_1 = 8\mu, \quad \mu_2 = \frac{1}{\alpha} 8\mu; \quad \mu_3 = 64\mu,$$

$$\text{wo} \quad \mu_1 = \frac{EI_1}{\lambda_1^3}, \quad \mu_2 = \frac{EI_2}{\lambda_2^3}, \quad \mu = \frac{EI_1}{l_1^3}, \quad \alpha = \frac{I_1}{I_2} \cdot \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^3.$$

Die Matrix des Gleichungssystems ist

$$\begin{array}{cccccc} d & e & f & a & & d_1 \\ d & e & f & b & & e_1 \\ d & e & f & c & & f_1 \\ d & & a & b & c & d_1 \\ e & & a & b & c & e_1 \\ f & a & b & c & & f_1 \\ d & & a & & d_1 & e_1 & f_1 \\ e & & b & & d_1 & e_1 & f_1 \\ f & & c & d_1 & e_1 & f_1 \end{array} .$$

und die Koeffizienten sind:

$$\begin{aligned} Z_{aa} &= + 13,7143 \mu_3 + 1,5 \mu_2 = \mu_2 (1,5 + 109,7144 \alpha); \\ Z_{ab} &= &= - 3,0 \mu_2; \\ Z_{ac} &= &= + 1,5 \mu_2; \\ Z_{ad} &= - 9,42858 \mu_3 &= - 75,4286 \alpha \mu_2; \\ Z_{bb} &= + 13,7143 \mu_3 + 6,0 \mu_2 &= + \mu_2 (6,0 + 109,7144 \alpha); \\ Z_{dd} &= + 9,85715 \mu_3 + 1,5 \mu_2 &= + \mu_2 (1,5 + 78,8572 \alpha); \\ Z_{dd}' &= + 3,85715 \mu_3 &= + 30,8572 \cdot \mu_2; \\ Z_{ee} &= + 9,85715 \mu_3 + 6,0 \mu_2 &= + \mu_2 (6,0 + 78,8572 \alpha). \end{aligned}$$

P in b . Die entsprechenden Gleichungen sind, mit

$$\zeta_d = \zeta_{d'}, \quad \zeta_f = \zeta_{f'}, \quad \zeta_e = \zeta_{e'}, \quad \zeta_a = \zeta_c:$$

- a) $0 = + 150,8572 \alpha \zeta_d - (3,0 + 109,7144 \alpha) \zeta_a + 3 \zeta_b;$
- b) $0 = + \frac{P}{\mu_2} + 150,8572 \alpha \zeta_e + 6 \zeta_a - (6 + 109,7144 \alpha) \zeta_b;$
- d) $0 = - (3,0 + 109,7144 \alpha) \zeta_d + 3 \zeta_e + 75,4286 \alpha \zeta_a;$
- e) $0 = + 6 \zeta_d - (6 + 109,7144 \alpha) \zeta_e + 75,4286 \alpha \zeta_b;$

Nach einer etwas langwierigen Auflösung erhält man:

$$\left. \begin{array}{l} \zeta_a = + \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} (329,14 + 7805,40 \alpha) \\ \zeta_d = + \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} (226,29 + 5517,07 \alpha) \\ \zeta_b = + \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} (329,14 + 8463,72 \alpha + 8025,45 \alpha^2) \\ \zeta_e = + \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} (226,29 + 5517,07 \alpha + 5517,14 \alpha^2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} N = + 5924,7 \\ + 48144,4 \alpha^2 \\ + 144450,1 \alpha. \end{array}$$

Nun kann man zur Berechnung der Momente schreiten:

$$\text{im Htr.: } M_d^{\text{Htr.}} = - M_{dd} \zeta_d - M_{da} \zeta_a - M_{dd'} \zeta_{d'}$$

und die analogen für $M_e^{\text{Htr.}}$, $M_a^{\text{Htr.}}$ und $M_b^{\text{Htr.}}$.

Nach Ausrechnung erhält man

$$\begin{aligned} M_d^{\text{Htr.}} &= + \frac{1}{N} \cdot Pl_1 (246,90 + 7146,93 \alpha); \\ M_e^{\text{Htr.}} &= + \frac{1}{N} \cdot Pl_1 (246,90 + 3761,28 \alpha + 6015,84 \alpha^2); \\ M_a^{\text{Htr.}} &= + \frac{1}{N} \cdot Pl_1 (493,6 + 10156,48 \alpha); \\ M_b^{\text{Htr.}} &= + \frac{1}{N} \cdot Pl_1 (493,6 + 15799,23 \alpha + 12041,9 \alpha^2); \end{aligned}$$

und für den Querträger:

$$M_e^{\text{Qtr.}} = - M_{ee} \zeta_e - 2 M_{ed} \zeta_d = + \frac{1}{N} \cdot Pl_2 \cdot 8275,71 \alpha;$$

$$M_b^{\text{Qtr.}} = - M_{bb} \zeta_b - 2 M_{ba} \zeta_a = + \frac{1}{N} \cdot Pl_2 \cdot (987,4 + 12038,1 \alpha).$$

(Als Kontrolle hat man, dass $\frac{1}{4} l_1 (2M_d + M_b) = \frac{1}{2} P$; nach Ausrechnung der Zahlen zeigt sich, dass diese Gleichung erfüllt ist.)

P in a . Dieser Fall wird nach dem Belastungs-Umordnungs-Verfahren berechnet; wir teilen die Belastung in zwei Teile: 1) $+\frac{1}{2}P$ in a und c , 2) $+\frac{1}{2}P$ in a , $-\frac{1}{2}P$ in c .

1) $+\frac{1}{2}P$ in a und c , also

$$\zeta_a = \zeta_c, \quad \zeta_d = \zeta_{d'} = \zeta_f = \zeta_{f'}; \quad \zeta_e = \zeta_{e'}.$$

Die Gleichungen sind

- a) $0 = +\frac{1}{2} \frac{P}{\mu_2} + 150,8572 \alpha \zeta_d - (3,0 + 109,7144 \alpha) \zeta_a + 3 \zeta_b;$
- b) $0 = +150,8572 \alpha \zeta_b + 6 \zeta_a - (6 + 109,7144 \alpha) \zeta_b;$
- d) $0 = -(3,0 + 109,7144 \alpha) \zeta_d + 3 \zeta_e + 75,4286 \alpha \zeta_a;$
- e) $0 = +6 \zeta_d - (6 + 109,7144 \alpha) \zeta_e + 75,4286 \alpha \zeta_b;$

ihre Auflösung ergibt:

$$\zeta_a = +\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} (+329,14 + 8134,55 \alpha + 4012,51 \alpha^2);$$

$$\zeta_d = +\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} (+226,29 + 5517,07 \alpha + 2758,61 \alpha^2);$$

$$\zeta_b = +\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} (+329,14 + 7805,41 \alpha).$$

$$\zeta_e = +\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} (+226,29 + 5517,07 \alpha).$$

2) $+\frac{1}{2}P$ in a , $-\frac{1}{2}P$ in c , also

$$\zeta_e = \zeta_b = \zeta_{e'} = 0, \quad \zeta_d = -\zeta_f = \zeta_{d'} = -\zeta_{f'}; \quad \zeta_a = -\zeta_c;$$

durch Einsetzung dieser Werte in die originalen Gleichungen

- a) $Z_a = 0 = +\frac{1}{2} \frac{P}{\mu_2} + 75,4286 \alpha \zeta_d - (1,5 + 109,7144 \alpha) \zeta_a + 3 \zeta_b - 1,5 \zeta_c + 75,4286 \zeta_{d'},$
- d) $Z_d = 0 = -(1,5 + 78,8572 \alpha) \zeta_d + 3 \zeta_e - 1,5 \zeta_f + 75,4286 \alpha \zeta_a - 30,8572 \alpha \zeta_{d'})$

erhält man

$$-\zeta_c = \zeta_a = +\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (493,72 + 12037,51 \alpha + 4012,03 \alpha^2);$$

$$-\zeta_f = \zeta_d = +\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (339,43 + 2758,28 \alpha^2 + 8275,81 \alpha);$$

und die Superposition der beiden Fälle ergibt die endlichen Werte:

$$\begin{aligned}\zeta_a &= + \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+ 822,86 + 20172,06\alpha + 8025,00\alpha^2); \\ \zeta_d &= + \quad \Rightarrow \quad \cdot (+ 565,72 + 13792,88\alpha + 5517,07\alpha^2). \\ \zeta_c &= - \quad \Rightarrow \quad \cdot (+ 164,58 + 3903,00\alpha). \\ \zeta_f &= - \quad \Rightarrow \quad \cdot (+ 113,14 + 2758,74\alpha). \\ \zeta_b &= + \quad \Rightarrow \quad \cdot (+ 329,14 + 7805,40\alpha). \\ \zeta_e &= + \quad \Rightarrow \quad \cdot (+ 226,29 + 5517,07\alpha).\end{aligned}$$

Die Momente sind:

für die Hauptträger:

$$\begin{aligned}M_d &= + \frac{Pl_1}{N} \cdot (617,16 + 14482,21\alpha + 6017,56\alpha^2) \\ M_e &= + \quad \Rightarrow \quad \cdot (+ 246,90 + 7146,93\alpha) \\ M_f &= - \quad \Rightarrow \quad \cdot (+ 123,36 + 3573,68\alpha) \\ M_a &= + \quad \Rightarrow \quad \cdot (+ 1234,26 + 31033,90\alpha + 12038,77\alpha^2) \\ M_b &= + \quad \Rightarrow \quad \cdot (+ 493,64 + 10156,48\alpha) \\ M_c &= - \quad \Rightarrow \quad \cdot (+ 246,90 + 5078,70\alpha).\end{aligned}$$

für die Querträger:

$$\begin{aligned}M_e &= - \frac{P\lambda_2}{N} \cdot (8275,61\alpha) \\ M_b &= - \quad \Rightarrow \quad \cdot (987,4 + 12037,5\alpha).\end{aligned}$$

Die Kontrolle: $\frac{1}{\frac{1}{4}l_1}(M_d + M_e + M_f) = \frac{1}{2}P$ erweist sich als zutreffend.

P in e . Symmetrie vorhanden. Der Maxwell'sche Satz giebt uns aus den vorstehenden 2 Berechnungen direkt die unserem Fall (P in e) entsprechenden ζ_a und ζ_b ; aus den vier Gleichungen a) b) d) e) hätte man dann die zwei Unbekannten ζ_d und ζ_e finden können, und nachher ergäben die Gleichungen e₁) und d₁) die noch fehlenden ζ_c und ζ_d .

Es ist jedoch eben so leicht auch hier das B.-U.-Verfahren anzuwenden.

1) $+ \frac{1}{2}P$ in e und e_1 ; doppelte Symmetrie; Unbekannte $\zeta_a \zeta_b \zeta_c \zeta_d$; von diesen sind doch ζ_a und ζ_b einfach aus den bei den vorigen Fällen (P in a und P in b) berechneten Werten bekannt; ζ_a ist nämlich gleich der zweifachen Durchbiegung ζ_a' , welche von » $+ \frac{1}{2}P$ in e « herröhrt, und diese ζ_a' ist (wegen des Maxwell'schen Satzes) gleich der Durchbiegung ζ_e' , welche von » $+ \frac{1}{2}P$ in a « hervorgerufen wird; also ist die gesuchte ζ_a gleich ζ_e (für P in a); diese ist:

$$\zeta_a = \zeta_e^{P \text{ in } a} = + \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} (+ 226,29 + 5517,07\alpha);$$

in gleicher Weise ist

$$\zeta_b = \zeta_e^{P \text{ in } b} = + \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} (+ 226,29 + 5517,07 \alpha + 5517,14 \alpha^2).$$

Unter Einführung dieser 2 Größen sucht man nun ζ_d und ζ_e aus den Gleichungen:

$$\text{d)} \quad Z_d = 0 = -(1,5 + 78,8572 \alpha) \zeta_d + 3 \zeta_e - 1,5 \zeta_f + 75,4286 \alpha \zeta_a \\ - 30,8572 \alpha \zeta_{d'};$$

$$\text{e)} \quad Z_e = 0 = + \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{\mu_2} + 3 \zeta_d - (6 + 78,8572 \alpha) \zeta_e + 3 \zeta_f + 75,4286 \alpha \zeta_b \\ - 30,8572 \alpha \zeta_{e'};$$

wir setzen hier $\zeta_d = \zeta_{d'} = \zeta_f = \zeta_{f'}$ und $\zeta_a = \zeta_c$, $\zeta_e = \zeta_{e'}$; die Auflösung ergibt:

$$\zeta_d = + \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+ 164,58 + 3902,69 \alpha).$$

$$\zeta_e = + \quad \cdot (- 164,58 + 4232,04 \alpha + 4012,09 \alpha^2).$$

2) $+ \frac{1}{2} P$ in e , $- \frac{1}{2} P$ in e_1 ; umgekehrte Symmetrie.

Unbekannte ζ_d und ζ_e ; ($\zeta_a = \zeta_b = \zeta_c = 0$).

Die Gleichungen sind:

$$\text{d)} \quad Z_d = 0 = -(1,5 + 78,8572 \alpha) \zeta_d + 3 \zeta_e - 1,5 \zeta_f + 75,4286 \alpha \zeta_a \\ - 30,8572 \alpha \zeta_{d'};$$

$$\text{e)} \quad Z_e = 0 = + \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{\mu_2} + 3 \zeta_d - (6 + 78,8572 \alpha) \zeta_e + 3 \zeta_f + 75,4286 \alpha \zeta_b \\ - 30,8572 \alpha \zeta_{e'},$$

wo man

$$\zeta_a = \zeta_b = \zeta_c = 0, \quad \zeta_d = \zeta_f = - \zeta_{d'} = - \zeta_{f'}, \quad \zeta_e = - \zeta_{e'}$$

einführen kann; dadurch erhält man:

$$\zeta_d = + \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{768} \cdot \frac{1}{3 + 16\alpha}, \quad \zeta_e = + \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{768} \cdot \frac{1 + 16\alpha}{3 + 16\alpha}.$$

Die endlichen ζ -Werte für P in e werden nun:

$$\zeta_a = + \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+ 226,29 + 5517,07 \alpha).$$

$$\zeta_b = + \quad \cdot (+ 226,29 + 5517,07 \alpha + 5517,14 \alpha^2).$$

$$\zeta_d = + \quad \cdot (+ 164,58 + 3902,69 \alpha) + \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{768} \cdot \frac{1}{3 + 16\alpha}.$$

$$\zeta_e = + \quad \cdot (+ 164,58 + 4232,04 \alpha + 4012,09 \alpha^2) + \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{768} \cdot \frac{1 + 16\alpha}{3 + 16\alpha}.$$

$$\zeta_{d'} = + \quad \cdot (+ 164,58 + 3902,69 \alpha) - \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{768} \cdot \frac{1}{3 + 16\alpha}.$$

$$\zeta_{e'} = + \quad \cdot (+ 164,58 + 4232,04 \alpha + 4012,09 \alpha^2) - \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{768} \cdot \frac{1 + 16\alpha}{3 + 16\alpha}.$$

Die Momente werden:
 für die Hauptträger:

$$M_f = M_d = + \frac{Pl_1}{N} \cdot (+ 246,90 + 5078,00\alpha) + \frac{1}{16} Pl_1 \cdot \frac{1}{3+16\alpha}.$$

$$M_e = + \frac{Pl_1}{N} \cdot (+ 246,90 + 7901,00\alpha + 6015,71\alpha^2) + \frac{1}{16} Pl_1 \cdot \frac{1+16\alpha}{3+16\alpha}.$$

$$M_c = M_a = + \frac{Pl_1}{N} \cdot (+ 246,90 + 7147,03\alpha).$$

$$M_b = + \frac{Pl_1}{N} \cdot (+ 246,90 + 3759,43\alpha + 6021,78\alpha^2).$$

$$M_{d'} = + \frac{Pl_1}{N} \cdot (+ 246,90 + 5078,00\alpha) - \frac{1}{16} Pl_1 \cdot \frac{1}{3+16\alpha}.$$

$$M_{e'} = + \frac{Pl_1}{N} \cdot (+ 246,90 + 7901,00\alpha + 6015,71\alpha^2) - \frac{1}{16} Pl_1 \cdot \frac{1+16\alpha}{3+16\alpha}.$$

für die Querträger:

$$M_e = + \frac{Pl_2}{N} \cdot (+ 494,0 + 6018,1\alpha) + \frac{1}{4} Pl_2 \cdot \frac{1}{3+16\alpha}.$$

$$M_b = + \frac{Pl_2}{N} \cdot (+ 8275,7\alpha).$$

$$M_{e'} = + \frac{Pl_2}{N} \cdot (+ 494,0 + 6018,1\alpha) - \frac{1}{4} Pl_2 \cdot \frac{1}{3+16\alpha}.$$

Die zwei Kontrollen: $\frac{1}{\frac{1}{4} l_1} \cdot (2M_d + M_e) = \frac{3}{4} P$,
 $\frac{1}{\frac{1}{4} l_1} \cdot (2M_{d'} + M_{e'}) = \frac{1}{4} P$, stimmen.

P in d. Von den bereits berechneten 3 Fällen sind hier die Werte $\zeta_a \zeta_b \zeta_c \zeta_e \zeta_{e'}$ durch den Maxwell'schen Satz bekannt; die Unbekannten sind nur $\zeta_d \zeta_{d'} \zeta_f \zeta_{f'}$; die 3 ersten werden aus den Gleichungen a) d) e) gefunden; die letzte $\zeta_{f'}$ kann nachher aus der Gleichung c) berechnet werden.
 Die Lösungen sind:

$$\zeta_d = + \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+ 473,14 + 11590,82\alpha + 4513,88\alpha^2) - \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{1536} \cdot \frac{1}{3+16\alpha}.$$

$$\zeta_e = + \quad \» \quad \cdot (+ 164,58 + 3902,69\alpha) + \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{768} \cdot \frac{1}{3+16\alpha}.$$

$$\zeta_f = - \quad \» \quad \cdot (+ 143,98 + 3456,09\alpha + 501,74\alpha^2) + \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{1536} \cdot \frac{5+32\alpha}{3+16\alpha}.$$

$$\zeta_a = + \quad \» \quad \cdot (+ 565,72 + 13792,88\alpha + 5517,07\alpha^2).$$

$$\zeta_b = + \quad \» \quad \cdot (+ 226,29 + 5517,07\alpha).$$

$$\zeta_c = - \quad \» \quad \cdot (+ 113,14 + 2758,74\alpha).$$

$$\zeta_{d'} = + \quad \» \quad \cdot (+ 349,73 + 8581,28\alpha + 3510,95\alpha^2) + \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{1536} \cdot \frac{1}{3+16\alpha}.$$

$$\zeta_{e'} = + \quad \» \quad \cdot (+ 164,58 + 3902,69\alpha) - \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{768} \cdot \frac{1}{3+16\alpha}.$$

$$\zeta_{f'} = - \quad \» \quad \cdot (+ 20,59 + 446,91\alpha - 501,74\alpha^2) - \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{1536} \cdot \frac{5+32\alpha}{3+16\alpha}.$$

Die Momente sind:

für die Hauptträger:

$$M_d = + \frac{Pl_1}{N} \cdot (+ 987,39 + 24545,34\alpha + 9027,29\alpha^2) - \frac{Pl_1}{32} \cdot \frac{1}{3+16\alpha}.$$

$$M_e = + \frac{Pl_1}{N} \cdot (+ 246,90 + 5078,00\alpha) + \frac{1}{16} Pl_1 \cdot \frac{1}{3+16\alpha}.$$

$$M_f = + \frac{Pl_1}{N} \cdot (- 493,61 - 11566,81\alpha - 3010,44\alpha^2) + \frac{1}{32} Pl_1 \cdot \frac{5+32\alpha}{3+16\alpha}.$$

$$M_a = + \frac{Pl_1}{N} \cdot (+ 617,14 + 14482,56\alpha + 6018,66\alpha^2).$$

$$M_b = + \frac{Pl_1}{N} \cdot (246,81 + 7147,25\alpha).$$

$$M_c = - \frac{Pl_1}{N} \cdot (+ 123,41 + 3573,78\alpha).$$

$$M_{d'} = + \frac{Pl_1}{N} \cdot (+ 246,93 + 6488,10\alpha + 3009,71\alpha^2) + \frac{1}{32} Pl_1 \cdot \frac{1}{3+16\alpha}.$$

$$M_{e'} = + \frac{Pl_1}{N} \cdot (+ 246,90 + 5078,00\alpha) - \frac{1}{16} Pl_1 \cdot \frac{1}{3+16\alpha}.$$

$$M_{f'} = + \frac{Pl_1}{N} \cdot (+ 246,90 + 6488,27\alpha + 3010,44\alpha^2) - \frac{1}{32} Pl_1 \cdot \frac{5+32\alpha}{3+16\alpha}.$$

und für die Querträger:

$$M_e = - \frac{Pl_2}{N} \cdot (+ 247,0 + 3009,1\alpha) - \frac{1}{8} Pl_2 \cdot \frac{1}{3+16\alpha}.$$

$$M_b = - \frac{Pl_2}{N} \cdot (4137,8\alpha).$$

$$M_{e'} = - \frac{Pl_2}{N} \cdot (+ 247,0 + 3009,1\alpha) + \frac{1}{8} Pl_2 \cdot \frac{1}{3+16\alpha}.$$

Die zwei Kontrollen:

$$\frac{1}{\frac{1}{4} l_1} \cdot (M_d + M_e + M_f) = \frac{3}{4} P,$$

$$\frac{1}{\frac{1}{4} l_1} \cdot (M_{d'} + M_{e'} + M_{f'}) = \frac{1}{4} P,$$

erweisen sich als richtig:

Die für die vier Stellungen der Belastung P gefundenen ζ -Werte sind in der Tabelle 16 zusammengestellt; die rechte Seite der Tabelle enthält die Grenzwerte; diese Kolonnen zeigen, dass die Zahlen mit den in der Tabelle 15 berechneten Durchbiegungszahlen eines einfachen Balkens übereinstimmen; alle Zahlen für $\alpha = 0$ stimmen noch mit den Werten (Kap. VIII) für unendlich steife Querträger und also auch mit den Durchbiegungen, welche für den nur einen Querträger enthaltenden

Rost (Fig. 39) gelten. Auf die quasi-Proportionalitäten, welche in den Zahlen enthalten sind, kommen wir nachher zurück.

Die Tabelle 17 zeigt die durch Ausrechnung der gleichen Formeln gefundenen Zahlen für verschiedene α -Werte. Die Kurvenfiguren 31—34 sind eine graphische Darstellung dieser Tabelle. Endlich sind die in der Tabelle 18 zusammengestellten Werte der Querträgermomente in der Tabelle 19 ausgewertet; die entsprechenden Kurven zeigen Fig. 35—38, Seite 137—141.

Einfache Regeln der Lastverteilung.

Aus den Kurven Fig. 31—34 und 35—38 können wir einige einfache Regeln aufstellen, die nicht nur für den durchgerechneten Fall (3 Hauptträger) verwendbar sind, sondern auch für mehrere Hauptträger sinngemäße Gültigkeit haben; dabei ist immer I und λ konstant vorausgesetzt. Wir teilen unsere Überlegungen in die folgenden Punkte ein:

1) Statt mit der oben verwendeten Veränderlichen

$$\alpha = \frac{I_1}{I_2} \cdot \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^3$$

ziehen wir vor, für einen beliebigen Rost Fig. 41 mit dem Wert

$$\beta = \frac{I_1}{I_2} \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^3$$

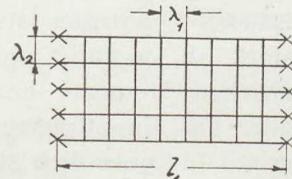


Fig. 41.

zu rechnen. Die *Steifigkeitsverhältnisse* β sind dann für verschiedene Roste vergleichbar, was nicht für α der Fall ist. (Die Abszissen der Kurven Fig. 31—38 sind also durch $\beta = \frac{1}{8} \cdot \alpha$ umzurechnen). Wenn wir nun für eine willkürliche Durchbiegung

$$\zeta = \frac{1}{48} \cdot \frac{P}{\mu} \cdot \varphi(\alpha), \text{ wo } \mu = \frac{EI_1}{l_1^3}$$

schreiben wollen, dann ist allgemein für die Koeffizientenaufstellung:

$$\mu_1 = \frac{EI_1}{\lambda_1^3} = K \cdot \mu,$$

wo K eine Konstante ist, und

$$\mu_2 = \frac{IE_2}{\lambda_2^3} = \frac{1}{\beta} \cdot \mu,$$

wo $\beta = \text{Steifigkeitsverhältnis des Rostes}$ ist.

2) Die Kurven zeigen, dass für kleine und grosse β die Biegelinien der Hauptträger denjenigen ähnlich sind, welche für einen einfachen Balken gelten; die Hilfswerte (Tabelle 15), die für die stufenweise Be-

rechnung Anwendung finden, haben also eine recht ausgedehnte Gültigkeit; in den Kurven ist die Ähnlichkeit bis zu $\beta = 0,01$ praktisch vollkommen, und für den übrigen Bereich trifft sie gut zu.

3) Es ist ebenfalls aus den Kurven ersichtlich, dass es für sehr steife und sehr biegsame Querträger ($\beta < 0,01$ und $\beta > 1,0$) ohne weiteres gestattet ist, nur mit dem belasteten Querträger zu rechnen, hier liegt die Berechtigung der im Kap. VI dargestellten stufenweisen Berechnung. Für die mittleren β -Werte ist die Abweichung grösser; immerhin ist diese Berechnungsmethode mit einiger Vorsicht verwendbar. Wird die Berechnung mit nur den belasteten Querträgern durchgeführt, so wird sie die Durchbiegung des belasteten Hauptträgers zu gross ergeben; die der unbelasteten Hauptträger wird zu klein ausfallen. Für die Randträger ist es genauer nur den belasteten Querträger mitzunehmen als für die inwendig liegenden Hauptträger.

4) Die Kurven Fig. 35-38 geben Aufschluss über die Momente in den Querträgern. Die Momente sind selbstverständlich viel grösser im belasteten Querträger als in den unbelasteten, und alle Momente fallen stark ab, wenn β gross wird. Der belastete Querträger ist durch die gleichen Momente beansprucht, ob er sich in der Hauptträgermitte oder am Hauptträgerende befindet (M_b für P in $b = M_e$ für P im e), genau für unendlich steife Querträger.

Für mittlere Steifigkeitsverhältnisse sind auch die unbelasteten Querträger durch erhebliche Momente beansprucht; eine stufenweise Berechnung, welche nur den belasteten Querträger mitnimmt, gibt trotz ihrer Verwendbarkeit für die Hauptträger keine grosse Genauigkeit in der Berechnung der Querträgermomente; sie ergibt zu grosse Momente im Querträger; nur für sehr biegsame Querträger (große β -Werte, aber nicht für kleine β) ist die stufenweise Berechnung auch für die Querträgermomente ohne grosse Fehler zu verwenden.

5) Die Kurven Fig. 31-34 und 35-38 geben Anhaltspunkte für eine Schätzung der Lastverteilung bei einem gegebenen Rost. Die zwei Endpunkte jeder Kurve ($\beta = 0$ und $\beta = \infty$) sind immer bekannt: für $\beta = 0$ gibt die Zusammenstellung Kap. VIII für unendlich steife Querträger direkt entsprechende Zahlen an, für $\beta = \infty$ hat man keine Querträger; nur die belasteten Hauptträger biegen durch. Wenn das Steifigkeitsverhältnis β gegeben ist — wenn auch nur nach grösster Schätzung — so ist es möglich nach dem wahrscheinlichen Verlauf der in Frage stehenden ζ -Kurven einen ungefähren Wert der Verteilung zu wählen, der für gewisse Fälle vielleicht gerade genügend genau wäre.

6) Die bestmögliche Lastverteilung über die gegebenen Hauptträger eines Rostes ist durch unendlich steife Querträger zu erreichen; diese sind wenn möglich unter jeder Einzellast vorzusehen; bei beweglicher

Last wähle man praktisch den Querträgerabstand gleich dem Minimumsabstande der (beweglichen) Einzelkräfte.

7) Man kann aus den Kurven noch einige interessante Regeln bestätigt finden. Für jeden Querträger (belasteten oder unbelasteten) muss die Deformationsarbeit für gleiche Belastung aber variierendes Steifigkeitsverhältnis konstant sein, d. h. die Durchbiegungen der Knoten jedes Querträgers müssen (unter den Voraussetzungen dieses Kapitels) immer die gleiche Summe haben, wenn sich die Lastverteilung ändert. In Fig. 42 sind die Durchbiegungen des Querträgers abc für Belastung P in b dargestellt, u. z. für $\beta = 0,125$; den ausgezogenen Kurven ent-

nehmen wir, dass ζ_b und ζ_a (und ζ_c) rund die Hälfte und das Viertel von $\frac{1}{48} \cdot \frac{P}{\mu}$ betragen. (Ausgezogene Linie). Hätten wir nur den mittleren Querträger berücksichtigt (punktirte Kurve Fig. 42), gäbe die Berechnung

$$\zeta_b = 0,6 \cdot \frac{1}{48} \cdot \frac{P}{\mu} \quad \text{und} \quad \zeta_a = 0,20 \cdot \frac{1}{48} \cdot \frac{P}{\mu},$$

(punktirte Linie), also immer

$$\zeta_a + \zeta_b + \zeta_c = \frac{1}{48} \cdot \frac{P}{\mu}.$$

Auch für die unbelasteten Querträger (P in a,b,c,d) ergeben die Kurven, dass die Summe der ζ -Werte eines Querträgers gleich der Durchbiegung (im Auflagerpunkt des Querträgers) eines freien Hauptträgers ist ($\beta = \infty$).

Für einen willkürlichen Rost ist die Summe der Durchbiegungen an einem Querträger entlang = der Durchbiegung eines freien Hauptträgers; diese Querträgerdurchbiegungen sind nämlich = den entsprechenden Hauptträgerdurchbiegungen, und die Summe letzterer ist konstant, da die Summe der Hauptträgerbelastungen gleich P ist.

8) Die Genauigkeit der Berechnung mit dem im Kap. VI eingeführten ideellen Querträger lässt sich ebenfalls durch Fig. 31-34 nachprüfen. Führen wir bei der ersten Stufe statt des einfachen Querträgers abc (mit Steifigkeitsverhältnis β) einen ideellen Querträger (mit Steifigkeitsverhältnis $\frac{\Sigma \zeta_{m,r}}{\zeta_{m,m}} \cdot \frac{1}{\beta}$) ein; die Tabelle 15 (oder die Kurven Fig. 31-34 für $\beta = \infty$) gibt dann:

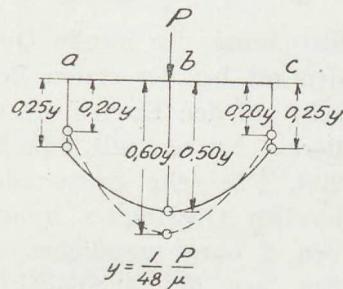


Fig. 42.

$$\zeta_{m,m} = \frac{1}{48} \cdot \frac{P}{\mu}$$

und

$$\Sigma \zeta_{m,r} = \frac{1}{48} \cdot \frac{P}{\mu} \cdot (0,688 + 1,000 + 0,688) = \frac{1}{48} \cdot \frac{P}{\mu} \cdot 2,376;$$

also muss der ideelle Querträger abc 2,376-fach steifer gemacht werden als bei der ersten Berechnung vorausgesetzt. Die Zahl entspricht sehr gut den Kurven, wo eine Multiplikation der Abszissen der punktierten Kurven mit $2 \text{ à } 2\frac{1}{2}$ die entsprechende ausgezogene Kurve ergibt. Für sehr grosse oder sehr kleine β ist die Einführung eines ideellen Querträgers belanglos, weil eine sehr bedeutende Variation von β ohne merklichen Einfluss auf die Verteilung ist. So hat z. B. der Rost des Zahlenbeispiels im Kap. VI sehr gute Berechnungsergebnisse geliefert, ohne dass man von diesem Kunstgriff Gebrauch gemacht hat. Das Steifigkeitsverhältnis ist

$$\beta = \frac{I_1}{I_2} \cdot \left(\frac{\lambda_2}{l_1} \right)^3 = 5 \cdot \left(\frac{1}{10} \right)^3 = 0,005$$

also recht klein; für 2 ideelle Querträger in den Knoten 4 und 6 hätte man (s. Tabelle 15): $\zeta_4 = \zeta_6 = \zeta_{m,m}$

$$\begin{array}{ll} \zeta_1 & = 0,317 \cdot \zeta_4 \\ \zeta_2 & = 0,608 \cdot » \\ \zeta_3 & = 0,848 \cdot » \\ \zeta_4 & = 1,000 \cdot » \\ \frac{1}{2} \zeta_5 & = 0,527 \cdot » \\ \hline \frac{1}{2} \Sigma \zeta_{m,r} & = 3,300 \cdot \zeta_4 \quad \text{gefunden.} \end{array}$$

Man hätte also jedem der beiden ideellen Querträger die 3,3-fache Steifigkeit (also $\frac{1}{3,3} \cdot 0,005$) zuteilen sollen; die Berechnung hätte doch natürlich fast die gleichen Ergebnisse geliefert.

B. PRAKTISCHER TEIL

KAPITEL XI

Anwendungen auf Eisenbetonbrücken.

BEI den monolithischen Konstruktionen spielen Lastverteilungen aller Art eine grosse Rolle; die tragenden Hauptteile sind durch Platten oder andere Querverbindungen ausgesteift, und oft ist der Weg der Kräfte nur unklar zu erkennen; bei der statischen Berechnung muss man sich darauf beschränken die einzelnen Tragelemente freizulegen und ihre Belastung abzuschätzen.

Dieser Vorgang ist zwar einfach aber nicht immer befriedigend, weil man eben einige Vorteile der Massivkonstruktionen ausschaltet; insbesondere denjenigen, dass sich eine Eisenbetonkonstruktion als elastische Gesamtheit verhält, wo bei auftretender Belastung die direkt belasteten Teile von den unbelasteten unterstützt werden; so werden alle mit einander verbundenen Tragelemente in Mitleidenschaft gezogen. Das Zusammenarbeiten aller Teile bedingt ein viel grösseres Widerstandsvermögen gegen örtliche Belastung, als die einfache Berechnung ergibt; die Bauwerke besitzen also eine Reserve, welche gemäss ihrer konstruktiven Durchbildung innerhalb sehr verschiedener Grenzen schwanken kann; aber ihre Ausnutzung wäre immer vorteilhaft.

Bei den Eisenbetonkonstruktionen haben wir mit Bauwerken zu tun, die gewisse Unklarheiten aufweisen, über welche man sich Rechenschaft geben muss um die vorhergehenden Berechnungsmethoden anzuwenden. Die Verbindung der einzelnen Balken eines Rostes erlaubt meistens nicht die unbehinderte Drehung eines Balkens im Auflagerpunkt eines anderen Trägers; in den Knoten können also auf den Balken Verdrehungsmomente auftreten, die eine gewisse Rolle spielen können, und deren Berücksichtigung zwar durchführbar wäre,¹ wenn sie auch einen komplizierteren Rechnungsgang bedingen würde. Diese

¹ Siehe Einleitung Kap. I.

Momente wirken im günstigen Sinne, d. h. sie bewirken eine vergrösserte Lastverteilung. Die Balken des Rostes sind noch durch die Fahrbahnplatte verbunden, diese ist ein Element von ausserordentlichem Verteilungsvermögen, dessen Wert sich jedoch schwerlich einschätzen lässt; seine Wirkung ist auch vom Angriffsort der Belastung sehr abhängig. Da keine allgemeine Theorie der durch Rippen verstieften Platten besteht¹, so ist es heute nicht möglich der Wirkung der Platte in genauer Weise Rechnung zu tragen; man muss bei schätzungsweisen Angaben stehen bleiben.

Messungen würden hier Klarheit bringen.

Unter Berücksichtigung aller Unsicherheiten, die dem Problem anhaften, erscheint es nicht nur zulässig, sondern vielmehr berechtigt, bei den Voraussetzungen der Theorie des Kapitels II zu bleiben und dadurch die Lastverteilung bei beliebigen Rosten zu berechnen. Bei einigen praktisch wichtigen Fällen können wir noch einige Näherungsverfahren angeben, welche eine rasche Abschätzung erlauben.

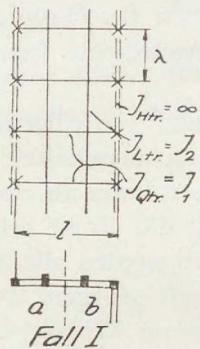
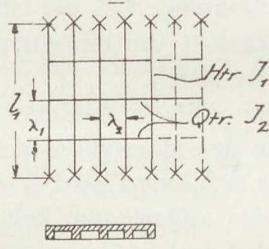
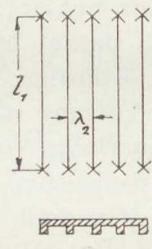


Fig. 43.



Fall II

Fig. 44.



Fall III

Fig. 45.

Das Eigengewicht der Brücke ist fast ohne Einfluss auf die Lastverteilung, da es mehr oder weniger gleichmässig verteilt ist. Wir beschränken uns deshalb auf die Verkehrslasten und betrachten die drei Fälle der Fig. 43, 44, 45. Der Fall I bezieht sich auf die Fahrbahn von Bogenbrücken oder Balkenbrücken mit aussen liegenden Hauptträgern; der Fahrbahnrost ist zum Hauptträger aufgehängt (Ia) oder steht mittels Säulen auf demselben (Ib). Fall II stellt eine gewöhnliche Balkenbrücke mit zahlreichen Hauptträgern unter der Fahrbahn dar; die Lastverteilung erfolgt durch die Querträger und durch die Platte; im Fall III sind keine Querträger vorhanden, sonst besteht kein Unterschied zwischen II und III.

¹ Eggenschwüler hat die Wirkungsweise eiserner Träger mit sehr breiten Lamellen (oder gar an eine Blechhaut genietet) untersucht, s. Kap. XV.

Fall I. Unter der Voraussetzung, dass die *Hauptträger unendlich steif* sind, können wir die analytische Untersuchung des Kap. IX anwenden; in diesem Falle sind nämlich die Querträger (E_1, I_1) festgelagert, und die Längsträger (E_2, I_2) bilden die im Kap. IX kontinuierlich gestützten Balken.

a) Die Belastung ist eine Einzelkraft P im Knoten a . Wir betrachten erst den Fall, wo nur ein Längsträger die Querträger verbindet (Fig. 46). Die Formel (5) Kap. IX ist nun direkt verwendbar, und der Wert $2x_0$

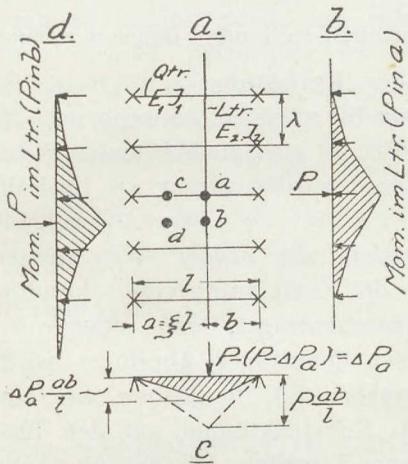


Fig. 46.

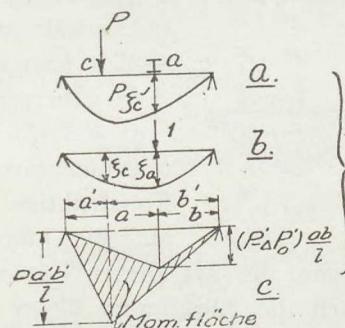


Fig. 47.

gibt die Länge der ersten Welle der Biegelinie des Längsträgers, und damit die Anzahl der Querträger, die bei dieser Verteilung beansprucht werden. Das Zahlenbeispiel Kap. IX hat ergeben, dass für die drei untersuchten Steifigkeiten 3,5 oder 7 Querträger in der ersten Welle zu liegen kommen. Wie in diesem Beispiel findet man aus der Verteilungskurve die Drücke ΔP auf den Querträgern und die Momente im Längsträger (Fig. 46b giebt die Momentenkurve für den Längsträger an, für den Fall, wo 5 Querträger belastet werden); die Momente in den Querträgern sind $\Delta P \frac{ab}{l}$; z. B. für den belasteten Querträger, s. Fig. 46c.

Wenn nur drei Querträger beansprucht werden, hätte man auch die Verteilung direkt den Kurven Fig. 31-34 entnehmen können.

b) Die Einzellast P steht zwischen den Knoten, in b. Hier wird genau das gleiche Verfahren verwendet (s. Beispiel Kap. IX). Die Momentenkurve des Längsträgers ist in Fig. 46d angedeutet.

c) P steht auf dem Querträger ausserhalb des Längsträgers, in c. Der Längsträger wird den belasteten Querträger in a durch eine Kraft entlasten, welche zur Durchbiegung, durch P hervorgerufen ($P \zeta_c$, Fig. 47a),

im Punkt a des freien Längsträgers, proportional ist; diese Durchbiegung kann aber auch, was bei Anwendung des Maxwell'schen Satzes leicht einzusehen ist, durch eine »fiktive Kraft« $P^1 = P \frac{\zeta_c}{\zeta_a}$ in a hervorgerufen werden; ζ_a und ζ_c sind durch Fig. 47 b definiert.¹ Man wird also erst die Lastverteilung für die Kraft P^1 in a berechnen ($\zeta_a : \zeta_c$ findet sich aus den Tabellen 15) in der oben angegebenen Weise, was die Drücke ΔP^1 auf den Querträgern ergibt; die Momente in den unbelasteten Querträgern sind leicht zu ermitteln; im belasteten Querträger ist von der Fläche mit $M_{\max} = P \frac{a_1 b_1}{l}$ die entsprechende Fläche zu ziehen, welche sich (wie in Fig. 46 c) aus der Entlastungskraft ($P^1 - \Delta P_a$) ergibt; Fig 47 c. Hat man z. B. mit zwei Einzellasten (Achsendruck) zu tun, erhält man die in Fig. 48 gezeigte Momentenfläche.

— Die Längsträgermomente werden genau wie im Fall: P in a berechnet.

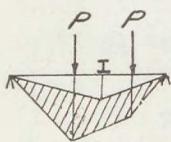


Fig. 48.

d) P steht in d , ausserhalb der Träger. Wir müssen uns hier vorstellen, dass die Kraft durch eine sekundäre Konstruktion (Platte, Zwischenträger, längs oder quer) auf die Längsträger oder Querträger überführt wird; wenn die Art dieser Unterstützung gegeben ist, berechnen wir einfach die Reaktionen dieser sekundären Konstruktionen auf den Rost und kommen sodann auf den Fall c oder b zurück. Die Verteilung der vier Räder eines Belastungswagens wäre also jetzt klargestellt.

e) Wenn mehrere Längsträger vorhanden sind, können wir durch Superposition der unter a—d behandelten Fälle die Berechnung durchführen; wenn die Kraft über einem Längsträger steht (a und b), berücksichtigt man nur diesen Längsträger; steht P ausserhalb der Längsträger (c), berücksichtigt man alle Längsträger, indem man die Kräfte P^1 für jeden Längsträger berechnet; Fig. 49 zeigt den Fall zweier Längsträger mit der Belastung P in der Mitte. Sind viele Längsträger vorhanden, z. B. 4, kann man mit nur 2 fiktiven Längsträgern rechnen, indem man sie paarweise vereinigt

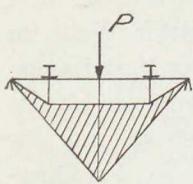


Fig. 49.

unter Addition der Trägheitsmomente.

Für die Endquerträger der Brücke kann man selbstverständlich nicht die gleiche Verminderung der Momente rechnen wie für die übrigen Querträger.

— In den praktisch vorkommenden Fällen sind die Querträger fast niemals unendlich steif (für $\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{2}$, $I_1 = 8I_2$ ist $\beta = 1$) und die Längs-

¹ Lossier: Etude de la solidarité des pièces de pont. Genie civil 24/s 1912.

träger können also selten als kontinuierliche Balken auf festen Stützen berechnet werden; unter $M_{\max} = \frac{1}{4} P \cdot \lambda$ kommt man selten, vielmehr kann man noch grössere Momente erreichen. Da die Momente immer positiv sind, ist es doch wegen der Platte nicht schwierig das erforderliche Widerstandsmoment zu verschaffen.

Im Allgemeinen sind auch die Hauptträger der Brücke nicht unendlich steif, wie in unserer Untersuchung vorausgesetzt; um einen Überblick darüber zu gewinnen, betrachten wir (Fig. 50) eine Brücke, wo die Querträger und Hauptträger für eine gleichförmig verteilte Totallast p t/m² dimensioniert sind; wir können dann setzen

$$\left. \begin{array}{l} \text{für den Qtr.: } M_{\text{Qtr.}} = \frac{1}{8}(p \cdot kl) \cdot l^2 = r \cdot W_{\text{Qtr.}} \\ \text{» » Htr.: } M_{\text{Htr.}} = \frac{1}{8}(p \cdot \frac{1}{2}l) \cdot l_1^2 = r \cdot W_{\text{Htr.}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} r = \text{zul. Material-} \\ \text{beanspruchung,} \\ W = \text{Widerstandsmoment;} \end{array}$$

hieraus ergibt sich:

$$\frac{W_{\text{Qtr.}}}{W_{\text{Htr.}}} = \frac{2kl^2}{l_1^2} \leq 2 \cdot \left(\frac{l}{l_1}\right)^2, \text{ da } k < 1 \text{ (gewöhnlich);}$$

setzen wir jetzt $W = I : \frac{1}{2}h$, und noch $h = \frac{1}{10}l$, also $W = \frac{20I}{l}$ ($h = \text{Trägerhöhe, } I = \text{Trägheitsmoment}$), erhalten wir:

$$\frac{W_{\text{Qtr.}}}{W_{\text{Htr.}}} = \frac{I_{\text{Qtr.}}}{I_{\text{Htr.}}} \cdot \frac{l_1}{l} \leq 2 \cdot \left(\frac{l}{l_1}\right)^2, \text{ oder } \frac{I_{\text{Qtr.}}}{I_{\text{Htr.}}} \leq 2 \cdot \left(\frac{l}{l_1}\right)^3,$$

was auch

$$\frac{I_{\text{Qtr.}}}{l^3} \leq 2 \cdot \frac{I_{\text{Htr.}}}{l_1^3}, \text{ oder } \beta \geq \frac{1}{2}$$

geschrieben werden kann.

Für $k = \frac{1}{2}$ erhalten wir $\mu_{\text{Qtr.}} = \mu_{\text{Htr.}}$. Die Hauptträgersteifigkeit kann also normalerweise nicht als unendlich gross angesehen werden.

Nichtsdestoweniger können die obigen Berechnungsweisen sehr oft Anwendung finden, weil die Hauptträgersteifigkeit nur von geringem Einfluss auf die örtliche Lastverteilung ist; die Kraft P (Fig. 51 a) gibt ohne Lastverteilung dem Querträger eine Durchbiegung, welche ist:

$$\zeta_{\text{Qtr.}} = \frac{1}{48} \cdot \frac{P}{\mu_{\text{Qtr.}}}; \text{ für den Htr. ist } \zeta_{\text{Htr.}} = \frac{1}{48} \cdot \frac{\frac{1}{2}P}{\mu_{\text{Htr.}}}, \text{ also } \frac{\zeta_{\text{Qtr.}}}{\zeta_{\text{Htr.}}} = \frac{2\mu_{\text{Htr.}}}{\mu_{\text{Qtr.}}} \geq 1.$$

Der Hauptträger wird also höchstens die gleiche Durchbiegung wie der Querträger haben; aber auf der grossen Länge l_1 werden sich die Haupt-

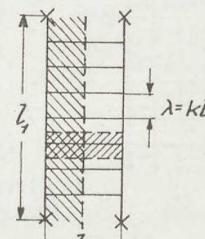


Fig. 50.

träger weit weniger krümmen, und die Biegelinien der Hauptträger werden sich also einer Geraden nähern (Fig. 51 b) und somit fast keinen Einfluss auf die ζ der Querträger ausüben. Das gleiche Ergebnis würde

man erhalten, wenn man die Längsträger (Fig. 51 a) als »Hauptträger« auffassen und unter Berücksichtigung der verschiedenen Trägheitsmomente der äusseren und der inneren Hauptträger den Rost mittels der allgemeinen Theorie durchrechnen würde; die inneren Hauptträger (Längsträger) würden praktisch einen sehr kleinen Teil von P an die Endauflager überführen und die Hauptträger wären sozusagen statisch bestimmt. Nehmen wir noch an, das die Hauptträger und die Längsträger ungefähr die gleiche Durchbiegung haben, so ergibt der

Fig. 51.
Satz S. 88, dass die Längsträger eine Biegungsspannung σ_2 erhalten, welche gleich $\sigma \cdot \frac{h_2}{H}$ ist (σ = Hauptträgerspannung, h_2 = Längsträgerhöhe, H = Hauptträgerhöhe); σ_2 ist also sehr klein, ganz zu vernachlässigen ist doch diese Grösse nicht.

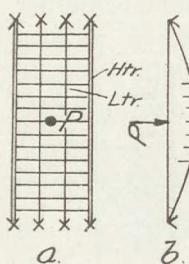
Fall II. Bei ganz allgemeinen Verhältnissen verwendet man hier ohne Schwierigkeit die allgemeine Theorie eines Rostes. In vielen Fällen kann man Annäherungsmethoden gebrauchen und zwar sehr oft mit unendlich steifen Querträgern rechnen; der Trägerabstand λ_2 ist fast immer gleich 1—2 m (eine Funktion der Spurweite), und wenn die Brückenlänge nur z. B. 6 m übersteigt, hat man, mit $\lambda_2 = 1,5$ m:

$$\left(\frac{\lambda_2}{l_1}\right)^3 \leqq \left(\frac{1,5}{6}\right)^3 = 0,0156.$$

Wenn $I_1 = I_2$, hat man $\beta = 0,0156$ und man kann (s. Kurven Fig. 31-34) die Querträger unendlich steif annehmen; es ist in diesem Fall genau nur mit dem belasteten Querträger zu rechnen, und man verwende also die Tabelle Kap. VIII. Ist der Querträger biegsamer (z. B. $I_2 = \frac{1}{8} I_1$, $\beta = 0,125$), kann man entweder zur allgemeinen Theorie oder zu dem unter Fall I (a, b, c, d) besprochenen Rechenverfahren greifen; der Rost im Fall II ist dann als derjenige des Falles I aufzufassen, nur ist die Verkehrsrichtung um 90° gedreht; die »Hauptträger« (feste Auflager) sind hier wirklich unendlich steif.

Über das in die Berechnung einzuführende Trägheitsmoment des Querträgers s. unten, Fall III.

Fall III. Die früher berührte Frage der Teilnahme der Platte drängt sich hier auf. Wir benötigen 1) eine Dimensionierung der Platte selbst und 2) ihr »wirkliches Trägheitsmoment«, wenn wir die Platte als



lastverteilenden Querträger auffassen wollen. Wie bereits gesagt beschränken wir uns auf einige Angaben ohne von der Plattentheorie zu sprechen.

1) Dimensionierung der Platte. Für das Eigengewicht kann man die Kontinuität der Platte berücksichtigen. Für die Verkehrslast ist es wünschenswert das Zusatzmoment von der Verteilung herrührend zu kennen. Melan¹ empfiehlt die Plattenmomente wie folgt zu berechnen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{In der Mitte: } + M \text{ (freie Auflagerung)} \\ \text{Bei der Rippe: } \div M \text{ (volle Einspannung)} \end{array} \right\} \div \Delta M,$$

wo ΔM von der Verteilung herröhrt. Melan stellt einen Ausdruck für ΔM auf, der von einer Belastung der Totallänge des Streifens zwischen zwei Hauptträgern hervorgerufen wird. Eine andere Methode besteht darin, dass man die unten angegebene Plattenbreite B als wirksamen Querträger für Belastung durch eine Einzellast P einführt, die dadurch bestimmte Verteilung von P bedingt das zugrundezulegende Moment für diese Plattenbreite; die Platten nahe der Hauptträgermitte und diejenigen an den Hauptträgerenden sind ungefähr gleich beansprucht.

1) Einzuführende Plattenbreite. Die einzuführende Plattenbreite B ist in den dänischen Normen von 1921 folgendermassen festgesetzt: Steht die Kraft P — über ein Viereck a, b , verteilt — in den Abständen x und x' von den Plattenrändern, und ist α gleich dem Verhältnis der Querschnittsflächen der Verteilungseisen und der Hauptarmierung, so ist die Verteilungsbreite $B = b + 2\alpha x$ (s. Fig.).

52). Ist z. B. $\alpha = \frac{2}{3}$ (ziemlich starkes Verteilungseisen), $b = 0$ und $x = x' = \frac{1}{2}\lambda_2$, so ist $B = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\lambda_2 = \frac{2}{3}\lambda_2$. Bleich² gibt verschiedene Werte für B an, je nachdem die Platte als frei aufgelagert oder als eingespannt anzusehen ist, und je nachdem man die Spannungen oder die Durchbiegungen in der wirklichen Platte und in der »Vergleichsplatte« mit Breite B gleich setzt; er findet

$B =$	Spannungen massgebend	Durchbiegungen massgebend
Freie Auflagerung	$0,99\lambda_2$	$1,23\lambda_2$
Einspannung	$0,63\lambda_2$	$0,72\lambda_2$

Er empfiehlt $B = \frac{2}{3}\lambda_2$. Im Allgemeinen ist wie

für Fall II das Verhältnis $\left(\frac{\lambda_2}{l_1}\right)^3$ sehr klein; da aber $\frac{I_1}{I_2} = \frac{I_{Htr.}}{I_{Qtr.}}$ sehr gross ausfallen kann, werden wir seltener »unendlich steife Platte«

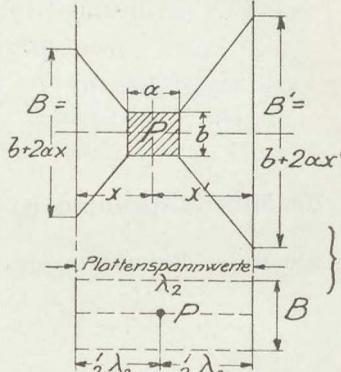


Fig. 52.

¹ Melan: Brückenbau, Bd. II. Eisenbetonbrücken, 1920, S. 147—152.

² Bleich: Theorie und Berechnung eiserner Brücken. Julius Springer, Berlin 1924, S. 340.

erreichen; für sehr kleinen Hauptträgerabstand (λ_2 sehr klein) und $\frac{I_1}{I_2}$ in der Nähe von eins kann doch dieser Fall eintreffen.

2) Welches Trägheitsmoment soll man der Rippenplatte (Fall II: Hauptträger und Querträger, Fall III: Hauptträger) und (Fall III) Platte allein zuschreiben?

Wir führen überall den vollen Betonquerschnitt ein, und die Rippe bildet mit der Platte einen Gesamtquerschnitt; für die Rippenplatten spielt es keine grosse Rolle, ob wir eine grössere oder kleinere Plattenbreite wählen, da 1) das Trägheitsmoment nicht stark schwankt, 2) eine starke Variation des Trägheitsmomentes die Verteilung nicht stark beeinflusst (vergl. Kurven Fig. 31—34); die Wahl der Breite $B = \frac{2}{3}\lambda_2$ (siehe oben) gäbe ein angemessenes Verhältnis zur Spannweite λ_2 . Für die Platte allein ist die Wahl weit schwieriger; stehen viele Einzellasten über den Hauptträgern, wähle man am besten unter jeder Kraft eine Plattenbreite ($\geq B$); besteht die Belastung nur aus einer Kraft P , müsste man die Breite grösser wählen, weil dieser Plattenstreifen die ganze Plattenlänge vertreten muss. Um besseren Aufschluss über diese Verhältnisse zu gewinnen, wäre es notwendig zahlreiche Messungen an bestehenden Bauwerken vorzunehmen.

Die Beanspruchung der Querträger.

Bekanntlich ist für einen durch eine Kraft P belasteten Balken

$$\delta = k_1 \cdot P \cdot \frac{l^3}{E \cdot I} \text{ und } M = k_2 P l, \quad \left\{ \begin{array}{l} l = \text{Spannweite.} \\ I = \text{Trägheitsmoment.} \\ E = \text{Elastizitätskoeff.} \\ \delta = \text{Durchbiegung.} \\ W = \text{Widerstandsmoment.} \\ k, k_1, k_2 = \text{Konstanten.} \end{array} \right.$$

die Materialspannung ist $\sigma = \frac{M}{W} = k_2 P l \cdot \frac{e}{I}$,

die unter Benutzung des Ausdrückes für δ in

$$\sigma = K \cdot \delta \cdot e \cdot \frac{E}{l^2} \text{ übergeht; für 2 Querträger,}$$

1 und 2, eines Rostes hat man also

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \cdot \frac{e_1}{e_2}, \quad \text{für rechteckigen Querschnitt} \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \cdot \frac{h_1}{h_2}^1.$$

Wir ersehen aus dieser Formel:

1) Wenn 2 Querträger gleiche Dimensionen besitzen ($h_1 = h_2$), so verhalten sich die Spannungen wie die Durchbiegungen;

¹ Siehe Kögler: Lastverteilende Wirkung der Querträger. Arm. Beton, 1912. S. 107.

2) Haben zwei Querträger, welche ungleich hoch sind, gleiche Durchbiegungen ($\delta_1 = \delta_2$), so verhalten sich die Spannungen wie die Trägerhöhen.

Wir können diese einfachen Regeln ausnutzen, wenn es gilt für einen Rost die Querträger zu entwerfen; die erste Regel sagt, dass man die Querträger möglichst steif wählen muss: in der Formel spielt nämlich δ eine grössere Rolle als h , weil eine kleine Änderung von h eine grosse Änderung von I und dadurch von δ bedingt; eine bedeutende Verminderung von δ ist also durch geringe Zunahme von h erreichbar, und also wird die Spannung kleiner ausfallen. In vielen Fällen sind die Verteilungsmomente ohne grösseren Einfluss auf die Dimensionen der Querträger; es empfieilt sich immer die Querträger reichlich steif auszubilden. Bei der Berechnung dieser Momente hat es deshalb wenig Bedeutung, ob man eine Methode benutzt, welche zu grosse Querträgermomente liefert. (Vergl. die Kurven Fig. 35—38, wo die Berechnung mit dem belasteten Querträger allein zu grosse Querträgermomente liefert hat).

Die wirtschaftlichen Vorteile einer Berücksichtigung der Lastverteilung.

Fall I. Wie vorher gesagt wird eine überall gleichmässig verteilte Last (z. B. Eigengewicht) keine weitere Verteilung auslösen können. Dagegen werden Streifenbelastungen und Einzelkräfte immer Verteilungen aufweisen. Werden die Längsträger (Fig. 43) durch eine Reihe gleicher Einzellasten P belastet, so entsteht für die Querträger keine Entlastung; setzen wir z. B. voraus, dass jeder der sieben Querträger des Rostes des Zahlenbeispiele Kap. IX durch eine Einzellast P belastet wird (Eisenbahnräder); die Fig. 29 b gibt dann für den mittleren Querträger die Belastung

$$\begin{aligned} 0,32 P &= 0,320 P \\ 2 \cdot 0,231 » &= 0,426 » \\ 2 \cdot 0,115 » &= 0,230 » \\ 2 \cdot 0,026 » &= \underline{\underline{0,052 »}} \\ &\quad 1,064 P. \end{aligned}$$

Stehen die Raddrücke P in der Mitte zwischen den Querträgern, erhalten wir

$$\begin{aligned} 2 \cdot 0,298 P &= 0,596 P \\ 2 \cdot 0,175 » &= 0,350 » \\ 2 \cdot 0,060 » &= \underline{\underline{0,120 »}} \\ &\quad 1,066 P. \end{aligned}$$

Natürlich muss jeder Querträger die Totalbelastung P haben. Haben

wir indessen mit einem Belastungswagen zu tun, z. B. nach Fig. 53, erhält der am meisten belastete Querträger aus Fig. 29 b:

$$0,420 P$$

$$0,231 \text{ »}$$

$$\underline{0,551 P}$$

aus Fig. 29 c:

$$0,298 P$$

$$\underline{0,298 \text{ »}}$$

$$0,596 P, \text{ also nur rund } 0,6\text{-fach der direkten Belastung.}$$

Dem Längsträger können sehr oft infolge der Verteilung erhöhte Momente zugewiesen werden (in Fig. 29 c: $0,56 P\lambda$ statt $\frac{1}{4} P\lambda = 0,25 P\lambda$). Für die Hauptträger kann die durch den Fahrbahnrost bewirkte Verteilung eine nicht zu unterschätzende Rolle spielen; ein

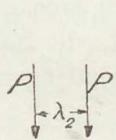


Fig. 53.

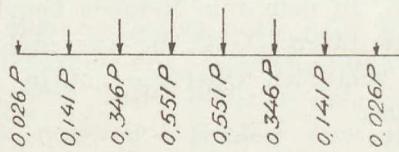


Fig. 54.

Hauptträger, der durch den Rost in Fig. 29 belastet wird, kann statt für den Wagen Fig. 53 für die in Fig. 54 angegebenen Raddrücke belastet werden, was eine bedeutende Erleichterung bei vielen Einflusslinienformen darstellt. Ist der Hauptträger gegen konzentrierte Lasten empfindlich (Bogenbrücken), ist diesem Umstände erhöhte Bedeutung zuzusprechen.

Fall II & III. Wir haben hier den Vorteil, dass die Belastungen oft zu einem bestimmten Längenstreifen gebunden sind; die grösstmögliche Verteilung ist immer durch unendlich steife Querträger zu erreichen. Die Randträger, welche oft steifer sind als die zwischen denselben liegenden Hauptträger, werden höher beansprucht als üblich gerechnet.

Bei breiten Brücken (8—10 Hauptträger) wird man nicht selten eine Strassenbahnenbelastung oder dergl. so viel verteilen können, dass dem direkt belasteten Hauptträger nur 15—20 % des Zuggewichtes zufallen. In jedem Falle sind die Belastungsvorschriften für die wirtschaftlichen Vorteile massgebend, die sich aus der Ausnutzung der Lastverteilung ergeben können.

Ergebnisse der angestellten Messungen.

Kögler¹ hat die Brücke in Fig. 55 mit 5 ungleichen Hauptträgern (I variabel, wir schätzen $I_{\text{mittel}} = 0,12 \text{ m}^4$) durchgerechnet und zwar für verschiedene Annahmen von I_2 ; für

¹ Kögler: Lastverteilende Wirkung der Querträger. Arm. Beton 1912, S. 107.

$$I_2 = 0,04 \quad 0,013 \quad 0,0018 \text{ m}^4$$

und $\left(\frac{\lambda_2}{l}\right)^3 = 0,00074$ hat man $\beta = 0,0022 \quad 0,0068 \quad 0,05;$

während die zwei ersten Werte von β keinen grösseren Unterschied

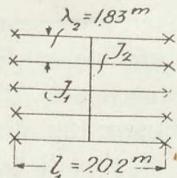


Fig. 55.

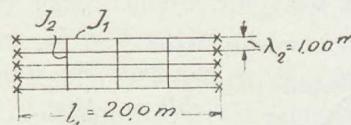


Fig. 56.

in der Verteilung ergeben (s. die Kurven Fig. 31—34), hat der letzte β -Wert ganz andere Kurven zur Folge.

Die Messungen an einer anderen Brücke (8 Hauptträger, 1 Querträger) werden als gut übereinstimmend mit der Einführung eines Querträgers, ungefähr mit der Breite B (s. oben) angeführt.

Frank¹ hat einige Messungen an Brücken gemäss Fall II und III durchgeführt; wenn auch eine Nachrechnung wegen fehlender Angaben unmöglich scheint, so zeigt sich doch die sehr starke Wirkung der Platte.

Knorr² hat eine Brücke mit 6 Hauptträgern und 1 Querträger (Fall II) belastet; mit $l_1 = 12,50 \text{ m}$, $\lambda_2 = 1,05 \text{ m}$, $I_1 = I_2$, finden wir $\beta = 0,00061$; der Querträger ist somit sozusagen »unendlich steif«, was mit den Messungen gut übereinstimmt.

Ros³ hat durch Messungen an der Aa-Brücke in Wäggital gezeigt, dass der ganze Brückenquerschnitt einheitlich wird; die drei Öffnungen sind alle ungefähr gleich; die Fig. 56 zeigt die Seitenöffnung; für diese haben wir $\left(\frac{\lambda_2}{l_1}\right)^3 = \left(\frac{1}{20}\right)^3 = 0,000125$; nach der Veröffentlichung schätzen wir $I_1 : I_2 = 8$, also $\beta = 8 \cdot 0,000125 = 0,001$; die Querträger sind also fast »unendlich steif«, und die Wirkung der Platte wäre noch mitzurechnen; die sich aus den Messungen ergebenden Schlüsse werden also vollkommen bestätigt, und wir können ein so geschlossenes Tragwerk als einen einheitlichen Querschnitt auffassen.

Böhler & Hübner⁴ haben wiederholt auf die Bedeutung der Lastver-

¹ Frank: Verteilung von Radlasten bei Eisenbetonbrücken. Arm. Beton 1913, S. 363 und 1914, S. 49.

² Knorr: Untersuchung über die Lastverteilung von Querträgern bei einer Balkenbrücke. Arm. Beton 1919, S. 299.

³ Ros: s. Brückenkongress Zürich 1926.

⁴ Böhler & Hübner: s. Schw. Bauzt. 1914—15.

teilung bei Brücken dem Fall II und III entsprechend hingewiesen. Die Berichte über Messungen der Schweizerischen Bundesbahnen haben sehr interessante Ergebnisse geliefert. Eine Nachrechnung ist leider nicht möglich, da die Dimensionen der Tragwerke nicht vollkommen in den Veröffentlichungen festgelegt sind.

Nater¹ hat für die Schweizerischen Bundesbahnen interessante Untersuchungen über die Rhônebrücke bei Chippis angestellt; die Brücke

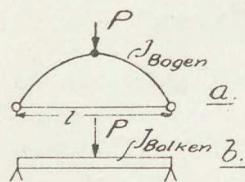


Fig. 57.

ist in Fig. 57 schematisch angedeutet. Der Fahrbahnrost ist durch Hängestangen zu den 2 sehr kräftigen Bögen aufgehängt; es sind 2 Längsträger vorhanden, welche auf den Querträgern aufliegen, entsprechend Fall I.

Wir wollen näher untersuchen, ob wir die Hauptträger als unendlich steif einführen können. Zu diesem Zwecke benötigen wir das Trägheitsmoment für die Hauptträger, welche hier Bögen sind; die Durchbiegung eines flachen, parabelförmigen Dreigelenkbogens ist

$$\delta \approx \frac{Pl^3}{EI_{\text{Bogen}}} \cdot \frac{1}{480},$$

während wir für einen einfachen Balken

$$\delta = \frac{1}{48} \cdot \frac{Pl^3}{EI_{\text{Blk}}}.$$

haben. Wenn wir also zum Vergleich $I_{\text{Balken}} = 10 \cdot I_{\text{Bogen}}$ setzen, so haben die 2 Konstruktionen (Fig. 57) die gleichen Durchbiegungen im Scheitel.

Die Rhônebrücke bei Chippis hat ungefähr $I_{\text{Bogen}} = \frac{1}{12} \cdot 0,8 \cdot 1,5^3 = 0,225 \text{ m}^4$; wir setzen demzufolge $I_{\text{Balken}} = 2,25 \text{ m}^4$; $l_1 = 60 \text{ m}$. Für den Querträger ist $I = \frac{1}{12} \cdot 0,25 \cdot 0,60^3 = 0,0045 \text{ m}^4$, $\lambda_2 = 4,70 \text{ m}$. Es ergibt sich somit:

$$\beta = \frac{2,25}{0,0045} \cdot \left(\frac{4,70}{60,0} \right)^3 = 500 \cdot 0,00049 = 0,245.$$

Die Hauptträger können also nicht als »sehr steif« angesehen werden. Wir wollen immerhin versuchen die einfache Methode Kap. IX zu benutzen; wir haben:

für die Querträger: $I_1 = 0,0045 \text{ m}^4$, $l = 4,70 \text{ m}$,

für die Längsträger: $I_2 = \frac{1}{2}I_1$, $\lambda = 4,00 \text{ m}$, $K = \frac{4}{4,7} = 0,85$.

$$\beta = 2 \cdot 0,85^3 = 1,22; \mu = 1; \xi = \frac{1}{3}, \xi^2(1 - \xi)^2 = \frac{4}{81}.$$

¹ Siehe den Bericht über den Brückenkongress Zürich 1926.

Formel (5), Kap. 9 gibt nun:

$$\alpha = \frac{1}{l} \sqrt[4]{\frac{3}{4} \cdot \frac{81}{4} \cdot \frac{1,22}{0,85^4}} = \frac{1}{l} \cdot 2,45 = 0,52;$$

$$\underline{x_0} = \frac{2,36}{0,52} = \underline{4,50 \text{ m.}}$$

Die »erste Welle« erstreckt sich also über $2 \cdot 4,5 = 9,0 \text{ m}$ Länge, d. h. über etwas mehr als 2 Felder; dieses Ergebnis stimmt sehr gut mit den Messungen für Knoten 12 überein. Wir sehen auch, dass es durchaus erlaubt ist, selbst für diesen Fall die Hauptträger als »unendlich steif« zu betrachten.

KAPITEL XII

Decken aus Eisenbeton oder Eisen.

DIE Decken weisen den Brücken gegenüber den Unterschied auf, dass auch die Querträger am Rande des Rostes fest aufgelagert sind (Fig. 58); am Berechnungsverfahren ändert sich jedoch nichts, nur muss man für die Querträger andere Koeffizienten einführen; will man einer Einspannung am Ende der Träger Rechnung tragen, ist dieser Umstand ebenfalls bei der Koeffizientenbestimmung zu berücksichtigen¹.

Wir können hier alle früher erwähnten Kunstgriffe oder Annäherungsverfahren anwenden; nur weist der Rost selten spezielle Verhältnisse wie z. B. unendlich steife Querträger auf. Wie bei den Eisenbetonbrücken hat auch hier die Platte für die Verteilung eine grosse Bedeutung. *Saliger*² hat eine Probebelastung der Decke in Fig. 59 ausgeführt; die Belastung — 4 Einzellasten — sollte eine Längsmauer vertreten, die auf einer ähnlichen Decke aufgebaut werden sollte. Es waren keine Querträger vorhanden; immerhin sieht man aus den Einsenkungskurven, dass eine starke Verteilung stattgefunden hat. *Hübner*³ berichtet von einer Belastung einer Eisenbetonrippen-Decke mit vielen nahe an einander liegenden Trägern (10 · 27 cm), welche

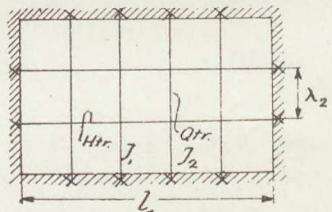


Fig. 58.

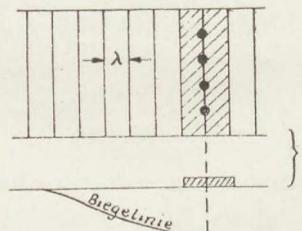


Fig. 59.

¹ In Spezialfällen ist der allgemeine Rechnungsgang sinngemäß anzuwenden; man hat z. B. eine Decke über einem dreieckigen Raum aus drei sich kreuzenden Trägerreihen (parallel zu den Dreieckseiten) ausgebildet. (Marcus: Die weitgespannten Decken des Sportsgebäudes im Stadion Breslau-Leerbeutel. B. & E. 5/8 29).

² R. Saliger: Versuche über die Verteilung einer Linienbelastung in einer Rippenplatte. Arm. Beton 1912, S. 361.

³ Siehe Brückenkongress Zürich 1926.

nur durch eine 7 cm. starke Platte verbunden waren; die Belastung eines Streifens (Fig. 59) von Breite 2λ hat die Mitwirkung einer Breite $2 \cdot 6 \lambda$ bewirkt; da die Trägerlänge nicht angegeben ist, so ist jedoch eine Nachrechnung nicht möglich.

Wir können nicht umhin hier einige Worte über die üblichen Probebelastungen zu sagen; solche Proben werden fast immer unter Belastung nur eines Streifens durchgeführt, und sie liefern gewöhnlich eine Durchbiegung, die nur einen kleinen Bruchteil der berechneten ausmacht. Es liegt kein Grund vor, dieses Probeergebnis als besonders glücklich aufzustellen und von »besonders steifer Konstruktion mit erheblicher Sicherheit« zu reden; bei Vollbelastung der ganzen Decke wird der scheinbare Überschuss an Sicherheit verschwinden. (Es sei dabei vorausgesetzt, dass man die nötige Auskunft über den Elastizitätskoeffizienten und über die Einspannungsverhältnisse der Träger besitzt).

Zu den Decken gehören auch die ebenen Böden von Behältern und anderen analogen Konstruktionen.

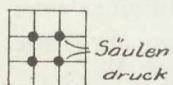


Fig. 60.

Wir möchten noch auf ein paar Konstruktionen, welche zu dieser Gruppe gehören, aufmerksam machen.

Fundamentrahmen. Zur Gründung schwerer Säulen (aus Eisen oder Eisenbeton) werden nicht selten rost-artige Gebilde gebraucht, um die Säulendrücke über den Baugrund zu verteilen (Fig. 60). Wenn über den Gegendruck des Bodens Voraussetzungen gemacht worden sind, so ist die Berechnung des Rostes der allgemeinen Theorie gemäss durchzuführen¹.

Wie in der Einleitung gesagt sind früher gewisse Plattenkonstruktionen als gekreuzte Trägersysteme berechnet worden; wenn auch die

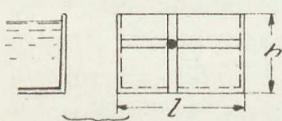


Fig. 61.

Plattentheorie heute viele dieser Berechnungen überflüssig macht, so bleiben sie doch für einige Konstruktionen verwendbar, z. B. für niedrige Silowände (Fig. 61); für eine solche Wand gibt das Handbuch für Eisenbetonbau, Bd. XIV (S. 41) Tabellen für bestimmte Verhältnisse von $h : l$.

¹ V. L. André: Zur Berechnung von Fundamentrahmen. Eisenbau 1917, S. 219.

KAPITEL XIII

Holzkonstruktionen.

BEKANNTLICH ist das Holz ein Material, das grosse Durchbiegungen erträgt und deswegen bedeutendes Verteilungsvermögen besitzt. Bei einer Messung an einer Holzbrücke mit Querbalken in 1,21 m Entfernung, auf zwei äusseren Hauptträgern (in etwa 5,5 m gegenseitiger Entfernung) aufliegend, fand Hübner, dass der Fahrbahnbelag (Längs- und Querbohlen über einander) so gut das Gewicht eines zweiachsigen Lastwagens verteilte, dass die Querträger durch nur ein Drittel der über denselben stehenden Achslast belastet wurden.

Es ist leicht in gegebenen Fällen die Untersuchung der Lastverteilung einer Holzbrücke mittels der vorhergehenden Angaben durchzuführen.

KAPITEL XIV

Anwendungen auf eiserne Brücken.

Das statische Kennzeichen der eisernen Brücken ist die grosse Klarheit, welche über die Kräfteverteilung herrscht und uns erlaubt bei vielen Konstruktionen unsere Theorie ohne besondere Nebenvoraussetzungen anzuwenden. Die Eisenbahnbrücken ohne Ballast kommen hier an erste Stelle; ihre Belastung wird direkt in die eiserne Tragkonstruktion überleitet; bei den Eisenbahnbrücken mit Ballastüber-

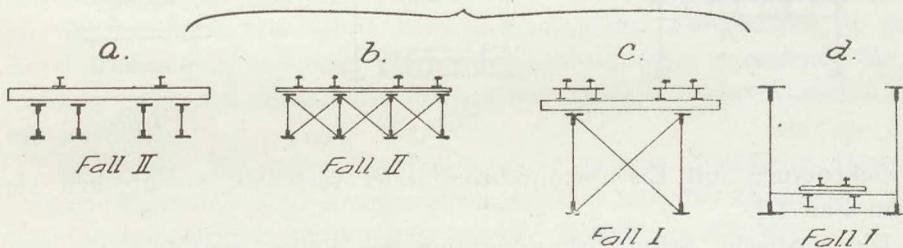


Fig. 62.

führung und bei den Strassenbrücken bildet das Schotterbett bzw. die Fahrbahntafel (beide einschl. Buckelplatten und desgl.) eine verteilende Zwischenkonstruktion, welche eine örtliche Unbestimmtheit hervorruft, während uns die Eisenbrücken mit Fabrbahn aus Eisenbeton ähnliche Probleme stellen, wie sie bei den Eisenbetonbrücken vorlagen.

Wie in den vorigen Kapiteln vernachlässigen wir auch hier die Verdrehungsmomente, welche in den Knoten entstehen. Die Einspannungsverhältnisse aller Träger sind von der konstruktiven Ausbildung der Anschlüsse sehr abhängig, sodass der gleiche Rost je nach der Art der verwendeten Laschen- und Nietverbindungen sich etwas verschieden verhalten kann.

Vom Gesichtspunkt der Lastverteilung aus können wir die Eisenbrücken in die gleichen Typen I, II, III einteilen, wie bei den Eisen-

betonbrücken. Die Fig. 62, a, b, c, d zeigt die schematischen Querschnitte, welche für Eisenbahnbrücken in Frage kommen: a und b gehören zum Fall II (Fahrbahn oben), c und d zum Fall I (Balkenbrücke mit Fahrbahn unten oder zwischen Ober- und Untergurt der Hauptträger); die Figuren gelten auch für andere Anzahl der Gleise; d könnte auch den — allerdings seltenen — Fall mit 3 (oder 4) Hauptträgern, mit Fahrbahn am Untergurt des Hauptträgers vertreten. Für Brücken mit Ballastüberführung sind ähnliche Systeme vorhanden.¹

Die Fig. 63 e, f, g bezieht sich auf Strassenbrücken; e entspricht dem Fall II, f und g entsprechen dem Fall I. Die Figuren 62, 63, a—g wären sinngemäss für Bogen- und Hängebrücken mit Aufhängung oder Säulenabstützung der Fahrbahn zu überführen. Sind dieselben

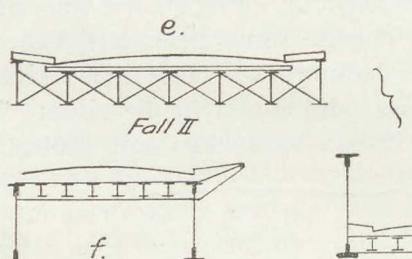


Fig. 63.

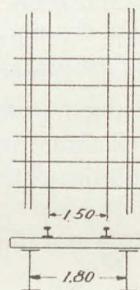


Fig. 64.

Brückentypen mit Eisenbetonfahrbahntafel versehen, entsprechen sie dem Fall III.

Die elastische Sekundärkonstruktion der Fälle I und II kann sehr verschieden sein: für a, b, c, d Schwellen (aus Holz oder Eisen), für e, f, g Holzbohlen, Belageisen verschiedener Formen, Buckel- und Hängeplatten etc.; für einige dieser sekundären Querträger können wir Berechnungen aufstellen; bei den übrigen müssen wir für die Überführung der Belastung auf die Längs- und Querträger gewisse Annahmen machen, die uns die weiteren Berechnungen ermöglichen.

Bevor wir auf die Besprechung der einzelnen Typen eingehen, wollen wir noch der Vollständigkeit halber den folgenden zwei sekundären Konstruktionen einige Worte widmen.

Eisenbahnschiene auf Schwellen gestützt, Fig. 64. Diese Aufgabe ist schon erschöpfend behandelt worden, entweder durch die Methode

¹ In einigen Fällen hat man Brücken mit 3 Hauptträgern und Fahrbahn unten, Fall I, entsprechend d, für 2 Gleise gebaut. Lewerentz hat solche Systeme (durch die Kraftmethode) untersucht. (Die Berechnung von eisernen Überbauten mit 3 Hauptträgern; Die Bautechnik 15/9 25).

Kap. IX¹ oder durch die übliche Berechnung der Balken auf elastisch senkbaren Stützen.² Es geht aus diesen Untersuchungen hervor, dass der Raddruck sich über zwei bis drei Schwellen verteilt, wenn die Schwellen mit normaler Entfernung (60-70 cm) liegen; des kleinen Radstandes wegen (= 1,5 m) wird man doch immer die Schwelle für den grössten Teil der Achslast berechnen. Anders fällt die Berechnung aus, wenn die Schwellen dicht neben einander gelagert sind, wie dies bei Holzschwellen und bei Belageisen der Fall sein kann. Man hat dann eine so effektive Verteilung, dass man als Belastung der einzelnen Schwelle nur etwa ein Drittel bis ein Viertel anzunehmen braucht.

Eine ähnliche Berechnung ist für die *Bohlen oder die Belageisen der Strassenbrücken* aufzustellen; sind diese Querbalken über die Längsträger durchgehend, kann man die Kontinuität sehr wenig berücksichtigen. Winkler gibt³ für das Moment eine Formel an, welche der elastischen Verschiebung der Längsträger Rechnung trägt.

Fall I. Bei den entsprechenden Anordnungen des Brückenquerschnittes (c, d, f, g) können wir prinzipiell die gleichen Berechnungsmethoden anwenden, wie für Eisenbetonbrücken beschrieben worden ist. Nur können wir sofort bemerken, dass die Längsträger in der Regel hier schwächer ausgebildet sind, wodurch ihre verteilende Wirkung herabgesetzt wird; entsprechend werden ihre Momente auch kleiner ausfallen.

Längsträger. Bei einer Eisenbahnbrücke gemäss d mit den Hauptträgern unendlich steif angenommen können wir die Anzahl der beteiligten Längsträger für die sehr häufige Einteilung (Fig. 65).

$$\lambda = \frac{2}{3} l, \text{ also } k = \frac{2}{3}, \text{ berechnen:}$$

$$\beta = \frac{I_1}{I_2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \cdot \frac{I_1}{I_2}; \quad \xi \approx \frac{1}{3}, \quad \xi^2(1-\xi)^2 = \frac{81}{4};$$

man hat, nach Kap. 9:

$$\alpha = \frac{1}{l} \sqrt[4]{\frac{3}{4} \cdot \frac{81}{4} \cdot \frac{\beta}{k^4}} = \frac{2,19}{l} \sqrt[4]{\frac{I_1}{I_2}},$$

$$\text{und } x_0 = \sqrt[4]{\frac{I_1}{I_2}} \cdot 1,62 \cdot \lambda \leq 1,62 \lambda, \text{ da } I_1 > I_2.$$

¹ Winkler: Die Querkonstruktionen der eisernen Brücken, Wien 1884. Müller-Breslau: Graphische Statik der Baukonstruktionen, Leipzig 1908, Bd. II, zweite Abteilung. A. Ostenfeld: Teknisk Elasticitetslære. Fr. Bleich: Theorie und Berechnung eiserner Brücken, Berlin 1924.

² Ritter: Graphische Statik, III, Zürich 1900. Müller-Breslau: s. Quelle oben.

³ Winkler: s. Quelle oben, S. 46. Melan: Brückenbau, Bd. III. Erste Hälfte, S. 148. A. Ostenfeld: Jernkonstruktioner III, S. 292.

Man kann also annehmen, dass die Längsträger sich, wie in Fig. 66a angedeutet, durchbiegen, oder wie in Fig. 66b, welche für das positive Moment im Längsträger massgebend ist; das durch diese Verteilung entstandene positive Moment ist sehr nahe an $\frac{1}{4} P\lambda$, sodass

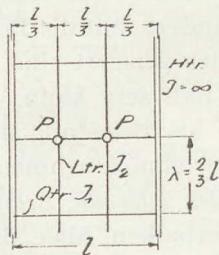


Fig. 65.

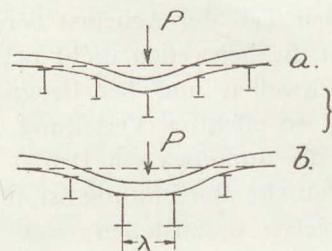


Fig. 66.

man nicht die Längsträger als kontinuierliche Träger auf festen Stützen berechnen dürfte, auch nicht wenn die Längsträger über (oder durch) die Querträger durchgehen. (Bei überschnittenen Längsträgern ist natürlich immer die »freie Auflagerung« massgebend). Die Nietgruppen der Anschlüsse am Querträger sind für das in diesem Punkt sich ergebende Moment zu entwerfen. Die Längsträger erhalten noch die auf S. 86 erwähnte Zusatzspannung, die doch nur einen kleinen Wert ausmacht.

Winkler behandelt diese Verhältnisse im oben angegebenen Werk; Melan ebenfalls (Quelle wie oben S. 239) in der Annahme, dass in Fig. 66b nur die zwei Querträger durchbiegen, was fast genau ist; diese Verfasser berechnen zuerst die Längsträger als kontinuierliche Balken auf festen Stützen und nachher das Zusatzmoment, das sich aus der Senkung der Querträger ergibt; letzteres wird mit 10—20 % vom primären Moment angegeben. Ritter hat ähnliche Ergebnisse gefunden.

Querträger. Diese erleiden wegen der Verbiegungen der Längsträger Verdrehungen und durch die Deformation der Hauptträger Verbiegungen, mit welchen wir uns nicht beschäftigen können.

In Bezug auf die Lastverteilung ist zu den Ausführungen des Kap. XI nichts hinzuzufügen; nur dürfte die durch die Längsträger hervorgerufene Entlastung der Querträger auch bei Straßenbrücken weniger bemerkbar sein als bei den Eisenbetonbrücken (vergl. Fig. 66a).

Es wäre wertvoll ausgedehnte Messungen am Fahrbahngitter anzustellen um Klarheit über die effektive Wirkung der Anschlüsse auf die Verteilung zu schaffen; auch die Fahrbahndecke ist von entscheidender Bedeutung und sie bedingt oft einen Sicherheitsüberschuss, der durch Berechnung nicht zu erfassen wäre.

Fall II. (Fig. 62 b, 62 e) ist wie der entsprechende Fall bei Eisenbetonbrücken zu beurteilen. Wegen der kleinen Hauptträgerentfernung haben wir oft mit »unendlich steifen Querträgern« zu tun; die konstruktive Ausbildung der Querverbände spielt eine grosse Rolle, und in ihren gewöhnlichen Dimensionen genügen sie nicht immer den Momenten, die sich aus der Lastverteilung ergeben. Die Beläge (wie Zores-eisen, Hängeplatten etc.) spielen hier eine ähnliche Rolle wie die Platte bei Eisenbetonbrücken, nur ist ihre Wirkung weniger bedeutend. Wenn die Fahrbahntafel aus Buckelplatten, Hängeblechen, Flachblechen, u. a. besteht, ist bei der Berechnung der Trägheitsmomente auf die Mitwirkung dieser Bleche Bedacht zu nehmen; bei kontinuierlicher Vernietung in der Längsrichtung empfiehlt es sich die mit den Trägern vernieteten Blechstreifen zum Trägheitsmoment mitzurechnen.

Fall III. In neuerer Zeit sind häufig Eisenbetonfahrbahnplatten an Eisenbrücken zur Ausführung gekommen; einer ihrer Vorteile ist eben ihr grosses Verteilungsvermögen; die Berechnung gestaltet sich ganz wie früher erwähnt (Kap. XI).

Die wirtschaftlichen Folgen der Lastverteilung. Bei Eisenbahnbrücken ist die Verteilung nur von geringem Einfluss auf die Dimensionen der Längsträger und Querträger. Dagegen kann sie bedeutend die Beanspruchungen der Hauptträger ermässigen, namentlich für Elemente, welche durch sehr örtliche Belastung am meisten arbeiten (z. B. Streben eines Fachwerkträgers; ihre Einflusslinien weisen (oft mehrmaligen) Spannungswechsel auf). Etwas ganz anderes ist, dass die Gurtungen der Hauptträger, welche an der Fahrbahn liegen, durch letztere oft etwas entlastet werden; eine durchgehende Fahrbahn (die Längsträger kontinuierlich verbunden) ist in dieser Hinsicht von erheblicher Bedeutung, da sie den Gurtungen der Hauptträger behilflich sind den Zug oder Druck aufzunehmen.

Für die Strassenbrücken nach Fall I sind die Ersparnisse häufig geringfügiger als S. 90 angegeben; dagegen wären bei Fall II (Fig. 63 e) sehr oft bedeutende Vorteile durch die Ausnutzung der Verteilung zu erzielen. Faltus hat einen Entwurf für eine Strassenbrücke über die Moldau in Prag (7 Hauptträger, Fall II, Bauingenieur ^{12/11} 27) durchgerechnet; er hat durch starke Querträgerausbildung die Hauptträgermomente mit 20-40 % reduzieren können. Für die Friedensbrücke in Wien (13 Hauptträger, Fall II), die für die Belastung mehrerer Reihen von Belastungswagen und Strassenbahnwagen berechnet werden sollte, fand er unter Ausnutzung der steifen Querträger für alle 13 Hauptträger $\Sigma M_{\max} = 1686 \text{ tm}$; dagegen hätte man bei Vernachlässigung dieser Verteilung $\Sigma M_{\max} = 1955 \text{ tm}$ erhalten.

Wie bereits bei den Eisenbetonbrücken bemerkt wirkt sich die Lastverteilung bei den Hauptträgerformen am günstigsten aus, welche gegen konzentrierte Lasten empfindlich sind, d. h. bei Bogen- und Hängebrücken. Besonders bei den älteren Hängebrücken, die in mehreren Ländern noch zahlreich vorhanden sind, ist oft in der weitgehenden Verteilung örtlicher Lasten die Hauptursache ihrer Brauchbarkeit bei stark erhöhten Raddrücken zu suchen. Auch beim Entwurf neuer moderner Hängebrücken (z. B. des sogenannten »steifen Systems« der Firma Arnodin, Châteauneuf s/Loire) kann die Verteilung erfolgreich in Rechnung gestellt werden um eine leichtere Fahrbahnkonstruktion zu erhalten ohne die Sicherheit zu erniedrigen.

Ergebnisse der angestellten Messungen.

Faltus¹ hat bei der Friedensbrücke über den Donaukanal in Wien (Fig. 67) sehr interessante Durchbiegungsmessungen vorgenommen; die

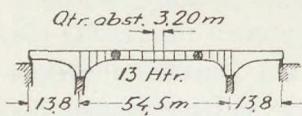


Fig. 67.

Querträger sind konstruktiv richtig durchgebildet (durchgehende Knotenbleche); die Messungen bei mehreren Querträgern zeigten sehr gute Übereinstimmung mit der Berechnung (mit Hilfe des ideellen Querträgers durchgeführt); in dieser hat man die angenommenen Hänge-

blech-Streifen voll eingeführt.

Hübner² hat mehrere Straßenbrücken (mit 5 Hauptträgern aus einfachen I-Profilen, Fall II, ohne Querträger, mit dem Schotter auf Belagseisen) belastet und die durch die Zoreseisen bewirkte Verteilung des Gewichts eines Lastautos gemessen; wenn die Art der Auflagerung der Hauptträger klargestellt ist, wird die Verteilung der Wirkung von ungefähr 3 Zoreseisen entsprechen.

Rohn³ gibt für die Thurbrücke bei Gütikhausen (50 m Spannweite, Fig. 68, Fahrbahntafel aus Eisenbeton, Längsträger-Obergurte kontinuierlich verbunden) an, dass die Messungen eine äusserst günstige Verteilung ergeben haben; die Beanspruchungen der Längsträger sind höchstens die Hälfte des frei aufliegenden Trägers.

Rohn macht weitere Angaben⁴ über eine schiefe

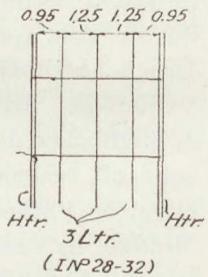


Fig. 68.

¹ F. Faltus: Friedensbrücke in Wien, Z. d. ö. Ing. & A. V. 1924.

² Siehe Brückenkongress Zürich 1926.

³ » » » » »

⁴ A. Rohn: Überführung der Badener Strasse der linksufrigen Zürichseebahn im Gebiet der Stadt Zürich, Brückenkongress, Zürich 1926.

Brücke (in Fig. 69 schematisch gezeigt), aus 14 Hauptträgern (*DIP 100*) entsprechend Fall III angeordnet; Fahrbahn aus Eisenbetonplatte; Querverbindungen alle fünf Meter mit durchgehenden Laschen. Die Schweizerischen Bundesbahnen haben umfangreiche Messungen angestellt: »die Brücke hat sich wie eine elastische Platte verhalten; trotz einer grossen Anzahl schwerster Lastwagen (11 ts) entspricht diese Belastung nur einer gleichmässig verteilten Vollast von 570 kg/m²«.

*Die Schweizerischen Bundesbahnen*¹ haben sehr viele Messungen durchgeführt, die jedoch nicht alle veröffentlicht sind; sie sind zu folgenden Ergebnissen gelangt:

»Das Gewicht einer über einer Schwelle stehenden Achse wird nur zur Hälfte von dieser aufgenommen; die benachbarten Schwellen beteiligen sich zu je $\frac{1}{4}$ an der Lastübertragung. Die Längsträger wirken als in verminderter Masse durchgehende Träger, obschon die Anschlüsse nur aus Winkeleisen bestehen.«

Die umfangreichsten und gründlichsten Untersuchungen sind doch diejenigen, welche von der *T. K. V. S. B., Gruppe V* (*Vorsitzender: M. Ros*) an einer grossen Anzahl schweizerischer Eisenbrücken durchgeführt worden sind²; wie aus dem Titel der Veröffentlichung zu ersehen ist, bildete die Frage der Lastverteilung nicht den Zweck dieser Messungen³; doch hat man, da die lastverteilende Wirkung der Fahrbahn eine grosse Bedeutung für die Nebenspannungen hat, nicht wenige Angaben über diese Verteilung aus den Messungen erhalten; die wichtigsten mögen hier besprochen werden:

Tafel 22—24 des Berichtes. *Rheinbrücke Thusis*; (Eingleisige Eisenbahnbrücke mit Spannweite 81,90 m. entsprechend Fall I; Fahrbahn oben, kontinuierliche Längsträger). Die Längsträger und der Obergurt des Hauptträgers üben eine so weitgehende Verteilung aus, dass die Ordinaten in den Knickpunkten der Einflusslinien für den Obergurt um 5—10 %, für die Streben um 25—50 % ermässigt werden (diese Streben haben »wellenförmige« Einsflusslinien).

¹ A. Bühler: Brückenkongress Zürich 1926 und Wien 1928.

² T. K. V. S. B.: Nebenspannungen infolge vernieteter Knotenpunktverbindungen eiserner Fachwerkbrücken. Bericht der Gruppe V. Juni 1922. Mit 90 Tafeln.

³ Im Vorwort des Berichts wird eine Untersuchung der lastverteilenden Wirkung der Fahrbahnelemente versprochen.

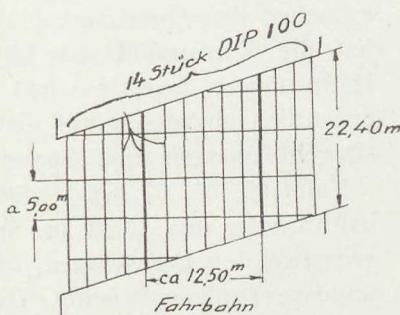


Fig. 69.

Tafel 38, 43, 51—55, 56. Bei der *Rhonebrücke Brig* (eingleisige Eisenbahnbrücke 51,2 m. Spannweite, Fall I (Fig. 62 d); die Längsträger zwischen den Querträgern, aber konstruktiv kontinuierlich ausgebildet) hat die Kontinuität der Längsträger nur geringen Einfluss auf die Hauptträger; dagegen wirkt der durchgehende Fahrbahnrost ausserordentlich entlastend auf dieselben, was für die Hauptträger-Stabkräfte, -Durchbiegungen und -Spannungen nachgewiesen ist.

Tafel 62, 63, 67, 68. *Suldbachbrücke bei Mülenen* (eingleisige Eisenbahnbrücke mit 19,32 m. Spannweite; Fall I (Fig. 62 d), Längsträger zwischen den Querträgern, nur durch Winkel an die Querträger angegeschlossen; offene Brücke). Die Hauptträger werden hier weniger durch die Fahrbahn entlastet, als dies bei der Rhonebrücke Brig der Fall war; die Ursache ist in der konstruktiven Ausbildung zu suchen.

Tafel 73, 74. *Bogenbrücke über die Vanex-Schlucht.* (Eingleisige Eisenbahnbrücke. Flacher Fachwerkogen mit 64,0 m. Spannweite und die Fahrbahn oberhalb der Bögen, auf Säulen gestützt; die Fahrbahn ist kontinuierlich ausgebildet; Fall I). Die durchgehende Fahrbahn auf elastischen Säulen gestützt ist besonders geeignet, eine sanfte Überleitung der Belastung in die Bögen sicherzustellen. Die Sicherheit der Bogen-Hauptträger ist durch diese kontinuierliche Fahrbahn bedeutend erhöht.

Die lastverteilende Fahrbahnwirkung wurde weiter bei den folgenden Brücken beobachtet:

St. Adrian's Brücke bei Arth-Goldau, Tafel 80, untere Limmat-Brücke bei Wettingen, Tafel 88, Strassenbrücke über die Rhone bei Sierre, Tafel 89—90.

Es muss schliesslich unterstrichen werden, dass bei der Lastverteilung der obigen Brückenroste fast immer Nebenwirkungen eine Rolle mitspielen, welche ausserhalb des Rahmens dieser Arbeit liegen.

KAPITEL XV

Anwendungen auf Eisenkonstruktionen im Wasserbau.

DIESE Konstruktionen sind in der Litteratur etwas stiefmütterlich behandelt, vielleicht weil der Wasserbau in den meisten Fällen nur von reinen Praktikern ausgeübt wurde. Da man doch von den kleinen Konstruktionen an grössere überging, musste man sich notwendigerweise von ihrer Festigkeit Rechenschaft geben und Berechnungen durchführen. Es ist besonders der Übergang zu den Eisenkonstruktionen, der die grossen Ausführungen dieser Art ermöglicht hat.

— Man hat bei den *Stemmtoren* der Schiffahrtschleusen von Alters her von zwei verschiedenen Typen gesprochen: Riegel- und Ständertor; bei den ersten wird die wasserdichtende Haut (Holz oder Eisen) von wagerechten Trägern (Riegeln) getragen und an die Schlagsäule und Wendesäule überführt; da der Angriffspunkt jedes Riegels an der Wendesäule oft durch eine Lagerkonstruktion gestützt ist, und da diese Stützen nicht gleichmässig anliegen, kommt hierdurch eine unklare Verteilung der Balkendrücke heraus; diese Unbestimmtheit wird bei den Ständertoren scheinbar vermieden (Fig. 70); hier geben die Ständer ihre Belastung in statisch bestimmter Weise ab; immerhin sind oft wangechte Sekundärträger vorhanden (in der Figur gestrichelt), welche mit der Bekleidung auch die Rolle der Riegel spielen, und dabei geht die Klarheit wieder teilweise verloren. Im Grunde genommen besteht in Bezug auf das statische Verhalten kein Unterschied zwischen Riegel- und Ständertoren, sondern beide stellen statisch unbestimmte Trägerroste dar, welche nur unter Zuhilfenahme der Deformationen berechnet werden können.

Viel wichtiger ist doch die Frage von der Lastverteilung bei den sogenannten *Stoney-Schützen* und bei den *Schwimmtoren*, die grosse

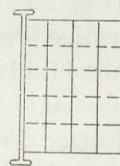


Fig. 70.

Oeffnungen verschliessen. Von Schützen sind viele Systeme vorhanden, die sich jedoch vom statischen Gesichtspunkt aus in zwei Typen einreihen lassen:

1) Einzel- oder Doppelschützen, welche aus *vielen* Hauptträgern zusammengesetzt sind; Fig. 71 zeigt die Schützen des Kraftwerkes Laufburg (Schweiz), die eine erhebliche Wassertiefe aufweisen; die obere Schütze hat 3 Hauptträger, die untere Schütze, welche den grössten Teil der Belastung aufnimmt, hat 9 Hauptträger, die mit einer gegenseitigen Entfernung von weniger als 1 m liegen; die Hauptträger der Schützen sind durch »Querträger«, welche die lotrechte Verbindung aller Teile gewährleisten, verbunden; die Hauptträger können eine beträchtliche Spannweite haben (25-35 m), die Trägerhöhe der Querträger ist

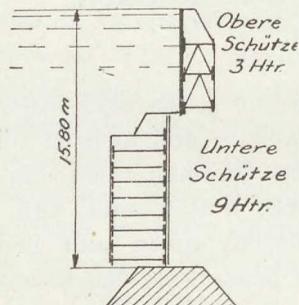


Fig. 71.

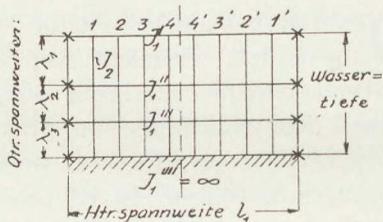


Fig. 72.

meistens gleich der Höhe der Hauptträger; die Hauptträger der ganzen Schütze sind in den Pfeilernischen fest unterstützt; der unterste Hauptträger liegt an der Wehrschwelle in seiner ganzen Länge an; die Stützung der Hauptträger kann unter jedem Hauptträger stattfinden (Fig. 72); wenn sehr viele Hauptträger vorhanden sind, sind doch nur einige Punkte des Endquerträgers (durch Rollwagen etc.) gestützt, und der Endquerträger ist also in diesem Fall als Teil des Rostes aufzufassen.

Der Trägerrost ist bei grossen Schützen noch mit sekundären Trägern versehen, die schliesslich die wasserdichte Blechhaut tragen.

2) Die statisch bestimmten Schützen (Fig. 73), System M. A. N. u. a., wo jede Schützentafel nur 2 Hauptträger besitzt; bei diesen Konstruktionen ist die Lastverteilung ohne weiteres bekannt; wir wollen uns deshalb nicht mit diesem Schützensystem beschäftigen.

Die Schwimmtore zeigen (Fig. 74) das gleiche statische System wie Fig. 71, nämlich mehrere Hauptträger, im Allgemeinen 3 oder 4, die an den Seitenmauern festgestützt sind und durch viele senkrechte

Querträger (Fachwerkwände) gestützt werden; der untere Hauptträger liegt am Drehpunkt an.

Die Tore und Schützen sind also alle als Trägerroste aufgebaut; die Kenntnis der Verteilung des Wasserdruckes auf die Hauptträger ist hier unerlässlich für die Dimensionierung der Träger; auch ist es notwendig die Deformationen des Tores oder der Schütze zu kennen um die erwünschte Dichtigkeit im Anliegen der Randträger nachzuprüfen und zu gewährleisten.

Wie bei den Eisenbetonbrücken ist auch hier die Frage der Lastverteilung mit einem Plattenproblem verknüpft, indem die Blechhaut einen Teil aller Trägerflanschen ausmacht. Eggenschwüler¹ hat u. a. diese Frage untersucht und ausführliche Studien der Beanspruchungen

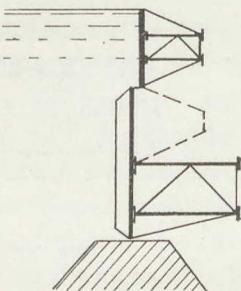


Fig. 73.

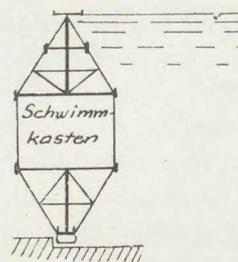


Fig. 74.

von Schiebetoren im Allgemeinen veröffentlicht. Die Berechnung solcher Tragwerke lässt sich ohne weiteres durch das allgemeine Verfahren durchführen; die spezielleren Kunstgriffe sind auch hier verwendbar. Bei der Berechnung kann man sehr wohl die Trägheitsmomente der Hauptträger über die ganze Trägerlänge konstant annehmen; für den unteren Hauptträger, der an der Schwelle aufliegt, ist das Trägheitsmoment gleich unendlich zu setzen; die Trägheitsmomente der übrigen Hauptträger sind im Allgemeinen recht verschieden. Dagegen sind die Querträger ziemlich gleich ausgebildet ($I_2 = \text{konstant}$).

Der Rost ist immer einfach-symmetrisch wie die Belastung; die Querträger kann man oft »unendlich steif« annehmen. Bei einem Tor gemäß Fig. 74 war

$$I_1 = 3I_2, \quad l_1 = 32 \text{ m}, \quad \lambda_2 = 4,50 \text{ m}, \quad \text{also } l_1 \approx 7\lambda_2$$

und $\beta = 3 \cdot (\frac{1}{7})^3 < 0,01$.

Der Querträger bleibt also annähernd geradlinig, und die Hauptträger

¹ A. Eggenschwüler: Über die Festigkeitsberechnung von Schiebetoren und ähnlichen Bauwerken. Leipzig 1921 (Verlag Ludwig Degener).

biegen gemäss Fig. 75 durch; diese Verteilung gibt jedenfalls eine erste Vorstellung von der Sache. Bei der Berechnung hat man nur den Rost für einen Belastungsfall: grösstmöglichen Wasserdruk zu berechnen. Diesen Wasserdruk auf den Querträgern kann man sehr wohl als kontinuierliche Dreieckverteilung annehmen; man muss dann nur die Konstanten Z_{ro} für diesen Belastungsfall berechnen. Bei der Berechnung ist es vorteilhaft die Einflusslinien zu benutzen, u. z. in dem Sinne, dass man die Wasserbelastung (Dreieck mit Breite gleich Querträgerentfernung) nur über zwei symmetrische Querträger (z. B. 4 und 4' Fig. 72) wirken lässt und nur mit diesen beiden Querträgern rechnet (drei unbekannte Durchbiegungen); nachher werden die Querträger

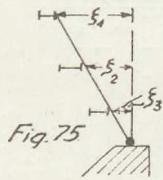


Fig. 75.

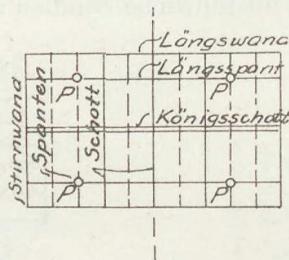


Fig. 76.

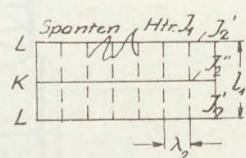


Fig. 77.

3 und 3' belastet usw., bis man die Einflusszahlen für den ganzen Rost besitzt.

Mit diesen wenigen Bemerkungen sei zur Genüge die Berechnung dieser Konstruktionen mittels des allgemeinen Verfahrens erläutert.

Die vorerwähnten Konstruktionen waren alle in einer lotrechten Ebene gelegen und durch wagerechten Wasserdruk beansprucht; die Stützung der Träger erfolgte durch feste Auflager.

Bei einer anderen wichtigen Gruppe der Eisenwasserbauten: den *Schwimmkörpern*, sowie *Schwimmdocks*¹ und *Pontons* haben wir dagegen mit einem wagerechten Rost zu tun, der von einer lotrechten äusseren Belastung beansprucht und vom Auftrieb in jedem Knoten gestützt wird. Die Schwimmdocks (L- oder U-Docks) sind im Allgemeinen so ausgebildet (Fig. 76), dass das Königsschott und die Längsspannen durch die Spanten zu einem Trägerrost zusammengebaut sind, welcher die Blechhaut aufnimmt; der Rost ist fast immer doppel-symmetrisch, das Königsschott bildet die Längsachse. Nicht selten sind nur 3 Längsträger vorhanden (Fig. 77). Pontons zeigen durchaus ähnliche Verhältnisse.

¹ Karner gibt (Eisenbau 1919-20) eine sehr interessante Untersuchung solcher Konstruktionen in Bezug auf Ausführungsformen, Belastungen und statische Berechnung für diese stellt er — mittels der Kraftmethode — ein Verfahren auf.

Bei der Berechnung eines Schwimmdocks kann man alle Spanten gleich voraussetzen (I_1 , diese werden als Hauptträger aufgefasst), ihre Länge l_1 ist konstant. Für die Verteilungsträger (K und L) ist das Trägheitsmoment über die ganze Länge konstant, (I_2 , diese werden also die Rolle der »Querträger« spielen). Oft haben wir mit sehr steifen Verteilungsträgern (K und L) zu tun; setzen wir z. B. in Fig. 77

$$l_1 = 12,50 \text{ m}, \quad \lambda_2 = 2,50 \text{ m} = \frac{1}{5} l_1 \quad \text{haben wir}$$

$$\beta = \frac{I_1}{I_2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{I_1}{I_2} \cdot 0,008 \leq 0,008, \quad \text{da } I_1 < I_2;$$

β ist also sehr klein; bei der grossen Anzahl der Hauptträger kann man doch nicht ohne weiteres die Träger K und L unendlich steif annehmen.

Die Belastung ist teils das Eigengewicht (oft 40—50 % der nutzbaren Tragfähigkeit), teils die Schiffsbelastung; die erstere wird vom Auftrieb direkt aufgenommen ohne bedeutende Beanspruchungen zu erzeugen. Das Gewicht des Schiffes ist durch die Gewichtskurve bekannt; diese liefert nach Abzug des Auftriebes in jedem Knoten die Belastungskurve, die den Rost beansprucht. Karner zeigt nun, dass die in Betracht zu ziehenden Belastungen des Rastes sich immer aus zwei einfachen Belastungen zusammensetzen lassen: 1) einer doppel-symmetrischen Belastung (Fig. 78 b) die keine Drehungen der Symmetrieachse des Docks veranlässt, und 2) einer umgekehrt symmetrischen Belastung (Fig. 78 c), die eine Drehung α der Längsache hervorruft; wenn die Lastverteilung für solche zwei Fälle bekannt ist, sind andere Belastungsfälle durch das Belastungs-Umordnungs-Verfahren zu den zwei behandelten zurückzuführen.

Die Berechnung eines Rastes für diese zwei Belastungsfälle ist ziemlich einfach; durch den Auftrieb werden immer alle Knoten von unten belastet; man teilt deshalb am besten die Berechnung so ein, dass man die Einflusszahlen (Durchbiegungen, Momente usw.) für Belastung zweier symmetrischen Spanten zuerst ermittelt (z. B. die »Einflussbelastung« P in Fig. 76); nachher für Belastung eines zweiten Spantenaars usw. Bei der Berechnung nimmt man an, dass der Rost vom bekannten Auftrieb belastet und in den Angriffspunkten der Belastung gestützt sei (die Durchbiegungen der Angriffspunkte von P gleich 0 zu setzen). Für die Einführung simplifizierter Systeme (stufenweise Berechnung etc.) ist es hier genügend auf die allgemeine Theorie hinzuweisen.

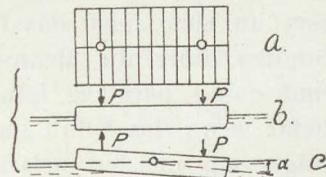


Fig. 78.

Die gewöhnlichen Schiffe¹ weisen eine ähnliche Konstruktion auf; es sind hier drei Längsträger vorhanden: Schiffskiel und Seitenwände (Fig. 79); die Spanten und Schotte bilden die Querkonstruktionen,

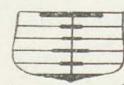


Fig. 79.

und das Ganze ist ein ziemlich unklares Tragwerk, das in der Regel mittels Erfahrungsregeln usw. entworfen wird; auch ist die Wellenbelastung eine recht unsichere Größe. Bei der Untersuchung der Längssteifigkeit der Schiffe begnügt man sich wohl damit, dass man das gesamte Trägheitsmoment ($I_k + 2I_L$) von den drei Längsträgern berechnet (der »fiktive Längsträger« mit diesem Trägheitsmoment ist in Fig. 79 schwarz eingezeichnet, er entsteht, wenn man alle durchgehenden Eisenteile der drei Träger in der Schiffssachse vereinigt), ohne sich um die Verteilung des Längsmomentes über diesen drei Trägern zu kümmern.

Bei Vorhandensein konzentrierter Lasten, die nicht im Längsplan des Schiffes liegen (z. B. Kanonentürme der Kriegsschiffe, schwere Maschinen o. a.) wäre eine Untersuchung der Aufnahme dieser Belastung durch die Spanten wohl erwünscht statt sich mit der einfachen Annahme zu begnügen, dass nur die direkt belasteten Spanten mitwirken.

Die Auffassung des Schiffes als lastverteilender Trägerrost würde eine genauere Berechnung ermöglichen. Auch für die Bodenkonstruktion an sich spielt das Problem des Rostes eine Rolle. Schilling² hat Studien über die Beanspruchungen des Schiffsbodens — Kielträger und damit parallele Längsträger, mit Bodenquerträgern — veröffentlicht; wenn das Schiff im Trockendock steht, findet er, dass der Kielträger am meisten belastet wird, dass aber die anderen Längsträger einen Teil der Belastung aufnehmen; die vielen Querträger des Bodens verbinden alle Längsträger zu einem elastischen Trägerrost.

¹ C. Hansen: Skibsbygning.

² Schilling: Statik der Bodenkonstruktionen der Schiffe. Julius Springer, Berlin 1925.

T A B E L L E N

Sonderfall 1: λ variabel, I konstant.

TABELLE 1

3 Öffnungen, $l_1 = 2l_2 = l_3 = 2\lambda$, $\mu = \frac{EI}{\lambda^3}$, $\mu_1 = \mu\lambda$.

(Stufenweise Berechnung Fall 5a).

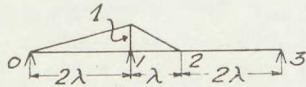


Fig. 80.

$M_{11} = -1,7143 \mu_1$

$M_{21} = +1,2857 -$

$Q_{11} = +0,8571 \mu$

$Q_{21} = -3,0000 -$

$Q_{31} = +0,6429 -$

$R_{01} = -0,8571 \mu$

$R_{11} = +3,8571 -$

$R_{21} = -3,6428 -$

$R_{31} = +0,6429 -$

TABELLE 2

3 Öffnungen, $l_1 = 3l_2 = l_3 = 3\lambda$, $\mu = \frac{EI}{\lambda^3}$, $\mu_1 = \mu\lambda$.

(Stufenweise Berechnung Fall 7a).

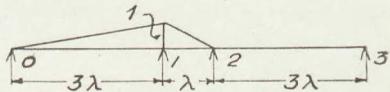


Fig. 81.

$M_{11} = -1,1111 \mu_1$

$M_{21} = +0,8889 -$

$Q_{11} = +0,3704 \mu$

$Q_{21} = -2,0000 -$

$Q_{31} = +0,2963 -$

$R_{01} = -0,3704 \mu$

$R_{11} = +2,3704 -$

$R_{21} = -2,2963 -$

$R_{31} = +0,2963 -$

TABELLE 3

5 Öffnungen $l_1 = l_2 = 2 l_3 = l_4 = l_5 = 2\lambda$, $\mu = \frac{EI}{\lambda^3}$, $\mu_1 = \mu\lambda$.
(Stufenweise Berechnung Fall 9a).

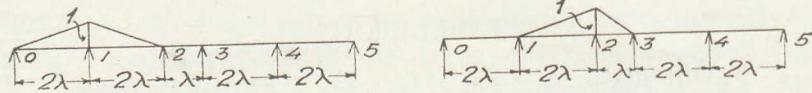


Fig. 82.

$$M_{11} = -0,9615 \mu_1$$

$$M_{21} = +0,8462 \text{ -}$$

$$M_{31} = -0,1539 \text{ -}$$

$$M_{41} = +0,0385 \text{ -}$$

$$M_{12} = +0,8846 \mu_1$$

$$M_{22} = -2,0385 \text{ -}$$

$$M_{32} = +1,4615 \text{ -}$$

$$M_{42} = -0,3654 \text{ -}$$

$$Q_{11} = +0,4808 \mu$$

$$Q_{21} = -0,9039 \text{ -}$$

$$Q_{31} = +1,0000 \text{ -}$$

$$Q_{41} = -0,0962 \text{ -}$$

$$Q_{51} = +0,0192 \text{ -}$$

$$Q_{12} = -0,4423 \mu$$

$$Q_{22} = +1,4615 \text{ -}$$

$$Q_{32} = -3,5000 \text{ -}$$

$$Q_{42} = +0,9135 \text{ -}$$

$$Q_{52} = -0,1827 \text{ -}$$

$$R_{01} = -0,4808 \mu$$

$$R_{11} = +1,3846 \text{ -}$$

$$R_{21} = -1,9039 \text{ -}$$

$$R_{31} = +1,0962 \text{ -}$$

$$R_{41} = -0,1154 \text{ -}$$

$$R_{51} = +0,0192 \text{ -}$$

$$R_{02} = +0,4423 \mu$$

$$R_{12} = -1,9039 \text{ -}$$

$$R_{22} = +4,9615 \text{ -}$$

$$R_{32} = -4,4135 \text{ -}$$

$$R_{42} = +1,0962 \text{ -}$$

$$R_{52} = -0,1827 \text{ -}$$

Sonderfall 2: λ konstant, I variabel.

TABELLE 4

4 Öffnungen.

$$I_1 = \frac{1}{2} I_2 = \frac{1}{2} I_3 = I_4; \quad \mu = \frac{EI_2}{\lambda^3}, \quad \mu_1 = \mu\lambda.$$

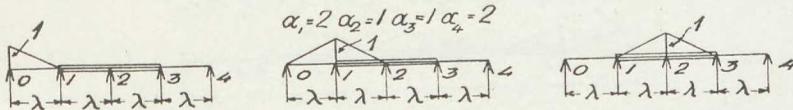


Fig. 83.

$$M_{10} = + 1,0450 \quad \mu_1$$

$$M_{20} = - 0,2727 \quad -$$

$$M_{30} = + 0,0450 \quad -$$

$$Q_{10} = - 1,0450 \quad \mu$$

$$Q_{20} = + 1,3177 \quad -$$

$$Q_{30} = - 0,3177 \quad -$$

$$Q_{40} = + 0,0450 \quad -$$

$$R_{00} = + 1,0450 \quad \mu$$

$$R_{10} = - 2,3627 \quad -$$

$$R_{20} = + 1,6354 \quad -$$

$$R_{30} = - 0,3627 \quad -$$

$$R_{40} = + 0,0450 \quad -$$

$$M_{11} = - 2,3636 \quad \mu_1$$

$$M_{21} = + 2,1818 \quad -$$

$$M_{31} = - 0,3636 \quad -$$

$$Q_{11} = + 2,3636 \quad \mu$$

$$Q_{21} = - 4,5454 \quad -$$

$$Q_{31} = + 2,5454 \quad -$$

$$Q_{41} = - 0,3636 \quad -$$

$$R_{01} = - 2,3636 \quad \mu$$

$$R_{11} = + 6,9090 \quad -$$

$$R_{21} = - 7,0908 \quad -$$

$$R_{31} = + 2,9090 \quad -$$

$$R_{41} = - 0,3636 \quad -$$

$$M_{12} = + 1,6363 \quad \mu_1$$

$$M_{22} = - 3,8181 \quad -$$

$$M_{32} = + 1,6363 \quad -$$

$$Q_{12} = - 1,6363 \quad \mu$$

$$Q_{22} = + 5,4544 \quad -$$

$$Q_{32} = - 5,4544 \quad -$$

$$Q_{42} = + 1,6363 \quad -$$

$$R_{02} = + 1,6363 \quad \mu$$

$$R_{12} = - 7,0907 \quad -$$

$$R_{22} = + 10,9088 \quad -$$

$$R_{32} = - 7,0907 \quad -$$

$$R_{42} = + 1,6363 \quad -$$

TABELLE 5

6 Öffnungen.

$$I_1 = \frac{1}{1,3} I_2 = \frac{1}{2} I_3 = \frac{1}{2} I_4 = \frac{1}{1,3} I_5 = I_6, \quad \mu = \frac{EI_3}{\lambda^3}, \quad \mu_1 = \mu \lambda.$$

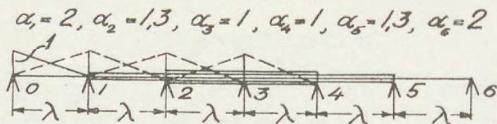


Fig. 84.

$M_{10} = + 0,09661 \mu_1$	$M_{11} = - 2,2220 \mu_1$	$M_{12} = + 1,6225 \mu_1$	$M_{13} = - 0,4610 \mu_1$
$M_{20} = - 0,2898$	-	$M_{21} = + 2,0504$	-
$M_{30} = + 0,0769$	-	$M_{31} = - 0,5439$	-
$M_{40} = - 0,0176$	-	$M_{41} = + 0,1252$	-
$M_{50} = + 0,0035$	-	$M_{51} = - 0,0246$	-
$Q_{10} = - 0,9661 \mu$	$Q_{11} = + 2,2220 \mu$	$Q_{12} = - 1,6225 \mu$	$Q_{13} = + 0,4610 \mu$
$Q_{20} = + 1,2559$	-	$Q_{21} = - 4,2720$	-
$Q_{30} = - 0,3667$	-	$Q_{31} = + 2,5943$	-
$Q_{40} = + 0,0945$	-	$Q_{41} = - 0,6691$	-
$Q_{50} = - 0,0211$	-	$Q_{51} = + 0,1498$	-
$Q_{60} = + 0,0035$	-	$Q_{61} = - 0,0246$	-
$R_{00} = + 0,9661 \mu$	$R_{01} = - 2,2220 \mu$	$R_{02} = + 1,6225 \mu$	$R_{03} = - 0,4610 \mu$
$R_{10} = - 2,2220$	-	$R_{11} = + 6,4938$	-
$R_{20} = + 1,6225$	-	$R_{21} = - 6,8670$	-
$R_{30} = - 0,4610$	-	$R_{31} = + 3,2634$	-
$R_{40} = + 0,1156$	-	$R_{41} = - 0,8190$	-
$R_{50} = - 0,0246$	-	$R_{51} = + 0,1744$	-
$R_{60} = + 0,0035$	-	$R_{61} = - 0,0246$	-

Normaler Fall: λ und I konstant.

$$\mu = \frac{EI}{\lambda^3}, \quad \mu_1 = \frac{EI}{\lambda^2}.$$

TABELLE 6
2 Öffnungen.

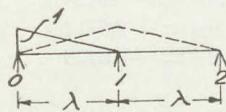


Fig. 85.

$$M_{10} = +1,5000 \mu_1 \quad M_{11} = -3,0000 \mu_1$$

$$Q_{10} = -1,5000 \mu \quad Q_{11} = +3,0000 \mu$$

$$Q_{20} = +1,5000 \quad Q_{21} = -3,0000 \quad -$$

$$R_{00} = +1,5000 \mu \quad R_{01} = -3,0000 \mu$$

$$R_{10} = -3,0000 \quad - \quad R_{11} = +6,0000 \quad -$$

$$R_{20} = +1,5000 \quad - \quad R_{21} = -3,0000 \quad -$$

TABELLE 7

3 Öffnungen.

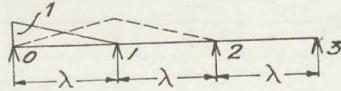


Fig. 85a.

$$M_{10} = +1,6000 \mu_1 \quad M_{11} = -3,6000 \mu_1$$

$$M_{20} = -0,4000 \quad - \quad M_{21} = +2,4000 \quad -$$

$$Q_{10} = -1,6000 \mu \quad Q_{11} = +3,6000 \mu$$

$$Q_{20} = +2,0000 \quad - \quad Q_{21} = -6,0000 \quad -$$

$$Q_{30} = -0,4000 \quad - \quad Q_{31} = +2,4000 \quad -$$

$$R_{00} = +1,6000 \mu \quad R_{01} = -3,6000 \mu$$

$$R_{10} = -3,6000 \quad - \quad R_{11} = +9,6000 \quad -$$

$$R_{20} = +2,4000 \quad - \quad R_{21} = -8,4000 \quad -$$

$$R_{30} = -0,4000 \quad - \quad R_{31} = +2,4000 \quad -$$

TABELLE 8
4 Öffnungen.

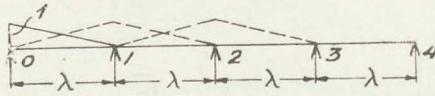


Fig. 86.

$M_{10} = + 1,6071 \mu_1$	$M_{11} = - 3,6428 \mu_1$	$M_{12} = + 2,5714 \mu_1$
$M_{20} = - 0,4286 -$	$M_{21} = + 2,5714 -$	$M_{22} = - 4,2855 -$
$M_{30} = + 0,1071 -$	$M_{31} = - 0,6428 -$	$M_{32} = + 2,5714 -$
$Q_{10} = - 1,6071 \mu$	$Q_{11} = + 3,6428 \mu$	$Q_{12} = - 2,5714 \mu$
$Q_{20} = + 2,0357 -$	$Q_{21} = - 6,2142 -$	$Q_{22} = + 6,8569 -$
$Q_{30} = - 0,5357 -$	$Q_{31} = + 3,2142 -$	$Q_{32} = - 6,8569 -$
$Q_{40} = + 0,1071 -$	$Q_{41} = - 0,6428 -$	$Q_{42} = + 2,5714 -$
$R_{00} = + 1,6071 \mu$	$R_{01} = - 3,6428 \mu$	$R_{02} = + 2,5714 \mu$
$R_{10} = - 3,6428 -$	$R_{11} = + 9,8571 -$	$R_{12} = - 9,4284 -$
$R_{20} = + 2,5714 -$	$R_{21} = - 9,4284 -$	$R_{22} = + 13,7138 -$
$R_{30} = - 0,6428 -$	$R_{31} = + 3,8571 -$	$R_{32} = - 9,4284 -$
$R_{40} = + 0,1071 -$	$R_{41} = - 0,6428 -$	$R_{42} = + 2,5714 -$

TABELLE 9
5 Öffnungen.

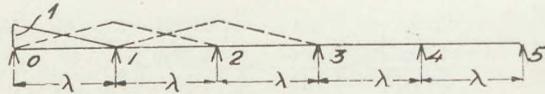


Fig. 87.

$M_{10} = + 1,6077 \mu_1$	$M_{11} = - 3,6459 \mu_1$	$M_{12} = + 2,5837 \mu_1$
$M_{20} = - 0,4306 -$	$M_{21} = + 2,5837 -$	$M_{22} = - 4,3350 -$
$M_{30} = + 0,1148 -$	$M_{31} = - 0,6890 -$	$M_{32} = + 2,7559 -$
$M_{40} = - 0,0287 -$	$M_{41} = + 0,1722 -$	$M_{42} = - 0,6890 -$
$Q_{10} = - 1,6077 \mu$	$Q_{11} = + 3,6459 \mu$	$Q_{12} = - 2,5837 \mu$
$Q_{20} = + 2,0383 -$	$Q_{21} = - 6,2296 -$	$Q_{22} = + 6,9184 -$
$Q_{30} = - 0,5455 -$	$Q_{31} = + 3,2726 -$	$Q_{32} = - 7,0906 -$
$Q_{40} = + 0,1435 -$	$Q_{41} = - 0,8611 -$	$Q_{42} = + 3,4448 -$
$Q_{50} = - 0,0287 -$	$Q_{51} = + 0,1722 -$	$Q_{52} = - 0,6890 -$
$R_{00} = + 1,6077 \mu$	$R_{01} = - 3,6459 \mu$	$R_{02} = + 2,5837 \mu$
$R_{10} = - 3,6459 -$	$R_{11} = + 9,8753 -$	$R_{12} = - 9,5020 -$
$R_{20} = + 2,5837 -$	$R_{21} = - 9,5020 -$	$R_{22} = + 14,0090 -$
$R_{30} = - 0,6890 -$	$R_{31} = + 4,1337 -$	$R_{32} = - 10,5354 -$
$R_{40} = + 0,1722 -$	$R_{41} = - 1,0333 -$	$R_{42} = + 4,1337 -$
$R_{50} = - 0,0287 -$	$R_{51} = + 0,1722 -$	$R_{52} = - 0,6890 -$

TABELLE 10
6 Öffnungen.



Fig. 88.

$M_{10} = + 1,6077 \mu_1$	$M_{11} = - 3,6461 \mu_1$	$M_{12} = + 2,5846 \mu_1$	$M_{13} = - 0,6923 \mu_1$
$M_{20} = - 0,4308 -$	$M_{21} = + 2,5846 -$	$M_{22} = - 4,3383 -$	$M_{23} = + 2,7692 -$
$M_{30} = + 0,1154 -$	$M_{31} = - 0,6923 -$	$M_{32} = + 2,7692 -$	$M_{33} = - 4,3846 -$
$M_{40} = - 0,0308 -$	$M_{41} = + 0,1846 -$	$M_{42} = - 0,7385 -$	$M_{43} = + 2,7692 -$
$M_{50} = + 0,0077 -$	$M_{51} = - 0,0462 -$	$M_{52} = + 0,1846 -$	$M_{53} = - 0,6923 -$

$Q_{10} = - 1,6077 \mu$	$Q_{11} = + 3,6461 \mu$	$Q_{12} = - 2,5846 \mu$	$Q_{13} = + 0,6923 \mu$
$Q_{20} = + 2,0385 -$	$Q_{21} = - 6,2307 -$	$Q_{22} = + 6,9228 -$	$Q_{23} = - 3,4614 -$
$Q_{30} = - 0,5461 -$	$Q_{31} = + 3,2768 -$	$Q_{32} = - 7,1074 -$	$Q_{33} = + 7,1537 -$
$Q_{40} = + 0,1461 -$	$Q_{41} = - 0,8769 -$	$Q_{42} = + 3,5076 -$	$Q_{43} = - 7,1537 -$
$Q_{50} = - 0,0385 -$	$Q_{51} = + 0,2308 -$	$Q_{52} = - 0,9231 -$	$Q_{53} = + 3,4614 -$
$Q_{60} = + 0,0077 -$	$Q_{61} = - 0,0462 -$	$Q_{62} = + 0,1846 -$	$Q_{63} = - 0,6923 -$

$R_{00} = + 1,6077 \mu$	$R_{01} = - 3,6461 \mu$	$R_{02} = + 2,5846 \mu$	$R_{03} = - 0,6923 \mu$
$R_{10} = - 3,6461 -$	$R_{11} = + 9,8768 -$	$R_{12} = - 9,5076 -$	$R_{13} = + 4,1538 -$
$R_{20} = + 2,5846 -$	$R_{21} = - 9,5076 -$	$R_{22} = + 14,0303 -$	$R_{23} = - 10,6150 -$
$R_{30} = - 0,6923 -$	$R_{31} = + 4,1538 -$	$R_{32} = - 10,6150 -$	$R_{33} = + 14,3070 -$
$R_{40} = + 0,1846 -$	$R_{41} = - 1,1077 -$	$R_{42} = + 4,4307 -$	$R_{43} = - 10,6150 -$
$R_{50} = - 0,0462 -$	$R_{51} = + 0,2769 -$	$R_{52} = - 1,1077 -$	$R_{53} = + 4,1538 -$
$R_{60} = + 0,0077 -$	$R_{61} = - 0,0462 -$	$R_{62} = + 0,1846 -$	$R_{63} = - 0,6923 -$

TABELLE 11
7 Öffnungen.

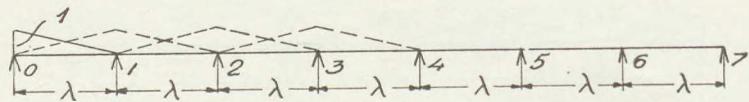


Fig. 89.

$M_{10} = + 1,6077 \mu_1$	$M_{11} = - 3,6462 \mu_1$	$M_{12} = + 2,5847 \mu_1$	$M_{13} = - 0,6925 \mu_1$
$M_{20} = - 0,4308$	$M_{21} = + 2,5847$	$M_{22} = - 4,3385$	$M_{23} = + 2,7703$
$M_{30} = + 0,1154$	$M_{31} = - 0,6925$	$M_{32} = + 2,7703$	$M_{33} = - 4,3896$
$M_{40} = - 0,0309$	$M_{41} = + 0,1855$	$M_{42} = - 0,7420$	$M_{43} = + 2,7878$
$M_{50} = + 0,0082$	$M_{51} = - 0,0495$	$M_{52} = + 0,1979$	$M_{53} = - 0,7420$
$M_{60} = - 0,0021$	$M_{61} = + 0,0124$	$M_{62} = - 0,0495$	$M_{63} = + 0,1855$

$Q_{10} = - 1,6077 \mu$	$Q_{11} = + 3,6462 \mu$	$Q_{12} = - 2,5847 \mu$	$Q_{13} = + 0,6925 \mu$
$Q_{20} = + 2,0385$	$Q_{21} = - 6,2302$	$Q_{22} = + 6,9232$	$Q_{23} = - 3,4628$
$Q_{30} = - 0,5462$	$Q_{31} = + 3,2772$	$Q_{32} = - 7,1088$	$Q_{33} = + 7,1599$
$Q_{40} = + 0,1463$	$Q_{41} = - 0,8781$	$Q_{42} = + 3,5123$	$Q_{43} = - 7,1774$
$Q_{50} = - 0,0392$	$Q_{51} = + 0,2350$	$Q_{52} = - 0,9399$	$Q_{53} = + 3,5298$
$Q_{60} = + 0,0103$	$Q_{61} = - 0,0619$	$Q_{62} = + 0,2474$	$Q_{63} = - 0,9275$
$Q_{70} = - 0,0021$	$Q_{71} = + 0,0124$	$Q_{72} = - 0,0495$	$Q_{73} = + 0,1855$

$R_{00} = + 1,6077 \mu$	$R_{01} = - 3,6462 \mu$	$R_{02} = + 2,5847 \mu$	$R_{03} = - 0,6925 \mu$
$R_{10} = - 3,6462$	$R_{11} = + 9,8769$	$R_{12} = - 9,5079$	$R_{13} = + 4,1554$
$R_{20} = + 2,5847$	$R_{21} = - 9,5079$	$R_{22} = + 14,0320$	$R_{23} = - 10,6219$
$R_{30} = - 0,6925$	$R_{31} = + 4,1554$	$R_{32} = - 10,6219$	$R_{33} = + 14,3373$
$R_{40} = + 0,1855$	$R_{41} = - 1,1130$	$R_{42} = + 4,4547$	$R_{43} = - 10,7072$
$R_{50} = - 0,0495$	$R_{51} = + 0,2968$	$R_{52} = - 1,1872$	$R_{53} = + 4,4547$
$R_{60} = + 0,0124$	$R_{61} = - 0,0742$	$R_{62} = + 0,2968$	$R_{63} = - 1,1130$
$R_{70} = - 0,0021$	$R_{71} = + 0,0124$	$R_{72} = - 0,0495$	$R_{73} = + 0,1855$

TABELLE 12

8 Öffnungen.

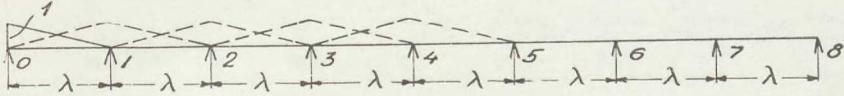


Fig. 90.

$M_{10}=+1,6077\mu_1$	$M_{11}=-3,6461\mu_1$	$M_{12}=+2,5846\mu_1$	$M_{13}=-0,6925\mu_1$	$M_{14}=+0,1855\mu_1$
$M_{20}=-0,4308$	$M_{21}=+2,5846$	$M_{22}=-4,3385$	$M_{23}=+2,7701$	$M_{24}=-0,7423$
$M_{30}=+0,1154$	$M_{31}=-0,6925$	$M_{32}=+2,7701$	$M_{33}=-4,3886$	$M_{34}=+2,7835$
$M_{40}=-0,0309$	$M_{41}=+0,1855$	$M_{42}=-0,7423$	$M_{43}=+2,7835$	$M_{44}=-4,3918$
$M_{50}=+0,0083$	$M_{51}=-0,0497$	$M_{52}=+0,1988$	$M_{53}=-0,7456$	$M_{54}=+2,7835$
$M_{60}=-0,0022$	$M_{61}=+0,0133$	$M_{62}=-0,0530$	$M_{63}=+0,1988$	$M_{64}=-0,7423$
$M_{70}=+0,0006$	$M_{71}=-0,0033$	$M_{72}=+0,0133$	$M_{73}=-0,0497$	$M_{74}=+0,1855$

$Q_{10}=-1,6077\mu$	$Q_{11}=+3,6461\mu$	$Q_{12}=-2,5846\mu$	$Q_{13}=+0,6925\mu$	$Q_{14}=-0,1855\mu$
$Q_{20}=+2,0384$	$Q_{21}=-6,2308$	$Q_{22}=+6,9232$	$Q_{23}=-3,4625$	$Q_{24}=+0,9278$
$Q_{30}=-0,5462$	$Q_{31}=+3,2772$	$Q_{32}=-7,1087$	$Q_{33}=+7,1586$	$Q_{34}=-3,5258$
$Q_{40}=+0,1463$	$Q_{41}=-0,8781$	$Q_{42}=+3,5125$	$Q_{43}=-7,1721$	$Q_{44}=+7,1753$
$Q_{50}=-0,0392$	$Q_{51}=+0,2353$	$Q_{52}=-0,9411$	$Q_{53}=+3,5290$	$Q_{54}=-7,1753$
$Q_{60}=+0,0105$	$Q_{61}=-0,0631$	$Q_{62}=+0,2518$	$Q_{63}=-0,9444$	$Q_{64}=+3,5258$
$Q_{70}=-0,0028$	$Q_{71}=+0,0167$	$Q_{72}=-0,0663$	$Q_{73}=+0,2485$	$Q_{74}=-0,9278$
$Q_{80}=+0,0006$	$Q_{81}=-0,0033$	$Q_{82}=+0,0133$	$Q_{83}=-0,0497$	$Q_{84}=+0,1855$

$R_{00}=+1,6077\mu$	$R_{01}=-3,6461\mu$	$R_{02}=+2,5846\mu$	$R_{03}=-0,6925\mu$	$R_{04}=+0,1855\mu$
$R_{10}=-3,6461$	$R_{11}=+9,8769$	$R_{12}=-9,5078$	$R_{13}=+4,1550$	$R_{14}=-1,1134$
$R_{20}=+2,5846$	$R_{21}=-9,5080$	$R_{22}=+14,0319$	$R_{23}=-10,6211$	$R_{24}=+4,4536$
$R_{30}=-0,6925$	$R_{31}=+4,1553$	$R_{32}=-10,6212$	$R_{33}=+14,3306$	$R_{34}=-10,7000$
$R_{40}=+0,1855$	$R_{41}=-1,1134$	$R_{42}=+4,4536$	$R_{43}=-10,7000$	$R_{44}=+14,3500$
$R_{50}=-0,0497$	$R_{51}=+0,2984$	$R_{52}=-1,1929$	$R_{53}=+4,4734$	$R_{54}=-10,7000$
$R_{60}=+0,0133$	$R_{61}=-0,0797$	$R_{62}=+0,3181$	$R_{63}=-1,1929$	$R_{64}=+4,4536$
$R_{70}=-0,0033$	$R_{71}=+0,0200$	$R_{72}=-0,0795$	$R_{73}=+0,2982$	$R_{74}=-1,1134$
$R_{80}=+0,0006$	$R_{81}=-0,0033$	$R_{82}=+0,0133$	$R_{83}=-0,0497$	$R_{84}=+0,1855$

TABELLE 13

10 Öffnungen.

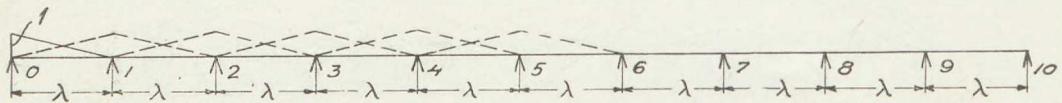


Fig. 91.

$M_{10} = +1,0677\mu_1$	$M_{11} = -3,6462\mu_1$	$M_{12} = +2,5847\mu_1$	$M_{15} = -0,6926\mu_1$	$M_{14} = +0,1855\mu_1$	$M_{15} = -0,0497\mu_1$
$M_{20} = -0,4304$	$M_{21} = +2,5847$	$M_{22} = -4,3380$	$M_{23} = +2,7700$	$M_{24} = -0,7418$	$M_{25} = +0,1989$
$M_{30} = +0,1154$	$M_{31} = -0,6926$	$M_{32} = +2,7700$	$M_{33} = -4,3860$	$M_{34} = +2,7820$	$M_{35} = -0,7462$
$M_{40} = -0,0309$	$M_{41} = +0,1855$	$M_{42} = -0,7418$	$M_{43} = +2,7820$	$M_{44} = -4,3940$	$M_{45} = +2,7798$
$M_{50} = +0,0083$	$M_{51} = -0,0497$	$M_{52} = +0,1989$	$M_{53} = -0,7462$	$M_{54} = +2,7798$	$M_{55} = -4,3950$
$M_{60} = -0,0022$	$M_{61} = +0,0133$	$M_{62} = -0,0533$	$M_{63} = +0,1998$	$M_{64} = -0,7455$	$M_{65} = +2,7798$
$M_{70} = -0,0006$	$M_{71} = -0,0036$	$M_{72} = +0,0143$	$M_{73} = -0,0535$	$M_{74} = +0,1998$	$M_{75} = -0,7462$
$M_{80} = -0,0002$	$M_{81} = +0,0009$	$M_{82} = -0,0038$	$M_{83} = +0,0143$	$M_{84} = -0,0533$	$M_{85} = +0,1989$
$M_{90} = +0,0000(4)$	$M_{91} = -0,0002$	$M_{92} = +0,0009$	$M_{93} = -0,0036$	$M_{94} = +0,0133$	$M_{95} = -0,0497$

$Q_{10} = -1,6077\mu$	$Q_{11} = +3,6462\mu$	$Q_{12} = -2,5847\mu$	$Q_{13} = +0,6926\mu$	$Q_{14} = -0,1855\mu$	$Q_{15} = +0,0497\mu$
$Q_{20} = +2,0385$	$Q_{21} = -6,2309$	$Q_{22} = +6,9227$	$Q_{23} = -3,4626$	$Q_{24} = +0,9273$	$Q_{25} = -0,2486$
$Q_{30} = -0,5462$	$Q_{31} = +3,2763$	$Q_{32} = -7,1080$	$Q_{33} = +7,1560$	$Q_{34} = -3,5238$	$Q_{35} = +0,9451$
$Q_{40} = +0,1463$	$Q_{41} = -0,8781$	$Q_{42} = +3,5118$	$Q_{43} = -7,1680$	$Q_{44} = +7,1760$	$Q_{45} = -3,5260$
$Q_{50} = -0,0392$	$Q_{51} = +0,2352$	$Q_{52} = -0,9407$	$Q_{53} = +3,5282$	$Q_{54} = -7,1738$	$Q_{55} = +7,1748$
$Q_{60} = +0,0105$	$Q_{61} = -0,0630$	$Q_{62} = +0,2522$	$Q_{63} = -0,9460$	$Q_{64} = +3,5253$	$Q_{65} = -7,1748$
$Q_{70} = -0,0028$	$Q_{71} = +0,0169$	$Q_{72} = -0,0676$	$Q_{73} = +0,2533$	$Q_{74} = -0,9453$	$Q_{75} = +3,5260$
$Q_{80} = +0,0008$	$Q_{81} = -0,0045$	$Q_{82} = +0,0181$	$Q_{83} = -0,0678$	$Q_{84} = +0,2531$	$Q_{85} = -0,9451$
$Q_{90} = -0,0002$	$Q_{91} = +0,0011$	$Q_{92} = -0,0047$	$Q_{93} = +0,0179$	$Q_{94} = -0,0666$	$Q_{95} = +0,2486$
$Q_{10,0} = +0,0000(4)$	$Q_{10,1} = -0,0002$	$Q_{10,2} = +0,0009$	$Q_{10,3} = -0,0036$	$Q_{10,4} = +0,0133$	$Q_{10,5} = -0,0497$

$R_{00} = +1,6077\mu$	$R_{01} = -3,6462\mu$	$R_{02} = +2,5847\mu$	$R_{03} = -0,6926\mu$	$R_{04} = +0,1855\mu$	$R_{05} = -0,0497\mu$
$R_{10} = -3,6462$	$R_{11} = +9,8760$	$R_{12} = -9,5063$	$R_{13} = +4,1550$	$R_{14} = -1,1131$	$R_{15} = +0,2985$
$R_{20} = +2,5847$	$R_{21} = -9,5063$	$R_{22} = +14,0300$	$R_{23} = -10,6192$	$R_{24} = +4,4518$	$R_{25} = -1,1933$
$R_{30} = -0,6926$	$R_{31} = +4,1550$	$R_{32} = -10,6192$	$R_{33} = +14,3240$	$R_{34} = -10,6980$	$R_{35} = +4,4726$
$R_{40} = +0,1855$	$R_{41} = -1,1131$	$R_{42} = +4,4518$	$R_{43} = -10,6980$	$R_{44} = +14,3496$	$R_{45} = -10,7000$
$R_{50} = -0,0497$	$R_{51} = +0,2985$	$R_{52} = -1,1933$	$R_{53} = +4,4726$	$R_{54} = -10,7000$	$R_{55} = +14,3500$
$R_{60} = +0,0133$	$R_{61} = -0,0799$	$R_{62} = +0,3196$	$R_{63} = -1,1988$	$R_{64} = +4,4706$	$R_{65} = -10,7000$
$R_{70} = -0,0036$	$R_{71} = +0,0214$	$R_{72} = -0,0856$	$R_{73} = +0,3211$	$R_{74} = -0,1988$	$R_{75} = +4,4726$
$R_{80} = +0,0009$	$R_{81} = -0,0057$	$R_{82} = +0,0228$	$R_{83} = -0,0856$	$R_{84} = +0,3196$	$R_{85} = -1,1933$
$R_{90} = -0,0002$	$R_{91} = +0,0014$	$R_{92} = -0,0057$	$R_{93} = +0,0214$	$R_{94} = -0,0799$	$R_{95} = +0,2985$
$R_{10,0} = +0,0000(4)$	$R_{10,1} = -0,0002$	$R_{10,2} = +0,0009$	$R_{10,3} = -0,0036$	$R_{10,4} = +0,0133$	$R_{10,5} = -0,0497$

+ 00062

45 fehl

TABELLE 14

Uendlich viele Öffnungen.

Der Balken ist an beiden Enden einfach gestützt.

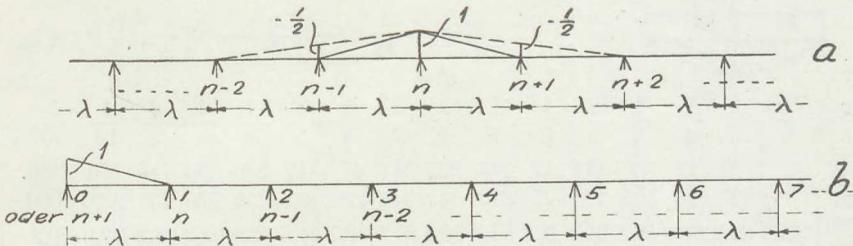


Fig. 11.

Die Mittelstütze n erhebt sich.

$M_{n-1} = + 2,784610 \mu_1$

$M_n = - 4,392305 -$

$M_{n+1} = + 2,784610 -$

$M_{n+2} = - 0,746136 -$

$M_{n+3} = + 0,199928 -$

$M_{n+4} = - 0,053571 -$

$M_{n+5} = + 0,014354 -$

$M_{n+6} = - 0,003842 -$

$M_{n+7} = + 0,001029 -$

$M_{n+8} = - 0,000278 -$

$M_{n+9} = + 0,000074 -$

$M_{n+10} = - 0,000020 -$

$M_{n+11} = + 0,000005 -$

$Q_n = + 7,176915 \mu$

$Q_{n+1} = - 7,176915 -$

$Q_{n+2} = + 3,530746 -$

$Q_{n+3} = - 0,946064 -$

$Q_{n+4} = + 0,253499 -$

$Q_{n+5} = - 0,067925 -$

$Q_{n+6} = + 0,018196 -$

$Q_{n+7} = - 0,004871 -$

$Q_{n+8} = + 0,001307 -$

$Q_{n+9} = - 0,000352 -$

$Q_{n+10} = + 0,000094 -$

$Q_{n+11} = - 0,000025 -$

$R_n = + 14,353830 \mu$

$R_{n+1} = - 10,707661 -$

$R_{n+2} = + 4,476810 -$

$R_{n+3} = - 1,199563 -$

$R_{n+4} = + 0,321424 -$

$R_{n+5} = - 0,086121 -$

$R_{n+6} = + 0,023067 -$

$R_{n+7} = - 0,006178 -$

$R_{n+8} = + 0,001659 -$

$R_{n+9} = - 0,000446 -$

$R_{n+10} = + 0,000119 -$

Die Endstütze 0 erhebt sich.

$M_{10} = + 1,607696 \mu_1$

$M_{20} = - 0,430782 -$

$M_{30} = + 0,115428 -$

$M_{40} = - 0,030929 -$

$M_{50} = + 0,008287 -$

$M_{60} = - 0,002221 -$

$M_{70} = + 0,000595 -$

$M_{80} = - 0,000159 -$

$M_{90} = + 0,000043 -$

$M_{10,0} = - 0,000011 -$

$Q_{10} = - 1,607696 \mu$

$Q_{20} = + 2,038478 -$

$Q_{30} = - 0,546210 -$

$Q_{40} = + 0,146357 -$

$Q_{50} = - 0,039216 -$

$Q_{60} = + 0,010508 -$

$Q_{70} = - 0,002816 -$

$Q_{80} = + 0,000754 -$

$Q_{90} = - 0,000203 -$

$Q_{10,0} = + 0,000054 -$

$R_{00} = + 1,607696 \mu$

$R_{10} = - 3,646174 -$

$R_{20} = + 2,584688 -$

$R_{30} = - 0,692567 -$

$R_{40} = + 0,185573 -$

$R_{50} = - 0,049724 -$

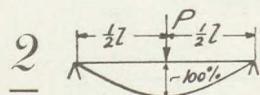
$R_{60} = + 0,013324 -$

$R_{70} = - 0,003570 -$

$R_{80} = + 0,000957 -$

$R_{90} = - 0,000257 -$

TABELLE 15

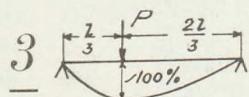


$$EIy_x = \frac{1}{48} Pl^3 \left[3\left(\frac{x}{l}\right) - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$$

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{1}{10}, \frac{3}{10} = \frac{x'}{l}$$

$$\frac{Pl^3}{48} \cdot 1,0 = \frac{23}{27}, \frac{11}{16}, \frac{71}{125}, \frac{118}{125}, \frac{13}{27}, \frac{143}{343}, \frac{262}{343}, \frac{333}{343}, \frac{47}{128}, \frac{117}{128}, \frac{239}{729}, \frac{454}{729}, \frac{716}{729}, \frac{296}{1000}, \frac{792}{1000}$$

$$\frac{\% \text{ von}}{\zeta_P} \left\{ 100,0, 85,2, 68,8, 56,8, 94,4, 48,2, 41,7, 76,3, 97,1, 36,7, 91,5, 32,8, 62,3, 98,2, 29,6, 79,2 \right\}$$



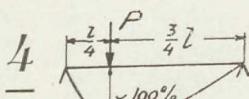
$$EIy_x = \frac{4}{243} Pl^3 \left[\frac{15}{4} \frac{x}{l} - \frac{27}{4} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$$

$$EIy_{x'} = \frac{4}{243} Pl^3 \left[3 \frac{x'}{l} - \frac{27}{8} \left(\frac{x'}{l} \right)^3 \right]$$

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9} \quad \left| \quad \frac{x'}{l} = \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9} \right.$$

$$\frac{4}{243} Pl^3 \cdot 1,0 = \frac{19}{32}, \frac{11}{27}, \frac{41}{54} \quad \left| \quad \frac{7}{8}, \frac{31}{64}, \frac{69}{64}, \frac{71}{216}, \frac{17}{27}, \frac{28}{27}, \frac{235}{216} \right.$$

$$\frac{\% \text{ von}}{\zeta_P} \left\{ 100,0, 59,4, 40,8, 75,8, 87,4, 48,4, 107,8, 32,9, 63,0, 103,6, 108,6 \right\}$$



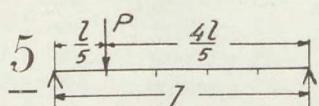
$$EIy_x = \frac{3}{256} Pl^3 \left[\frac{14}{3} \left(\frac{x}{l} \right) - \frac{32}{3} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$$

$$EIy_{x'} = \frac{3}{256} Pl^3 \left[\frac{10}{3} \left(\frac{x'}{l} \right) - \frac{32}{9} \left(\frac{x'}{l} \right)^3 \right]$$

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \quad \left| \quad \frac{x'}{l} = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8} \right.$$

$$\frac{3}{256} Pl^3 \cdot 1,0 = \frac{9}{16} \quad \left| \quad \frac{7}{9}, \frac{11}{9}, \frac{59}{144}, \frac{17}{16}, \frac{175}{144} \right.$$

$$\frac{\% \text{ von}}{\zeta_P} \left\{ 100,0, 56,2, 77,8, 122,2, 41,0, 106,2, 121,5 \right\}$$



$$EIy_x = \frac{16}{1875} Pl^3 \left[\frac{45}{8} \frac{x}{l} - \frac{125}{8} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$$

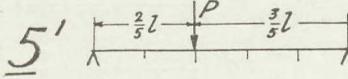
$$EIy_{x'} = \frac{16}{1875} Pl^3 \left[\frac{15}{4} \frac{x'}{l} - \frac{125}{32} \left(\frac{x'}{l} \right)^3 \right]$$

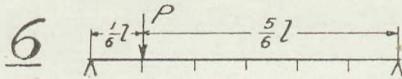
$$\frac{x}{l} = \frac{1}{5}, \frac{1}{10} \quad \left| \quad \frac{x'}{l} = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10} \right.$$

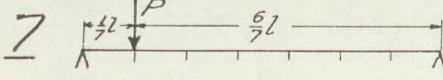
$$\frac{16}{1875} Pl^3 \cdot 1,0 = \frac{35}{64} \quad \left| \quad \frac{23}{32}, \frac{5}{4}, \frac{45}{32}, \frac{95}{256}, \frac{261}{256}, \frac{355}{256}, \frac{329}{256} \right.$$

$$\frac{\% \text{ von}}{\zeta_P} \left\{ 100,0, 54,7, 71,9, 125,0, 140,5, 37,1, 101,9, 138,7, 128,3 \right\}$$

Tabelle 15 (Fortsetzung).

	$EIy_x = \frac{12}{625} Pl^3 \left[\frac{10}{3} \frac{x}{l} - \frac{125}{24} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$
	$EIy_{x'} = \frac{12}{625} Pl^3 \left[\frac{35}{12} \frac{x'}{l} - \frac{125}{36} \left(\frac{x'}{l} \right)^3 \right]$
$\frac{x}{l} = \frac{2}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{3}{10}$	$\frac{x'}{l} = \frac{1}{5} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{1}{2}$
$\frac{12}{625} Pl^3 \cdot 1,0 \quad \frac{5}{8} \quad \frac{21}{64} \quad \frac{55}{64}$	$\frac{5}{9} \quad \frac{17}{18} \quad \frac{83}{288} \quad \frac{25}{32} \quad \frac{295}{288}$
$\begin{matrix} \% \text{ von} \\ \zeta_P \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 100,0 & 62,5 & 32,8 & 85,9 \end{matrix} \right.$	$55,5 \quad 94,4 \quad 28,8 \quad 78,1 \quad 102,4$

	$EIy_x = \frac{25}{3888} Pl^3 \left[\frac{33}{5} \frac{x}{l} - \frac{108}{5} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$
	$EIy_{x'} = \frac{25}{3888} Pl^3 \left[\frac{21}{5} \frac{x'}{l} - \frac{108}{25} \left(\frac{x'}{l} \right)^3 \right]$
$\frac{x}{l} = \frac{1}{6} \quad \frac{x'}{l} = \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3}$	
$\frac{25}{3888} Pl^3 \cdot 1,0 \quad \frac{17}{25} \quad \frac{31}{25} \quad \frac{39}{25} \quad \frac{38}{25}$	
$\begin{matrix} \% \text{ von} \\ \zeta_P \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 100,0 \end{matrix} \right.$	$68,0 \quad 124,0 \quad 156,0 \quad 151,9$

	$EIy_x = \frac{12}{2401} Pl^3 \left[\frac{91}{12} \frac{x}{l} - \frac{343}{72} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$
	$EIy_{x'} = \frac{12}{2401} Pl^3 \left[\frac{14}{3} \frac{x'}{l} - \frac{343}{72} \left(\frac{x'}{l} \right)^3 \right]$
$\frac{x}{l} = \frac{1}{7} \quad \frac{x'}{l} = \frac{1}{7} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{5}{7}$	
$\frac{12}{2401} Pl^3 \cdot 1,0 \quad \frac{47}{72} \quad \frac{11}{9} \quad \frac{13}{8} \quad \frac{16}{9} \quad \frac{115}{72}$	
$\begin{matrix} \% \text{ von} \\ \zeta_P \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 100,0 \end{matrix} \right.$	$65,3 \quad 122,3 \quad 162,5 \quad 177,8 \quad 159,8$

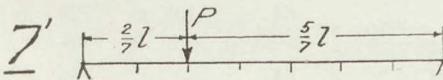
	$EIy_x = \frac{100}{7203} Pl^3 \left[\frac{21}{5} \frac{x}{l} - \frac{343}{40} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$
	$EIy_{x'} = \frac{100}{7203} Pl^3 \left[\frac{63}{20} \frac{x'}{l} - \frac{343}{100} \left(\frac{x'}{l} \right)^3 \right]$
$\frac{x}{l} = \frac{1}{7} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{x'}{l} = \frac{1}{7} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{4}{7}$	
$\frac{100}{7203} Pl^3 \cdot \frac{23}{40} \quad 1,0 \quad \frac{11}{25} \quad \frac{41}{50} \quad \frac{27}{25} \quad \frac{29}{25}$	
$\begin{matrix} \% \text{ von} \\ \zeta_P \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 57,6 & 100,0 \end{matrix} \right.$	$44,0 \quad 82,0 \quad 108,0 \quad 116,0$

Tabelle 15 (Fortsetzung).

	$EIy_x = \frac{48}{2401} Pl^3 \left[\frac{77}{24} \frac{x}{l} - \frac{343}{72} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$
	$EIy_{x'} = \frac{48}{2401} Pl^3 \left[\frac{35}{12} \frac{x'}{l} - \frac{343}{96} \left(\frac{x'}{l} \right)^3 \right]$
$\frac{x}{l} = \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}$	$\frac{x'}{l} = \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}$
$\frac{48}{2401} Pl^3 \cdot \frac{4}{9}, \frac{29}{36}, 1,00$	$\frac{13}{32}, \frac{3}{4}, \frac{31}{32}$
$\frac{\% \text{ von}}{\zeta_P} \left\{ 44,4, 80,6, 100,0 \right\}$	$40,7, 75,0, 96,8$

	$EIy_x = \frac{49}{12288} Pl^3 \left[\frac{60}{7} \frac{x}{l} - \frac{256}{7} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$
	$EIy_{x'} = \frac{49}{12288} Pl^3 \left[\frac{36}{7} \frac{x'}{l} - \frac{256}{49} \left(\frac{x'}{l} \right)^3 \right]$
$\frac{x}{l} = \frac{1}{8}$	$\frac{x'}{l} = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}$
$\frac{49}{12288} Pl^3 \cdot 1,0$	$\frac{31}{49}, \frac{59}{49}, \frac{81}{49}, \frac{94}{49}, \frac{95}{49}, \frac{81}{49}$
$\frac{\% \text{ von}}{\zeta_P} \left\{ 100,0 \right\}$	$63,3, 120,3, 165,3, 191,8, 193,9, 165,3$

	$EIy_x = \frac{75}{4096} Pl^3 \left[\frac{52}{15} \frac{x}{l} - \frac{256}{45} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$
	$EIy_{x'} = \frac{75}{4096} Pl^3 \left[\frac{44}{15} \frac{x'}{l} - \frac{256}{75} \left(\frac{x'}{l} \right)^3 \right]$
$\frac{x}{l} = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}$	$\frac{x'}{l} = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}$
$\frac{75}{4096} Pl^3 \cdot \frac{19}{45}, \frac{7}{9}, 1,00$	$\frac{9}{25}, \frac{17}{25}, \frac{23}{25}, \frac{26}{25}$
$\frac{\% \text{ von}}{\zeta_P} \left\{ 42,2, 77,8, 100,0 \right\}$	$36,0, 68,0, 92,0, 104,0$

	$EIy_x = \frac{64}{19683} Pl^3 \left[\frac{153}{16} \frac{x}{l} - \frac{729}{16} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$
	$EIy_{x'} = \frac{64}{19683} Pl^3 \left[\frac{45}{8} \frac{x'}{l} - \frac{729}{128} \left(\frac{x'}{l} \right)^3 \right]$
$\frac{x}{l} = \frac{1}{9}$	$\frac{x'}{l} = \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}$
$\frac{64}{19683} Pl^3 \cdot 1,00$	$\frac{79}{128}, \frac{19}{16}, \frac{213}{128}, 2, \frac{275}{128}, \frac{33}{16}, \frac{217}{128}$
$\frac{\% \text{ von}}{\zeta_P} \left\{ 100,0 \right\}$	$61,7, 118,7, 166,5, 200,0, 214,8, 206,4, 169,5$

Tabelle 15 (Fortsetzung).

	$EIy_x = \frac{196}{19683} Pl^3 \left[\frac{36}{7} \frac{x}{l} - \frac{729}{56} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$																								
$EIy_{x'} = \frac{196}{19683} Pl^3 \left[\frac{99}{28} \frac{x'}{l} - \frac{729}{196} \left(\frac{x'}{l} \right)^3 \right]$																									
<table border="0"> <tbody> <tr> <td>$\frac{x}{l} = \frac{1}{9}$</td><td>$\frac{2}{9}$</td><td>$\frac{x'}{l} = \frac{1}{9}$</td><td>$\frac{2}{9}$</td><td>$\frac{3}{9}$</td><td>$\frac{4}{9}$</td><td>$\frac{5}{9}$</td><td>$\frac{6}{9}$</td></tr> <tr> <td>$\frac{196}{19683} Pl^3 \cdot \frac{31}{56}$</td><td>1,00</td><td>$\frac{19}{49}$</td><td>$\frac{73}{98}$</td><td>$\frac{97}{98}$</td><td>$\frac{61}{49}$</td><td>$\frac{65}{49}$</td><td>$\frac{123}{98}$</td></tr> <tr> <td>$\zeta_P$ von $\left\{ \begin{array}{l} 55,3 \\ 100,0 \end{array} \right\}$</td><td></td><td>38,8</td><td>74,5</td><td>99,0</td><td>124,4</td><td>132,6</td><td>115,4</td></tr> </tbody> </table>	$\frac{x}{l} = \frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{x'}{l} = \frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{196}{19683} Pl^3 \cdot \frac{31}{56}$	1,00	$\frac{19}{49}$	$\frac{73}{98}$	$\frac{97}{98}$	$\frac{61}{49}$	$\frac{65}{49}$	$\frac{123}{98}$	ζ_P von $\left\{ \begin{array}{l} 55,3 \\ 100,0 \end{array} \right\}$		38,8	74,5	99,0	124,4	132,6	115,4	
$\frac{x}{l} = \frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{x'}{l} = \frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{6}{9}$																		
$\frac{196}{19683} Pl^3 \cdot \frac{31}{56}$	1,00	$\frac{19}{49}$	$\frac{73}{98}$	$\frac{97}{98}$	$\frac{61}{49}$	$\frac{65}{49}$	$\frac{123}{98}$																		
ζ_P von $\left\{ \begin{array}{l} 55,3 \\ 100,0 \end{array} \right\}$		38,8	74,5	99,0	124,4	132,6	115,4																		

	$EIy_x = \frac{400}{19683} Pl^3 \left[\frac{63}{20} \frac{x}{l} - \frac{729}{160} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$																								
$EIy_{x'} = \frac{400}{19683} Pl^3 \left[\frac{117}{40} \frac{x'}{l} - \frac{729}{200} \left(\frac{x'}{l} \right)^3 \right]$																									
<table border="0"> <tbody> <tr> <td>$\frac{x}{l} = \frac{1}{9}$</td><td>$\frac{2}{9}$</td><td>$\frac{3}{9}$</td><td>$\frac{4}{9}$</td><td>$\frac{x'}{l} = \frac{1}{9}$</td><td>$\frac{2}{9}$</td><td>$\frac{3}{9}$</td><td>$\frac{4}{9}$</td></tr> <tr> <td>$\frac{400}{19683} Pl^3 \cdot \frac{11}{32}$</td><td>$\frac{13}{20}$</td><td>$\frac{141}{160}$</td><td>1,00</td><td>$\frac{8}{25}$</td><td>$\frac{61}{100}$</td><td>$\frac{21}{25}$</td><td>$\frac{49}{50}$</td></tr> <tr> <td>$\zeta_P$ von $\left\{ \begin{array}{l} 34,3 \\ 65,0 \\ 88,2 \\ 100 \end{array} \right\}$</td><td></td><td>32,0</td><td>61,0</td><td>84,0</td><td>98,0</td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table>	$\frac{x}{l} = \frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{x'}{l} = \frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{400}{19683} Pl^3 \cdot \frac{11}{32}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{141}{160}$	1,00	$\frac{8}{25}$	$\frac{61}{100}$	$\frac{21}{25}$	$\frac{49}{50}$	ζ_P von $\left\{ \begin{array}{l} 34,3 \\ 65,0 \\ 88,2 \\ 100 \end{array} \right\}$		32,0	61,0	84,0	98,0			
$\frac{x}{l} = \frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{x'}{l} = \frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$																		
$\frac{400}{19683} Pl^3 \cdot \frac{11}{32}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{141}{160}$	1,00	$\frac{8}{25}$	$\frac{61}{100}$	$\frac{21}{25}$	$\frac{49}{50}$																		
ζ_P von $\left\{ \begin{array}{l} 34,3 \\ 65,0 \\ 88,2 \\ 100 \end{array} \right\}$		32,0	61,0	84,0	98,0																				

	$EIy_x = \frac{27}{10000} Pl^3 \left[\frac{95}{9} \frac{x}{l} - \frac{500}{9} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$																													
$EIy_{x'} = \frac{27}{10000} Pl^3 \left[\frac{55}{9} \frac{x'}{l} - \frac{500}{81} \left(\frac{x'}{l} \right)^3 \right]$																														
<table border="0"> <tbody> <tr> <td>$\frac{x}{l} = \frac{1}{10}$</td><td>$\frac{x'}{l} = \frac{1}{10}$</td><td>$\frac{2}{10}$</td><td>$\frac{3}{10}$</td><td>$\frac{4}{10}$</td><td>$\frac{5}{10}$</td><td>$\frac{6}{10}$</td><td>$\frac{7}{10}$</td><td>$\frac{8}{10}$</td></tr> <tr> <td>$\frac{27}{10000} Pl^3 \cdot 1,0$</td><td></td><td>$\frac{49}{81}$</td><td>$\frac{95}{81}$</td><td>$\frac{5}{3}$</td><td>$\frac{166}{81}$</td><td>$\frac{185}{81}$</td><td>$\frac{7}{3}$</td><td>$\frac{175}{81}$</td><td>$\frac{140}{81}$</td></tr> <tr> <td>$\zeta_P$ von $\left\{ \begin{array}{l} 100,0 \\ 60,5 \\ 117,2 \\ 166,7 \\ 205,0 \\ 228,3 \\ 233,4 \\ 216,0 \\ 173,0 \end{array} \right\}$</td><td></td><td>60,5</td><td>117,2</td><td>166,7</td><td>205,0</td><td>228,3</td><td>233,4</td><td>216,0</td><td>173,0</td></tr> </tbody> </table>	$\frac{x}{l} = \frac{1}{10}$	$\frac{x'}{l} = \frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{27}{10000} Pl^3 \cdot 1,0$		$\frac{49}{81}$	$\frac{95}{81}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{166}{81}$	$\frac{185}{81}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{175}{81}$	$\frac{140}{81}$	ζ_P von $\left\{ \begin{array}{l} 100,0 \\ 60,5 \\ 117,2 \\ 166,7 \\ 205,0 \\ 228,3 \\ 233,4 \\ 216,0 \\ 173,0 \end{array} \right\}$		60,5	117,2	166,7	205,0	228,3	233,4	216,0	173,0	
$\frac{x}{l} = \frac{1}{10}$	$\frac{x'}{l} = \frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$																						
$\frac{27}{10000} Pl^3 \cdot 1,0$		$\frac{49}{81}$	$\frac{95}{81}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{166}{81}$	$\frac{185}{81}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{175}{81}$	$\frac{140}{81}$																					
ζ_P von $\left\{ \begin{array}{l} 100,0 \\ 60,5 \\ 117,2 \\ 166,7 \\ 205,0 \\ 228,3 \\ 233,4 \\ 216,0 \\ 173,0 \end{array} \right\}$		60,5	117,2	166,7	205,0	228,3	233,4	216,0	173,0																					

	$EIy_x = \frac{147}{10000} Pl^3 \left[\frac{85}{21} \frac{x}{l} - \frac{500}{63} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$																											
$EIy_{x'} = \frac{147}{10000} Pl^3 \left[\frac{65}{21} \frac{x'}{l} - \frac{500}{147} \left(\frac{x'}{l} \right)^3 \right]$																												
<table border="0"> <tbody> <tr> <td>$\frac{x}{l} = \frac{1}{10}$</td><td>$\frac{2}{10}$</td><td>$\frac{3}{10}$</td><td>$\frac{x'}{l} = \frac{1}{10}$</td><td>$\frac{2}{10}$</td><td>$\frac{3}{10}$</td><td>$\frac{4}{10}$</td><td>$\frac{5}{10}$</td><td>$\frac{6}{10}$</td></tr> <tr> <td>$\frac{147}{10000} Pl^3 \cdot \frac{25}{63}$</td><td>$\frac{44}{63}$</td><td>1,0</td><td>$\frac{15}{49}$</td><td>$\frac{29}{49}$</td><td>$\frac{41}{49}$</td><td>$\frac{50}{49}$</td><td>$\frac{55}{49}$</td><td>$\frac{55}{49}$</td></tr> <tr> <td>$\zeta_P$ von $\left\{ \begin{array}{l} 39,7 \\ 74,6 \\ 100,0 \end{array} \right\}$</td><td></td><td>30,6</td><td>59,2</td><td>83,7</td><td>102,0</td><td>112,2</td><td>112,2</td><td></td></tr> </tbody> </table>	$\frac{x}{l} = \frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{x'}{l} = \frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{147}{10000} Pl^3 \cdot \frac{25}{63}$	$\frac{44}{63}$	1,0	$\frac{15}{49}$	$\frac{29}{49}$	$\frac{41}{49}$	$\frac{50}{49}$	$\frac{55}{49}$	$\frac{55}{49}$	ζ_P von $\left\{ \begin{array}{l} 39,7 \\ 74,6 \\ 100,0 \end{array} \right\}$		30,6	59,2	83,7	102,0	112,2	112,2		
$\frac{x}{l} = \frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{x'}{l} = \frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$																				
$\frac{147}{10000} Pl^3 \cdot \frac{25}{63}$	$\frac{44}{63}$	1,0	$\frac{15}{49}$	$\frac{29}{49}$	$\frac{41}{49}$	$\frac{50}{49}$	$\frac{55}{49}$	$\frac{55}{49}$																				
ζ_P von $\left\{ \begin{array}{l} 39,7 \\ 74,6 \\ 100,0 \end{array} \right\}$		30,6	59,2	83,7	102,0	112,2	112,2																					

TABEL-

		P in a						P in b				P in e							
Für $\lambda_1 = \lambda_2$ ist $I_1 = \alpha =$		Für $I_1 = I_2$ ist $I_1 = \alpha =$						ζ_a	ζ_b	ζ_e	ζ_d	ζ_c	ζ_f	ζ_a	ζ_b	ζ_e	ζ_d	ζ_a	ζ_b
0	∞	0,833	0,333	0,230	0,574	-0,167	-0,115	0,333	0,333	0,230	0,230	0,230	0,230	0,230	0,230	0,230	0,230	0,230	
0,01	4,65	0,835	0,332	0,229	0,575	-0,166	-0,114	0,332	0,337	0,231	0,229	0,229	0,231						
0,10	2,15	0,840	0,319	0,224	0,575	-0,159	-0,111	0,319	0,361	0,240	0,224	0,224	0,240						
0,5	1,26	0,861	0,283	0,198	0,588	0,141	9,995	0,283	0,437	0,290	0,198	0,198	0,290						
1,0	1,00	0,877	0,246	0,173	0,602	-0,123	-0,087	0,246	0,508	0,341	0,173	0,173	0,341						
2,0	0,79	0,903	0,196	0,139	0,620	0,098	0,069	0,196	0,609	0,411	0,139	0,139	0,411						
10,0	0,47	0,963	0,075	0,053	0,661	0,038	0,026	0,075	0,850	0,582	0,053	0,053	0,582						
100,0	0,21	0,996	0,009	0,007	0,683	0,005	0,003	0,009	0,981	0,675	0,007	0,007	0,675						
∞	0	1,000	0,000	0,000	0,688	0,000	0,000	0,000	1,000	0,688	0,000	0,000	0,688						

LE 17.

P in e						P in d						
ζ_e	ζ_d	ζ_{e_1}	ζ_{d_1}	ζ_a	ζ_b	ζ_e	ζ_d	ζ_{e_1}	ζ_{d_1}	ζ_c	ζ_f	ζ_{f_1}
0,186	0,186	0,146	0,146	0,574	0,230	0,186	0,470	0,146	0,364	-0,115	-0,095	-0,073
0,192	0,185	0,146	0,146	0,575	0,229	0,185	0,471	0,146	0,365	-0,114	-0,092	-0,073
0,215	0,173	0,146	0,145	0,575	0,224	0,173	0,475	0,145	0,365	-0,111	-0,087	-0,073
0,269	0,147	0,167	0,135	0,588	0,198	0,147	0,482	0,135	0,370	0,995	-0,073	-0,068
0,310	0,126	0,198	0,120	0,602	0,173	0,126	0,500	0,120	0,377	0,087	-0,062	-0,061
0,366	0,100	0,244	0,096	0,620	0,139	0,100	0,514	0,096	0,387	0,069	-0,050	-0,050
0,486	0,038	0,362	0,038	0,661	0,053	0,038	0,545	0,038	0,417	0,026	-0,019	-0,019
0,552	0,005	0,428	0,005	0,683	0,007	0,005	0,560	0,005	0,433	0,003	-0,002	-0,002
0,563	0,000	0,438	0,000	0,688	0,000	0,000	0,563	0,000	0,438	0,000	-0,000	0,000

$$\cdot \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{48}$$

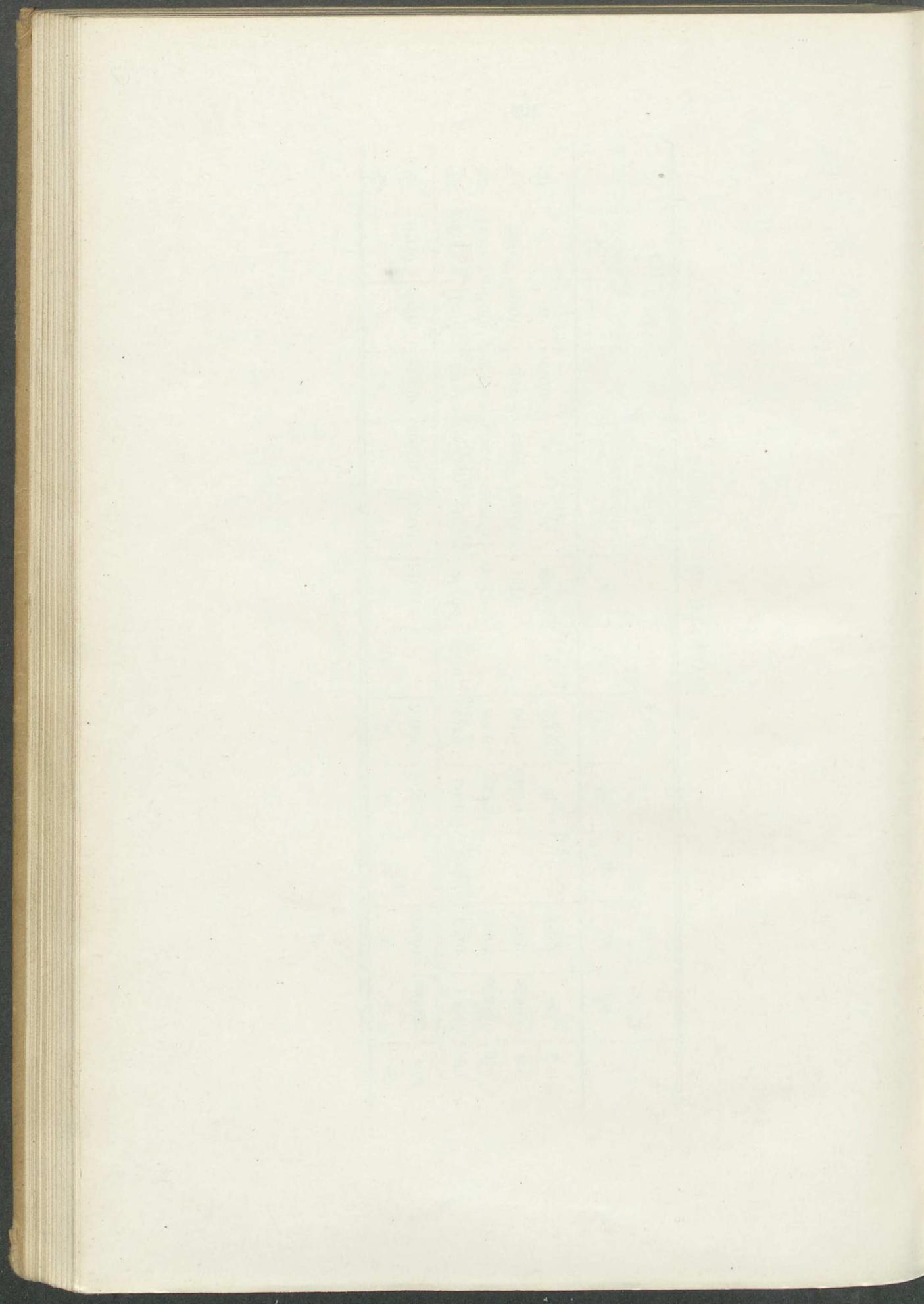
»

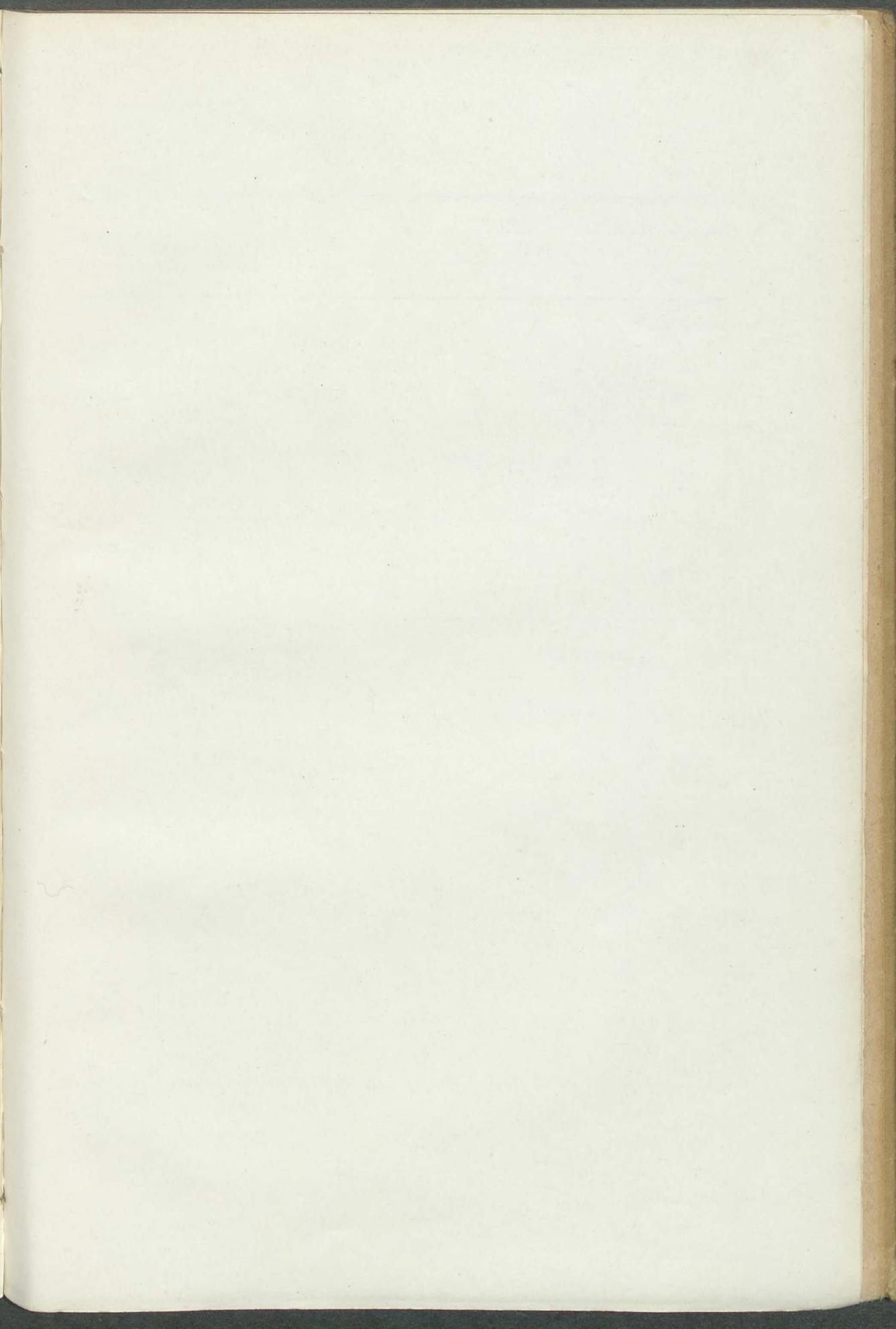
TABELLE 18

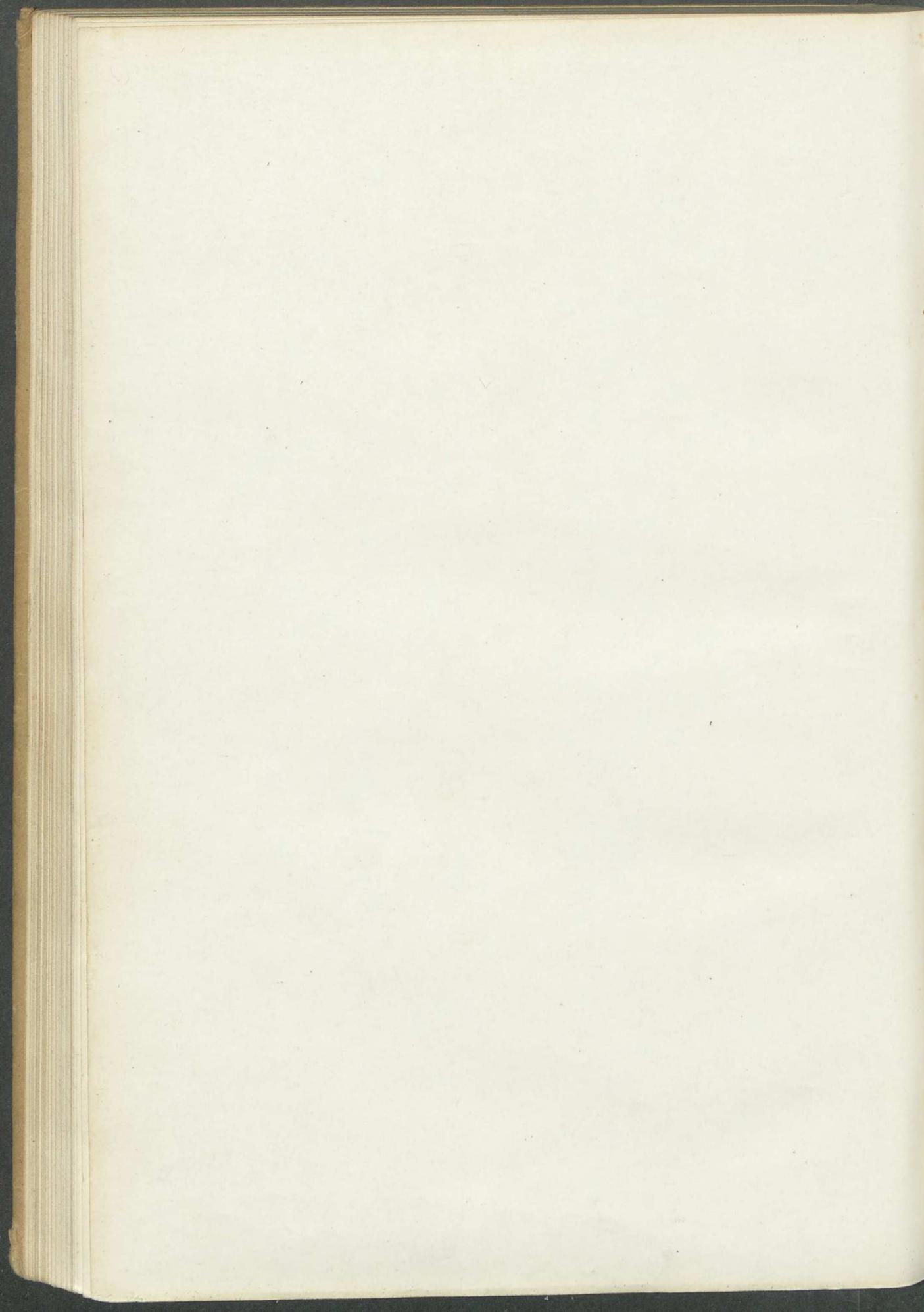
Mom. im Qtr.	P in a	P in b	P in e	P in d
$M_e^{Qtr.}$	$-4137,8\alpha \cdot \frac{Pl_2}{N}$	$+8275,71\alpha \cdot \frac{Pl_2}{N}$	$+(494,0 + 6018,1\alpha) \cdot \frac{Pl_2}{N}$ $+\frac{1}{4}Pl_2 \cdot \frac{1}{3+16\alpha}$	$-(247,0 + 3009,1\alpha) \cdot \frac{Pl_2}{N}$ $-\frac{1}{8}Pl_2 \cdot \frac{1}{3+16\alpha}$
$M_b^{Qtr.}$	$-(493,7 + 6018,8\alpha) \cdot \frac{Pl_2}{N}$	$+(987,4 + 12038,1\alpha) \cdot \frac{Pl_2}{N}$	$+8275,7\alpha \cdot \frac{Pl_2}{N}$	$-4137,8\alpha \cdot \frac{Pl_2}{N}$
$M_{e_1}^{Qtr.}$	$= M_e$	$= M_e$	$+(494,0 + 6018,1\alpha) \cdot \frac{Pl_2}{N}$ $-\frac{1}{4}Pl_2 \cdot \frac{1}{3+16\alpha}$	$-(247,0 + 3009,1\alpha) \cdot \frac{Pl_2}{N}$ $+\frac{1}{8}Pl_2 \cdot \frac{1}{3+16\alpha}$
$N = 5924,7 + 144450,1\alpha + 48144,4\alpha^2.$				

TABELLE 19

	P in a			P in b			P in e			P in d			
	M_e	M_b	M_{e_1}										
$\alpha = 0$	0	-0,083	0	0	+0,166	0	+0,166	0	0	-0,083	0	0	Pl_2
0,01	-0,0056	-0,075		+0,0112	+0,150		+0,154	+0,0112	-0,004	-0,077	-0,0056	+0,002	Pl_2
0,10	-0,0198	-0,052		+0,0396	+0,104		+0,1063	+0,0396	-0,0023	-0,0531	-0,0198	+0,0011	Pl_2
1,0	-0,021	-0,033	-0,021	+0,042	0,066	0,042	+0,046	+0,042	+0,020	-0,023	-0,021	-0,010	Pl_2
10,0	-0,0066	-0,0097		+0,0132	+0,0194		+0,0112	+0,0132	+0,0082	-0,0056	-0,0066	+0,0041	Pl_2
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Pl_2







P in		$\alpha = \infty$			
		P in			
		a	b	e	d
	$+ \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+ 226,29 + \zeta_d)$	$\frac{P}{48\mu}$	0	0	$122,2\% \text{ von } \zeta_d$
8025,45 α^2)	$+ \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+ 226,29 + 5\zeta_e)$	0	$\frac{P}{48\mu}$	$122,2\% \text{ von } \zeta_e$	0
5517,07 α^2)	$+ \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+ 164,58 + 68,8\% \text{ von } \zeta_b)$ $+ \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{768} \cdot \frac{1+16\alpha}{3+16\alpha}$	0	$68,8\% \text{ von } \zeta_b$	$\frac{3}{256} \cdot \frac{P}{\mu}$	0
	$+ \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+ 164,58 + 68,8\% \text{ von } \zeta_e)$ $+ \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{768} \cdot \frac{1}{3+16\alpha}$		0	0	$\frac{3}{256} \cdot \frac{P}{\mu}$
	$+ \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+ 164,58 + 77,8\% \text{ von } \zeta_e)$ $- \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{768} \cdot \frac{1+16\alpha}{3+16\alpha}$			$77,8\% \text{ von } \zeta_e$	0
	$+ \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+ 164,58 + 77,8\% \text{ von } \zeta_d)$ $- \frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{768} \cdot \frac{1}{3+16\alpha}$			0	$77,8\% \text{ von } \zeta_d$
	$= \zeta$	0			0
	$= \zeta$	0			0
	$= \zeta$				0

7,4 + 24075,0 α + 8024 α^2)

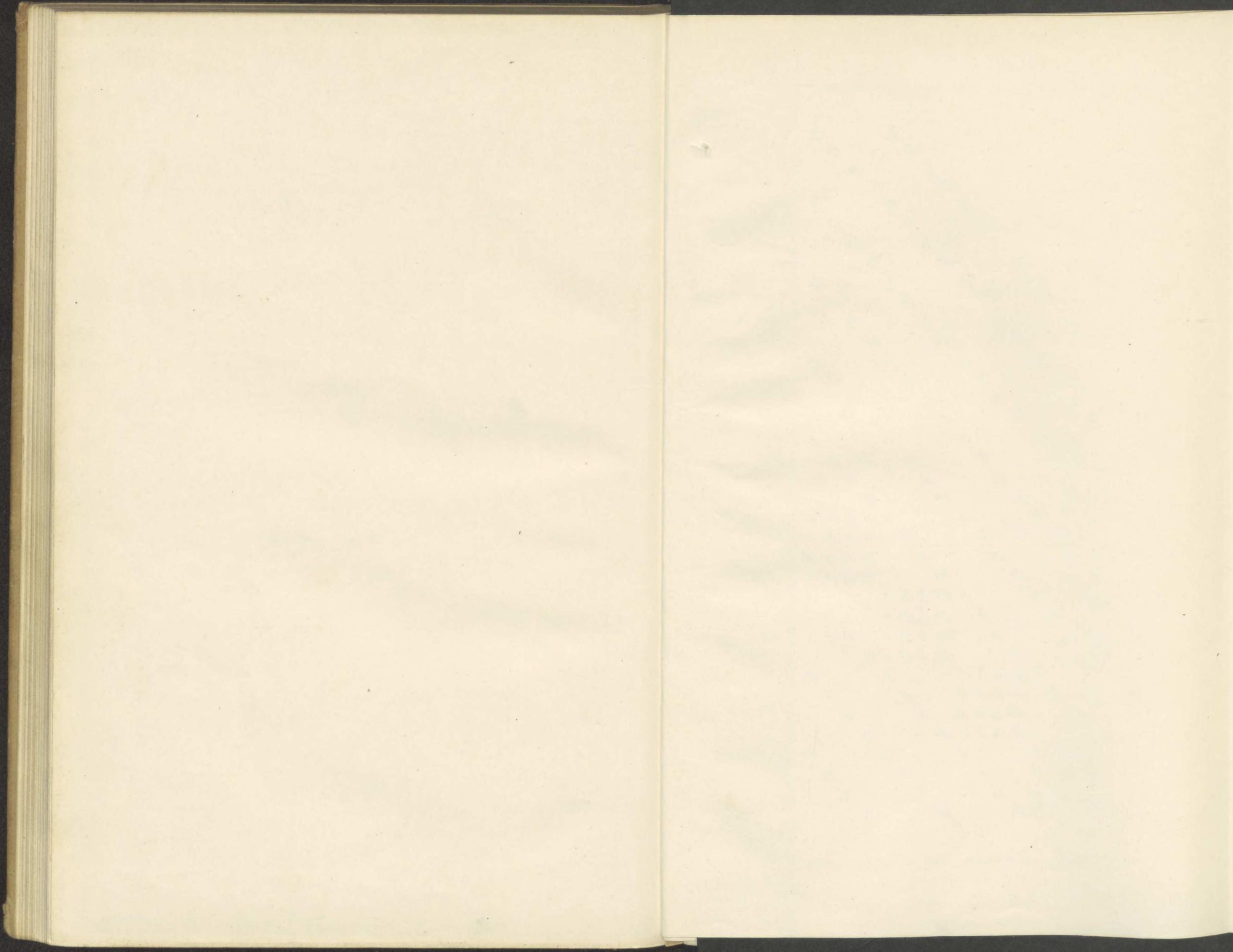
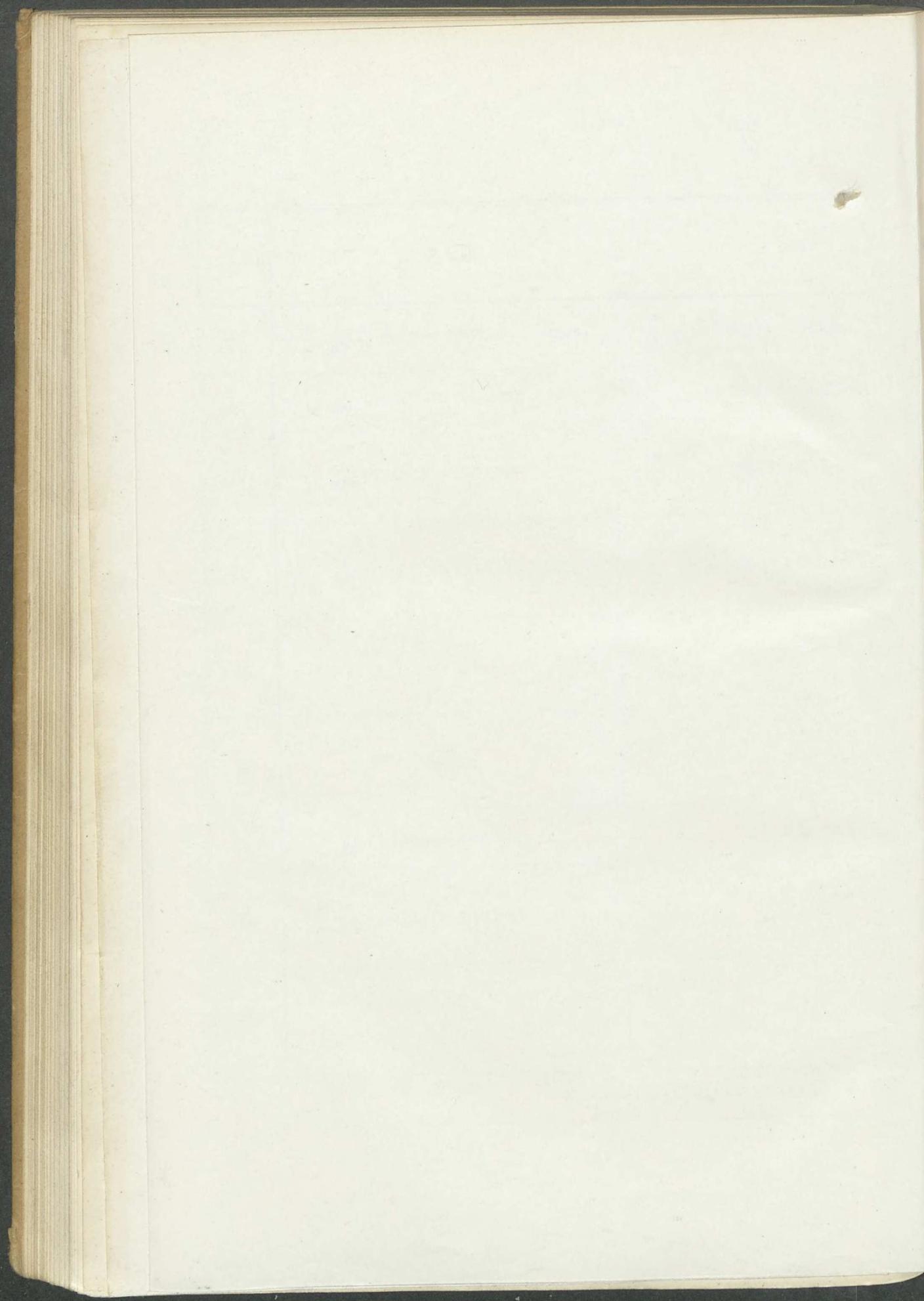
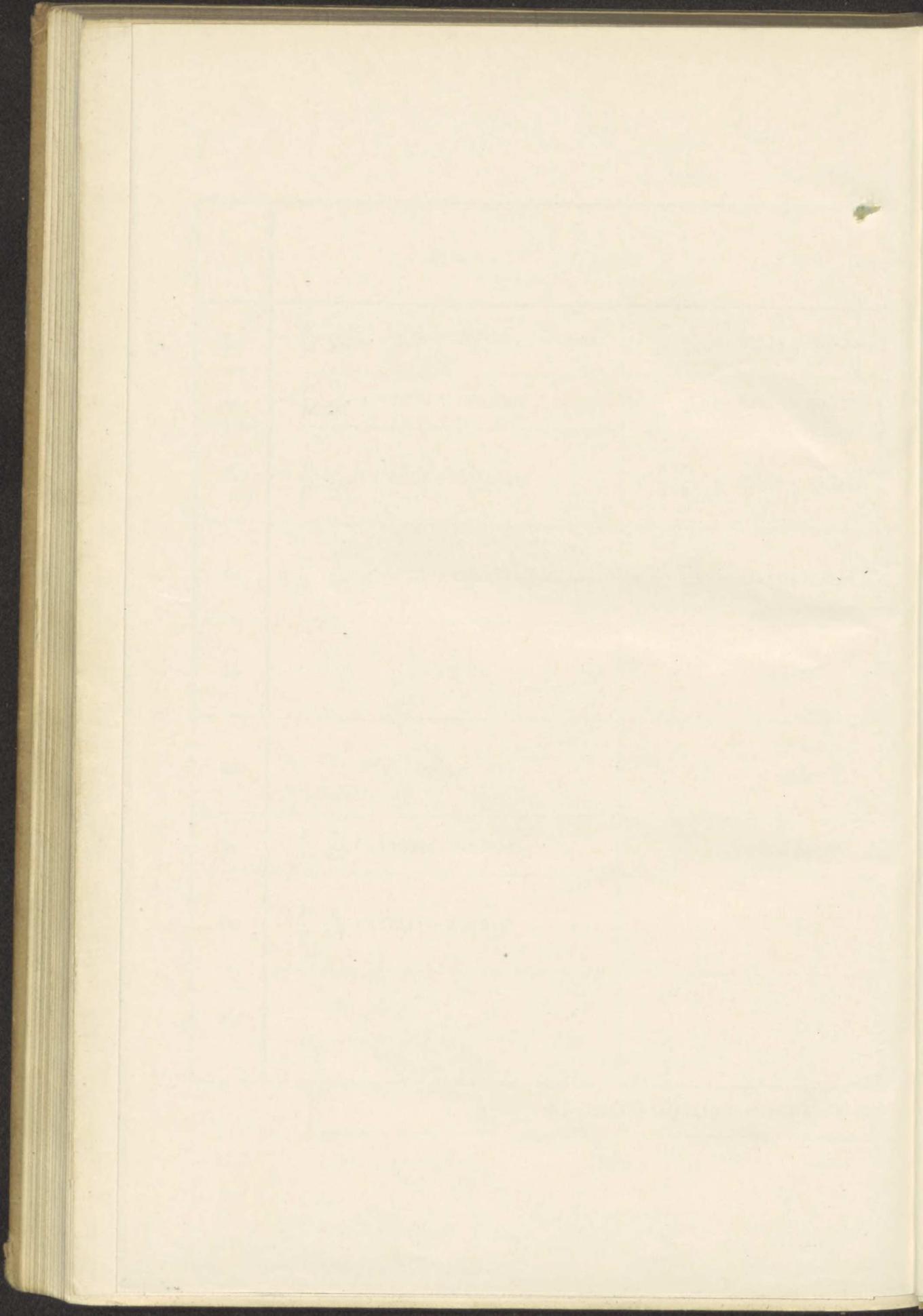


TABELLE 16

	P in a	P in b	P in e	P in d	α=0				α=∞			
					P in				P in		P in	
					a	b	e	d	a	b	e	d
ζ _a	$+\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+822,86 + 20172,06\alpha + 8025\alpha^2)$	$+\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+329,14 + 7805,40\alpha)$	$+\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+226,29 + 5517,07\alpha)$	$+\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+565,72 + 13792,88\alpha + 5517,07\alpha^2)$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{48} \cdot \frac{P}{\mu}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{48} \cdot \frac{P}{\mu}$	122,2% von ζ _d	122,2% von ζ _d	$\frac{P}{48\mu}$	0	0	122,2% von ζ _d
ζ _b	$+\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+329,14 + 7805,40\alpha)$	$+\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+329,14 + 8463,72\alpha + 8025,45\alpha^2)$	$+\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+226,29 + 5517,07\alpha + 5517,14\alpha^2)$	$+\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+226,29 + 5517,07\alpha)$	$\frac{2}{3} \cdot \zeta_a$	=ζ _a	=ζ _a	122,2% von ζ _e	0	$\frac{P}{48\mu}$	122,2% von ζ _e	0
ζ _e	$+\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+226,29 + 5577,07\alpha)$	$+\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+226,29 + 5517,07\alpha + 5517,07\alpha^2)$	$+\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+164,58 + 4232,04\alpha + 4012,09\alpha^2)$ $+\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{768} \cdot \frac{1+16\alpha}{3+16\alpha}$	$+\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+164,58 + 3902,69\alpha)$ $+\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{768} \cdot \frac{1}{3+16\alpha}$	$\frac{2}{3} \cdot \zeta_d$	68,8% von ζ _b	$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{256} \cdot \frac{P}{\mu}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{256} \cdot \frac{P}{\mu}$	0	68,8% von ζ _b	$\frac{3}{256} \cdot \frac{P}{\mu}$	0
ζ _d	$+\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+565,72 + 13792,88\alpha + 5577,07\alpha^2)$	$+\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+226,29 + 5517,07\alpha)$	$+\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+164,58 + 3903,00\alpha)$ $+\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{768} \cdot \frac{1}{3+16\alpha}$	$+\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+473,14 + 11590,82\alpha + 4513,88\alpha^2)$ $-\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{1536} \cdot \frac{1}{3+16\alpha}$	68,8% von ζ _a	=ζ _e	=ζ _e	$\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{256} \cdot \frac{P}{\mu}$	0	68,8% von $\frac{P}{48\mu}$	0	$\frac{3}{256} \cdot \frac{P}{\mu}$
ζ _{e₁}	=ζ _e	=ζ _e	$+\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+164,58 + 4232,04\alpha + 4012,09\alpha^2)$ $-\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{768} \cdot \frac{1+16\alpha}{3+16\alpha}$	$+\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+164,58 + 3902,69\alpha)$ $-\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{768} \cdot \frac{1}{3+16\alpha}$				77,8% von ζ _e	77,8% von ζ _e		77,8% von ζ _e	0
ζ _{d₁}	=ζ _d	=ζ _d	$+\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+164,58 + 3903,00\alpha)$ $-\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{768} \cdot \frac{1}{3+16\alpha}$	$+\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+349,73 + 8581,28\alpha + 3510,95\alpha^2)$ $+\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{1536} \cdot \frac{1}{3+16\alpha}$				=ζ _{e₁}	77,8% von ζ _d		0	77,8% von ζ _d
ζ _c	$-\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+164,58 + 3903,00\alpha)$	=ζ _a	=ζ _a	$-\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+113,14 + 2758,74\alpha)$	$\frac{1}{3} \cdot \zeta_a$			$\frac{1}{3} \cdot \zeta_a$	0			0
ζ _f	$-\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+113,14 + 2758,74\alpha)$	=ζ _d	=ζ _d	$-\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+143,98 + 3456,09\alpha + 501,74\alpha^2)$ $+\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{1536} \cdot \frac{5+32\alpha}{3+16\alpha}$	$\frac{1}{3} \cdot \zeta_d$			$\frac{1}{3} \cdot \zeta_d$	0			0
ζ _{f₁}	=ζ _f	=ζ _d	=ζ _{d₁}	$-\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{8N} \cdot (+20,59 + 446,91\alpha - 501,74\alpha^2)$ $-\frac{P}{\mu} \cdot \frac{1}{1536} \cdot \frac{5+32\alpha}{3+16\alpha}$				$\frac{1}{3} \cdot \zeta_{d1}$				0

$$N = 5924,7 + 144450,1\alpha + 48144,4\alpha^2 = 6 \cdot (987,4 + 24075,0\alpha + 8024\alpha^2)$$





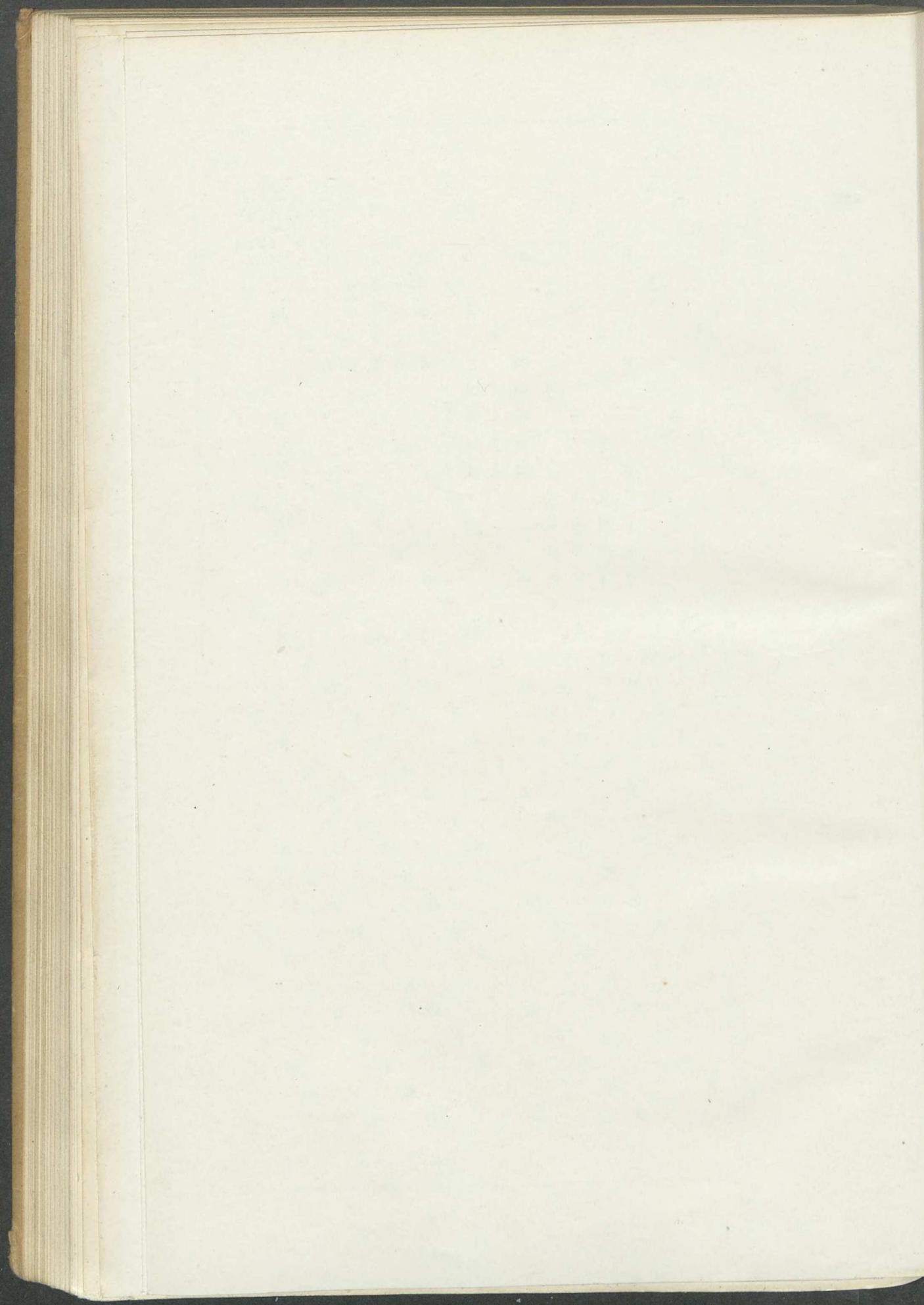
<u>n</u> ₁	<u>i</u> ₁	<u>e</u> ₁	<u>a</u> ₁
o ₁	k ₁	f ₁	b ₁
p ₁	l ₁	g ₁	c ₁
q ₁	m ₁	h ₁	d ₁

<u>n</u> ₁	<u>i</u> ₁	<u>e</u> ₁	<u>a</u> ₁
o ₁	k ₁	f ₁	b ₁
p ₁	l ₁	g ₁	c ₁
q ₁	m ₁	h ₁	d ₁

<u>n</u> ₁	<u>i</u> ₁	<u>e</u> ₁	<u>a</u> ₁
o ₁	k ₁	f ₁	b ₁
p ₁	l ₁	g ₁	c ₁
q ₁	m ₁	h ₁	d ₁

<u>n</u> ₁	<u>i</u> ₁	<u>e</u> ₁	<u>a</u> ₁
o ₁	k ₁	f ₁	b ₁
p ₁	l ₁	g ₁	c ₁
q ₁	m ₁	h ₁	d ₁

n ₁	o ₁	p ₁	q ₁	i ₁	e ₁	a ₁		
n ₁	o ₁	p ₁	q ₁	k ₁	f ₁	b ₁		
n ₁	o ₁	p ₁	q ₁	l ₁	g ₁	c ₁		
n ₁	o ₁	p ₁	q ₁	m ₁	h ₁	d ₁		
n ₁	o ₁	i ₁	k ₁	l ₁	m ₁	e ₁	a ₁	
o ₁	i ₁	k ₁	l ₁	m ₁	f ₁	b ₁		
p ₁	i ₁	k ₁	l ₁	m ₁	g ₁	c ₁		
q ₁	i ₁	k ₁	l ₁	m ₁	h ₁	d ₁		
n ₁	i ₁		e ₁	f ₁	g ₁	h ₁	a ₁	
o ₁		k ₁	e ₁	f ₁	g ₁	h ₁	b ₁	
p ₁		l ₁	e ₁	f ₁	g ₁	h ₁	c ₁	
q ₁		m ₁	e ₁	f ₁	g ₁	h ₁	d ₁	
n ₁	i ₁		e ₁		a ₁	b ₁	c ₁	d ₁
o ₁		k ₁		f ₁	a ₁	b ₁	c ₁	d ₁
p ₁		l ₁		g ₁	a ₁	b ₁	c ₁	d ₁
q ₁		m ₁		h ₁	a ₁	b ₁	c ₁	d ₁



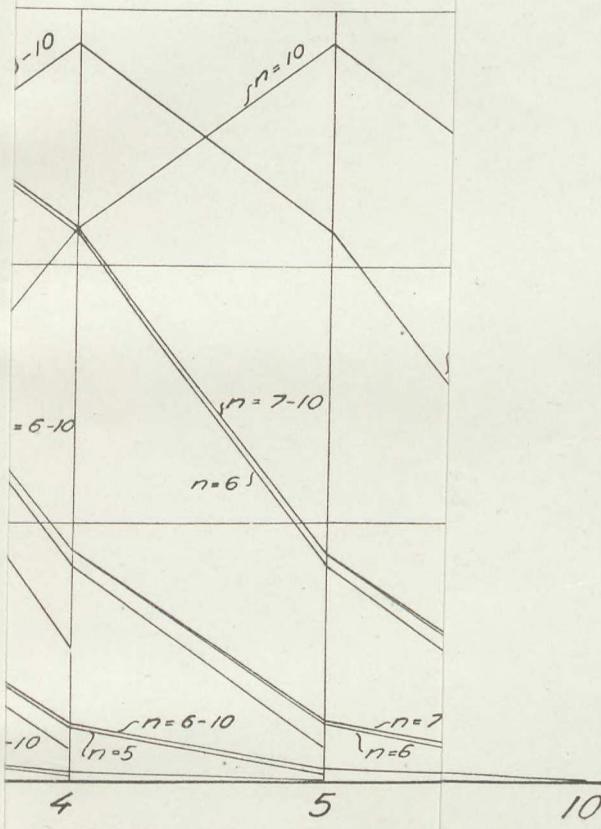
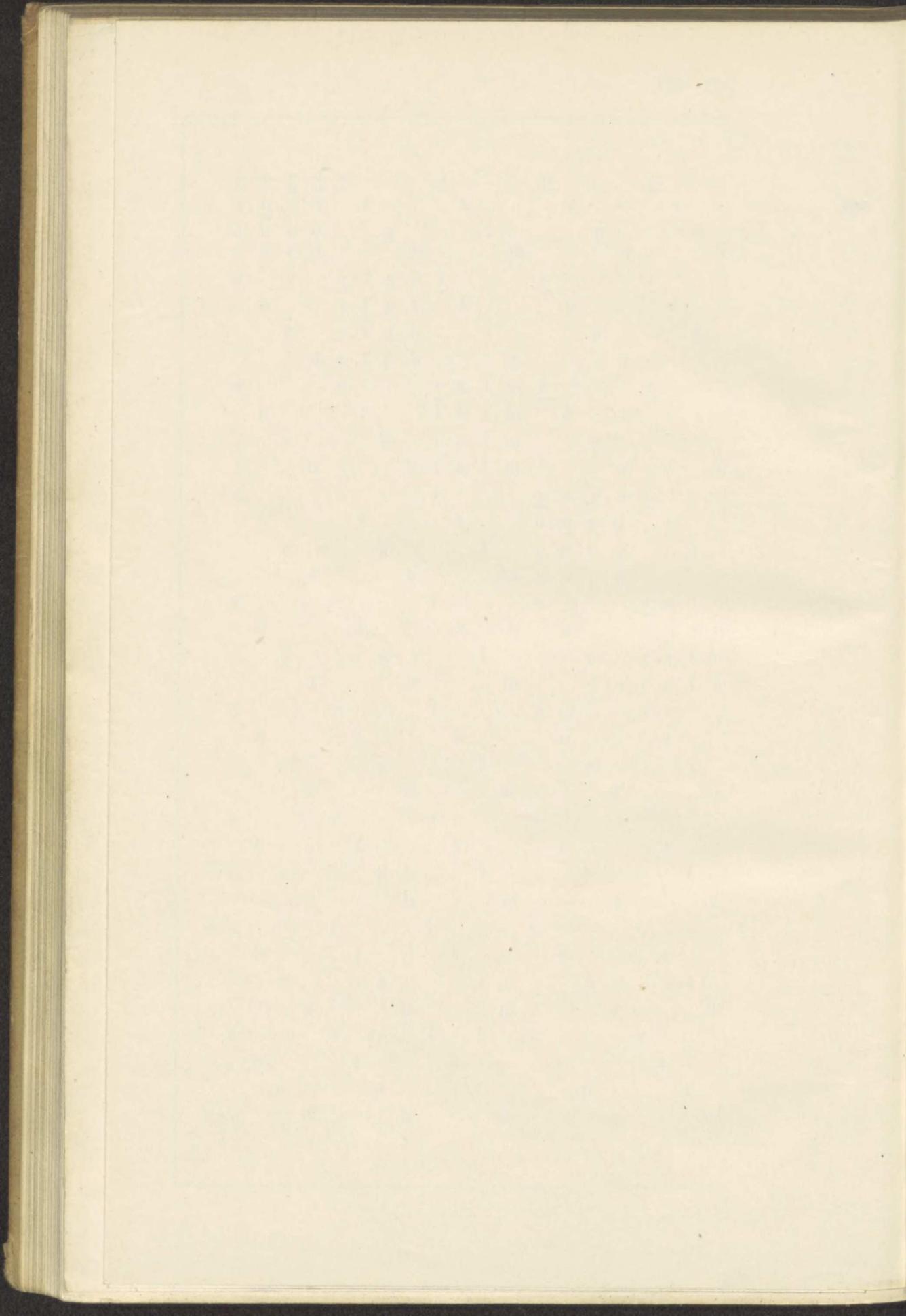


Fig. 10.



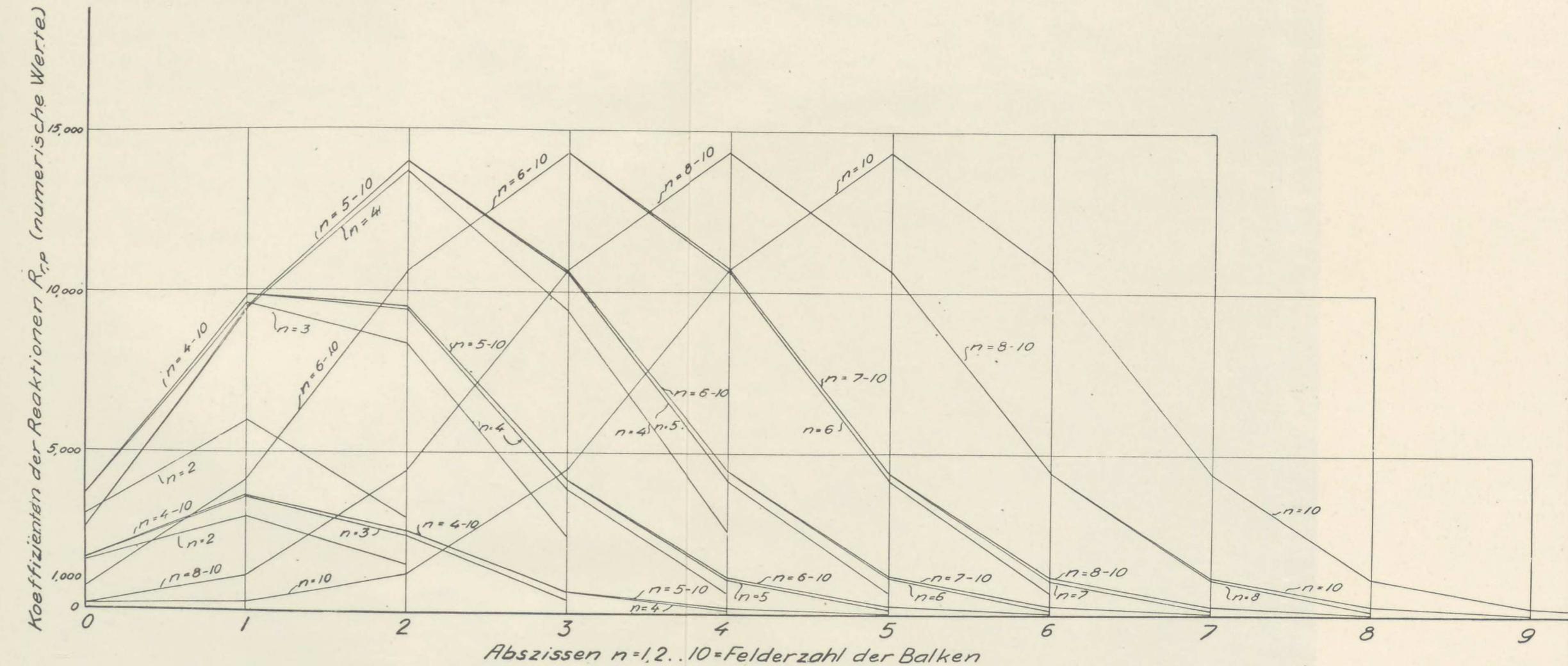
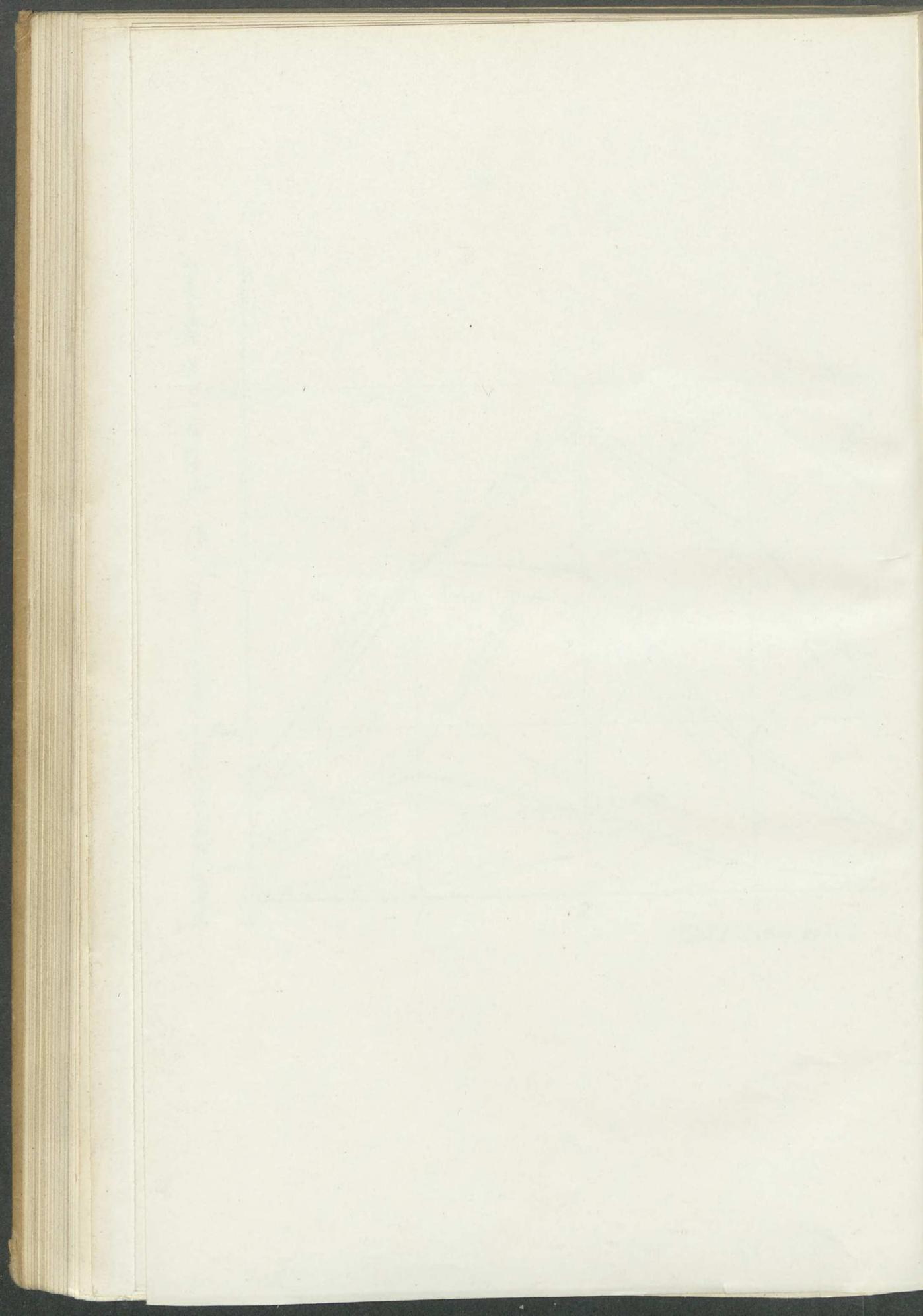
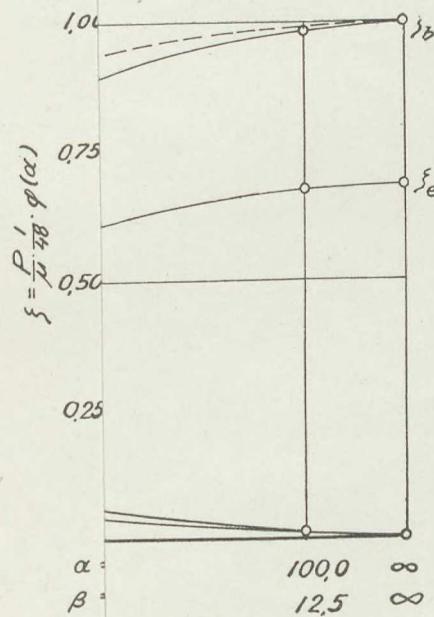
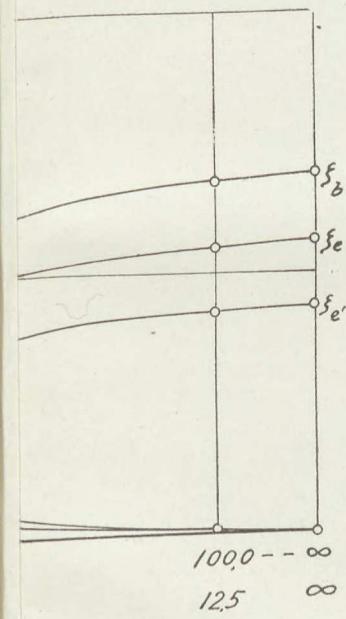
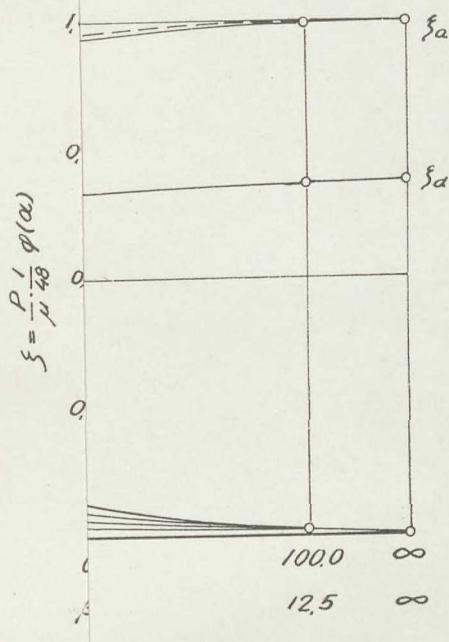
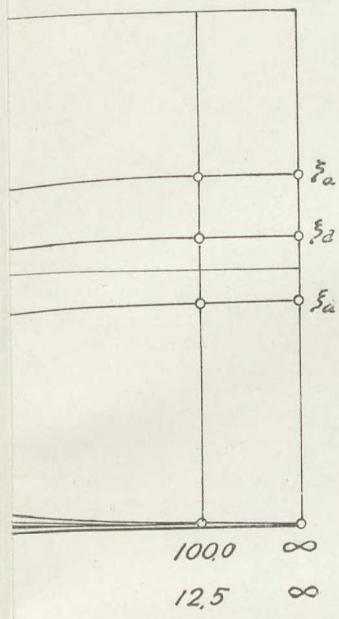
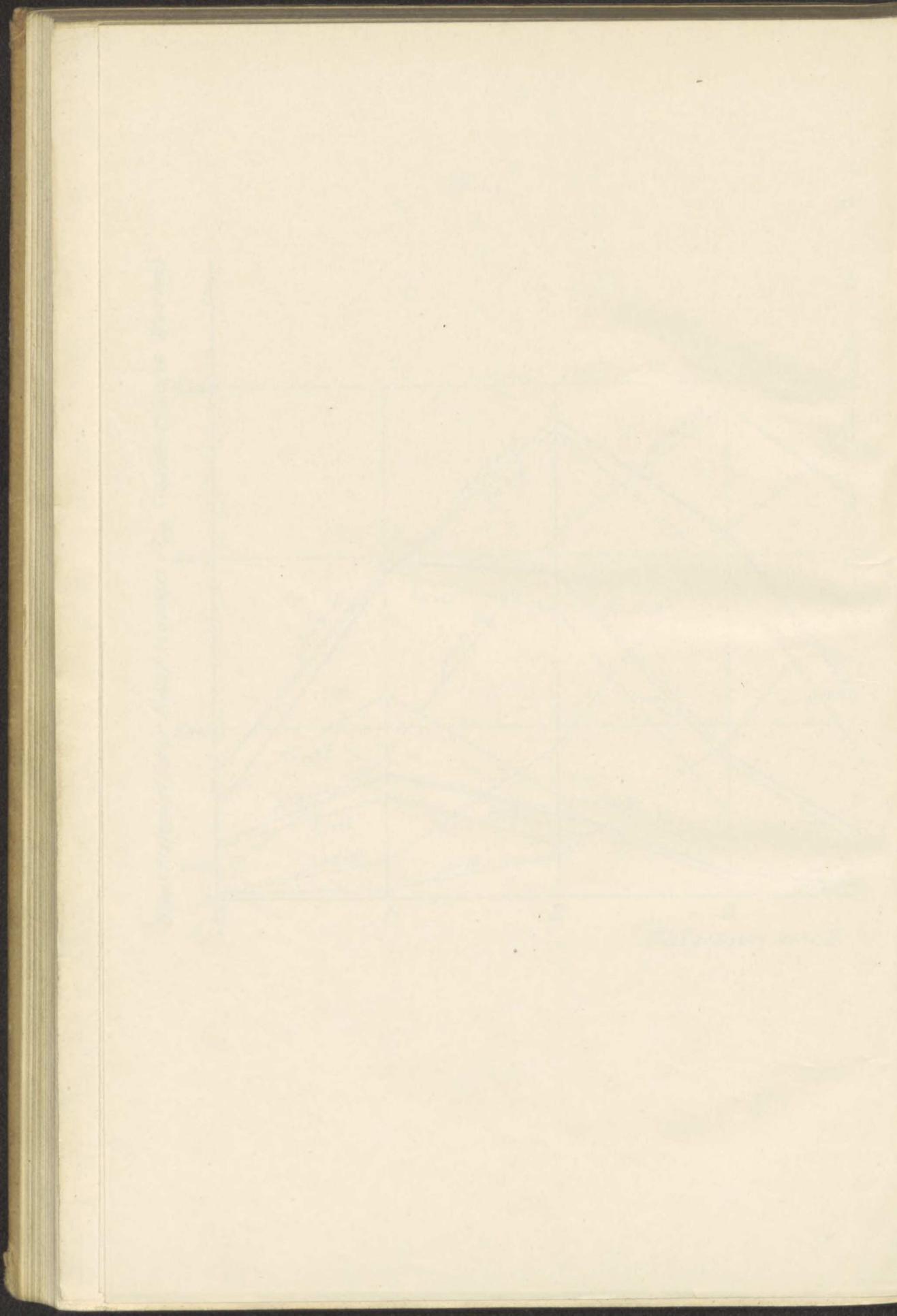


Fig. 10.







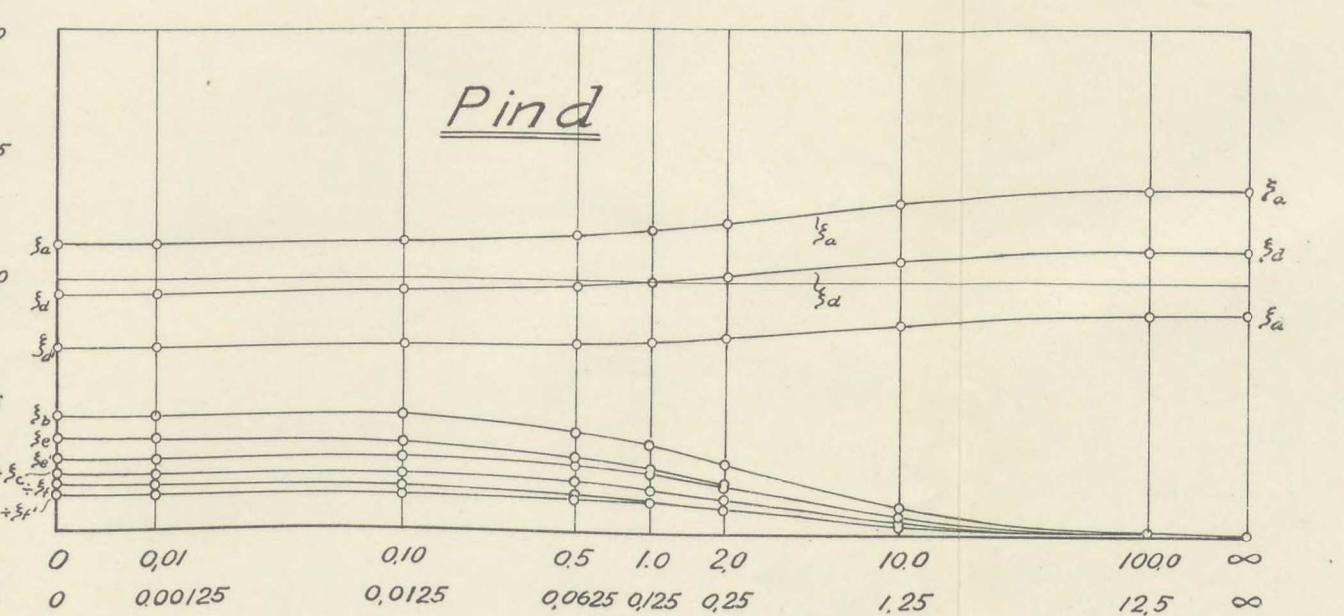


Fig. 31.

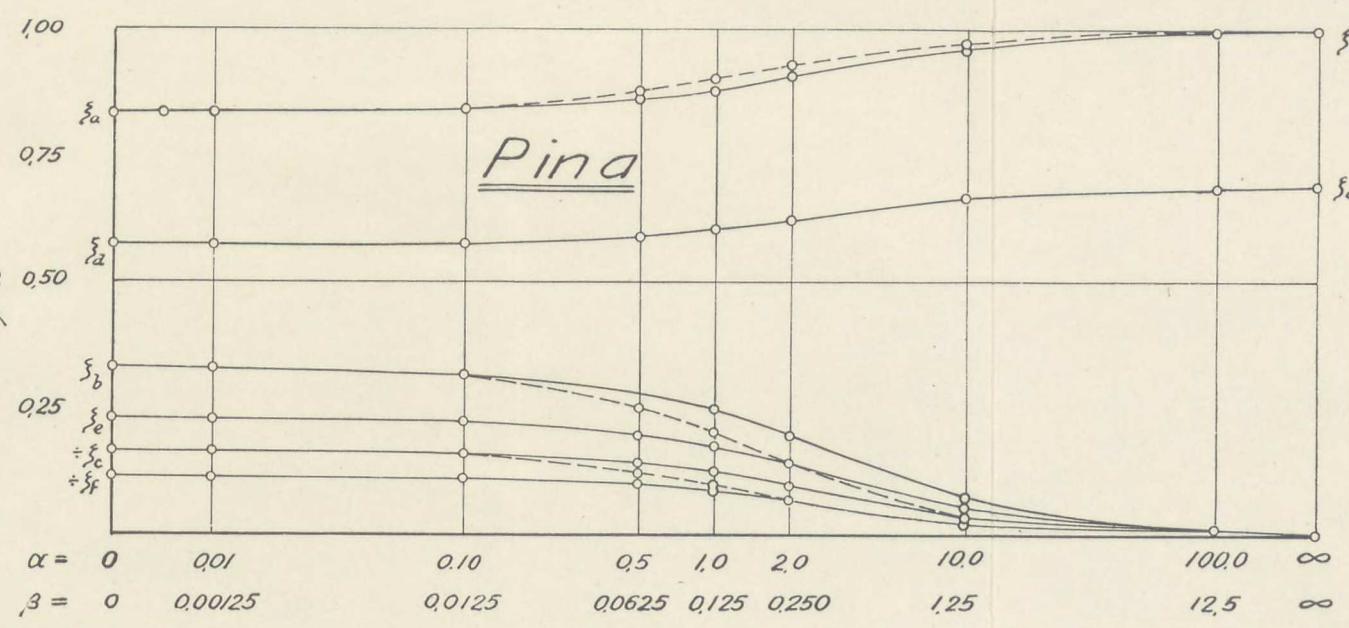


Fig. 33.

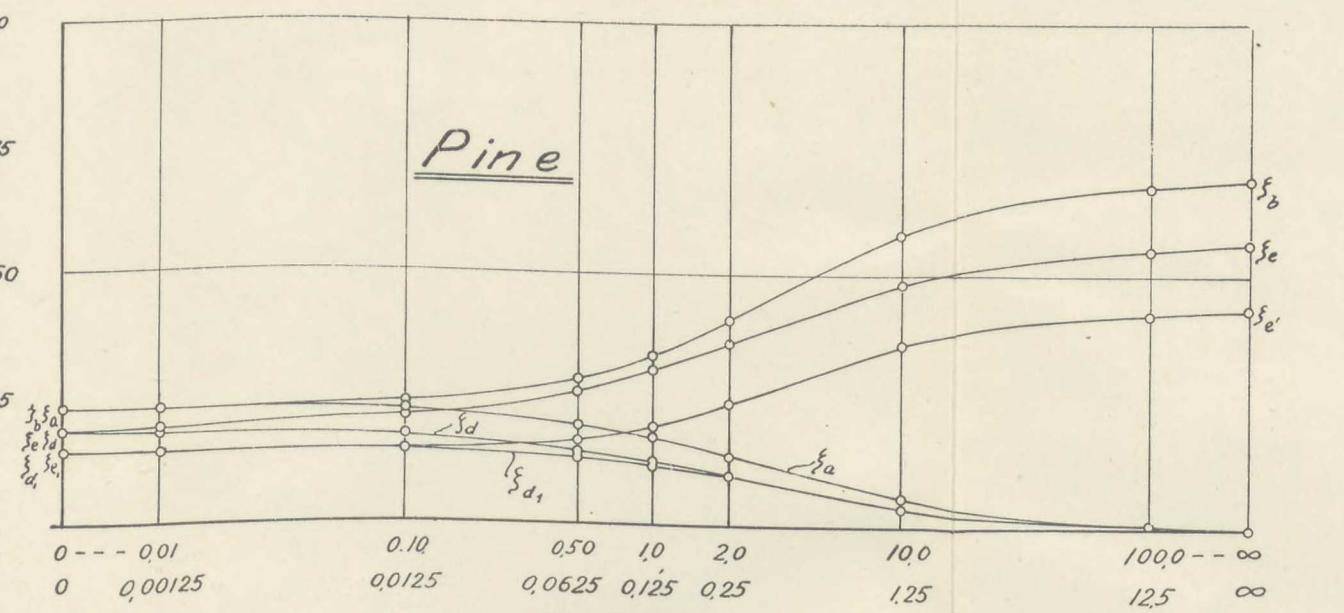


Fig. 32.

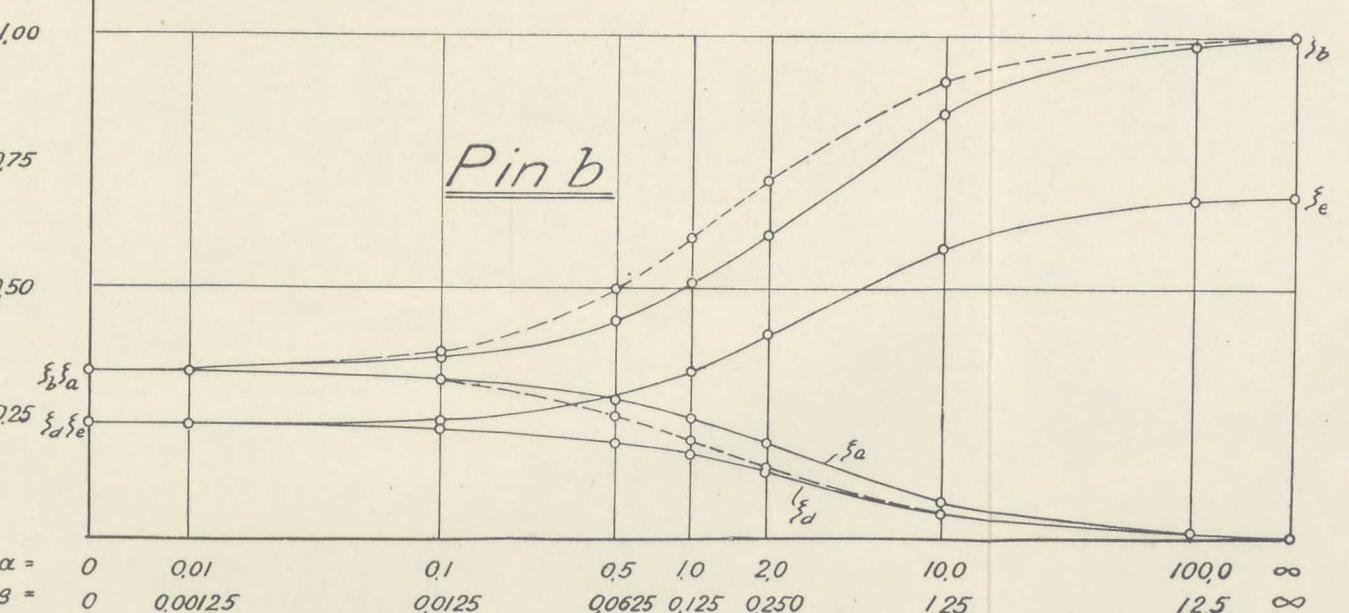


Fig. 34.

Fig. 37.

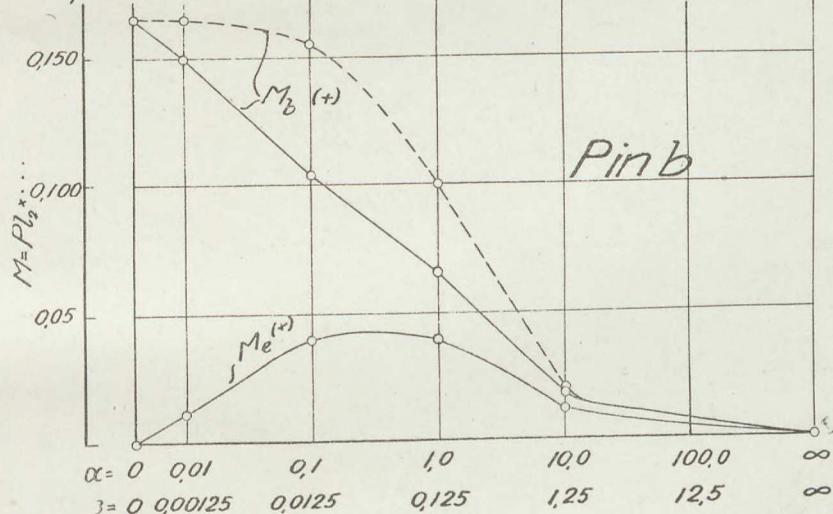
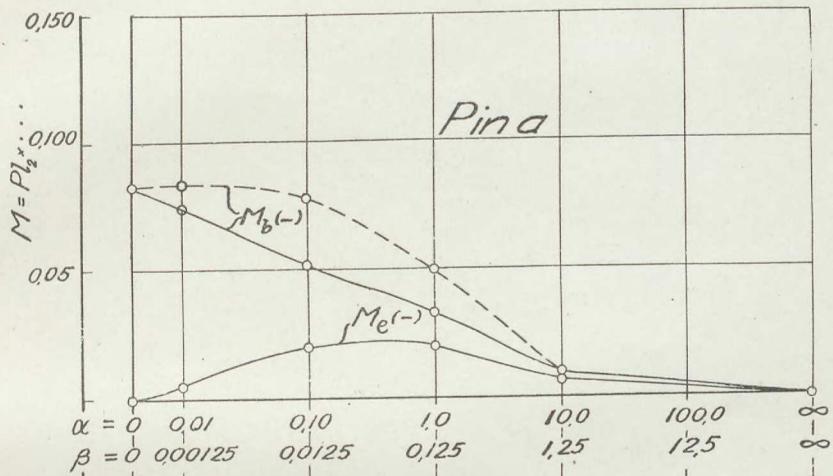


Fig. 38.

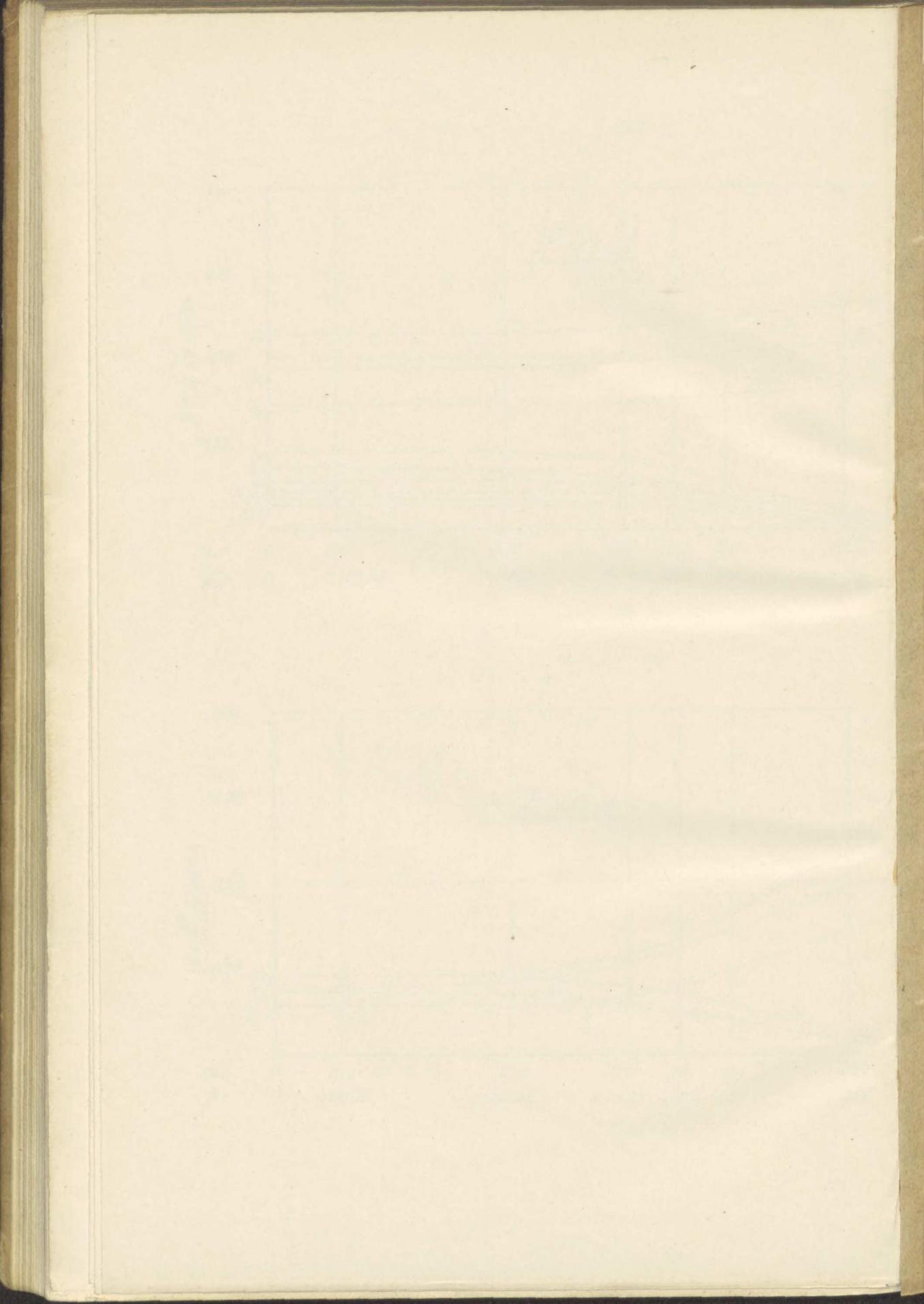


Fig. 35.

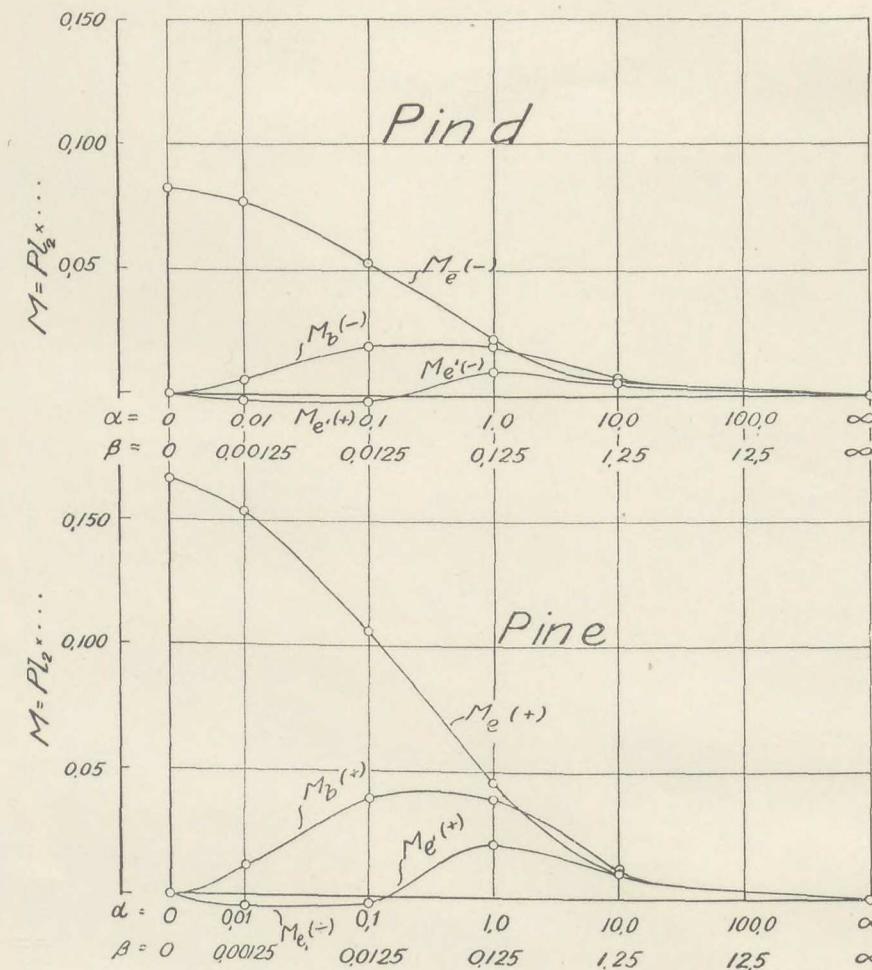


Fig. 36.

Fig. 37.

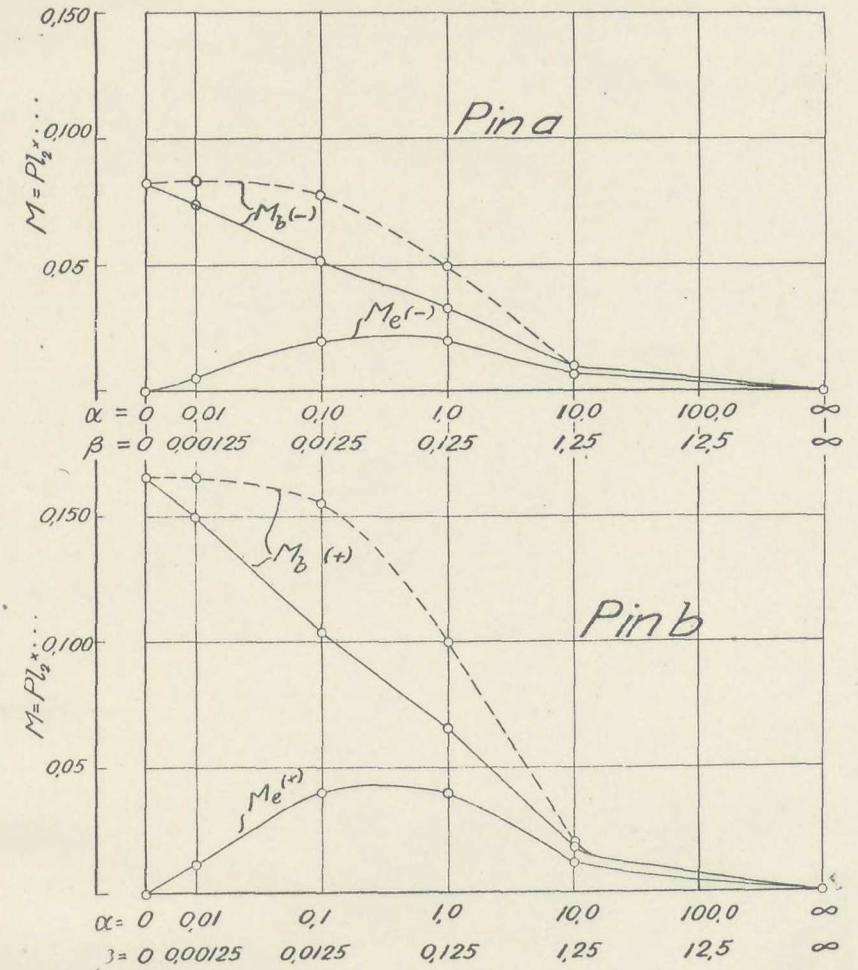


Fig. 38.

HRUNG DER BERECHNUNG

STUFENWEISE BERECHNUNG (S.45)

(Zahlenbeispiel Seite 47)

Wenn Auflösung der Z-Gleichungen und durchführbar, dann stufenweise Berechnung anwenden:

1) Erste Stufe: nur belastete Querträger mitnehmen,
Durchbiegungen $\zeta_n - \zeta_q$ werden berechnet.

2) Zweite Stufe: Querträger $e-h$ und $e-h'$ anfügen;
Durchbiegungen $\zeta_e - \zeta_h$ werden berechnet,
indem $\zeta_m - \zeta_q$ von 1) als bekannt eingesetzt
werden.

3) Dritte und endliche Stufe: noch fehlende Querträger
 $r-u, i-m, i-mn, a-d, a-d'$ angeben.
Durchbiegungen werden berechnet,
indem alle bei 1) und 2) gefundenen ζ 's
bekannt eingesetzt werden.

Stufenweise Berechnung am besten verwendbar, wenn

$$\beta = \frac{J_1}{J_2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^3 < 0.01 \text{ oder } > 100 \text{ ist (Seite 28, Punkt 1-5)}$$

Alle Koeffiziente den Tabellen zu entnehmen.

Sehr oft ist erste Stufe genügend genau; die übrigen werden dann mittels
der Durchbiegungs-Hilfsweise, Tabellen 15, berechnet (Seite 52-53).
Bei der ersten Stufe ist es vorteilhaft mit einem "idealnen Querträger"
zu rechnen, der die weggelassenen Querträger vertreten soll (Seite 55).

Einflussfläche der Durchbiegung (S.57)

einer Knotens = Dickefläche des Rostes infolge einer Kraft P im Knoten.
wird durch das Belastungs-Umordnungs-Verfahren
oder durch die stufenweise Berechnung (1 Querträger) } leicht ermittelt

Unendlich steile Querträger (S.59)

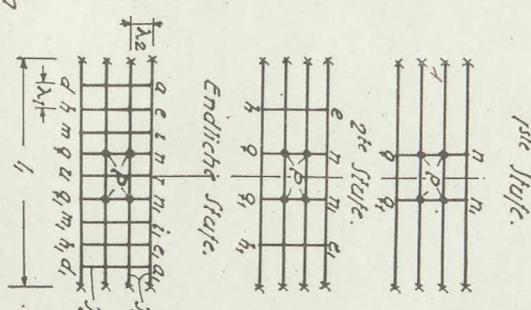
Fertige Formeln und Tabellen Seite 60-61

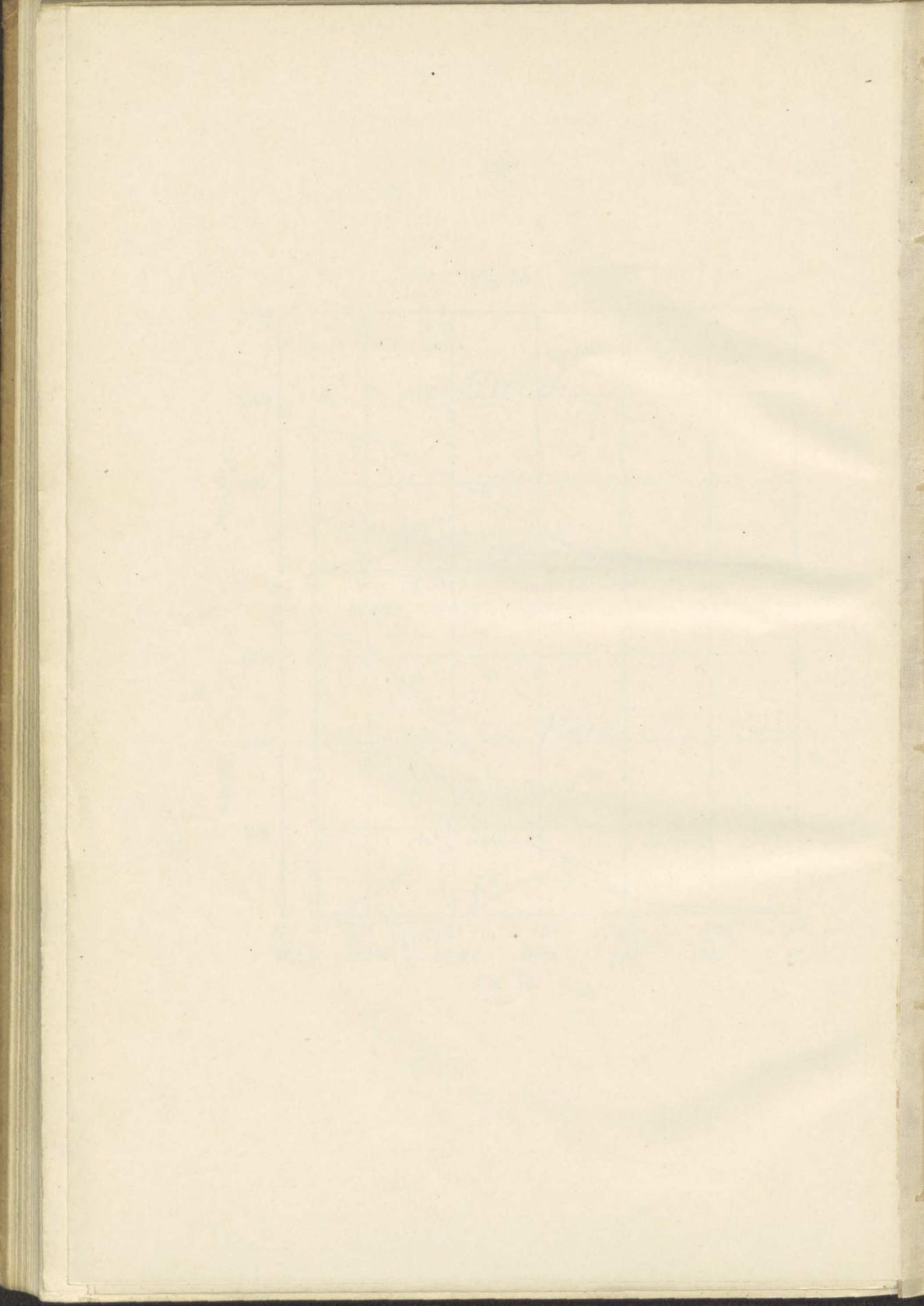
Analytische Methode (S.62)

Bei vielen ("unendlich viele") Hauptträger und 1 Querträger beginnend.
Formel (5), Seite 65, Zahlenbeispiel S.65.
Methode auch bei mehreren Querträgern (z.B. bei Einflussflächen) in
Verbindung mit der stufenweisen Berechnung verwendbar (S.65)

Rohe Abschätzung der Verteilung ohne Berechnung

Die Kurven fig. 31-38 (im Kap. 10 Seite 67 u.f. berechnet) erlauben, den
Verlauf der Durchbiegungskurven abschätzen, wenn β (siehe oben)
angennahrt bekannt ist; die Endpunkte der Kurven ($\beta=0$, unendlich
steile Querträger; $\beta=\infty$, keine Querträger vorhanden) sind ohne
weiteres bekannt. Man trägt diese Endpunkte auf, und beim
Einschränken der Kurve sieht man sofort, welche Verteilungsmöglichkeiten
vorhanden sind.





ANLEITUNG ZUR DURCHFÜHRUNG DER BERECHNUNG

ALLGEMEINE BERECHNUNGSMETHODE (S. 18)

(Zahlenbeispiel Seite 39)

STUFENWEISE BERECHNUNG (S. 45)

(Zahlenbeispiel Seite 47)

Der gegebene Rost sei für eine
gegebene Belastung zu berechnen

Aufstellung der Gleichungen

Knotenbezeichnung: $a, b, c, d - e, f, g, h \dots$
Feldweiten: λ_1 und λ_2
Trägheitsmomente: $I_1, I_2, I_3 \dots$

Stetigkeitskoeffizienten:

$$\mu_1 = \frac{\epsilon_1}{\lambda_1^3}; \quad \mu_2 = \frac{\epsilon_2}{\lambda_2^3}; \quad \mu_3 = \frac{\epsilon_3}{\lambda_2^3}$$

(Einzuftührende Plattenbreite bei Eisenbeton:
 $\beta = \frac{2}{3} \lambda_2$, siehe auch Seite 68)

Überzählige: Durchbiegungen $\zeta_a \dots \zeta_g$ (Seite 18)

Elastizitätsgleichungen:
 $Z_a = 0 = Z_{a0} - Z_{aa} \zeta_a - Z_{ab} \zeta_b - \dots - Z_{ar} \zeta_r \dots$
 $Z_b = 0 = Z_{b0} - Z_{ba} \zeta_a - Z_{bb} \zeta_b - \dots - Z_{br} \zeta_r \dots$

zur Bestimmung von $\zeta_a \dots \zeta_g$; (Seite 19)
Koeffizientenplatzierung siehe Matrix.

Koeffizientenberechnung siehe Seite 25 - u. f. für den ganz allg. Fall.
Fertig ausgerechnete Koeffiziente (Balken einfach gestaltet):

für λ variabel; I konstant; siehe Tabelle 1-3, Seite 111
"konstant; I variabel" " 4-6, " 113
"den normalen Fall"

für den normalen Fall: $\left\{ \begin{array}{l} \text{für kurze Balken (Feldweite } \leq 80.0) \text{ die Tabelle 6-13;} \\ \text{für lange } (\lambda \geq 10) \text{ die Koeff. welche einer Erhebung einer Knotens} \\ \text{am Balkende entsprechen Tabelle 15;} \\ \text{für die Koeff. welche einer Erhebung eines mittleren} \\ \text{Knotens (alle übrigen Knoten) entsprechen Tabelle 17.} \end{array} \right.$

Die Belastung (Seite 25)
Man verteilt am einfachsten die Belastung als Einzellkräfte in den Knoten;
dann ist $Z_{r0} = +P_r$ (Einzelkraft im Knoten r). Sonst siehe Seite 25

Lösung der Gleichungen (Seite 36): besondere Methoden, Seite 37
einfacher Konsolidationszahlenbsp. Seite 43

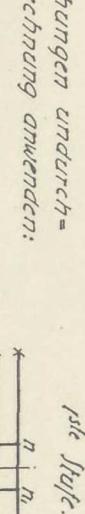
Belastungs-Anordnung, " 44.

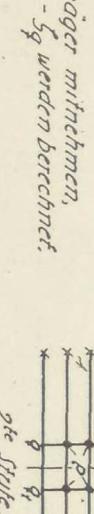
Analytische Methode (S. 62)
Bei viele (unendlich viele) Hauptträger und 1 Querträger begrenzt.
Formel (5), Seite 65, Zahlenbeispiel S. 65.
Methode auch bei mehreren Querträgern (z.B. bei Einflussflächen) in
Verbindung mit der stufenweisen Berechnung verwendbar (S. 65).

Rohre Abschätzung der Verteilung ohne Berechnung

Bestimmung der Momente und Querkräfte (Seite 20) durch die Gleichungen
 $M_0 = M_{a0} - M_{aa} \zeta_a - M_{ab} \zeta_b \dots - M_{ar} \zeta_r \dots$ wo alle M - und Q -Koeffizienten
 $Q_0 = Q_{a0} - Q_{aa} \zeta_a - Q_{ab} \zeta_b \dots - Q_{ar} \zeta_r \dots$ entnommen werden.

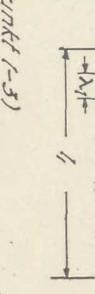
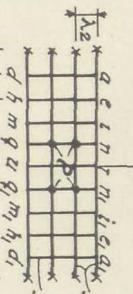
Kontrolle sämtlicher Berechnungen (Seite 20, Zahlenbeisp. S. 42 oben):
Die Reaktionen der Träger = der äußeren Belastung.

1. Stufe


2. Stufe


Wenn Auflösung der Z-Gleichungen undurchsichtbar, dann stufenweise Berechnung anwenden:
1. Erste Stufe: nur belastete Querträger mitnehmen,
Durchbiegungen $\zeta_1 \dots \zeta_4$ werden berechnet.

2. Zweite Stufe: Querträger e-h und $\zeta_5 \dots \zeta_8$ anfügen;
Durchbiegungen $\zeta_5 \dots \zeta_8$ werden berechnet
indem $\zeta_1 \dots \zeta_4$ von y als bekannt eingesetzt
werden.



Endlichste Stufe

3. Dritte und endliche Stufe: noch fehlende Querträger
 $r-u, i-m, i-m, a-d, a-d$ anfügen.
Durchbiegungen $\zeta_1 \dots \zeta_8$ werden berechnet,
indem alle bei 1 und 3 gefundenen ζ 's als
bekannt eingeführt werden.

Allie Koeffiziente den Tabellen zu entnehmen.
Sehr oft ist erste Stufe genügend genau; die übrigen werden dann mittels
der Durchbiegungs-Hilfsweise, Tabellen 15, berechnet (Seite 52-55).
Bei der ersten Stufe ist es vorteilhafter mit einem "idealen Querträger"
zu rechnen, der die weggelassenen Querträger verdeckt soll (Seite 55).

$\beta = \frac{I_1}{I_2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^3 < 0.01$ oder > 100 ist (Seite 18, Punkt 1-3)

Einflussfläche der Durchbiegung (S. 57)
einer Knoten-Diagonalreihe des Rasters infolge einer Kraft 1 im Knoten.
wird durch das Belastungs-Anordnungs-Verfahren $\left\{ \begin{array}{l} \text{oder durch die stufenweise Berechnung (1 Querträger)} \\ \text{oder durch die stufenweise Berechnung (1 Querträger)} \end{array} \right\}$ leicht ermittelt

Unendlich steile Querträger (S. 59)
Fertige Formeln und Tabellen Seite 60-61

Die Kurven fig. 31-38 (im Kap. 10, Seite 67 u.f. berechnet) erlauben den
Verlauf der Durchbiegungskurven abszuschätzen, wenn β (siehe oben)
angennähert bekannt ist; die Endpunkte der Kurven ($\beta = 0$, unendlich
steile Querträger; $\beta = \infty$, keine Querträger vorhanden) sind ohne
weiteres bekannt. Man trägt diese Endpunkte auf, und beim
Einstifzieren der Kurve sieht man sofort, welche Verteilungsmöglichkeiten
vorhanden sind.

